



Российская Академия Наук

А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

12

декабрь

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишнеvский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

**15-я МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
“УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ”
ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА
КОНФЕРЕНЦИИ**

DOI: 10.31857/S0005231023120012, **EDN:** NCCDWS

В этом специальном выпуске представлены избранные доклады 15-й Международной конференции “Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD 2022)”, состоявшейся 26–28 сентября 2022 г.

“Управление развитием крупномасштабных систем” – ежегодное мероприятие, проводимое Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, начиная с 2007 г. Программа конференции рассчитана на оригинальные исследовательские работы в области теории и практики компьютерного управления развитием производственных, транспортных, энергетических, финансовых и социальных процессов. Ежегодно в работе MLSD участвует более 300 исследователей из научно-исследовательских институтов, университетов, государственных и коммерческих структур.

По сложившейся традиции ряд отобранных высокоэффективных полнотекстовых статей размещается в специальных выпусках журнала «Автоматика и телемеханика». В данный выпуск включено восемь лучших научно-исследовательских работ, представленных на конференции.

Большое народнохозяйственное значение имеет исследование проблем управляемого термоядерного синтеза для промышленных целей. Эта проблема рассматривается в работе Митришкина Ю.В., Ивановой С.Л. “Адаптивная система управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в токамаке”. Авторы ставят и решают задачу разработки и моделирования алгоритма адаптивного управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в вертикально вытянутом токамаке. Тематика интересна и важна тем, что система на каждом шаге работы в автоматическом режиме определяет параметры объекта (идентификация) и по ним синтезирует новый регулятор в обратной связи. Эта разработка находится в области робастно-адаптивных систем управления. Параметры регулятора в обратной связи вычисляются посредством заданного расположения полюсов замкнутой системы управления в левой полуплоскости комплексной плоскости. В качестве начальной модели системы управления использовалась робастная система, синтезированная с помощью теории количественной обратной связи. Система была промоделирована на цифровом стенде реального времени (<https://www.ipu.ru/plasma/about>).

Важным направлением исследований в различных областях промышленности (энергетика, машиностроение, авиация и космонавтика, робототехника)

¹ Статьи с 3 по 119 стр. относятся к тематическому выпуску.

являются мониторинг состояния объектов управления и управление демпфированием опасных колебаний. Существенный вклад в решение этой проблемы вносит работа Ядыкина И.Б., Галяева И.А. “Структурные спектральные методы решения непрерывных уравнений Ляпунова”. Авторами разработаны спектральные и сингулярные разложения обратных грамианов управляемости и наблюдаемости, которые позволяют получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.

Одной из актуальных проблем разработки новых эффективных лекарственных препаратов и создания искусственных белков является прогнозирование свойств белковых молекул на основании данных об их аминокислотном составе. В настоящее время для предсказания свойств белков и, в частности, их устойчивости в процессе конформационных изменений, используется метод молекулярно-динамического моделирования, требующий больших вычислительных и временных затрат. Эффективным подходом к уменьшению этих затрат служит оценка влияния положения конкретных аминокислот в первичной структуре белка на его устойчивость. В статье Михальского А.И., Горлищева В.П., Анашкина А.А., Некрасова А.Н. “Вероятностная оценка влияния состава пентапептида на его устойчивость” для решения этой задачи привлекается метод из теории кооперативных игр – вычисление индекса Шепли, позволяющего оценить вероятность позитивного, либо негативного влияния на устойчивость белка присутствия, либо отсутствия конкретной аминокислоты в его первичной структуре. В указанной статье рассмотрена практическая реализация этого метода для изучения устойчивости коротких белков, состоящих из пяти аминокислот – пентапептидов.

Современная теория управления развитием крупномасштабных систем требует разработки моделей и методов анализа достижимости целей. В настоящее время эта проверка недостаточно формализована и выполняется в основном с использованием интуиции и опыта лиц, принимающих решения. Подход к решению этой проблемы предложен в работе Цвиркуна А.Д., Резникова А.Ф., Кушникова В.А., Дранко О.И., Богомолова А.С., Селютина А.Д. “Модели и методы проверки достижимости целей и выполнимости планов в крупномасштабных системах на примере целей и планов ликвидации последствий наводнения”. Авторы представляют алгоритм анализа достижимости целей и выполнимости планов мероприятий, осуществляемых при управлении крупномасштабными системами и в качестве примера рассматривают цели и планы ликвидации последствий наводнения. Проверка выполняется в четыре этапа, на первом и втором этапах для проверки используются алгебра отношений и продукционные модели, на третьем этапе – модели марковских процессов и уравнения Колмогорова–Чепмена, на четвертом – системно-динамический подход и уравнения регрессии. Сформирован алгоритм анализа достижимости целей и планов, реализуемых в процессе развития этих систем. Приведен пример, иллюстрирующий основные этапы проверки достижимости комплекса целей и выполнимости планов мероприятий.

Работа Хоботова Е.Н., Аверьяновой Е.Е. “Задачи и методы управления запасами в иерархической системе складов” развивает актуальную, но недостаточно разработанную для цифровой экономики теорию управления запасами. Предметную область исследований составляют системы снабжения регионов продукцией, лекарствами, запасными частями, особенно автомобильными и т.д. На формальном уровне это задачи управления многономенклатурными запасами продукции от различных поставщиков в иерархических системах складов с ограниченной вместимостью. Предлагаемые модели и методы позволяют определять время и объемы пополнения многоуровневой складской системы при постоянном спросе.

Статья Хоботова Е.Н. “Задачи и методы построения расписаний работ для предприятий со ступенчатой сборкой выпускаемых изделий” касается актуальной темы – цифровому бережливому управлению производством на станкостроительных, судостроительных, многих авиастроительных и машиностроительных предприятиях. Предлагаемые методы базируются на использовании гибких расписаний и графиков работы для повышения эффективности такого важного класса предприятий.

В статье Буркова В.Н., Бурковой И.В., Кашенкова А.Р. “Задача оптимизации систем группового стимулирования” рассматривается задача построения системы группового стимулирования, точнее – системы компенсации затрат на уменьшение продолжительности работ проекта. В основном в теории стимулирования рассматриваются два типа систем – индивидуальные (для каждой работы выбирается своя система стимулирования) и унифицированные (для всех работ выбирается одна система). Система группового стимулирования занимает промежуточное положение, все работы разбиваются на группы и для каждой группы выбирается своя система стимулирования, задача заключается в таком разбиении на группы, при котором суммарный фонд стимулирования минимален. Эта система в значительной степени компенсирует недостатки индивидуальных и унифицированных систем. В статье предложены алгоритмы решения задачи, в основе которых – определение кратчайших путей в графе.

В статье Щепкина А.В. “Сравнение процедур распределения средств в механизме смешанного финансирования” анализируется ситуация, при которой исполнители проекта обращаются к Принциалу (организации, заинтересованной в результатах проекта) за получением финансирования. Принципал распределяет финансы между исполнителями проекта только тогда, когда сами исполнители инвестируют свои средства в проект. При распределении фонда финансирования Принципал учитывает заявки на финансирование проектов и количество средств, которые исполнители выделяют на реализацию своих проектов. Данная работа определяет возможности улучшения бизнес-результатов.

Председатель Программного комитета
конференции “Управление развитием крупномасштабных систем”
академик РАН С.Н. Васильев

© 2023 г. Ю.В. МИТРИШКИН, д-р техн. наук (yvm@mail.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
С.Л. ИВАНОВА (ivanovasvetlanamsu@gmail.com),
К.С. МУХТАРОВ (kirill.muhtarov@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ С АДАПТАЦИЕЙ НЕУСТОЙЧИВЫМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ¹

Решается задача разработки и моделирования алгоритма адаптивного управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в вертикально вытянутом токамаке, где на каждой итерации для изменяющейся модели плазмы, идентифицированной методом наименьших квадратов (МНК), автоматически синтезировался новый ПИД-регулятор. Параметры регулятора в обратной связи вычислялись посредством заданного расположения полюсов замкнутой системы управления в левой полуплоскости комплексной плоскости. В качестве начальной модели системы управления использовалась робастная система, синтезированная с помощью теории количественной обратной связи (Quantitative Feedback Theory – QFT). Система была промоделирована на цифровом стенде реального времени (<https://www.ipu.ru/plasma/about>).

Ключевые слова: токамак, плазма, вертикальная неустойчивость плазмы, метод QFT, идентификация в темпе наблюдения, адаптация, автоматический синтез, цифровой стенд реального времени.

DOI: 10.31857/S0005231023120024, **EDN:** NEVITH

1. Введение

В вертикально вытянутом токамаке плазма вертикально неустойчива, поэтому необходимы синтез и применение системы управления вертикальным положением плазмы с обратной связью, что является важной задачей в области управления плазмой в токамаках.

Физика вытягивания по вертикали плазмы в токамаке такова, что этот процесс приводит к значительному увеличению давления плазмы при том же тороидальном магнитном поле. Но при этом вертикальная вытянутость плазмы вызывает ее вертикальную неустойчивость.

Это объясняется тем, что создается радиальное магнитное поле B_R , направленное к центральной оси в верхней полуплоскости вертикального сечения токамака и направленное наружу в нижней полуплоскости, что и приводит к вытягиванию плазмы в вертикальном направлении (рис. 1).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-79-20180).

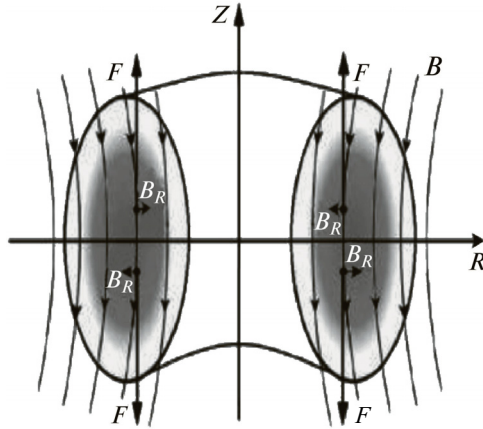


Рис. 1. Иллюстрация возникновения неустойчивости вертикально вытянутой плазмы в токамаке.

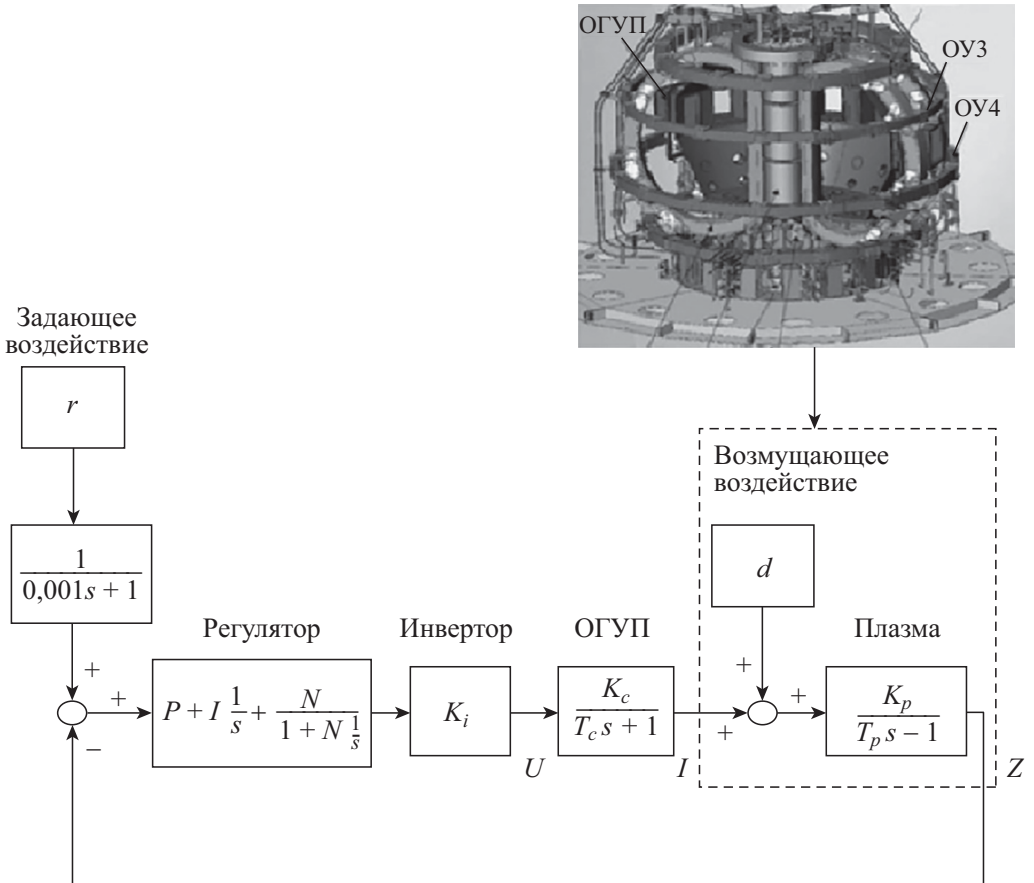


Рис. 2. Структурная схема системы управления величиной Z без автоматической настройки (ПИД-регулятор с постоянными параметрами).

В результате силовые линии суммарного магнитного поля B выпуклы к центральной оси Z токамака. Сила Ампера

$$(1) \quad F = [I \times B]$$

направлена вверх в верхней полуплоскости и направлена вниз в нижней полуплоскости. Пока распределение тока и магнитное поле полностью симметричны относительно центральной оси, суммарная сила Ампера равна нулю. Если возникает возмущение, например если плазма смещается вверх, над центральной осью возникнет перераспределение токов и полей и суммарная сила будет направлена вверх. Этот дисбаланс заставляет плазму двигаться вверх, так как равнодействующая сила будет направлена вверх [1].

Поставленная задача управления вертикальным положением плазмы решается на примере токамака Т-15МД [2]. Для подавления вертикальной неустойчивости плазмы конструкция токамака Т-15МД предусматривает обмотку горизонтального управляющего поля (ОГУП) (рис. 2) [1]. ОГУП расположена между вакуумной камерой и обмоткой тороидального поля. ОГУП перемещена в проекте токамак Т-15МД из местоположения между РF-катушками в местоположение, показанное на рис. 2. Это вызвано тем, что начальное расположение ОГУП создавало внутреннюю неустойчивость системы управления вертикальным положением плазмы с обратной связью [3, 4]. ОГУП в системе управления с обратной связью в случае возмущения плазменного шнура создает такое распределение магнитных полей, при котором равнодействующая сил Ампера, действующая на плазму, обращается в ноль (компенсируется) и вертикальное положение плазмы стабилизируется.

2. Модель объекта управления

В токамаке Т-15МД имеется большой радиус плазмы $R_0 = 1,48$ м, малый радиус $a = 0,67$ м, вытянутость $k = 1,7-1,9$, треугольность $\delta = 0,3-0,4$, ток плазмы $I_p = 2$ МА, длительность импульса 1 с, а тороидальное магнитное поле на плазменной оси до $B = 2$ Т [2]. При разработке системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке Т-15МД использовалась модель плазмы (2) (история обоснования модели приведена в [5]) и линейная модель ОГУП (3) в пространстве состояний:

$$(2) \quad T_p \frac{dZ}{dt} - Z = K_p(I + d),$$

$$(3) \quad L \frac{dI}{dt} + RI = U.$$

С целью упрощения модели объекта в последующем решении задачи адаптивного управления в качестве исполнительного устройства была принята модель инвертора тока [6], которая в первом приближении моделируется постоянным коэффициентом усиления.

Тогда передаточная функция модели объекта управления состоит из последовательного соединения передаточных функций модели инвертора тока K_i , модели ОГУП $\frac{K_c}{T_{cs}+1}$, модели плазмы $\frac{K_p}{T_p s-1}$ с возмущающим воздействием $d < 1$ кА (рис. 2) [1]. При разработке робастного регулятора все коэффициенты в данной модели имеют неопределенность. Здесь в (2), (3) U , I – напряжение и ток ОГУП, K_p , T_p , K_c , T_c – коэффициенты усиления и постоянные времени модели плазмы и модели многофазного тиристорного выпрямителя соответственно, Z – смещение центра плазмы по вертикали.

Произведен расчет индуктивности L и активного сопротивления R ОГУП: $L = 0,0042$ Гн, $R = 0,09$ Ом по данным АО «НИИЭФА им. Д.В. Ефремова» [1]. Отсюда коэффициент усиления и постоянная времени для модели ОГУП равны соответственно $K_c = \frac{1}{R} = 11,11$ Ом⁻¹ и $T_c = \frac{L}{R} = 46,7$ мс. Нелинейный плазмозфизический код DINA, представленный в [7] сотрудниками АО «ГНЦ РФ ТРИНИТИ» (г. Троицк), идентифицирован в [8] с оценками постоянной времени $T_p = 20,8$ мс и коэффициента усиления $K_p = 1,78$ см/кА линеаризованной модели DINA-L в выбранной точке пространства параметров токамака Т-15МД.

Для исходной системы управления с алгоритмом адаптации использовалась робастная система управления, синтезированная посредством теории количественной обратной связи (Quantitative Feedback Theory – QFT) [9].

3. Синтез робастной системы управления величиной Z методом QFT и тестирование на цифровом стенде реального времени

Линии постоянного модуля и постоянной фазы замкнутой системы управления в координатах амплитуда–фаза строятся на диаграмме Николса посредством теории QFT (рис. 3,а). Эти характеристики называются QFT-границами и вычисляются для разных параметров системы, поэтому содержат всю информацию неопределенной модели (рис. 3,а).

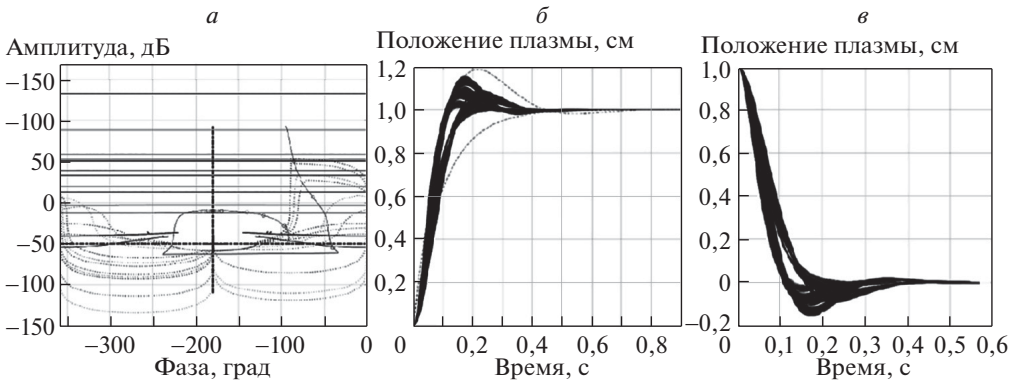


Рис. 3. а – АФЧХ разомкнутой системы и границы на диаграмме Николса, б – переходные функции системы с обратной связью для разных параметров звеньев модели объекта при подаче задающего воздействия, в – переходные процессы системы при подаче внешнего воздействия.

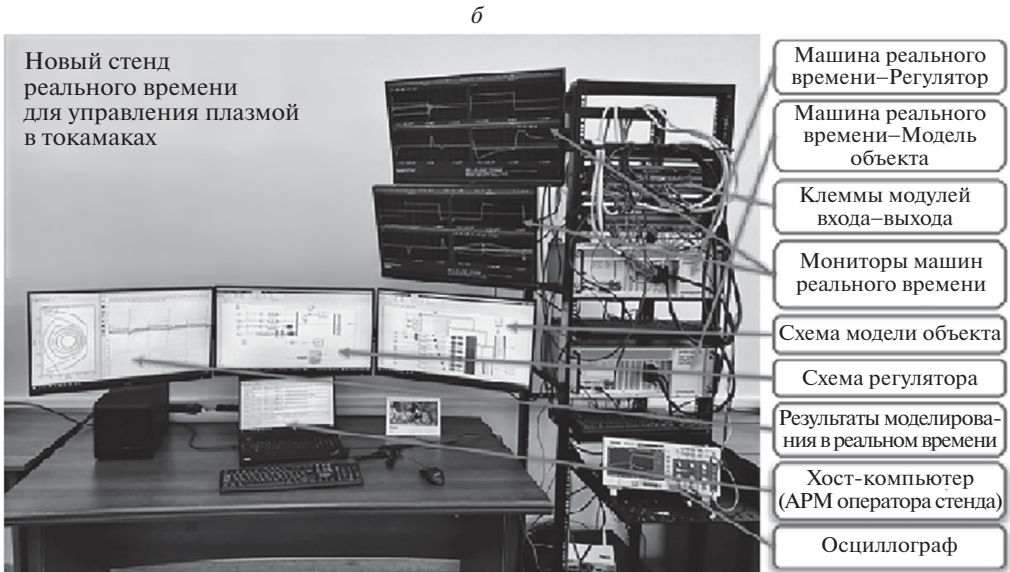
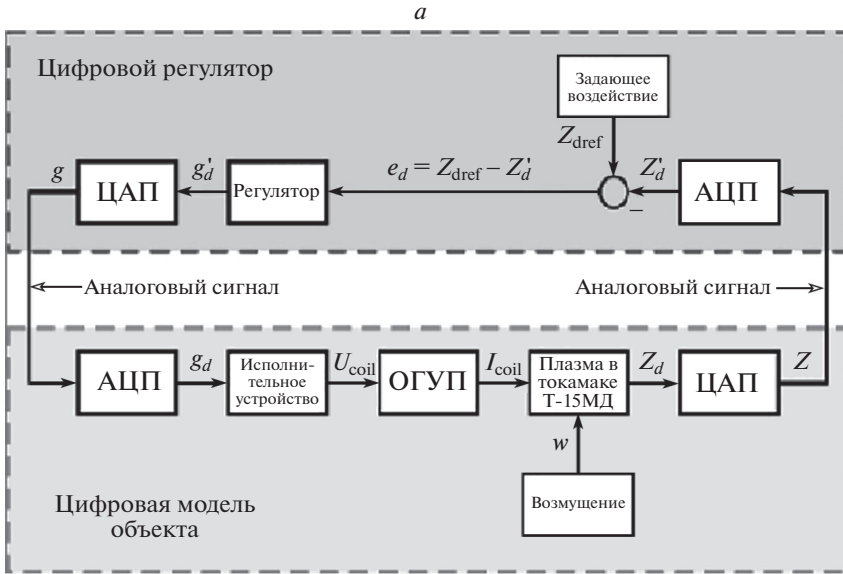


Рис. 4. *a* — Структурная схема системы управления на цифровом стенде реального времени в дискретном виде с АЦП и ЦАП; *б* — цифровой стенд реального времени для моделирования систем управления плазмой в токамаках.

С использованием заданных границ и диаграммы Николса (рис. 3, *a*) синтезирован робастный ПИД-регулятор:

$$C(s) = P + \frac{I}{s} + D \frac{N}{1 + \frac{N}{s}}$$

с параметрами $P = 39$, $I = 563$, $D = 1,38$, $N = 12\,291$. Система управления с данным регулятором не имеет статической ошибки, время установления

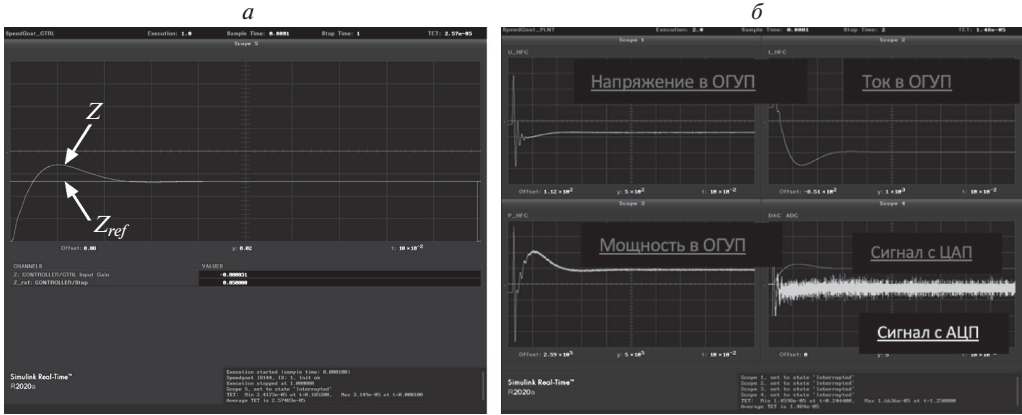


Рис. 5. *а* — Переходная функция системы управления от ступенчатого воздействия 5 см в реальном времени; *б* — сигналы напряжения, тока и мощности в ОГУП и сигналы с АЦП и ЦАП от ступенчатого воздействия 5 см в реальном времени.

переходного процесса около 300 мс (рис. 3,б), подавляет внешнее возмущение также за 300 мс (рис. 3,в).

Полученная система управления переведена в дискретное время методом «zoh» (zero order hold – фиксация нулевого порядка) с периодом дискретизации 100 мкс и протестирована на цифровом стенде реального времени Speedgoat Performance под операционной системой SimulinkRT [10–12]. Компьютеры реального времени, соединенные в обратную связь «модель объекта – регулятор», обеспечивают максимально быстрый переход от моделирования систем управления в компьютерной среде MATLAB/Simulink к тестированию в реальном времени на цифровом стенде (рис. 4,а). Цифровой регулятор и цифровая модель объекта в стенде передают друг другу аналоговые сигналы с помощью ЦАП и АЦП (рис. 4,б).

Быстродействие систем реального времени определяется временем выполнения задачи (TET – task execution time). Оно складывается из времени, затрачиваемого на расчет моделей компонентов токамака и алгоритмов управления, и времени на опрос модулей входа-выхода. Для разработанной системы управления с робастным регулятором TET получилось около 14,6 мкс. Для номинальной работы систем реального времени TET должно быть не больше временного шага в численном алгоритме решения разностных уравнений (для данного случая – 100 мкс). График изменения положения плазмы и графики изменения напряжения, тока и мощности в ОГУП приведены на рис. 5, а,б.

4. Адаптивное управление плазмой в течение одного разряда

Задача заключается в идентификации изменяющейся модели плазмы и последующей настройке регулятора в течение одного разряда, составляющего около 1 с.

мом адаптивного управления вертикальным положением плазмы в течение разряда.

Задача идентификации параметров модели плазмы была решена путем применения линейной регрессии и метода наименьших квадратов [13]. По тридцати последовательным измерениям в дискретных точках с шагом квантования входного и выходного сигналов $Z(k)$, $I(k)$ вычисляются оценка \widehat{T} параметра T и оценка \widehat{K} параметра K , для получения которых минимизируется следующий функционал:

$$(5) \quad J_k = \sum_{k=1}^{30} \left(T \frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} - Z(k) - KI(k) \right)^2.$$

Находя частные производные по оцениваемым параметрам функционала (5), получим формулы для их оценки:

$$J_k = \widehat{K}^2 I(k)^2 + 2\widehat{K}I(k)Z(k) - 2\widehat{K}I(k)\widehat{T} \left(\frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} \right) + Z(k)^2 - 2Z(k)\widehat{T} \left(\frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} \right) + \widehat{T}^2 \left(\frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} \right)^2 \rightarrow \min,$$

$$(6) \quad \frac{dJ_k}{d\widehat{K}} = 2\widehat{K}I(k)^2 + 2I(k)Z(k) - 2I(k)\widehat{T} \frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{dJ_k}{d\widehat{T}} = 2\widehat{T} \left(\frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} \right)^2 - 2Z(k) \frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} - 2I(k)\widehat{T} \frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} = 0.$$

Преобразуем уравнения (6), (7):

$$(8) \quad \widehat{T} \frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} - Z(k) - \widehat{K}I(k) \frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} = 0,$$

$$(9) \quad KI(k) + I(k)Z(k) - I(k)\widehat{T} \frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} = 0.$$

Выразим оценки для коэффициентов K и T из (8) и (9):

$$\widehat{T} = \frac{Z(k)}{\frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t}}, \quad \widehat{K} = \frac{\widehat{T} \frac{Z(k+1) - Z(k)}{\Delta t} - Z(k)}{I(k)}.$$

После измерения сигналов I , Z и оценки параметров T и K изменяющейся модели плазмы необходимо синтезировать регулятор. Для решения этой задачи выбран ПИД-регулятор [14], который автоматически настраивается методом заданного расположения корней характеристического многочлена в левой полуплоскости комплексной плоскости на каждой итерации настройки регулятора (каждые 0,023 с). При этом на первой итерации моделирования системы управления использовался ПИД-регулятор, предварительно синтезированный методом QFT.

Преобразуем передаточную функцию ПИД-регулятора с фильтром (10)

$$(10) \quad C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{\tau_D s}{\tau_f s + 1} \right)$$

к общему знаменателю и введем обозначения:

$$C(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s(s + l_0)},$$

$$\text{где } c_2 = \frac{K_c(\tau_I \tau_D + \tau_I \tau_f)}{\tau_I \tau_f}, \quad c_1 = \frac{K_c(\tau_I + \tau_f)}{\tau_I \tau_f}, \quad c_0 = \frac{K_c}{\tau_I \tau_f}, \quad l_0 = \frac{1}{\tau_f}.$$

Для ПИД-регулятора неустойчивая модель объекта управления будет иметь вид

$$G(s) = \frac{K_p K_c K_i}{(T_p s - 1)(T_c s + 1)} = \frac{K}{T_p T_c s^2 + (T_p - T_c) s - 1}.$$

Передаточная функция замкнутой системы управления:

$$\frac{K(c_2 s^2 + c_1 s + c_0)}{T_p T_c s^4 + (T_p - T_c) s^3 + (K c_2 + l_0 T_p T_c - 1) s^2 + (l_0 T_p - l_0 T_c + K C_1) s + c_0 K - l_0}.$$

Выпишем характеристическое уравнение и приравняем его к полиному с заданными коэффициентами:

$$\begin{aligned} s^4 + \frac{T_p - T_c + l_0 T_p T_c}{T_p T_c} s^3 + \left(\frac{l_0 T_p - l_0 T_c + K c_1 - 1}{T_p T_c} \right) s^2 + \frac{c_0 K - l_0}{T_p T_c} s + \frac{c_0 K}{T_p T_c} &= \\ &= s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \end{aligned}$$

Путем сравнения коэффициентов обеих частей многочленов получаются четыре линейных уравнения:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_p} + l_0 = a_3, \\ K c_2 - 1 + (T_p - T_c) l_0 = a_2, \\ \frac{K}{T_p T_c} c_1 - \frac{l_0}{T_p T_c} = a_1, \\ \frac{K}{T_p T_c} c_0 = a_0. \end{cases}$$

Параметры ПИД-регулятора находятся путем решения системы линейных уравнений (11) в виде

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_p - T_c & K & 0 & 0 \\ \frac{-1}{T_p T_c} & 0 & \frac{K}{T_p T_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K}{T_p T_c} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_3 - \frac{T_p - T_c}{T_p T_c} \\ a_2 + 1 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}.$$

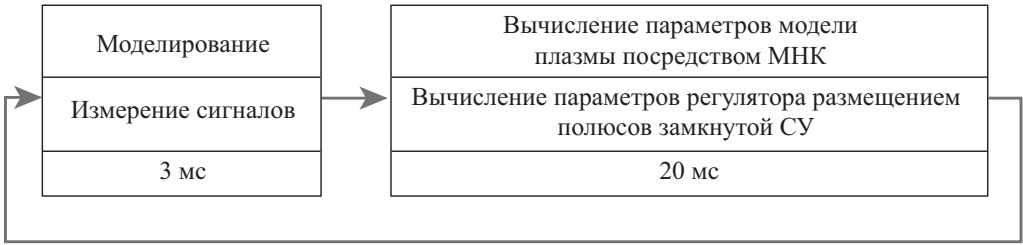


Рис. 7. Алгоритм адаптивного управления неустойчивым вертикальным положением плазмы.

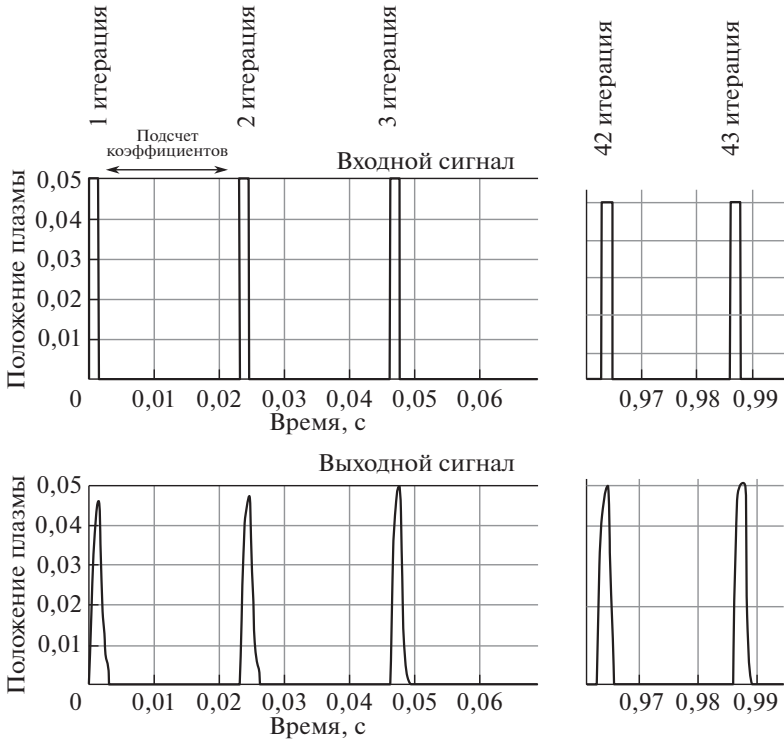


Рис. 8. Результаты моделирования системы управления неустойчивым вертикальным положением плазмы, осуществляющей 43 итерации настройки регулятора под изменяющуюся модель плазмы.

На рис. 7 проиллюстрирован алгоритм адаптивного управления неустойчивым вертикальным положением плазмы, состоящий из двух этапов: измерения и запоминания входного и выходного сигналов модели плазмы, т.е. I и Z в течение 3 мс с шагом дискретизации 100 мкс, и в течение 0,02 с вычисления параметров модели плазмы и на их основе параметров ПИД-регулятора. Таким образом, в дискретной системе имеются два шага: общий шаг работы системы 100 мкс и шаг идентификации параметров модели объекта и настройки параметров регулятора, равный 0,023 с. Следовательно, в течение

одного разряда, составляющем около 1 с, можно осуществить 43 итерации настройки регулятора (рис. 7).

Результаты работы алгоритма адаптивного управления в замкнутой системе представлены на рис. 8.

5. Заключение

При линейном изменении коэффициентов модели плазмы $T_p \in [0,0208; 0,093]$ с, $K_p \in [1,78; 7,61]$ см/кА на каждой итерации произведены их оценка посредством МНК и настройка ПИД-регулятора методом расположения корней характеристического полинома замкнутой системы в левой полуплоскости комплексной плоскости. При этом выбирались заданные коэффициенты характеристического уравнения $a_0 = -0,0004$, $a_1 = 6e - 08$, $a_2 = -4e - 12$, $a_3 = 1e - 16$ для настройки регулятора. Алгоритм адаптации в течение одной секунды совершает 43 настройки регулятора, что достаточно для реального объекта управления – токамака Т15-МД.

В настоящее время робастные [15], адаптивные [16] и робастно-адаптивные [17] системы управления продолжают развиваться [18]. Наибольшего внимания заслуживают робастно-адаптивные системы управления с применением нейронных сетей [19], что также может применяться для управления плазмой в токамаках в ближайшей перспективе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mitrishkin Y.V., Pavlova E.A., Kuznetsov E.A., Gaydamaka K.I.* Continuous, saturation, and discontinuous tokamak plasma vertical position control systems // Fusion Engineering and Design, Elsevier Publ. 2016. V. 108. P. 35–47.
2. *Хвостенко П.П., Анашкин И.О., Бондарчук Е.Н., Инютин Н.В., Крылов В.А., Левин И.В., Минеев А.Б., Соколов М.М.* Экспериментальная термоядерная установка Токамак Т-15МД // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2019. Т. 42. № 1. С. 15–38.
3. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Зенков С.М.* Стабилизация неустойчивого вертикального положения плазмы в токамаке Т-15. I // АИТ. 2014. № 2. С. 129–147. *Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M., Zenkov S.M.* Stabilization of Unstable Vertical Position of Plasma in T-15 Tokamak. I // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 2. P. 281–293.
4. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Зенков С.М.* Стабилизация неустойчивого вертикального положения плазмы в токамаке Т-15. II // АИТ. 2014. № 9. С. 31–44. *Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M., Zenkov S.M.* Stabilization of Unstable Vertical Position of Plasma in T-15 Tokamak. II // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 9. P. 1565–1576.
5. *Митришкин Ю.В., Коньков А.Е., Корнев П.С.* Сравнительное исследование систем управления реальным временем вертикальным положением плазмы в токамаке с разными источниками питания обмотки горизонтального управляющего поля // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2022. Т. 45. № 3. С. 34–49.

6. *Kuznetsov E.A., Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M.* Current Inverter as Auto-Oscillation Actuator in Applications for Plasma Position Control Systems in the Globus-M/M2 and T-11M Tokamaks // *Fusion Engineering and Design*. 2019. V. 143. No. 3. P. 247–258.
7. *Khayrutdinov R.R., Lukash V.E.* Studies of plasma equilibrium and transport in a tokamak fusion device with the inverse-variable technique // *J. Comput. Phys.* 1993. V. 109. No. 2. P. 193–201.
8. *Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M., Zenkov S.M.* Vertical position, shape, and current control in T-15 tokamak // *Proc. the IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control*. Saint Petersburg, 2013. P. 1820–1825.
9. *Garcia-Sanz M.* Robust Control Engineering. Practical QFT solutions. USA: CRC Press, 2017.
10. *Mitrishkin Y.V.* Plasma magnetic control systems in D-shaped tokamaks and imitation digital computer platform in real time for controlling plasma current and shape // *Advances in Systems Science and Applications*. 2022. V. 22. No. 1. P. 1–14.
11. *Митришкин Ю.В., Коньков А.Е., Корнев П.С.* Цифровой моделирующий стенд реального времени для управления плазмой в токамаках // *Материалы XVI Международной конференции. Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)*. Москва, 2022. С. 286–289.
12. *Митришкин Ю.В.* Способ магнитного управления плазмой в токамаке в реальном времени и устройство для его осуществления // *Патент на Изобретение № 2773508*. Приоритет изобретения 29.09.2021 г. Дата государственной регистрации в Государственном реестре изобретений РФ 06.06.2022 г. Федеральный институт промышленной собственности (ФИПС).
13. *Льюнг Л.* Идентификация систем / *Теория пользователя: Пер. с англ.* Под ред. Я.З. Цыпкина. М.: Наука, 1991.
14. *Wang L.* PID Control System Design and Automatic Tuning using MATLAB/Simulink. UK: Wiley, 2020.
15. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control. Analysis and Design. UK: Wiley, 2005.
16. *Тюкин И.Ю., Терехов В.А.* Адаптация в нелинейных динамических системах. М.: Издательство ЛКИ, 2008.
17. *Adaptive Robust Control Systems / By Anh Tuan Le (Editor)*. IntechOpen, March 2018. 362 p. <https://doi.org/10.5772/intechopen.68813>
18. *Abdalla T.* Adaptive Data-Driven Control for Linear Time Varying Systems // *Machines*. 2021. V. 9. No. 8. P. 167.
19. *Yecheil O., Guterman H.* A survey of adaptive control // *International Robotics & Automation Journal*. 2017; 3(2): 290–292. <https://doi.org/10.15406/iratj.2017.03.00053>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 31.05.2023

После доработки 19.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

© 2023 г. **И.Б. ЯДЫКИН**, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru),
И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТРУКТУРНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА¹

Для линейных многосвязных непрерывных стационарных устойчивых систем с простым спектром, в том числе в канонической диагональной форме, а также приведенных к каноническим формам управляемости и наблюдаемости, разработан метод и получены аналитические формулы спектральных разложений грамианов в форме различных матриц Сяо. Разработан метод и алгоритм вычисления обобщенных матриц Сяо в виде произведения Адамара для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами. Это позволяет вычислять элементы соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы. Новые результаты получены в виде спектральных и сингулярных разложений обратных грамианов управляемости и наблюдаемости. Это позволяет получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.

Ключевые слова: спектральные разложения грамианов, сингулярные числа, обратная матрица грамиана, устойчивость с учетом взаимодействия мод, матрицы Сяо, уравнение Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231023120036, **EDN:** NFFFED

1. Введение

Мониторинг состояния объектов управления и управление демпфированием опасных колебаний являются важными направлениями исследований в различных областях промышленности (энергетика, машиностроение, авиация и космонавтика, робототехника). Новые технологии моделирования требуют развития инструментов аппроксимации математических моделей сложных систем различной природы [1–3]. Важную роль играют методы вычисления матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра и исследование структурных свойств решений этих уравнений [4–11]. Фундаментальными свойствами линейных динамических систем, связанных с решениями этих уравнений, являются управляемость, наблюдаемость и устойчивость. Важные результаты

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00673).

были получены в области вычисления грамианов для систем, модели которых представлены в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В [12] были впервые предложены методы вычисления грамианов, основанные на использовании матриц периодической структуры, для линейных систем, заданных уравнениями в формах управляемости и наблюдаемости. В [13, 14] новый подход был развит в направлении использования свойств импульсной переходной функции и матриц грамианов в виде клетчатой структуры из нулей и единиц (the zero-plaid structure of the controllability gramian). В [15] подход был развит для вычисления спектральных разложений более общего класса линейных стационарных (ЛТИ) систем со многими входами и многими выходами (ММО). В [16] с использованием данного подхода разработан метод оптимального выбора мест размещения датчиков и исполнительных устройств на графе распределенной системы управления. В работе показано, что для диагонализированной системы грамиан управляемости может быть представлен в виде произведения Адамара двух положительно полуопределенных матриц. В [17] решена задача оптимизации пропускной способности городской транспортной сети на основе минимизации следа матрицы грамиана управляемости с учетом ограничений. Различные задачи, связанные с применением грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов для вычисления системных инвариантов и энергетических индексов устойчивости, можно найти в [18, 19].

Целью настоящей работы являются развитие структурных методов решения матричных уравнений Ляпунова и получение спектральных и сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости, основанных на приведении уравнений состояния линейной стационарной системы к следующим каноническим формам: диагональной, управляемости и наблюдаемости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую непрерывную ММО ЛТИ динамическую систему вида

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$. Будем рассматривать вещественные матрицы соответствующих размеров A, B, C . Примем, что система (2.1) полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы A различны. В этом случае реализация (2.1) минимальна и существует единственная передаточная функция $W(s)$ в виде

$$W(s) = \sum_{i=1}^n M_i s^i N^{-1}(s),$$

где $N(s)$ – характеристический полином матрицы A , M_i – матрица вида

$$M_i = \sum_{j=0}^{n-1} A_j B.$$

Выше через A_i обозначена «i»-я матрица Фаддеева в разложении резольвенты матрицы A в ряд Фаддеева–Левереье [6, 7]. В соответствии с [20] запишем общую формулу вычисления грамиана управляемости по парному спектру системы (2.1)

$$(2.2) \quad P^c = - \sum_{j=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{1}{s_j + s_\rho} \text{Res} \left[(Is - A)^{-1}, s_j \right] B B^* \text{Res} \left[(Is - A^*)^{-1}, s_\rho \right].$$

Рассмотрим непрерывную динамическую MISO (с многими входами и одним выходом) LTI систему вида

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b_\gamma u_\gamma(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) &= cx(t), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$, $u_\gamma(t) \in \mathbb{R}^m$, $\gamma = 1, \dots, m$, b_γ – столбец матрицы B .

Рассмотрим преобразование уравнения (2.1) системы общего вида к уравнениям состояний в канонических формах: диагональной, управляемости и наблюдаемости.

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то линейную систему можно привести к диагональному виду с помощью невырожденного преобразования координат

$$\begin{aligned} x_d &= Tx, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ A_d &= TAT^{-1}, \quad B_d = TB, \quad C_d = CT^{-1}, \quad Q_d = TBB^T T^T, \end{aligned}$$

или

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix} = T\Lambda T^{-1},$$

где матрица T составлена из правых собственных векторов u_i , а матрица T^{-1} – из левых собственных векторов ν_i^* , соответствующих собственному числу s_i . Грамиан диагонализированной линейной части является решением уравнения Ляпунова, которое определится из формулы [15]

$$P_d^c = - \sum_{j=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{1}{s_j + s_\rho} \text{Res} \left[(Is - A_d)^{-1}, s_j \right] B_d B_d^* \text{Res} \left[(Is - A_d)^{-1}, s_\rho \right].$$

Грамиан управляемости P_d^c связан с грамианом P^c соотношением вида

$$P^c = TP_d^c T^T.$$

Из (2.2) следует следующее сепарабельное спектральное разложение грамиана управляемости системы, преобразованной в диагональную каноническую форму [21]

$$P_d^c = \sum_{j=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-b_{j\rho}}{s_j + s_\rho} \mathbb{1}_{j\rho}, \quad b_{j\rho} = [B_d B_d^*]_{j\rho},$$

где введено обозначение

$$\mathbb{1}_{j\rho} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{j\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим далее канал “ γ ” MISO LTI системы в канонической форме управляемости [1, 21]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} x(t) &= \sum_{\gamma=1}^m R_{c_\gamma}^F x_{c_\gamma}(t). \\ \dot{x}_c(t) &= A_c^F x_{c_\gamma}(t) + b_\gamma^F u_\gamma(t), \quad x_c(0) = 0, \\ y_c^F(t) &= c_\gamma^F x_c(t), \quad \gamma = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_\gamma^F = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T,$$

$$a = [-a_0 \ -a_1 \ \dots \ -a_{n-2} \ -a_{n-1}], \quad c_\gamma^F = [\xi_0 \ \xi_1 \ \dots \ \xi_{n-2} \ \xi_{n-1}].$$

Если использовать невырожденное преобразование переменных с матрицей R_c^F , можно рассматривать MISO LTI систему в канонической форме управляемости. Вектор B_γ для MISO системы имеет вид

$$B_\gamma = [0 \ \dots \ b_\gamma \ \dots \ 0]^T.$$

Справедливы следующие соотношения [14]:

$$\begin{aligned} (R_{c_\gamma}^F)^{-1} A R_{c_\gamma}^F &= A_c^F, \quad (R_{c_\gamma}^F)^{-1} B_\gamma = b_\gamma^F, \quad C R_{c_\gamma}^F = c_\gamma^F, \\ P^c &= \sum_{\gamma=1}^m R_\gamma^{cF} P_\gamma^{cF} (R_\gamma^{cF})^T. \end{aligned}$$

В отношении систем (2.1) и (2.3) будем предполагать выполненными различные структурные условия устойчивости, управляемости, наблюдаемости и свойств спектра матрицы динамики. В [15] было получено следующее спектральное разложение грамиана управляемости:

$$P_\gamma^{cF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbb{1}_{j+1, \eta+1}.$$

Рассмотрим далее канал “ γ ” SIMO (с одним входом и многими выходами) ЛТИ линейной системы в канонической форме наблюдаемости [15]. В этом случае справедливы формулы

$$x_o(t) = \sum_{\gamma=1}^m R_{o\gamma}^F x_{o\gamma}(t),$$

$$\dot{x}_{o\gamma}(t) = A_c^F x_{o\gamma}(t) + b_{o\gamma}^F u_{\gamma}(t), \quad x_o(0) = 0,$$

$$y_{o\gamma}^F(t) = c_{o\gamma}^F x_{o\gamma}(t), \quad \gamma = 0, 1 \dots m.$$

$$A_o^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{-1} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_{o\gamma}^F = [\xi_0 \quad \xi_1 \quad \dots \quad \xi_{n-2} \quad \xi_{n-1}]^T,$$

$$c_{o\gamma}^F = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1].$$

В соответствии с принципом дуальности получим выражения [14]

$$P_{o\gamma}^F = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbb{1}_{j+1\eta+1},$$

$$P^o = \sum_{\gamma=1}^m R_{o\gamma}^F P_{\gamma}^{oF} (R_{o\gamma}^F)^T.$$

Определение 1. Назовем матрицей Сяо (Zero plaid structure) матрицу вида [12, 13]

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, & \text{если } j + \eta = 2k + 1, \quad k = 1, \dots, n; \\ y_n = \frac{1}{2Y_{n,1}}, \\ y_{n-l} = \frac{-\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i Y_{n-l, i+1} y_{n-l+i}}{Y_{n-l,1}}, \\ \text{если } j + \eta = 2k, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

где $Y_{i,j}$ – элемент таблицы Рауса для системы, находящийся на пересечении i строки и j столбца.

3. Основные результаты

3.1. Тождества для одного класса устойчивых полиномов, корни которых различны над полем комплексных чисел

Рассмотрим спектральное разложение грамиана управляемости по простому и парному спектру (2.2).

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^n \sum_{\eta=0}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \equiv \\ & \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}, \quad s_k + s_\rho \neq 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \omega(n, s_k, j, \eta) &= \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}, \\ \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений тождество (3.1) примет вид

$$\omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \quad \text{для } \forall s_k, s_\rho \in \mathbb{C}^-, \quad s_k + s_\rho \neq 0.$$

Доказательство следует из разложения дробно-рациональной функции $\frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(-s_k)}$ по корням характеристического уравнения $N(-s_k) = 0$.

Лемма 1. *Рассмотрим полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$ над полем комплексных чисел следующего вида:*

$$\gamma(n, s_k, -s_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} s_k^i (-s_k)^\mu, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

где s_k – корни характеристического уравнения системы (2.1), а $-s_k$ – корни характеристического уравнения ее антиустойчивой сопряженной системы. Предположим, что все собственные числа систем простые, не равные нулю комплексные числа. Тогда полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$ содержит только все четные степени чисел s_k и не содержит их нечетных степеней.

$$\begin{aligned} \gamma(n, s_k, -s_k) &= \gamma(n, s_k^0, s_k^2, \dots, s_k^{2m}), \quad n = 2m, \\ \gamma(n, s_k, -s_k) &= \gamma(n, s_k^1, s_k^3, \dots, s_k^{2m-1}) \equiv 0, \quad n = 2m - 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Легко убедиться, что результат леммы справедлив для $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \gamma(1, s_k, -s_k) &= 1, \\ \gamma(2, s_k, -s_k) &= 1 - s_k^2, \\ \gamma(3, s_k, -s_k) &= s_k^4 - s_k^2 + 1. \end{aligned}$$

Применим метод математической индукции. Предположим, что результат леммы справедлив для полинома $\gamma(n, s_k, -s_k)$:

$$\gamma(n, s_k, -s_k) = \begin{cases} \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) & \text{для четного } n = 2m, \\ \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) & \text{для нечетного } n = 2m-1. \end{cases}$$

Покажем, что он справедлив и для полинома $\gamma(n+1, s_k, -s_k)$. При увеличении n на единицу полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$ принимает вид

$$\gamma(n+1, s_k, -s_k) = \begin{cases} \gamma(2m+1, s_k, -s_k) & \text{для четного } n = 2m, \\ \gamma(2m, s_k, -s_k) & \text{для нечетного } n = 2m-1. \end{cases}$$

Рассмотрим вначале случай четного n .

$$\begin{aligned} \gamma(n+1, s_k, -s_k) &= \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) + \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) s_k^{2m+1} - \\ &- \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) s_k^{2m+1} + s_k^{2m+1} (-s_k)^{2m+1} = \\ &= \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m})^2 - s_k^{2(2m+1)}. \end{aligned}$$

Для случая нечетного n аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \gamma(n+1, s_k, -s_k) &= \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) + \\ &+ \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m+1}) s_k^{2(2m+1)} - \\ &- \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m+1}) s_k^{2(m+1)} + s_k^{2(2m+1)} = \\ &= \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) + s_k^{2(2m+1)}, \end{aligned}$$

где первые три слагаемых содержат четные степени s_k по предположению.

Следствие 1. Рассмотрим мультипликатор $\omega(n, s_k, j, \eta)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по простому спектру (2.2). Справедливы тождества

$$(3.2) \quad \omega(n, s_k, j, \eta) \equiv 0, \text{ если } j + \eta = 2m - 1,$$

$$(3.3) \quad \omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}, \text{ если } j + \eta = 2m.$$

Доказательство. Выразим мультипликатор через полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$

$$\omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma(n, s_k, -s_k, j, \eta)}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}$$

и применим лемму.

Следствие 2. Рассмотрим мультипликатор $\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по парному спектру (2.2). Справедливы тождества

$$(3.4) \quad \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \equiv 0, \text{ если } j + \eta = 2m - 1,$$

$$(3.5) \quad \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}, \text{ если } j + \eta = 2m.$$

Доказательство. Выразим мультипликатор через полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$

$$\omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \text{ для } \forall s_k, s_\rho \in \mathbb{C}^-, s_k + s_\rho \neq 0$$

и применим лемму.

Следствия 1, 2 доказывают, что для всех непрерывных устойчивых МИМО ЛТИ систем с простым спектром, приведенных к каноническим формам управляемости и наблюдаемости, существуют спектральные разложения в форме матриц Сяо. Для систем, представленных в канонических формах управляемости и наблюдаемости, это позволяет вместо вычисления n^2 элементов матрицы вычислять только n диагональных элементов по формулам (3.2)–(3.5).

Замечание. Следует с осторожностью использовать мультипликатор $\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по парному спектру (2.2). Например, в случае МИМО ЛТИ системы, приведенной к диагональной канонической форме, спектральное разложение грамиана управляемости имеет простой вид

$$(3.6) \quad P_d^c = \sum_{j=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-b_{j\rho}}{s_j + s_\rho} \mathbf{1}_{j\rho}, \quad b_{j\rho} = [B_d B_d^*]_{j\rho}.$$

С другой стороны, имеем

$$(3.7) \quad P_d^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \omega(n, s_j, j, \rho) A_j B_d B_d^* A_\rho^*, \omega(n, s_k, j, \rho) = \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\rho}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}.$$

Заметим, что обе формулы (3.6), (3.7) дают одинаковый численный результат, который соответствует *различным* спектральным разложениям. Приведем пример.

Иллюстративный пример 1

Рассмотрим задачу управления двухзонной печью. Модель объекта управления – нагревательной печи можно описать уравнениями состояния вида

$$\Sigma_1: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В данном случае можно вычислить выражения

$$N(s) = s^2 + 1,5s + 0,5, \quad \dot{N}(s) = 2s + 1,5,$$

$$(Is - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+0,5 \end{bmatrix} (s^2 + 1,5s + 0,5)^{-1},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad BB^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 \\ 1,5 & 4,25 \end{bmatrix}.$$

Грамиан управляемости, вычисленный по формуле (3.6), равен

$$P^c = \begin{bmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2,125 \end{bmatrix}.$$

Выражение разложения грамиана управляемости имеет вид

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{k=1}^2 \frac{s_k^j (-s_k)^\rho}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} A_j BB^T A_\rho^T,$$

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{k=1}^2 \frac{s_k^j (-s_k)^\rho}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \frac{-b_{j\rho}}{s_j + s_\rho} \mathbf{1}_{j\rho},$$

где A_j – матрица Фаддеева, построенная для матрицы A с помощью алгоритма Фаддеева–Леверье [6, 7]. Вычислим матрицы $A_j BB^T A_\rho^T$:

$$A_0 BB^T A_0^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,75 \\ 0,75 & 1,0625 \end{bmatrix}, \quad A_0 BB^T A_1^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,75 \\ 1,5 & 2,125 \end{bmatrix},$$

$$A_1 BB^T A_0^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 \\ 0,75 & 2,125 \end{bmatrix}, \quad A_1 BB^T A_1^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 \\ 1,25 & 4,25 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (3.7), получим спектральное разложение:

$$P^c = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,75 \\ 0,75 & 1,0625 \end{bmatrix} \frac{2}{3} + \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 \\ 1,25 & 4,25 \end{bmatrix} \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} 1,25 & 1 \\ 1 & 2,125 \end{bmatrix}.$$

Матрицы бесконечных субграмианов являются симметричными и положительно определенными, и таковой является их сумма. Путем прямой подстановки проверяем, что вычисленный грамиан управляемости является решением уравнения Ляпунова. Сепарабельное спектральное разложение грамиана управляемости, вычисленное по формуле (3.6), имеет вид

$$P^c = \begin{bmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2,125 \end{bmatrix}.$$

Матрицы бесконечных субграмианов в этом разложении не являются симметричными и положительно определенными, хотя таковой является их сумма. Пример показывает, что один и тот же грамиан может иметь несколько разных спектральных разложений.

3.2. Разложение грамианов в форме произведений Адамара [3]

Введем матрицы мультипликатора грамиана управляемости непрерывной МИМО LTI системы в виде

$$\Omega_c = [\omega_{c,j\eta}]_{n \times n}$$

и ее грамиана наблюдаемости в виде

$$\Omega_o = [\omega_{o,j\eta}]_{n \times n},$$

где j – индекс строки, а η – индекс столбца матриц мультипликаторов.

Введем матрицы Ψ_c и Ψ_o в виде

$$\Psi_c = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} A_i B B^T A_\mu^T,$$

$$\Psi_o = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} A_i^T C^T C A_\mu.$$

Введем поэлементное представление этих матриц в виде

$$\psi_{c,j\eta} = e_j^T \Psi_c e_\eta,$$

$$\psi_{o,j\eta} = e_j^T \Psi_o e_\eta.$$

Теорема 1 [15]. Рассмотрим устойчивую непрерывную динамическую МИМО LTI систему с простым спектром

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0,$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$.

Тогда субграмиан управляемости P^c является матрицей вида (2.2), и в соответствии с [7] формулами (2.1), (2.2) определяется как

$$(3.8) \quad P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} P_{j,\eta}^c, \quad P_{j,\eta}^c = \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) A_j B B^T A_\eta^T,$$

где

$$\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{если индекс } j + \eta \text{ нечетен,} \\ \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_\rho + s_k} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}, & \text{если индекс } j + \eta \text{ четен.} \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1. Как известно, спектральное разложение грамиана управляемости в условиях теоремы 1 имеет вид [7, 20]

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_\rho + s_k} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)} A_j B B^T A_\eta^T.$$

Подставим вновь введенную скалярную функцию $\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)$ в эту формулу и получим формулу (3.8).

Теорема 2 [13]. Рассмотрим непрерывную МИМО ЛТИ систему вида (2.1). Предположим, что система устойчива и все корни ее характеристического уравнения различны. Тогда ее грамианы управляемости и наблюдаемости имеют вид обобщенных матриц Сяо следующего вида:

$$(3.9) \quad P^c = \Omega_c \circ \Psi_c = [p_{j\eta}^c]_{n \times n}, \quad j, \eta = 1, \dots, n.$$

$$\Psi_c = [\psi_{c,j\eta}]_{n \times n}, \quad j, \eta = 1, \dots, n. \quad \Psi_c = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} \Psi_{c,i\mu}, \quad \Psi_{c,i\mu} = M_i M_\mu^*,$$

$$M_i = A_i B, \quad \Omega_c = [\omega_c(n, j, \eta)]_{n \times n}, \quad j, \eta = 1, \dots, n. \\ p_{j\eta}^c = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{c,j\eta}.$$

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся спектральным разложением грамиана управляемости (2.2). Введем представление грамианов в форме произведений Адамара

$$(3.10) \quad P^c = \Omega_c \circ \Psi_c,$$

$$(3.11) \quad P^o = \Omega_o \circ \Psi_o.$$

Это представление позволяет выписать простые формулы для вычисления элементов грамианов управляемости и наблюдаемости МИМО ЛТИ систем P^c и P^o в виде [13]

$$(3.12) \quad p_{j\eta}^c = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{c,j\eta},$$

$$(3.13) \quad p_{j\eta}^o = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{o,j\eta}.$$

Далее используем тождества для одного класса устойчивых полиномов, корни которых различные над полем комплексных чисел (Лемма). Формулы (3.10)–(3.13) выражают алгоритмы вычисления элементов обобщенных матриц Сяо в форме произведений элементов матриц мультипликатора и элементов сумм всевозможных произведений матриц $A_j B B^T A_\eta^T$, записанных в форме произведений матриц Адамара

$$\Omega_c \circ \Psi_c.$$

Следствие 3. Рассмотрим важный частный случай непрерывных линейных SISO (с одним входом и одним выходом) систем, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В этом случае грамианы управляемости и наблюдаемости определяются формулами [15]

$$(3.14) \quad P^{cF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1},$$

$$P^{oF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}.$$

Представление грамианов в форме Адамара согласно (3.10)–(3.11) принимает вид

$$P^{cF} = \Omega_{cF} \circ \Psi_c, \quad \Psi_c = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{j+1\eta+1},$$

$$P^{oF} = \Omega_{oF} \circ \Psi_o, \quad \Psi_o = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{j+1\eta+1}.$$

Отсюда вытекают тождества

$$(3.15) \quad P^{cF} \equiv \Omega_{cF},$$

$$(3.16) \quad P^{oF} \equiv \Omega_{oF}.$$

Это означает, что грамиан управляемости в канонической форме управляемости совпадает с матрицей мультипликатора для этого грамиана, что позволяет применить формулы (3.15), (3.16) для расчета всех элементов грамиана и устанавливает принадлежность грамиана к классу матриц Сяо. Аналогичный результат справедлив для грамиана наблюдаемости в канонической форме наблюдаемости.

Матрицы мультипликаторов в разных канонических формах имеют вид

$$\Omega_{cF} \equiv \Omega_{oF} = [\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)]_{n \times n} = [\omega(n, s_k, j, \eta)]_{n \times n}.$$

3.3. Спектральные и сингулярные разложения обратных матриц грамианов

Общие формулы вычисления обратных матриц грамианов (далее обратных грамианов) для непрерывных МИМО LTI систем имеют вид [1]

$$(P^c)^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0} \left[(P^c)^{n-1} + \gamma_{n-1}(P^c)^{n-2} + \dots + \gamma_2 P^c + \gamma_1 I \right];$$

$$(P^o)^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0} \left[(P^o)^{n-1} + \gamma_{n-1}(P^o)^{n-2} + \dots + \gamma_2 P^o + \gamma_1 I \right].$$

В случае непрерывных SISO LTI систем эти формулы в соответствии с (3.15), (3.16) приобретают форму

$$[P^{cF}(\omega(n, s_k, j, \eta))]^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0} \left[(\Omega_{cF})^{n-1} + \gamma_{n-1}(\Omega_{cF})^{n-2} + \dots + \gamma_2 \Omega_{cF} + \gamma_1 I \right];$$

$$[P^{oF}(\omega(n, s_k, j, \eta))]^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0} \left[(\Omega_{oF})^{n-1} + \gamma_{n-1}(\Omega_{oF})^{n-2} + \dots + \gamma_2 \Omega_{oF} + \gamma_1 I \right].$$

Наличие степеней матриц мультипликатора в правой части формул приводит к появлению сложных дробно-рациональных функций собственных чисел s_k , что ограничивает область применения формул спектральных разложений обратных грамианов системами малой и средней размерности. Вернемся

к устойчивым непрерывным ММО ЛТИ системам с простым спектром и заметим, что грамианы управляемости и наблюдаемости представляют собой симметричные комплекснозначные матрицы. В этом случае существуют их сингулярные разложения вида [1]

$$\begin{aligned} P^c &= P^{c*} = V_c \Lambda V_c^*, \\ P^o &= P^{o*} = V_o \Lambda V_o^*, \end{aligned}$$

где матрица V_c образована правыми сингулярными векторами матрицы P^c , матрица V_c^* образована левыми сингулярными векторами матрицы P^c , а матрица Λ является диагональной матрицей вида

$$\Lambda = \text{diag} \{ |\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n| \}.$$

Определим матрицы S и U в виде

$$\begin{aligned} S &= \text{diag} \{ \text{sgn} \lambda_1 \text{sgn} \lambda_2 \dots \text{sgn} \lambda_n \}, \quad U_c = V_c S, \\ \text{sgn} \lambda &= \begin{cases} +1, & \text{если } \lambda \geq 0, \\ -1, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P^c &= U_c \Lambda V_c^*, \\ P^o &= U_o \Lambda V_o^*, \end{aligned}$$

где матрица U_c образована левыми сингулярными векторами матрицы P^c . Поскольку Λ , U_c , V_c являются несингулярными матрицами, то

$$(3.17) \quad (P^c)^{-1} = (U_c)^{-1} \Lambda^{-1} (V_c^*)^{-1} = V_c^* \Lambda^{-1} U_c.$$

Аналогичным образом получаем

$$(3.18) \quad (P^o)^{-1} = (U_o)^{-1} \Lambda^{-1} (V_o^*)^{-1} = V_o^* \Lambda^{-1} U_o.$$

Поскольку матрица Λ диагональна, ее обратную матрицу можно представить в виде

$$(3.19) \quad \Lambda^{-1} = \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \dots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \right].$$

Подставив (3.19) в (3.17), (3.18), получим следующие сингулярные разложения обратных грамианов управляемости и наблюдаемости по их сингулярному спектру:

$$\begin{aligned} (P^c)^{-1} &= V_c^* \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \dots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \right] U_c; \\ (P^o)^{-1} &= V_o^* \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \dots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \right] U_o. \end{aligned}$$

Теорема 3. Рассмотрим непрерывную устойчивую и полностью управляемую динамическую МИМО LTI систему вида (2.1).

Сингулярные разложения ее обратного грамиана управляемости по собственным числам матрицы грамиана имеют следующий вид.

Для простого спектра матрицы грамиана

$$(3.20) \quad (P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma_\lambda},$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_λ – собственное число матрицы грамиана P^c .

Для кратного спектра матрицы грамиана

$$(3.21) \quad (P^c)^{-1} = - \sum_{\delta=1}^q \sum_{\rho=1}^{m_\delta} \frac{K_{\delta\rho}}{(-\sigma_\delta)^{m_\delta-j+1}},$$

$$(3.22) \quad K_{\delta\rho} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left\{ \frac{d^{\rho-1}}{d\sigma^{\rho-1}} \left[\frac{(\sigma - \sigma_\delta)^{m_\delta} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^j P_j^c}{\prod_{\delta=1}^n (\sigma - \sigma_\delta)^{m_\delta}} \right] \right\} \Big|_{s=\sigma_\delta},$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_δ – собственное число матрицы грамиана P^c кратности m_δ , ρ – индекс кратности собственного числа σ_δ .

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим разложение резольвенты матрицы грамиана управляемости в виде отрезка ряда Фаддеева [6]

$$(3.23) \quad (I\sigma - P^c)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma^j}{N_c(\sigma)}.$$

Обозначим: $N_c(\sigma) = s^n + a_{c,n-1}\sigma^{n-1} + \dots + a_{c,1}\sigma + a_{c,0}$, $j = 1, \dots, n$; $N_c(\sigma)$ – характеристический полином резольвенты матрицы грамиана, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты в ряд Фаддеева, $j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим вначале случай, когда все сингулярные числа σ_λ грамиана различны. В этом случае разложение (3.23) преобразуется к виду

$$(3.24) \quad (I\sigma - P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma - \sigma_\lambda}.$$

Итеративный алгоритм вычисления матриц Фаддеева и коэффициентов характеристического уравнения:

Первый шаг: $a_{c,n-1} = 1$, $R_n = I$,

Шаг «k»: $a_{c,n-k} = -\frac{1}{k} \text{tr}(P^c R_{n-k+1})$, $R_{n-k} = a_{c,n-k} I + P^c R_{n-k+1}$, $k = 1, \dots, n$;

$$A = \begin{bmatrix} -4,67 & 3 & -1,33 & 2,33 \\ -2,17 & 2,33 & -3,83 & 5,17 \\ 1,5 & -0,33 & -1,5 & 0,17 \\ 2,17 & -3,33 & 3,83 & -6,17 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приведем собственные значения матрицы динамики системы

$$\lambda_i = -4; -3; -2; -1.$$

Для построения сингулярного разложения обратного грамиана управляемости системы по сингулярным числам матрицы грамиана вычислим грамиан управляемости по формуле (3.6)

$$P^c = \begin{bmatrix} 2,5 & 3 & 2,5 & 0,56 \\ 3 & 11,2 & 13,2 & 5,1 \\ 2,5 & 13,2 & 16,6 & 6,9 \\ 0,56 & 5,1 & 6,9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что формула (3.6) справедлива не только для устойчивых линейных систем, но и для неустойчивых систем, в которых не нарушается условие $s_k + s_p \neq 0$. Оно нарушается в случае $s_k = 0$ или $s_k = +j\omega$, $s_{k+1} = -j\omega$ [21].

Тогда сингулярные числа этого грамиана примут вид

$$\sigma_i = 30,7; 2,5; 0,17; 0,0002.$$

Грамиан управляемости системы представлен симметричной матрицей, поэтому существует его SVD-разложение [1]

$$P^c = \begin{bmatrix} -0,13 & 0,86 & -0,48 & -0,009 \\ -0,6 & 0,28 & 0,67 & 0,35 \\ -0,73 & -0,25 & -0,25 & -0,58 \\ -0,3 & -0,32 & -0,51 & 0,74 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0002 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} -0,13 & 0,86 & -0,48 & -0,009 \\ -0,6 & 0,28 & 0,67 & 0,35 \\ -0,73 & -0,25 & -0,25 & -0,58 \\ -0,3 & -0,32 & -0,51 & 0,74 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с алгоритмом Фаддеева–Леврье вычислим матрицы Фаддеева и коэффициенты характеристического уравнения для обратного грамиана

$$P_0^c = \begin{bmatrix} -0,01 & 0,05 & -0,07 & 0,08 \\ 0,05 & -1,62 & 2,69 & -3,4 \\ -0,07 & 2,69 & -4,5 & 5,6 \\ 0,08 & -3,4 & 5,6 & -7,2 \end{bmatrix}, P_1^c = \begin{bmatrix} 21,8 & -23,5 & 8,4 & 17 \\ -23,5 & 44,6 & -29,5 & -5,5 \\ 8,4 & -29,5 & 33 & -25 \\ 17 & -5,5 & -25 & 65,7 \end{bmatrix}, \\ P_2^c = \begin{bmatrix} -31 & 3 & 2,5 & 0,56 \\ 3 & -22,1 & 13,2 & 5,1 \\ 2,5 & 13,2 & -16,7 & 6,9 \\ 0,56 & 5,1 & 6,9 & -30,3 \end{bmatrix}, P_3^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a_{c,0} = 0,0031, a_{c,1} = -13,3, a_{c,2} = 82,6, a_{c,3} = -33,3, a_{c,4} = 1.$$

Тогда обратный грамиан можно будет вычислить по формуле (3.20)

$$(P^c)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,97 & -14,8 & 22,3 & -26,2 \\ -14,8 & -517 & -856 & 1083 \\ 22,3 & -856 & 1422 & -1803 \\ -26,2 & 1083 & -1803 & 2290 \end{bmatrix}.$$

3.4. Спектральные разложения энергетических функционалов и новые критерии устойчивости

Рассмотрим в рамках сделанных выше предположений SISO LTI систему вида (2.4), уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости, и вычислим энергетический функционал J , который представляет собой значение квадрата H_2 -нормы передаточной функции системы и дает оценку риска потери устойчивости [1, 19, 22]. Для этого используем (3.12) и (3.14) и для определенности выберем спектральное разложение грамиана управляемости по простому спектру

$$(3.27) \quad J = \text{tr} C^F \Omega_c (C^F)^T = \\ = \left(\frac{\xi_0^2}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} - \frac{\xi_1^2 \sum_{k=1}^n s_k^2}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \xi_{n-1}^2 \sum_{k=1}^n s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} \right).$$

Получили инвариантное спектральное разложение энергетического функционала по простому спектру матрицы динамики. Эта простая формула показывает преимущество применения спектральных разложений в канонической форме перед разложением общего вида (3.23). Разложение не зависит от выбора невырожденной матрицы линейных преобразований координат системы. Два основных фактора влияют на значение риска потери устойчивости J :

- 1) значения диагональных членов матрицы $S_{\text{яо}} \Omega_c$,
- 2) квадраты элементов приведенного вектора выхода.

Выражение (3.27) можно упростить за счет упрощения SISO LTI системы. В [14] показано, что матрица $S_{\text{яо}}$ является грамианом управляемости для SISO LTI системы с передаточной функцией

$$(3.28) \quad W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Асимптотическая устойчивость SISO LTI систем вида (2.4) равносильна асимптотической устойчивости этой системы. Более того, покажем, что асимптотическая устойчивость MIMO LTI систем вида (2.1) равносильна ее асимптотической устойчивости. Энергетический функционал J для системы

(3.28) согласно (3.27) равен

$$(3.29) \quad J = \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k)N(-s_k)} - \frac{\sum_{k=1}^n s_k^2}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k)N(-s_k)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k)N(-s_k)} \right).$$

Теорема 4. Рассмотрим непрерывную полностью управляемую динамическую МИМО LTI систему с простым спектром вида (2.1), а также непрерывную динамическую SISO LTI систему с тем же спектром, уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости вида (2.4).

Тогда достаточным условием асимптотической устойчивости системы (2.1) по Ляпунову является ограниченность энергетического функционала (3.29) для SISO LTI системы с тем же спектром и передаточной функцией (3.28)

$$(3.30) \quad J < +\infty,$$

$$(3.31) \quad \text{для любого } s_k \text{ принадлежащего } C^-, \quad k = 1, \dots, n.$$

Доказательство теоремы 4. Напомним, что МИМО LTI система (2.1) полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы А различны, реализация системы (2.1) минимальна и существует единственная передаточная функция системы. При выполнении указанных условий ограниченность функционала \sqrt{J} является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (2.1) по Ляпунову [1, Теорема 5.14]. Таким образом, ограниченность функционала J является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (3.27)

$$J < \infty.$$

Но функционал J есть след матрицы Сяо SISO LTI системы (2.4), уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости. Отсюда вытекает вывод о том, что ограниченность энергетического функционала простой SISO LTI системы (3.28) в форме неравенства (3.30) гарантирует асимптотическую устойчивость сложной МИМО LTI системы вида (2.1). Проверка условия (3.31) требует использования асимптотических моделей грамианов [22].

Таким образом, получен новый критерий устойчивости сложной стационарной линейной динамической МИМО LTI системы в виде критерия ограниченности следа матрицы Сяо Ω_c для простой SISO LTI системы (3.21), уравнения которой приведены в каноническую форму управляемости. Новый критерий не противоречит известному критерию принадлежности собственных чисел матрицы динамики линейной системы левой полуплоскости плоскости собственных чисел, но уточняет его с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод (кратные собственные числа, близкие аperiodические и колебательные моды) [22].

4. Заключение

В данной статье, посвященной развитию спектральных методов решения уравнения Ляпунова, основные результаты получены с использованием структурных методов в разрабатываемых новых методах и инструментах, тесно связанных с фундаментальными свойствами линейных динамических систем: управляемостью, наблюдаемостью и устойчивостью. Среди инструментов прежде всего следует назвать два: определение структуры матрицы решения в виде матрицы Сяо и спектральные разложения решения в форме произведений Адамара. Разработан метод и алгоритм вычисления матриц в виде произведения Адамара для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами. Это позволяет вычислять элементы соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы. При использовании канонических форм управляемости или наблюдаемости разложение Адамара соответствующих грамианов сводится к матрице мультипликатора, след которого равен энергетическому функционалу SISO LTI системы. Новые результаты получены в виде спектральных и сингулярных разложений обратных грамианов управляемости и наблюдаемости. Это позволяет получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadelphia, 2005.
2. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Теория автоматического управления. Учеб. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
3. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
5. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник-М: Изд-во Лань, 2009. 726 с.
7. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
8. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами М.: Наука, 1976. 424 с.
9. *Годунов С.К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002. 216 с.
10. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // АиТ. 2016. № 10. С. 3–39.

- Proskurnikov A.V., Fradkov A.L.* Problems and methods of network control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1711–1740.
<https://doi.org/10.1134/S0005117916100015>
11. *Жабко А.П., Харитонов В.Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления: учебное пособие / СПбГУ СПб.: Изд-во СПб. универ-та, 1993. 318 с.
 12. *Sreeram V., Athoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form // IEE Proc. D. Control. Theory Appl. 1991. V. 138. No. 6. P. 529–534. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1991.0074>
 13. *Xiao C., Feng Z., Shan X.* On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038>
 14. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA June 10–12, 2009. P. 5345–5351. <https://doi.org/978-1-4244-4524-0/09>
 15. *Yadykin I.B.* Spectral Decompositions of Gramians of Continuous Stationary Systems Given by Equations of State in Canonical Forms // Mathematics. 2022. V. 10. No. 13. P. 2339. <https://doi.org/10.3390/math10132339>
 16. *Dilip A.S.A.* The controllability Gramian, the Hadamard product and the optimal actuator // Leader Sensor Select. Problem Nature Phys. 2015. V. 11. P. 779–786. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278>
 17. *Bianchin G., Pasqualetti F.* Gramian-Based Optimization for the Analysis and Control of Traffic Networks // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2022. V. 21. No. 7. P. 3013–3024. <https://doi.org/10.1109/TITS.2019.2922900>
 18. *Himpe C.* The Empirical Gramian Framework // Algorithms. 2018. V. 11. No. 91. <https://doi.org/10.3390/a11070091>
 19. *Benner P., Goyal P., Duff I.P.* Gramians, Energy Functionals, and Balanced Truncation for Linear Dynamical Systems With Quadratic Outputs // IEEE Transact. Autom. Control. 2022. V. 67. No. 2. P. 886–893. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3086319>
 20. *Ядыкин И.Б.* О свойствах грамианов непрерывных систем управления // АиТ. 2010. № 6. С. 39–50. <https://doi.org/10.1134/S0005117910060032>
 21. *Yadykin I.B., Galyaev A.A.* On the methods for calculation of grammians and their use in analysis of linear dynamic systems Automation and Remote Control // Pleiades Publishing Ltd. V. 74. No. 2. P. 207–224.
 22. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Энергетический подход к анализу устойчивости линейных стационарных динамических систем // АиТ. 2016. № 12. С. 37–58.
 23. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж. Л.* Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными параметрами. М.: Физматлит, 1961.
Gardner M.F., Barns J.L. Transients in linear systems studied by the Laplace transformation / V. 1. Lumped-constant systems. New York, London. Wiley, Chapman and Hall. 1942.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 31.05.2023

После доработки 10.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

© 2023 г. А.И. МИХАЛЬСКИЙ, д-р биол. наук, канд. техн. наук
(ipuran@yandex.ru),
Ж.А. НОВОСЕЛЬЦЕВА, канд. техн. наук (novoselc.janna@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.А. АНАШКИНА, канд. физ.-мат. наук (a_anastasya@inbox.ru)
(Институт молекулярной биологии им. В.А. Энгельгардта РАН, Москва),
А.Н. НЕКРАСОВ, канд. физ.-мат. наук (a_nekrasov@mail.ru)
(Институт биоорганической химии им. академиков М.М. Шемякина
и Ю.А. Овчинникова РАН, Москва)

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СОСТАВА ПЕНТАПЕПТИДА НА ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Изучается влияние расположения аминокислотных остатков в пентапептиде на его устойчивость. Строится прогноз устойчивости пентапептида с помощью метода градиентного бустинга, позволяющего оценить влияние каждого признака на стабильность пентапептида. Выявлены комбинации расположения аминокислот в пентапептиде, вносящие существенный вклад в его стабильность. Показано, что использование таких комбинаций позволяет сократить количество данных, необходимых для получения достоверного прогноза стабильности пентапептида.

Ключевые слова: аминокислотный остаток, пентапептид, градиентный бустинг, предсказание, достаточность информации.

DOI: 10.31857/S0005231023120048, **EDN:** NFXRAG

1. Введение

Проблема предсказания пространственной структуры белков является одной из приоритетных задач в области математико-биологического моделирования, ведущей к практическому применению – конструированию новых белков с полезными медицинскими свойствами. На текущий момент существует инструмент для предсказания третичной структуры белка по его аминокислотной последовательности AlphaFold [1], показавший невероятную точность предсказания структуры, сравнимую с точностью рентгеноструктурного анализа на CASP [2]. Однако этот инструмент создан на основе глубокой нейронной сети и принципы, обеспечивающие укладку, остаются неизученными. Понимание того, какие аминокислоты и в какой комбинации способствуют повышению устойчивости фрагмента белка, позволит создать метод проектирования структуры белка. Цель работы заключается в том, чтобы на основе экспериментальных данных об устойчивости пентапептидов выделить потенциальные маркеры устойчивости (комбинации и позиции аминокислот в молекуле).

Изучение энтропийных характеристик фрагментов последовательностей белков показало, что для пяти последовательно расположенных остатков наблюдается пониженный уровень информационной энтропии и, следовательно, блоки именно такого размера необходимо рассматривать как элементарные единицы последовательности. Это приближение позволило разработать метод, выявляющий иерархическую структуру в последовательностях белков, – метод анализа информационной структуры (метод АНИС) [3]. Анализ конформационной стабильности пентапептидов методом молекулярной динамики показал, что все пентапептиды можно условно разделить на три типа [4]: конформационно-стабильные (находящиеся в преимущественной топологии более 80% времени моделирования), триггерные (имеющие две преимущественные топологии, в каждой из которых пептид находился не менее 40% времени моделирования) и лабильные. Молекулярная динамика – это метод, в котором временная эволюция системы взаимодействующих атомов или частиц отслеживается интегрированием их уравнений движения. Для описания атомов или частиц и их движения применяется классическая механика. Закон движения частиц находят при помощи аналитической механики, а силы межатомного взаимодействия представляются в форме классических потенциальных сил (как градиент потенциальной энергии системы).

2. Данные

В работе использованы 44 860 пентапептидов, последовательности которых созданы по определенному правилу, и 4885 ранее изученных пентапептидов из реальных белков, устойчивость которых определялась методом молекулярно-динамического моделирования. В полученном наборе из 49 745 пентапептидов лишь 1705 пентапептидов оказались устойчивы, что составило около 3,43% от общего числа.

При исследовании все данные были разделены случайным образом на «обучающую», «контрольную» и «валидационную» выборки в пропорциях 0,66, 0,17, 0,17 с сохранением исходного баланса классов. Обучающая и контрольная выборки использовались на этапе обучения. Обучающая выборка использовалась и на этапе интерпретации результатов

2.1. Кодировки данных

В исходном наборе данных каждый пентапептид закодирован последовательностью из пяти букв, означающих аминокислотные остатки, входящие в пентапептид. Порядок следования букв соответствует последовательности аминокислотных остатков в молекуле пентапептида. Для формального численного анализа данных пятибуквенное представление кодировалось с помощью трех различных представлений. Рассматривались бинарная кодировка (One Hot Encoding), непрерывное строковое представление (n -грамма), разрывное строковое представление (разрывная n -грамма). Каждый из рассмотренных способов кодирования позволяет по-своему оценивать вклады и стро-

ить суждения о влиянии тех или иных сочетаний аминокислотных остатков на стабильность пентапептида.

2.2. Бинарная кодировка (ОНЕ)

One hot encoding – кодировка, при которой наличие каждой аминокислоты на своей позиции задается положением единицы в векторе, остальные координаты которого равны нулю. Число элементов вектора равно 20 – числу типов аминокислот. В результате каждый пентапептид кодируется матрицей из 20 строк и 5 столбцов. Столбец соответствует позиции аминокислоты в молекуле пентапептида, а строка – аминокислоте. Например, при классификации аминокислот по первой букве названия пентапептид DKLNV будет закодирован матрицей, в которой в первом столбце в третьей строке стоит 1, остальные элементы равны нулю, во втором столбце в девятой строке стоит 1, остальные элементы равны нулю и т.д. При вычислениях каждый пентапептид представляется вектором в 100-мерном пространстве.

2.3. Непрерывное строковое представление (n -грамма)

n -грамма – непрерывное строковое представление последовательности аминокислот в пентапептиде. В зависимости от числа букв, входящих в строку, различают n -граммы порядка 1, 2 и более. Например, пептид DKLNV кодируется пятью n -граммами порядка 1 D, K, L, N, V, четырьмя n -граммами порядка 2 DK, KL, LN, NV, тремя n -граммами порядка 3 DKL, KLN, LNV. В проведенном анализе использовались n -граммы от 1 до 3. Как и при кодировке ОНЕ вся совокупность n -грамм, кодирующих пентапептиды, представляется в виде таблицы, состоящей из нулей и единиц. В каждом столбце таблицы на определенной строке стоит единица, а остальные элементы – нули.

2.4. Разрывное строковое представление (рваная n -грамма)

Рваная n -грамма является обобщением непрерывной n -граммы и является строковым представлением последовательности аминокислот в пентапептиде, при котором между группами аминокислот есть разрыв от одного до трех символов. При формировании рваной n -граммы указываются аминокислоты, входящие в n -грамму, указывается позиция первой аминокислоты из n -граммы в молекуле пентапептида, число позиций между каждой из аминокислот, входящих в n -грамму. Например, для пентапептида DKLNV существуют рваная n -грамма второго порядка 12DN, где 1 – позиция первой аминокислоты, 2 – число позиций между аминокислотами, DN – перечень аминокислот, входящих в рваную n -грамму. Для этого пентапептида существует всего шесть рваных n -грамм порядка 2, а именно 11DL, 21KN, 31LV, 12DN, 22KV, 13DV. В исследовании рассматривались рваные n -граммы только порядка 2.

3. Алгоритм классификации

Для классификации пентапептидов на устойчивые и неустойчивые в работе использован алгоритм градиентного бустинга над решающими деревьями (gradient boosted decision trees) [5]. Алгоритм построен согласно принципу, по которому относительно слабый алгоритм машинного обучения можно усилить тем же алгоритмом, который будет «уточнять» предсказания предыдущего алгоритма, основываясь на его ошибках. При применении этого принципа для классификации методом случайного леса первый ряд деревьев обучается на реальных данных, предсказывая метку класса для каждого объекта. Второй ряд деревьев обучается на тех же данных, но придавая большее значение объектам, на которых были совершены ошибки деревьями первого ряда, и исправляя их. Деревья третьего ряда обучаются, исправляя ошибки деревьев второго ряда и т.д. В настоящее время градиентный бустинг над решающими деревьями является одним из самых популярных алгоритмов машинного обучения, потому что при малых затратах на обучение обеспечивает высокую точность, защиту от переобучения за счет того, что используется случайный лес из решающих деревьев. При этом признаки и подвыборка перемешиваются для построения нового дерева. Кроме того, полученный результат легко интерпретируется.

Контроль качества обучения проводился с использованием метрики F_1 , задаваемой формулой

$$F_1 = 2 \frac{precision * recall}{precision + recall}.$$

При этом один класс рассматривается как класс «положительных объектов», например класс устойчивых пентапептидов, а другой – класс «отрицательных объектов». Метрика *precision* определяет долю правильно опознанных положительных объектов среди всех объектов, отнесенных к положительным. Метрика *recall* определяет долю правильно опознанных положительных объектов среди всех положительных объектов. Метрика F_1 применяется для оценки качества классификации в случае данных, в которых классы существенно не сбалансированы.

Настройка параметров алгоритма классификации проводилась для каждого использованного метода кодировки с помощью процедуры кросс-валидации в пространстве высокой размерности [6] с помощью пакета *huperort*. В табл. 1 приведены результаты классификации, достигнутые при найденных параметрах настройки.

Таблица 1. Результаты классификации стабильности пентапептидов при различных способах кодировки

Кодировка	Метрика		
	<i>precision</i>	<i>recall</i>	F_1
ОНЕ	0,39	0,54	0,45
<i>n</i> -грамма	0,39	0,41	0,40
разрывная <i>n</i> -грамма	0.32	0.54	0.40

Наилучшее качество по метрикам F_1 достигается при использовании кодировки ONE. Для кодировок n -грамма и рваная n -грамма качество ниже. Это объясняется малостью выборки и, характерным для кодировки дискретных признаков с помощью n -грамм, большим числом признаков.

4. Вероятностная оценка значимости положения аминокислот в пентапептиде

Кроме оценки качества классификации, большой интерес представляет оценка важности отдельных признаков в стабильности пентапептидов. Для построения такой оценки при использовании градиентного бустинга в настоящем исследовании применялся алгоритм SHAP (SHapley Additive exPlanations) [7], который позволяет оценить вероятностный вклад каждого сочетания аминокислот в вероятность классификации пентапептида как стабильного, учитывая при этом взаимодействие факторов (аминокислот и их положения) между собой. Этот метод вычисляет важность конкретного признака путем сравнения результатов, полученных с учетом этого признака и без его учета. При построении правила классификации в виде дерева на результат может влиять порядок, в котором используются элементы обучающей выборки. Чтобы устранить такое влияние на оценку важности признака, элементы обучающей выборки поступают на обучение многократно в случайной последовательности.

Метод SHAP получил свое обоснование в теории кооперативных игр, когда участники игры могут объединяться в коалиции для достижения наилучшего результата. Выигрыш каждого игрока равен его среднему по всем коалициям вкладу в общий выигрыш при случайном равновероятном упорядочивании участников. Эта величина называется индексом Шепли [7] и вычисляется путем суммирования по всем наборам признаков, не включающим признак i , взвешенного эффекта от использования исключенного признака. Под эффектом использования признака i в данном случае понимается разность точности классификации пентапептида с учетом признака i и без его учета. Индекс Шепли вычисляется по формуле

$$\Phi_i = \sum_{S \in F \setminus i} \frac{n_S! (n_F - n_S - 1)!}{n_F!} (f_{S \cup i} - f_S),$$

здесь F обозначает множество всевозможных наборов признаков, $F \setminus i$ обозначает множество наборов признаков, не включающих признак i , S – набор признаков без признака i , $S \cup i$ – набор признаков S с добавлением признака i , f_S и $f_{S \cup i}$ – точность классификации при использовании наборов признаков S и $S \cup i$ соответственно, n_F и n_S – число наборов признаков в множествах F и S соответственно. Значимость признака определяется абсолютной величиной соответствующего ему индекса Шепли.

5. Интерпретация результатов

Ниже приводятся результаты интерпретации с помощью метода SHAP результатов классификации устойчивости пентапептидов алгоритмом градиентного бустинга при использовании трех различных кодировок.

5.1. Бинарная кодировка (ONE)

В табл. 2 представлен пример оценки влияния положения аминокислот в пентапептиде DRNAA на его стабильность. Важно отметить, что на устойчивость пентапептида влияет не только наличие аминокислоты в какой-либо позиции, но и ее отсутствие.

Таблица 2. Вероятностный вклад аминокислот и их позиций на стабильность пентапептида DRNA

Аминокислота		позиция	Вероятностный вклад
наличие	отсутствие		
D		1	0,048
R		2	0,018
	A	1	0,010
A		4	0,0040
A		5	-0,0083
N		3	-0,0096

В табл. 2 строки упорядочены по мере уменьшения вероятностного вклада аминокислот и их позиций на стабильность пентапептида. Отрицательные значения означают негативное влияние на стабильность. Из таблицы следует, что наличие на первой позиции аминокислоты D на пятой позиции повышает вероятность того, что пентапептид стабилен, а отсутствие аминокислоты A на первой позиции повышает вероятность стабильности пентапептида только на 1%. Наличие же на последней позиции аминокислоты A на 0,8% понижает вероятность стабильности пентапептида. При этом предполагается, что признаки влияют на стабильность пентапептида независимо друг от друга.

Если провести подобный вероятностный анализ для множества пентапептидов, то совокупный результат можно представить в виде диаграммы вероятностных вкладов аминокислот и их положений в стабильность. На рис. 1 представлена диаграмма для наиболее значимых признаков. В силу больших вычислительных трудностей, связанных с необходимостью решения задачи классификации для всевозможных наборов признаков, вычисления проводились для 1000 случайно выбранных пентапептидов. На диаграмме отдельная точка соответствует результату анализа отдельного пентапептида.

Наличие признака (присутствие аминокислоты на указанном месте) изображается открытым символом, а отсутствие – закрытым.

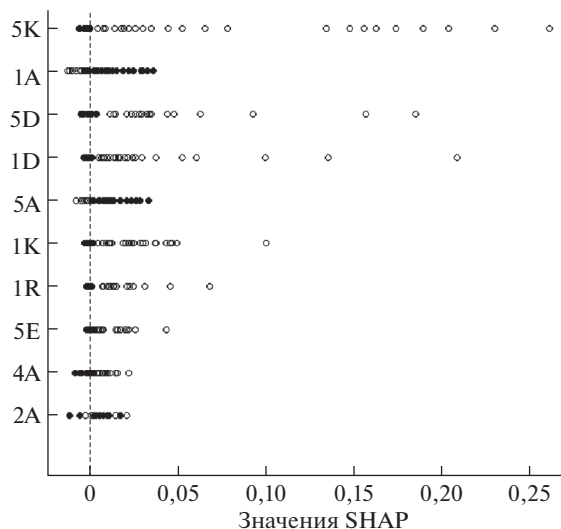


Рис. 1. Диаграмма вероятностных вкладов признаков в стабильность 1000 случайно выбранных пентапептидов при кодировке ONE, построенная с помощью алгоритма SHAP.

Из рисунка видно, что при наличии в пентапептиде аминокислоты К на пятой позиции оказывает самое большое положительное влияние на его стабильность. Обратный эффект – наиболее сильное отрицательное влияние на стабильность оказывает аминокислота А на первой позиции.

5.2. Непрерывное строковое представление

При кодировке с использованием n -грамм величина оценки вероятностного вклада в стабильность отдельного признака оказывается меньше, чем при кодировке ONE. Это является следствием того, что при использовании n -грамм до третьего порядка число признаков в 256 раз больше, чем при ONE кодировке. В табл. 3 приведены примеры оценок вероятностного вклада в стабильность пептида DRNAA.

Таблица 3. Примеры оценки вероятностного вклада в стабильность пентапептида DRNAA при кодировке с помощью n -граммы

Сочетание аминокислот		позиция	Вероятностный вклад
наличие	отсутствие		
D		1	0,0030
R		2	0,0022
	K	2	-0,00004
	EK	1	-0,00008
	T	5	-0,000028
	R	5	-0,000029
A		5	-0,0001

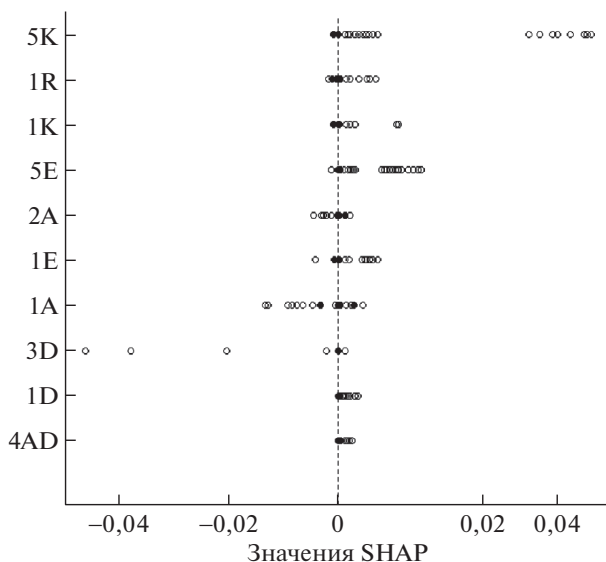


Рис. 2. Диаграмма вероятностных вкладов признаков в стабильность 1000 случайно выбранных пентапептидов при кодировке с помощью n -грамм, построенная по алгоритму SHAP.

В табл. 3 строки упорядочены по мере уменьшения вероятностного вклада аминокислот и их позиций на стабильность пентапептида. Из таблицы видно, что при кодировке с помощью n -грамм совместный вклад аминокислот D и R, находящихся в первой и второй позициях, в стабильность пентапептида оценивается около 0,5%, тогда как при кодировке ONE оценка составляет 6%.

На рис. 2 приведен пример диаграммы вероятностных вкладов аминокислот и их положений в стабильность 1000 случайно выбранных пентапептидов. Из рисунка видно, что наибольшую значимость имеют единичные комбинации аминокислот, самым мощным положительным эффектом по оценке обладает аминокислота K на пятой позиции, а отрицательным – аминокислота A на первой позиции.

5.3. Разрывное строковое представление

В табл. 4 представлен результат оценивания вероятностного вклада в стабильность отдельного признака на примере пентапептида DRNAA при кодировке разрывной n -граммой. На рис. 3 приведен пример диаграммы вероятностных вкладов аминокислот и их положений в стабильность 1000 случайно выбранных пентапептидов при той же кодировке.

В табл. 4 строки упорядочены по мере уменьшения вероятностного вклада сочетания аминокислот и их позиций на стабильность пентапептида. Из таблицы следует, что наибольший эффект на стабильность пентапептида DRNAA оказывает сочетание аминокислот R во второй позиции и A в четвертой или в пятой позициях. Отсутствие аминокислоты A в первой позиции и

Таблица 4. Примеры оценки вероятностного вклада в стабильность пентапептида DRNAA при кодировке разрывной n -граммой

Сочетание аминокислот		позиция	Вероятностный вклад
наличие	отсутствие		
R-A		2	0,0093
R-A		2	0,0041
	A-A	1	0,0031
D-A		1	0,0020
	A-A	1	0,0013
	A-K	2	-0,0014
D-N		1	-0,0030

одновременно в четвертой или пятой позициях также повышает вероятность стабильности пентапептида DRNAA, но в меньшей мере.

Из рис. 3 видно, что наибольшую значимость для стабильности имеют комбинации с аминокислотой A на второй и K на пятой позициях. Присутствие же в пентапептиде двух аминокислот A с двумя или тремя пропусками между ними, наоборот, является признаком его нестабильности.

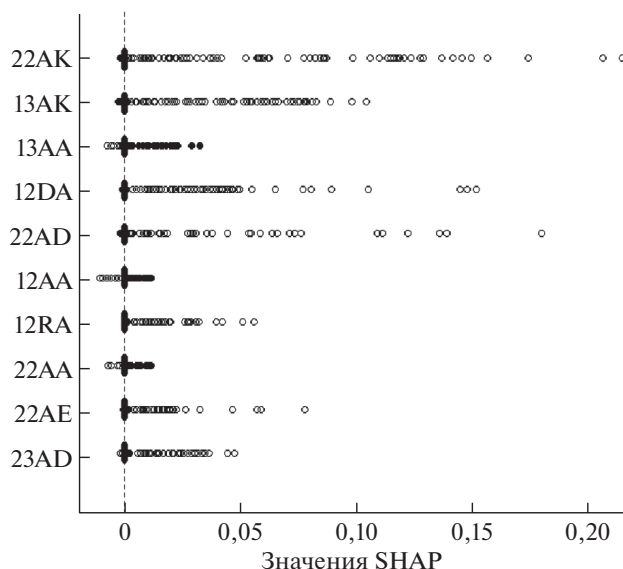


Рис. 3. Диаграмма вероятностных вкладов признаков в стабильность 1000 случайно выбранных пентапептидов при кодировке разрывной n -граммой, построенная с помощью алгоритма SHAP.

6. Заключение

В статье рассмотрен результат применения трех различных кодировок структуры пентапептида при прогнозе его стабильности через реше-

ние задачи классификации. Рассматривались бинарная кодировка (One Hot Encoding), непрерывное строковое представление (n -грамма), разрывное строковое представление (рваная n -грамма). Каждая из кодировок порождает пространства признаков различной размерности: 100 при бинарной кодировке ONE, 25 600 при кодировке с помощью n -грамм не выше третьего порядка и 10 400 при использовании разрывной n -граммы. При этом возникает различная степень разреженности данных. Задача классификации пентапептидов на устойчивые и неустойчивые решалась методом градиентного бустинга (LGBM). В исследовании использовался набор из 49 745 пентапептидов, среди которых устойчивыми были 3,43%. Данные были разделены случайным образом на «обучающую», «тестовую» и «валидационную» выборки в пропорциях с сохранением исходного баланса классов. После обучения результаты проверки на контрольной выборке на каждой из кодировок показали примерно одинаковую величину метрики качества F_1 , равную 0,45 для бинарной кодировки и 0,40 при использовании различных n -грамм.

Оценка важности признаков для прогноза стабильности пентапептидов выделила наиболее важные признаки. Каждый из способов кодировки обладает своей особенностью. При кодировке ONE оценивается важность расположения конкретной аминокислоты на определенной позиции. Кодировка при использовании n -грамм позволяет оценить важность сочетания аминокислот на соседних позициях, а при использовании рваных n -грамм оценивается важность расположения аминокислот на удаленных друг от друга позициях. Кодировка с использованием рваных n -грамм позволяет выделять эффект влияния комбинации аминокислот, расположенных в разных позициях молекулы пентапептида.

Вопрос о структурной стабильности пентапептидов рассматривался в [8]. В этой работе при бинарной кодировке ONE применялся метод снижения размерности задачи, основанный на вычислении взаимной информации между признаком стабильности и описанием пентапептида. Выяснилось, что снижение размерности с помощью взаимной информации позволяет применять для прогноза стабильности «простой» метод классификации «К ближайших соседей». При этом качество результата в терминах метрик «точность» и «полнота» практически совпадает с результатом применения метода «случайный лес», требующего значительно больших вычислительных и временных затрат. Вероятностная оценка влияния состава пентапептида на его устойчивость в этом исследовании не проводилась. В настоящей работе акцент ставился на оценку влияния состава пентапептида и приведены результаты такой оценки для 1000 случайно выбранных пентапептидов, что связано с большими требованиями к необходимым вычислительным мощностям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Senior A. W., Evans R., Jumper J. et al.* Improved protein structure prediction using potentials from deep learning // *Nature*. 2020. V. 577. P. 706–710.

2. *Pereira J., Simpkin A.J., Hartmann M.D. et al.* High accuracy protein structure prediction in CASP14 // *Proteins Structure Function and Bioinformatics*. 2021. V. 89. No. 12. P. 1687–1699. <https://doi.org/10.1002/prot.26171>
3. *Nekrasov A.N., Kozmin Yu.P., Kozyrev S.V. et al.* Hierarchical structure of protein sequence // *Int. J. Mol. Sci.* 2021. V. 22. No. 15. 8339. <https://doi.org/10.3390/ijms22158339>
4. *Anashkina A.A., Nekrasov A.N., Alekseeva L.G. et al.* A minimum set of stable blocks for rational design of polypeptide chains // *Biochimie*. 2019. V. 160. P. 88–92.
5. *Ke G., Meng Q., Finley T., Wang T. et al.* A Highly Efficient Gradient Boosting Decision Tree // *Proc. 31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS)*. Long Beach. 2017. P. 3149–3157.
6. *Bergstra J., Yamins D., Cox D.D.* Making a Science of Model Search: Hyperparameter Optimization in Hundreds of Dimensions for Vision Architectures // *Proc. of the 30th International Conference on Machine Learning (ICML)*. 2013. P. 115–123.
7. *Lundberg S.M., Lee S.I.* A unified approach to interpreting model predictions // *Proc. 31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS)*. Long Beach. 2017. P. 4765–4774.
8. *Mikhalskii A.I., Petrov I.V., Tsurko V.V., Anashkina A.A. et al.* Application of mutual information estimation for prediction the structural stability of pentapeptides // *Rus. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2020. V. 35. No. 5. P. 263–271.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 31.05.2023

После доработки 12.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

© 2023 г. А.Д. ЦВИРКУН, д-р техн. наук (tsvirkun@ipu.ru),
А.Ф. РЕЗЧИКОВ, д-р техн. наук (rw4cy@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
В.А. КУШНИКОВ, д-р техн. наук (kushnikoff@yandex.ru)
(Федеральный исследовательский центр
«Саратовский научный центр РАН»),
О.И. ДРАНКО, д-р техн. наук (olegdranko@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.С. БОГОМОЛОВ, д-р техн. наук (alexbogomolov@yandex.ru),
А.Д. СЕЛЮТИН (aseliutin@ya99.ru)
(Федеральный исследовательский центр
«Саратовский научный центр РАН»)

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ ДОСТИЖИМОСТИ ЦЕЛЕЙ И ВЫПОЛНИМОСТИ ПЛАНОВ В КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМАХ НА ПРИМЕРЕ ЦЕЛЕЙ И ПЛАНОВ ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ НАВОДНЕНИЯ

Разработаны модели и методы проверки достижимости комплекса целей и выполнимости планов мероприятий, осуществляемых при управлении крупномасштабными системами. Сформирован алгоритм анализа достижимости целей и планов, реализуемых в процессе развития этих систем. Приведен пример, иллюстрирующий основные этапы проверки достижимости комплекса целей и выполнимости планов мероприятий при ликвидации последствий наводнения.

Ключевые слова: цели, управление, модели, методы, алгоритмы, системная динамика, мероприятия, критерий эффективности, наводнения, проверка выполнимости планов, искусственный интеллект.

DOI: 10.31857/S000523102312005X, **EDN:** NGBYEJ

1. Введение

Вопросам изучения моделей и методов формирования и проверки достижимости поставленных целей при управлении сложными человеко-машинными, социальными, экономическими и биологическими системами уделяется значительное внимание. В настоящее время проверка достижимости комплекса целей, осуществляемых при планировании, проектировании и управлении крупномасштабными системами, недостаточно формализована и выполняется в основном с использованием интуиции и опыта лиц, принимающих решения (ЛПР). Характеристики целей различных уровней иерархии, а также индикаторов их выполнения могут значительно изменяться на временных интервалах реализации целей, что затрудняет деятельность ЛПР при проектировании, управлении крупномасштабными системами, а также при планиро-

вании результатов их деятельности. Вопросы формализации процедуры целеполагания обсуждались в трудах отечественных и зарубежных исследователей [1, с. 5]. Полученные в данной области исследования результаты, однако, пока не привели к созданию целостного комплекса моделей и методов, позволяющего проверить достижимость целей крупномасштабных систем. Отсутствие данных разработок, а также специализированного математического и информационно-программного обеспечения, предназначенных для проверки достижимости целей крупномасштабных систем, а также планов их создания и развития, понимаемых как ряд действий, объединенных последовательно для достижения цели с возможными сроками выполнения, вызывает сложности при разработке и управлении человеко-машинными, экономическими, социальными объектами [2, с. 252].

Данная статья посвящена разработке новых задач, моделей и методов проверки достижимости целей и выполнимости планов в крупномасштабных системах.

2. Основные направления исследований

Для разработки моделей и методов проверки достижимости целей и выполнимости планов в крупномасштабных системах необходимо выполнить следующие исследования.

1. На основе математического аппарата системной динамики, вероятностного анализа безопасности и теории байесовских сетей разработать методологические основы для создания интеллектуальной системы, позволяющей прогнозировать, идентифицировать и предотвращать события, приводящие к невыполнимости планов мероприятий [3, с. 168].

2. Сформировать и обосновать общий подход к проверке выполнимости структурно-сложных планов, предусматривающий анализ выполнимости с помощью аппарата булевых функций, байесовских сетей и моделей представления знаний интеллектуальных систем, а также с использованием системно-динамического подхода и уравнений системной динамики [4, с. 21].

3. Разработать модели и методы для интеллектуальной системы поддержки принятия решений, предназначенной для анализа выполнимости структурно-сложных планов мероприятий с использованием логико-вероятностных моделей, байесовских сетей, системно-динамического подхода, математического аппарата вероятностного анализа безопасности и теории глубоких нейронных сетей.

4. Разработать методики, позволяющие представить проверяемый план в виде иерархической причинно-следственной модели, а также сформировать индикаторы его выполнимости.

5. Создать модели и методы оперативной проверки достижимости целей и выполнимости планов с помощью аппарата динамических графов и моделей представления знаний, отличающихся возможностью анализа планов на длительных временных интервалах в динамике, что позволит своевременно

изменять планы крупномасштабных систем при возникновении их невыполнимости.

6. Разработать постановки задач, моделей и методов для проверки выполнимости структурно-сложного плана мероприятий с использованием системно-динамического подхода. План мероприятий представляется в виде причинно-следственной сети событий, моделируемыми переменными являются показатели, характеризующие выполнение отдельных мероприятий плана, дугами – причинно-следственные связи, существующие между этими показателями. Записывается система дифференциальных уравнений, определяются начальные условия, соответствующие желательным величинам указанных показателей. Если сформированная система уравнений при выбранных начальных условиях имеет решение и оно расположено в заданном диапазоне, то проверяемый структурно-сложный план выполним.

7. Предложить и обосновать методики проведения вычислительных экспериментов, характеризующих возможности применения разработанного математического обеспечения при проверке выполнимости структурно-сложного плана мероприятий по развитию отечественной энергетики.

8. Создать и апробировать проблемно-ориентированную интеллектуальную систему поддержки принятия решений, реализующую основные результаты данного исследования.

3. Постановка задачи

Постановка задачи проверки выполнимости планов функционирования промышленных предприятий и организаций в содержательном и формальном виде приведена в [5–8]. В статье данная постановка распространена на цели крупномасштабных систем и планы по их реализации. Она имеет следующую формулировку.

Разработать модели и методы проверки достижимости целей и выполнимости планов, используемых в крупномасштабных системах на различных временных интервалах в процессе их создания и функционирования; определить возможные причины, препятствующие решению данной задачи и предложить способы их устранения. Решение этой проблемы позволит создать методологическую основу для разработки интеллектуальных систем с целеполаганием, использование которых при управлении крупномасштабными комплексами значительно повысит эффективность их функционирования.

4. Общий подход к решению

Представим проверяемый план в виде дерева, содержащего конъюнктивные и дизъюнктивные вершины. Возможность такого преобразования вытекает из его иерархической структуры (конъюнктивные вершины) и условий выполнения отдельных мероприятий $M_i \in \{M_1, \dots, M_n\}$. Каждой вершине

графа G поставим в соответствие переменную g_i , $i = 1, n$, принимающую значение единица при выполнении мероприятия M_i и значение ноль при его невыполнении. В основу разработанного метода решения положены следующие утверждения.

Утверждение 1. В момент времени $t_0 \in [t_h, t_k]$, план $P(\vec{x}, \vec{u}) \in \{P(\vec{x}, \vec{u})\}$ будет невыполним, если на выходе хотя бы одной цепочки конъюнктивных и/или дизъюнктивных вершин, соединяющей любую терминальную вершину дерева G с его корневой вершиной, выполняется $g_i = 0$ [9, с. 15].

Справедливость данного утверждения вытекает из того, что если хотя бы одно мероприятие плана, входящее в состав конъюнктивной цепочки, не выполнено, то будет не выполнен и весь план, так как в противном случае соответствующую данному мероприятию вершину необходимо исключить из графа как не влияющую на выполнение плана. Это утверждение является необходимым условием выполнимости $P(\vec{x}, \vec{u}) \in \{P(\vec{x}, \vec{u})\}$, утверждающим, что для выполнимости плана должно быть выполнено каждое его мероприятие $M_j \in \{M_1, \dots, M_n\}$, без выполнения которых соответствующее мероприятие $M_j \in \{M_1, \dots, M_n\}$ не выполнимо.

Утверждение 2. Допустим, что в момент времени $t_0 \in [t_h, t_k]$ существуют невыполненные мероприятия $M_j \in \{M_1, \dots, M_n\}$, входящие в состав цепочек дерева G , соединяющих корневую вершину с терминальными. Тогда план $P(\vec{x}, \vec{u}) \in \{P(\vec{x}, \vec{u})\}$ в данный момент времени будет невыполним, если существует не менее одного сечения дерева G , на выходе конъюнктивно-дизъюнктивной цепочки которого $g_i = 0$.

При проектировании и управлении крупномасштабными системами поставленная цель или разработанный для ее выполнения план считаются достигнутыми, если выполнены требования приведенных выше утверждений. Проблема использования такого подхода к проверке выполнимости целей заключается в том, что границы числового диапазона определяются ЛППР, как правило, на основе опыта и интуиции исходя из конъюнктурных соображений с использованием во многом неполных и субъективных представлений о системе изменяющихся во времени причинно-следственных связей, существующих между отдельными индикаторами, при недостаточном учете влияния возмущений окружающей среды и т.д. Все это приводит к тому, что план $P(\vec{x}, \vec{u}) \in \{P(\vec{x}, \vec{u})\}$ может оказаться невыполнимым в отдельные моменты времени, наступление которых весьма трудно предсказать заранее [10, с. 123].

Вышеизложенное позволяет представить основные этапы проверки достижимости целей и выполнимости планов в виде схемы (рис. 1).

Следующая гипотеза формирует достаточное условие для проверки плана при использовании системы индикаторов.

Предложение 1. План $P(\vec{x}, \vec{u}) \in \{P(\vec{x}, \vec{u})\}$ будет достигнут на заданном интервале времени ΔT , если известна система индикаторов его дости-

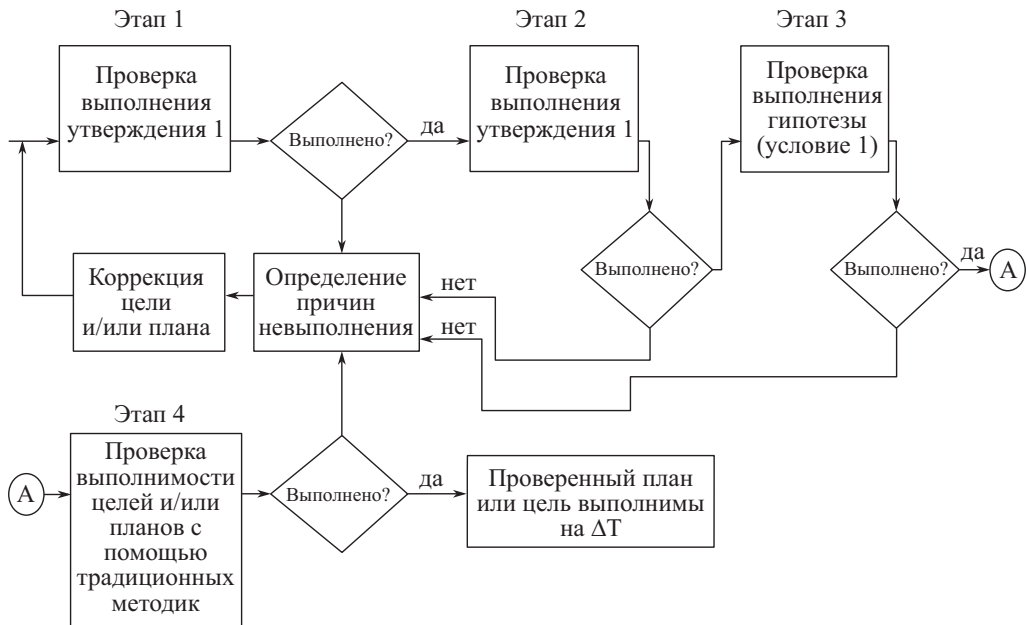


Рис. 1. Основные этапы проверки достижимости целей и выполнимости планов.

жимости l_1, \dots, l_m , для которой выполняется:

$$(1) \quad \exists t_i \in \Delta T : \min l_i \leq l_i \leq \max l_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\min l_i$, $\max l_i$ – нижняя и верхняя граница изменения индикатора l_i соответственно; t – известная константа.

Эта гипотеза широко применяется ЛПР при проверке достижимости целей на различных уровнях иерархии управления крупномасштабными системами. Данное обстоятельство подтверждает возможность ее использования при разработке компьютерной системы с проверкой достижимости целей и выполнимости планов [11, с. 75].

На первом этапе проверяется выполнение утверждения 1; если в конъюнктивных цепочках, соединяющих терминальные вершины с концевой, не выполнено хотя бы одно мероприятие, то цель или план невыполнимы и требуют коррекции. На втором этапе проверяется требование к целям и планам, исключающее возможность одобрения плана, невыполнимого из-за неблагоприятного сочетания событий (утверждение 2). На третьем этапе проверки устанавливается, попадут ли для всех $t_0 \in [t_h, t_k]$ все значения индикаторов $l_1(t_0), \dots, l_m(t_0)$ в допустимый диапазон. При проверке этого условия используется аппарат системной динамики, так как на индикаторы влияет большое число линейных и нелинейных обратных связей, а также изменяющиеся во времени возмущения окружающей среды. На четвертом этапе для проверки достижимости планов и выполнимости целей применяется математический аппарат [12, с. 240].

5. Алгоритм проверки выполнимости плана мероприятий и достижимости цели

Алгоритм 1.

1. Начало алгоритма.

2. На графе $G^*(U, E)$ задать вершину u^* , имеющую нулевую полустепень захода. Эта вершина соответствует вершинам M_1 или Z_1 , характеризующим выполнение плана мероприятий или достижение генеральной цели соответственно.

3. На графе $G^*(U, E)$ задать все вершины $u_{m_0}, u_{k_0}, \dots, u_{l_0} \in U$, которым инцидентна u^* . В формируемую продукционную модель добавить первое условие: план M или цель Z_1 будут выполнены при выполнении мероприятий или целей, соответствующих вершинам $u_{m_0}, u_{k_0}, \dots, u_{l_0}$.

4. Выполнять шаг 2 до тех пор, пока не будут достигнуты вершины графа $G^*(U, E)$ с нулевой полустепенью исхода, полностью построить продукционную модель.

5. Системе продукций поставить в соответствие логическую функцию $f(u_{1k}, \dots, u_{vk})$, принимающую значение 0, если план не выполнен, или 1 в противном случае.

6. Построить схему цифрового дискретного устройства DU (ЦДУ), используемого для определения значений $f(u_{1k}, \dots, u_{vk})$, а также функцию индикатора $f_{ind}(C, C_1)$, характеризующего степень выполнения плана мероприятий или достижения генеральной цели.

7. Подать на вход DU бинарные сигналы, характеризующие выполнение или невыполнение отдельных мероприятий проверяемого плана или целей анализируемой целевой структуры. При $f_{ind}(C, C_1) = 1$ план выполним или цель достижима; если $f_{ind}(C, C_1) = 0$, то необходимо осуществить их коррекцию.

8. Переходя по ветвям распространения нулевых сигналов устройства DU , определить причины невыполнимости плана или недостижимости цели и сообщить о них ЛПР.

9. Определить, выполняются ли условия использования уравнений Колмогорова–Чепмена для расчета вероятности невыполнения плана мероприятий или недостижимости цели. Если нет, то перейти к шагу 10.

10. Определить минимальные сечения $L_i, i = \overline{1, \dots, m}$, характеризующие невыполнение плана или недостижение цели из-за неблагоприятного стечения обстоятельств. Каждое из минимальных сечений характеризует одно из сочетаний относительно малозначимых событий, приводящих в своей совокупности к недостижимости цели и невыполнимости плана.

11. Решая систему линейных однородных уравнений Колмогорова–Чепмена для каждого минимального сечения, определить вероятность осуществления неблагоприятного стечения обстоятельств $P_i, i = \overline{1, \dots, m}$.

12. Если выполняется условие $P_i \geq \varepsilon$, $i = \overline{1, \dots, m}$, то выдать сообщение о высокой вероятности недостижимости цели и невыполнимости плана из-за неблагоприятного сочетания событий L_i , $i = \overline{1, \dots, m}$, выдать рекомендации ЛПР, изменить проверяемую цель или план и перейти к шагу 7.

13. Выбрать систему индикаторов I_i , $i = \overline{1, \dots, h}$, характеризующих выполнимость проверяемого плана или достижимость цели. Определить релевантные связи между индикаторами, которые могут иметь как линейный, так и нелинейный характер. Установить возмущения среды, влияющие на индикаторы.

14. Определить предельные значения индикаторов I_i^* , $i = \overline{1, \dots, h}$, достижение которых означает наличие выполнимости проверяемого плана или реализуемости поставленной цели.

15. Составить систему нелинейных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, характеризующей изменение системы индикаторов во времени с учетом их взаимного влияния и воздействия возмущений среды.

16. Решить систему уравнений одним из численных методов при заданных начальных условиях. Если полученные решения выходят за область, ограниченную I_i^* , $i = \overline{1, \dots, h}$, то выдать сообщение ЛПР, рекомендовать действия, по устранению несоответствия и перейти к шагу 10.

17. Выдать сообщения ЛПР, что проверка не выявила недостижимость цели или невыполнимость плана.

18. Конец алгоритма.

6. Проверка достижимости цели и выполнимости плана мероприятий с использованием системно-динамического подхода и уравнений системной динамики

Рассмотрим особенности реализации отдельных этапов процесса проверки достижимости целей и выполнимости планов крупномасштабной системы на примере плана по устранению последствий наводнений и паводков [13–16]. Постановка задачи имеет следующую формулировку:

Задача 1. Разработать формальные модели и алгоритмы, позволяющие на временном интервале $t \in [t_0; t_N]$ определить, не выходят ли индикаторы достижимости цели $X_i(t, a(t), p(t))$, $i = \overline{1, n}$ за заданные пределы, т.е. $X_i(t, a(t), p(t)) \geq X_i^{\min}$, $i = \overline{1, n}$. Если данное выражение не выполняется хотя бы для одного индикатора, то план считается невыполнимым из-за невозможности достигнуть требуемой величины данного показателя.

Значение индикаторов определяется из решения системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_i(t, p(t), a(t))}{dt} = f(t, a(t), X_1(t, p(t)), \dots, X_n(t, p(t))), \quad i = \overline{1, n}$$

при ограничениях $t > 0, 0 < X_i(t, a(t), p(t)) \leq M_{\max}^{X_i}, i = \overline{1, n}$, где X_i^* – рекомендуемые значения характеристик последствий наводнения, $X_i(t, a(t), p(t)), i = \overline{1, n}$ – характеристики последствий наводнения, влияющие на величину ущерба, γ_i – весовой коэффициент i -й характеристики, $a(t)$ – вектор параметров внешней среды.

6.1. Математическая модель

Объект моделирования описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

$$(2) \quad \frac{dX_i(t, a(t), p(t))}{dt} = f_i^+(F_1, \dots, F_m) - f_i^-(F_1, \dots, F_m), \quad i = \overline{1, n},$$

где $f^+_i, f^-_i, i = \overline{1, n}$ – темпы, непрерывные или кусочно-непрерывные функции, определяющие положительную и отрицательную скорость изменения значения системной переменной $X_i(t, a(t), p(t)), i = \overline{1, n}$. Функции $f^+_i, f^-_i, i = \overline{1, n}$ – это функции от факторов $F_j, j = \overline{1, m}$, при этом F_j могут быть системными переменными или параметрами внешней среды.

Релевантные взаимосвязи между переменными модели показаны на ориентированном графе причинно-следственных связей (рис. 2).

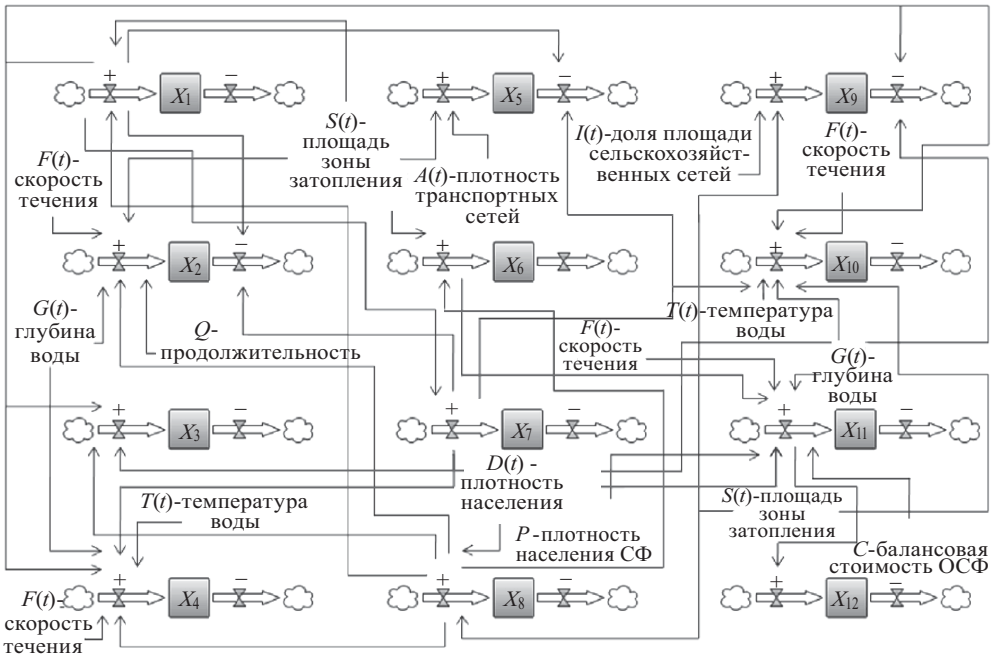


Рис. 2. Причинно-следственные связи между переменными модели.

Предположим, что функции правой части (2) имеют вид

$$f_i^{+/-}(F_1, \dots, F_n) = \sum_{l=1}^n k_{i,l}^{+/-} \prod_{j=1}^n f_{i,l}^{F_j}(F_j),$$

где коэффициенты $k_{i,l}^{+/-}$, $i = \overline{1, 12}$ определяются на этапе адаптации модели к объекту исследования. Допустим также, что коэффициенты $k_{i,l} = 0$, $l = \overline{1, m-1}$, $k_{i,l} \neq 0$, $l = m$, $k_{i,l} = 0$, $l = \overline{m+1, n}$, тогда это выражение примет вид $f_i^{+/-}(F_1, \dots, F_n) = k_i^{+/-} \prod_{j=1}^n f_i^{F_j}(F_j)$ – системные переменные или параметры внешней среды.

С учетом вышеизложенного и исходя из анализа графа причинно-следственных связей разрабатываемая математическая модель будет иметь общий вид:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_1(t)}{dt} = k_1^+ f_1^S(S(t)) f_1^{X_8}(X_8(t)), \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = k_2^+ F(t) G(t) t f_2^S(S(t)) f_2^{X_8}(X_8(t)) - k_2^- f_2^{X_1}(X_1(t)) f_2^{X_7}(X_7(t)), \\ \frac{dX_3(t)}{dt} = k_3^+ f_3^{X_8}(X_8(t)) f_3^{X_1}(X_1(t)) f_3^{X_7}(X_7(t)), \\ \frac{dX_4(t)}{dt} = k_4^+ F(t) G(t) T(t) f_4^{X_8}(X_8(t)) f_4^{X_7}(X_7(t)) f_4^{X_1}(X_1(t)), X_1(t), \\ \frac{dX_5(t)}{dt} = k_5^+ A(t) f_5^S(S(t)) - k_5^- f_5^{X_1}(X_1(t)) f_5^{X_7}(X_7(t)), \\ \frac{dX_6(t)}{dt} = k_6^+ f_6^S(S(t)) f_6^{X_8}(X_8(t)), \\ \frac{dX_7(t)}{dt} = k_7^+ f_7^{X_1}(X_1(t)), \\ \frac{dX_8(t)}{dt} = k_8^+ D(t) f_8^S(S(t)) - k_8^- f_8^{X_4}(X_4), \\ \frac{dX_9(t)}{dt} = k_9^+ I(t) f_9^S(S(t)) - k_9^- f_9^{X_1}(X_1(t)) f_9^{X_7}(X_7(t)), \\ \frac{dX_{10}(t)}{dt} = k_{10}^+ F(t) G(t) T(t) f_{10}^S(S(t)) f_{10}^{X_1}(X_1(t)) f_{10}^{X_7}(X_7(t)), \\ \frac{dX_{11}(t)}{dt} = k_{11}^+ PCF(t) G(t) D(t) f_{11}^S(S(t)) f_{11}^{X_6}(X_6(t)), \\ \frac{dX_{12}(t)}{dt} = k_{12}^+ f_{12}^{X_{11}}(X_{11}(t)), \end{array} \right.$$

где $f_j^{X_i}$ – функциональная зависимость системной переменной $X_j(t)$ от системной переменной X_i , а f_j^S – зависимость X_j от $S(t)$, $i, j = \overline{1, 12}$. Если не существуют готовые формулы, устанавливающие зависимость между системными переменными, то для определения функциональных зависимостей $f_j^{X_i}$ и f_j^S на основе статистических данных экспертами или разработчиками математического обеспечения строятся кусочно-линейные функции, которые, как показывает практика, могут быть аппроксимированы полиномами.

С учетом полиномов вспомогательных зависимостей математическая модель примет следующий вид:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} &= \frac{1}{X_1^{\max}} (k_1^+ (0,001S^3(t) - 0,04S^2(t) + 0,6S(t) - 2,1) \times \\ &\times (54X_8^4(t) - 137X_8^3(t) + 103,4X_8^2(t) - 20,7X_8(t) + 1,2)), \\ \frac{dX_2(t)}{dt} &= \frac{1}{X_2^{\max}} (kt(-0,02S^3(t) + 0,64S^2(t) - 6,4S(t) + 21)(-14,5X_8^2(t) + \\ &+ 22,5X_8(t) - 3,3) - k_2^- (0,57X_1^2(t) + 0,276X_1(t) + 0,05) \times \\ &\times (-3,3X_7^2(t) + 5,6X_7(t) - 0,13)), \\ \frac{dX_3(t)}{dt} &= \frac{1}{X_3^{\max}} (k_3^+ (3,28X_8^2(t) - 23,31X_8(t) + 12,3)(-1,26X_1^2(t) + \\ &+ 10,1X_1(t) - 17,8)(-0,33X_7^2 + 2,2X_7 - 0,26)), \\ \frac{dX_4(t)}{dt} &= \frac{1}{X_4^{\max}} (k_4^+ F(t)G(t)T(t)(-1,3X_8^4(t) + 1,92X_8^3(t) - 0,95X_8^2(t) + \\ &+ 0,3X_8(t) + 0,7)(-0,42X_7^4(t) - 7,19X_7^3(t) + 19,34X_7^2(t) - 15,1X_7(t) + \\ &+ 4,435)(X_1^3(t) - X_1^2(t) + 1,5X_1(t) + 0,02)), \\ \frac{dX_5(t)}{dt} &= \frac{1}{X_5^{\max}} (k_5^+ A(t)(0,01S^2(t) - 0,1S(t) + 0,5) - k_5^- (0,217X_1^2(t) - \\ &- 0,505X_1(t) + 0,3(-0,304X_7^2(t) + 1,1X_7(t) + 0,26))), \\ \frac{dX_6(t)}{dt} &= \frac{1}{X_6^{\max}} (k_6^+ (0,002S^2(t) + 0,056S(t) + 0,48)(-0,05X_8^3(t) + \\ &+ 0,9X_8^2(t) - 0,02X_8(t) + 0,23)), \\ \frac{dX_7(t)}{dt} &= \frac{1}{X_7^{\max}} (k_7^+ (3,5X_1^3(t) - 5,3X_1^2(t) + 3,27X_1(t) + 0,0003)), \\ \frac{dX_8(t)}{dt} &= \frac{1}{X_8^{\max}} (k_8^+ D(t)(0,18S^3(t) - 0,06S^2(t) + 0,77S(t) - 1,77) - \\ &- k_8^- (2,17X_4^2(t) - 0,0024X_4(t) + 0,16)), \\ \frac{dX_9(t)}{dt} &= \frac{1}{X_9^{\max}} (k_9^+ I(t)(0,002S^2(t) + 0,07S(t) + 0,5) - k_9^- (0,43X_1^3(t) - \\ &- 2,3X_1^2(t) + 3,2X_1(t) - 0,07)(1,15X_7^3(t) - 1,78X_7^2(t) + 0,93X_7(t) - 0,024)), \\ \frac{dX_{10}(t)}{dt} &= \frac{1}{X_{10}^{\max}} (k_{10}^+ F(t)G(t)T(t)(-0,0007S^4(t) + 0,03S^3(t) - 0,46S^2(t) + \\ &+ 2S(t) - 0,4)(0,25X_1^3(t) - 1,24X_1^2(t) + 2,04X_1(t) - 0,049) \times \\ &\times (10,9X_7^3(t) - 26,57X_7^2(t) + 16,7X_7(t) - 0,515)), \\ \frac{dX_{11}(t)}{dt} &= \frac{1}{X_{11}^{\max}} (k_{11}^+ PCF(t)G(t)D(t)(-0,0005S^3(t) + 0,02S^2(t) - \\ &- 0,01S(t) + 0,4)(-3,5X_6^3(t) + 7,8X_6^2(t) - 2,7X_6(t) + 0,25)), \\ \frac{dX_{12}(t)}{dt} &= \frac{1}{X_{12}^{\max}} (k_{12}^+ (-45,3X_{11}^4(t) + 111,95X_{11}^3(t) - 84,07X_{11}^2(t) + 20,04)), \end{aligned} \right.$$

где $t_0 = 1$, $X_i(t_0) = X_{i0}$, $i = \overline{1, 12}$.

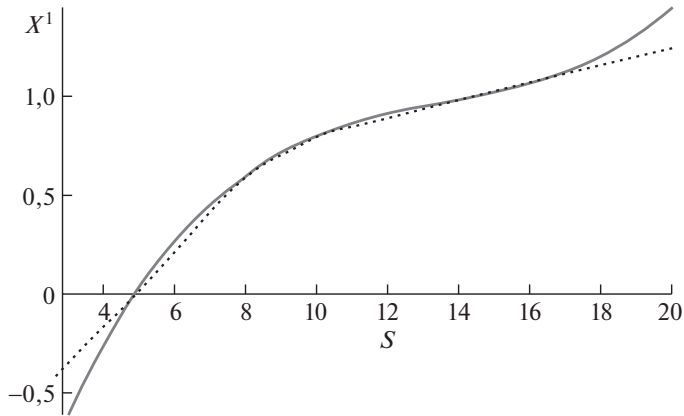


Рис. 3. Графики кусочно-линейной функции и полинома для f_1^S .

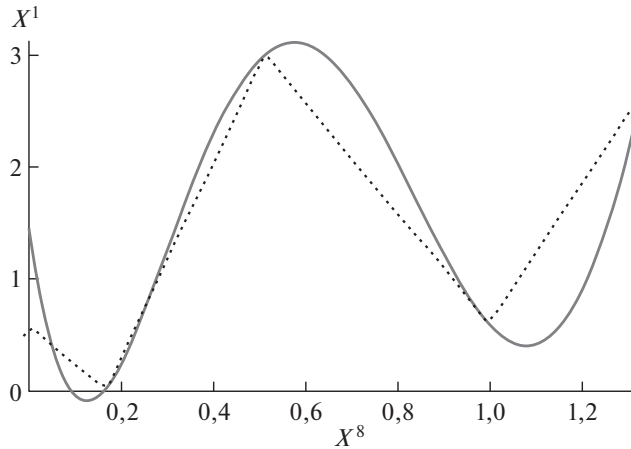


Рис. 4. Графики кусочно-линейной функции и полинома для $f_1^{X^8}$.

Система дифференциальных уравнений (4) представляет собой задачу Коши, она может быть решена одним из численных методов. Для удобства представления полученных результатов моделируемые характеристики системы нормировались относительно максимальных значений.

Используя статистические данные по наводнению, происшедшему в Приморье в 2001 г., построим полиномы вспомогательных зависимостей $f_j^{X_i}$ и f_j^S .

На рис. 3 и 4 представлены построенные полиномы

$$f_1^S = 0,001S^3(t) - 0,04S^2(t) + 0,6S(t) - 2,1 \text{ и}$$

$$f_1^{X^8} = 54X_8^4(t) - 137X_8^3(t) + 103,4X_8^2(t) - 20,7X_8(t) + 1,9$$

для функциональных зависимостей f_1^S и $f_1^{X^8}$ соответственно.

Разработанные математические модели позволяют решить задачу 1, как это показано при описании модельного примера.

7. Модельный пример

Используем построенную модель для проверки выполнимости плана по ликвидации последствий наводнений и паводков.

Для уменьшения потерь от их возникновения в различных регионах России разработан план, верхний уровень которого приведен на рис. 5.

Пример 1. Для достижения большей наглядности примем, что проверка выполнимости плана проводится на интервале машинного времени $[0; 1]$, в качестве индикаторов выполнимости выбраны нормированные величины переменных модели $X_i(t)$, $i = \overline{1, 13}$. Результаты решения системы уравнений при начальных условиях $X_i(t_0) = 0,5$; $i = \overline{1, 13}$ приведены на рис. 6. Они показывают, что план мероприятий оказывается невыполнимым в момент машинного времени $t = 0,56$. На остальном временном интервале проверяемый план выполним. Минимальные значения индикаторов, при которых план будет выполнимым, показаны на рис. 6 серыми линиями, текущие значения индикаторов – черными линиями. На рис. 7 приведены результаты проверки выполнимости трех альтернативных планов ликвидации последствий наводнений и паводков, указаны моменты времени, когда эти планы являются выполнимыми, невыполнимыми и когда существует опасность невыполнения плана.

Проверки выполнимости различных планов ликвидации последствий наводнений показывают, что при решении задач управления крупномасштабными системами необходимо обязательно проверять на выполнимость план, реализующий наиболее предпочтительную стратегию управления. Этот план



Рис. 5. План мероприятий по ликвидации последствий наводнений.

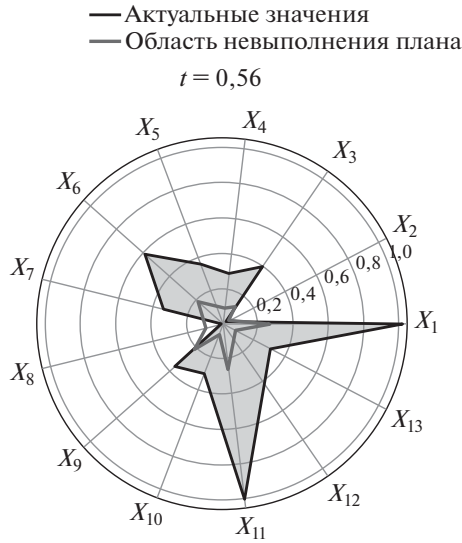


Рис. 6. Выполнимость плана мероприятий в различные моменты машинного времени.

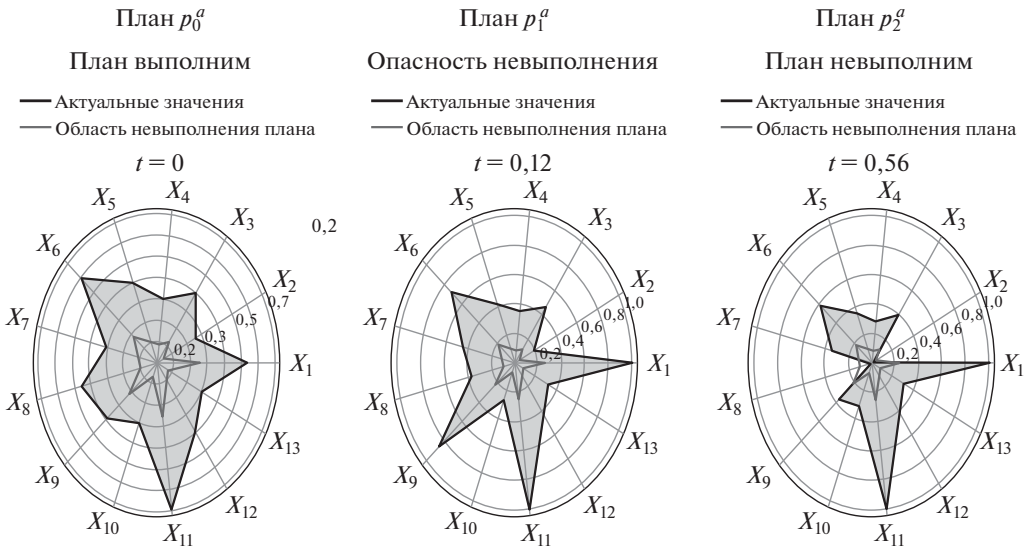


Рис. 7. Проверка выполнимости планов по ликвидации последствий наводнений.

должен быть обязательно выполним в любой точке рассматриваемого интервала времени. При отсутствии выполнимости плана хотя бы в одной точке предпочтение следует отдать стратегии управления, план реализации которой будет выполним на всем временном интервале управления.

8. Заключение

Разработаны модели и методы проверки достижимости целей и выполнимости планов, осуществляемых при управлении крупномасштабными системами в процессе их развития. Предложен и обоснован алгоритм анализа достижимости комплекса целей и планов, реализуемых при управлении этими системами. Сформированы утверждения и гипотезы, позволяющие машинным способом проверить выполнимость планов. Приведен модельный пример, подтверждающий возможность проверки выполнимости планов при ликвидации последствий наводнения с помощью разработанных моделей и методов.

В процессе управления развитием крупномасштабных систем целесообразно использовать контуры управления, осуществляющие проверку достижимости поставленных целей и выполнимости планов на выбранном интервале времени. При отсутствии данной проверки выбранная траектория развития крупномасштабной системы в отдельные моменты времени может оказаться нереализуемой, что приведет к срыву выполняемых работ, а также к значительным затратам человеческих, финансовых, технических и других видов ресурсов на реализацию заведомо невыполнимых планов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев С.Н.* От классических задач регулирования к интеллектуальному управлению I // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2001. № 1. С. 5–22.
2. *Пупков К.А., Воронов Е.М., Коньков В.Г.* Методы классической и современной теории автоматического управления. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. С. 252.
3. *Кушников В.А., Резчиков А.Ф., Цвиркун А.Д.* Управление в человеко-машинных системах с автоматизированной процедурой коррекции целей // АИТ. 1978. № 7. С. 168–175.
4. *Панов А.И.* Целеполагание и синтез плана поведения когнитивным агентом // Искусственный интеллект и принятие решений. 2018. № 2. С. 21–35.
5. *Склемин А.А., Кушников В.А.* Анализ выполнимости планов мероприятий при управлении промышленным предприятием // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. 2012. № 4 (24). С. 18.
6. *Склемин А.А., Кушников В.А., Резчиков А.Ф.* Модели и алгоритмы проверки выполнимости планов мероприятий при управлении промышленным предприятием // Вестник СГТУ. 2012. Т. 3. № 1 (67). С. 145.
7. *Пшеничников И.С., Кушников В.А., Шлычков Е.И., Резчиков Д.Ф.* Анализ выполнимости планов мероприятий в системе автоматизированного управления мостостроительной организацией // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 11. С. 45.
8. *Щербаков М.А., Кушников В.А.* Анализ выполнимости деревьев целей при управлении информационной безопасностью предприятий и организаций // Вестник СГТУ. 2013. № 4 (73). С. 136.
9. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. М.: МПСИ. 2005. № 2. С. 15–23.

10. Белов М.В., Новиков Д.А. Управление жизненными циклами организационно-технических систем. М.: URSS, ООО «ЛЕНАНД». 2020. № 2. С. 123–153.
11. Цвиркун А.Д., Резчиков А.Ф., Кушников В.А., Иващенко В.А., Фильмонок Л.Ю., Богомолов А.С., Хамутова М.В. Управление процессом ликвидации последствий наводнений на промышленных объектах и территориях // Управление большими системами: сборник трудов. 2020. № 83. С. 75–106.
12. Бродский Ю.И. Лекции по математическому и имитационному моделированию // Ю.И. Бродский. М.-Берлин: Директ-Медиа, 2015. С. 240.
13. Гейда А.С., Лысенко И.В. Оценивание показателей операционных свойств систем и процессов их функционирования // Труды СПИИ РАН. 2013. № 2 (25). С. 317–337.
14. Давтян А.Г., Шабалина О.А., Садовникова Н.П., Парыгин Д.С. Моделирование нарративного управления в социально-экономических системах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Приборостроение. 2022. № 1 (138). С. 85–99.
15. Яхнин Е.Д. Проблема целеполагания // Вопросы философии. 2020. № 5. С. 5–11.
16. Костюк Ф.В. От вычисления показателей боевой эффективности до теории исследования операций и неантагонистических игр: научное наследие профессора Юрия Борисовича Гермейера // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 2. С. 30–40.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 26.05.2023

После доработки 18.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

© 2023 г. Е.Н. ХОБОТОВ, д-р техн. наук (e_khobotov@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)
Е.Е. АВЕРЬЯНОВА (ail19@yandex.ru)
(ООО «Фирма Резерв-Инвест», Москва)

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ СКЛАДОВ

Рассматриваются задачи управления многономенклатурными запасами в иерархических системах складов при постоянном спросе в условиях ограниченной вместимости складов. Снабжение системы складов может производиться несколькими поставщиками. Для решения этих задач предлагаются модели и методы, позволяющие в соответствии с имеющимся спросом определять время и величину пополнения всех складов, находящихся на различных уровнях такой системы складов.

Ключевые слова: запасы, иерархические системы складов, спрос на продукцию, пополнение запасов, снабжение складов, методы управления запасами, оптимизация, многономенклатурные запасы, дефицит продукции.

DOI: 10.31857/S0005231023120061, EDN: NGDIUW

1. Введение

Повышенный интерес в последнее время начинают вызывать задачи управления многономенклатурными запасами в иерархических системах складов и методы их решения. Это обусловлено тем, что с использованием таких систем складов часто организуется и производится снабжение регионов продукцией, лекарствами, запасными частями, особенно автомобильными и т.д. Поставляемая продукция сначала доставляется на склады «верхнего» уровня, а затем с этих складов поставляется на остальные склады системы.

Для управления запасами на отдельных складах были разработаны достаточно эффективные модели и методы [1–5]. Определение подходящих параметров управления запасами с их использованием позволяет экономить заметные средства при хранении и пополнении запасов на складах.

Однако методы и модели управления запасами для иерархических систем складов развиты недостаточно, хотя в таких системах, как правило, хранятся большие запасы продукции, и осуществляется ее значительный оборот.

В связи с этим есть основания полагать, что создание моделей и методов для управления запасами в таких системах складов позволит экономить значительные средства на содержание и пополнение запасов.

В данной работе рассматриваются задачи управления запасами в иерархических системах складов, снабжаемых различными поставщиками, в услови-

ях постоянного спроса на хранимую продукцию, а также с учетом ограничений на вместимость складов. Для решения этих задач предлагаются модели и методы, позволяющие в соответствии с имеющимся спросом на продукцию определять время и объемы пополнения всех складов, находящихся на различных уровнях такой системы складов.

2. Постановки задач

Рассмотрим постановки задач управления многономенклатурными запасами в иерархических системах складов, для расчетов которых в данной работе предлагаются специальные модели и методы.

Пусть задана иерархическая система складов, которую можно представить в виде ациклического графа. В вершине такого графа находится склад первого уровня, который снабжается продукцией напрямую от K внешних поставщиков. На этом складе хранится поступающая в систему продукция, которая с него доставляется на склады второго уровня. Со складов второго уровня продукция доставляется на склады третьего уровня и т.д. Каждый склад следующего уровня снабжается только с одного склада предыдущего уровня. Для каждого снабжаемого склада системы известен снабжающий его склад. Назначение снабжающего склада может производиться как по стоимости доставки продукции между складами, так и по составу поставляемой продукции. На каждом уровне этой системы кроме первого имеются склады, с которых не производится снабжение складов следующего уровня. На втором уровне системы складов имеется M_2 складов. На j -м уровне системы находится M_j складов и на последнем N -м уровне системы складов находится M_N складов. Вместимость каждого склада такой системы ограничена. Для более эффективного использования складов с учетом их ограниченной вместимости пополнения запасов от разных поставщиков не следует проводить в одно время.

Со снабжающих складов каждого уровня кроме пополнения запасов производится снабжение розничных клиентов склада. Для каждого склада, находящегося на любом уровне системы складов, задана стоимость хранения на нем единицы продукции в единицу времени. Заданы также стоимости доставки продукции с любого снабжающего склада на снабжаемый склад, которые не зависят от величины пополнения. В задачах управления запасами [2–5] такое предположение достаточно часто используется.

Пусть спрос на хранящуюся продукцию на любом складе такой системы постоянен. В этом случае для системы складов удастся предложить методы управления запасами, которые позволят обеспечить бездефицитную работу складов.

В связи с этим в задаче с постоянным спросом на продукцию каждого типа требуется для каждого склада такой системы складов определить интервалы времени между смежными пополнениями запасов, а также величину каждого пополнения запасов. Величины этих параметров требуется определить таким образом, чтобы затраты на доставку и пополнение запасов были бы по

возможности меньше и ни на одном из складов в иерархической системе не возникал бы дефицит продукции.

Здесь следует отметить, что в настоящее время наиболее часто встречаются трехуровневые складские системы, у которых на первом уровне находится региональный склад, с которого остальные склады системы получают всю доставляемую на него продукцию. На втором уровне находятся районные склады, а на третьем уровне – магазины, ремонтные мастерские, автосервисы и т.д.

3. Случай ограничений на вместимость складов при наличии нескольких поставщиков продукции

Рассмотрим принципы построения моделей для управления запасами при наличии ограничений на вместимость складов и нескольких поставщиков продукции.

Принципы построения таких моделей удобно рассматривать на примере простейшей задачи управления запасами на складе, когда имеется два поставщика, и каждый поставщик поставяет продукцию только одного типа. Спрос на продукцию каждого типа на этом складе постоянный. Полностью такая задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть имеется склад, на котором количество мест для хранения запасов ограничено некоторой величиной Q . На складе хранится продукция двух типов, которая не является штучной. Спрос на продукцию первого типа r_1 , которую поставяет первый поставщик в единицу времени и спрос на продукцию второго типа r_2 , которую поставяет второй поставщик в единицу времени, являются постоянными. Известны стоимость хранения единицы продукции первого типа C_1 и второго типа C_2 в единицу времени. Во всех местах, предназначенных для хранения продукции, может храниться продукция этих двух типов. Известны также стоимость доставки на склад пополнения запасов первого типа \tilde{C}_1 и второго типа \tilde{C}_2 , которые не зависят от величины пополнения. Поставки пополнения запасов от разных поставщиков не должны происходить в одно время.

В задаче требуется определить время между смежными пополнениями запасов и величину этих пополнений так, чтобы затраты на хранение и пополнение запасов были бы минимальными, а величина хранимых на складе запасов не превышала бы вместимость склада Q .

Графическое представление процессов пополнения запасов от двух поставщиков и их расхода в условиях постоянного спроса приведено на рис. 1.

Из графического представления процессов накопления и расхода запасов, приведенного на рис. 1, видно, что в течение любого интервала времени между смежными пополнениями запасов, когда эти интервалы равны, затраты $d(t)$ на хранение и пополнение запасов будут

$$(3.1) \quad d(t) = \left(\frac{C_1 r_1 t^2}{2} + \tilde{C}_1 + \frac{C_2 r_2 t^2}{2} + \tilde{C}_2 \right).$$

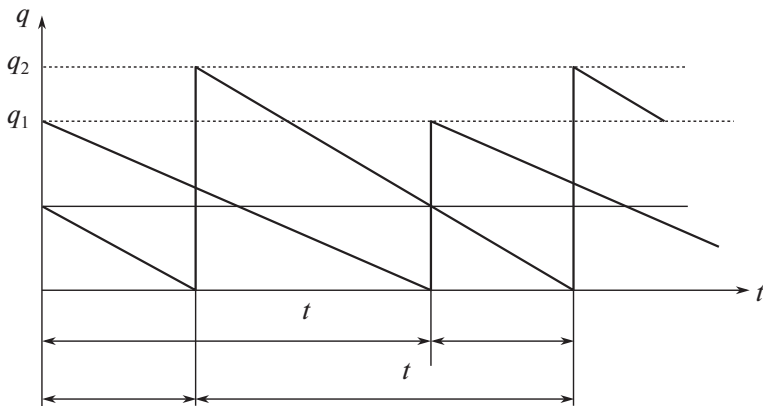


Рис. 1. Графическое представление процессов накопления и расхода запасов на складе от двух поставщиков.

Это справедливо, поскольку при постоянном спросе затраты на хранение каких-либо запасов, которые «выходят» из интервала времени t_s , будут равны затратам на хранение запасов этого же типа, остатки которых будут израсходованы в этом же интервале времени t .

Пусть в течение планируемого интервала времени T произойдет n пополнений склада от какого-либо поставщика. Тогда затраты на хранение и пополнение запасов на складе будут

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad D(t) &= nd(t) = \left(\frac{C_1 r_1 t^2}{2} + \tilde{C}_1 + \frac{C_2 r_2 t^2}{2} + \tilde{C}_2 \right) n = \\
 &= \left(\frac{(C_1 r_1 + C_2 r_2) t^2}{2} + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \right) \frac{T}{t} = \\
 &= \frac{(C_1 r_1 + C_2 r_2) t T}{2} + \frac{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) T}{t}.
 \end{aligned}$$

Графически функцию затрат $D(t)$ можно представить в виде, как показано на рис. 2. Эта функция является строго выпуклой и непрерывно дифференцируемой функцией t .

Если бы ограничений на вместимость склада не было, то величину интервала времени между смежными пополнениями запасов t_s целесообразно выбирать из условия минимума затрат на хранение и пополнения запасов на складе. Условие минимума функции (3.1) без учета ограничения на вместимость склада имеет вид:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{(C_1 r_1 + C_2 r_2) T}{2} - \frac{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) T}{t^2} = 0.$$

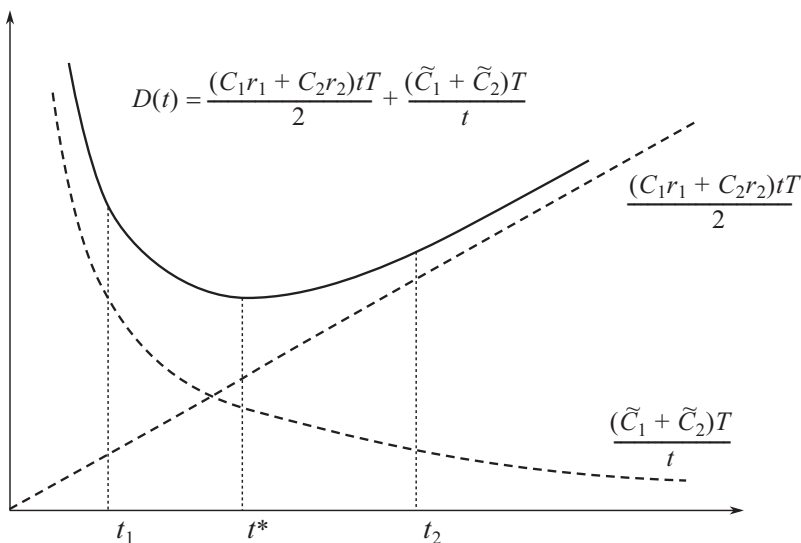


Рис. 2. Функция затрат $D(t)$ на хранение и пополнение запасов.

Из этого соотношения определяется оптимальное значение интервала времени между смежными пополнениями запасов

$$t^* = \sqrt{\frac{2(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)}{(C_1 r_1 + C_2 r_2)}}.$$

В данной задаче, однако, присутствуют ограничения на вместимость склада Q , которую хранящиеся запасы не должны превышать. Из графического представления процессов накопления и расхода запасов, приведенного на рис. 1, также видно, что количество продукции на складе увеличивается в моменты пополнения запасов. Это справедливо, поскольку перед каждым пополнением склада величина запасов может только уменьшаться. В момент пополнения величина запасов на складе увеличивается, а после пополнения величина запасов будет только уменьшаться до следующего пополнения. Поэтому величины запасов на складе оказываются больше в моменты пополнения склада, чем в течение интервалов времени между пополнениями склада.

В связи с этим величины запасов q_1 и q_2 на складе не должны превышать вместимость склада Q в моменты его пополнения соответственно от первого и от второго поставщиков, т.е. в эти моменты должны выполняться следующие условия: $q_1 \leq Q$ и $q_2 \leq Q$. Определим величины q_1 и q_2 .

Пусть после пополнения запасов от первого поставщика через интервал времени τ_1 производится поставка пополнения запасов от второго поставщика, а время между смежными пополнениями запасов от каждого поставщика равно t_s . Тогда величины запасов на складе в моменты пополнения запасов

склада от первого q_1 и от второго q_2 поставщиков соответственно равны:

$$\begin{aligned}q_1 &= r_1 t_s + r_2 \tau_1, \\q_2 &= (r_1 + r_2) t_s - r_1 \tau_1, \\ \tau_1 &< t_s.\end{aligned}$$

Из соотношений для определения q_1 и q_2 видно, что чем меньше будет величина t_s , тем меньше будут и величины q_1 , q_2 . Из этих соотношений также видно, что при увеличении τ_1 величина q_1 будет увеличиваться, а величина q_2 уменьшаться. Поэтому для более эффективного использования вместимости склада величину τ_1 целесообразно выбирать таким образом, чтобы q_1 было равно q_2 . Кроме того, величины q_1 и q_2 должны удовлетворять следующим ограничениям: $q_1 \leq Q$ и $q_2 \leq Q$. Из условия $q_1 = q_2$ определяется величина τ_1

$$\tau_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} t_s.$$

Из условия, что при $q_1 = q_2$ будут выполняться ограничения $q_1 \leq Q$ и $q_2 \leq Q$, определяется величина t_s , которая должна удовлетворять неравенству:

$$t_s \leq \frac{(r_1 + r_2) Q}{(r_1 r_2 + r_2^2 + r_1^2)}.$$

Если величина t_s (рис. 2) окажется больше t^* , то в качестве решения \check{t} выбирается величина t^* . Такой выбор справедлив, поскольку в этой точке значение функции $D(t^*)$ окажется меньше, чем $D(t_s)$.

Если величина t_s окажется меньше t^* , то в качестве решения \check{t} выбирается величина t_s , поскольку в этой точке значение функции $D(t_s)$ из-за ее непрерывности и строгой выпуклости будет минимальным среди допустимых значений t . При такой величине \check{t} запасы не превысят вместимость склада.

Поэтому решение задачи минимизации функции $D(t)$ при наличии ограничения на вместимость склада можно записать в следующем виде:

$$\check{t} = \min \{t^*, t_s\}.$$

После определения величины \check{t} с помощью приведенного выше соотношения следует пересчитать величину τ_1 .

Здесь хотелось бы отметить, что вывод соотношений для определения параметров управления запасами при наличии многих поставщиков продукции не имеет принципиальных отличий от случая двух поставщиков при выводе таких соотношений для складов и иерархических систем складов. Однако наличие многих поставщиков продукции приводит к громоздкому виду таких соотношений даже для систем складов с малым количеством уровней, небольшим количеством складов на них и при нескольких типах хранимой продукции. Поэтому далее будут рассматриваться задачи только с двумя поставщиками продукции для пополнения запасов.

4. Построение методов управления запасами в иерархических системах складов

Рассмотрим идеи и принципы построения модели управления запасами для иерархической системы складов, когда спрос на продукцию, хранящуюся на каждом складе и реализуемую с него, постоянный, а пополнение запасами следует организовать так, чтобы не допустить дефицита продукции и превышения вместимости каждого склада.

Основные идеи и принципы вывода соотношений для определения параметров управления запасами в иерархической системе складов с ограничениями на их вместимость удобно рассмотреть на примере самой простой схемы такой системы. Пусть схема этой системы состоит из двух складов, на которых хранится продукция двух типов, не являющаяся штучной. Продукция каждого типа поступает на первый склад от своего поставщика. Этот склад является снабжающим и с него пополняют запасы на другом складе, который назовем вторым. Продукция от каждого поставщика не должна поступать на первый склад в одно время.

Пусть для такой системы складов известны стоимости хранения на первом складе единицы продукции от первого поставщика в единицу времени C_{11} и от второго поставщика в единицу времени C_{12} . На продукцию первого склада, поставляемую от первого и второго поставщиков, имеется постоянный спрос r_{11} и r_{12} соответственно в единицу времени. С первого склада производится также снабжение хранимой продукцией второго склада. Для второго склада тоже известны стоимости хранения единицы продукции соответственно C_{21} от первого и C_{22} от второго поставщиков в единицу времени и постоянный спрос r_{21} и r_{22} в единицу времени на продукцию и соответственно от первого и от второго поставщиков. Количество продукции, поставляемое и находящееся на первом и втором складах, не должно превышать вместимости этих складов соответственно Q_1 и Q_2 .

В задаче требуется определить моменты времени между смежными пополнениями запасов на этих складах, чтобы при постоянном спросе на хранящуюся продукцию сократить затраты на хранение и пополнение запасов и при этом обеспечить отсутствие дефицита продукции на складах.

Здесь следует отметить, что в случае, когда между смежными пополнениями снабжающего склада будет производиться не целое количество пополнений снабжаемого склада, то вряд ли удастся создать эффективную систему управления запасами для этих складов. Дело в том, что в этом случае перед каждым пополнением снабжающего склада на снабжаемом складе будет находиться разное количество запасов. Это приведет к необходимости определять величину запасов на снабжаемом складе перед каждым пополнением снабжающего склада и с учетом этой величины определять пополнение снабжающего склада. В условиях постоянного спроса и двух складов, на которых хранится продукция одного типа, задача такого отслеживания запасов может решаться без значительных затруднений.

Однако для снабжающего склада системы, на котором хранится продукция многих типов и с которого снабжаются несколько складов, решение подобной задачи представляет весьма непростую проблему. Для иерархической системы складов, имеющей несколько уровней со многими складами, на каждом из которых хранится продукция многих типов, решение такой задачи уже становится очень сложной проблемой.

Если же между смежными пополнениями снабжающего склада будет производиться целое количество пополнений снабжаемых складов, то после пополнениями снабжающего склада ситуация на снабжаемых складах при постоянном спросе будет повторяться. Это существенно упрощает проблему построения системы управления запасами для таких складов. Поэтому пополнение продукции на снабжаемых складах предлагается организовывать таким образом, чтобы продукция, хранимая на них, заканчивалась к моменту пополнения запасов на снабжающем складе. Время между смежными пополнениями снабжающего склада t_1 в таком случае можно представить в виде $t_1 = n_i t_i$, где n_i – целое число, которое в соответствии с приведенным выше условием для снабжающего склада должно быть больше или равно 2, т.е. $n_i \geq 2$, t_i – время между смежными пополнениями i -го снабжаемого склада.

Для определения параметров управления запасами в этой системе рассмотрим сначала затраты $D_2(t_2)$ на хранение и пополнение запасов в течение некоторого планируемого интервала времени T на втором складе. Эти затраты согласно (3.1) и (3.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$(4.1) \quad D_2(t_2) = \frac{(C_{21}r_{21} + C_{22}r_{22})t_2T}{2} + \frac{(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22})T}{t_2}.$$

Оптимальная величина времени t_2^* между смежными пополнениями запасов без учета ограничения на вместимость второго склада определяется, как уже отмечалось, из условия минимума функции $D_2(t_2)$ из (4.1), который достигается при равенстве нулю производной, и имеет следующий вид:

$$(4.2) \quad t_2^* = \sqrt{\frac{2(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22})}{(C_{21}r_{21} + C_{22}r_{22})}}.$$

Однако в этом случае, как и в задаче, описанной в третьем пункте, вместимость второго склада ограничена.

Пусть после пополнения запасов на втором складе с первого продукцией от первого поставщика через интервал времени τ_{21} производится поставка пополнения запасов от второго поставщика, а время между смежными пополнениями запасов от каждого поставщика равно t_{2s} .

Величины запасов на втором складе в моменты пополнения его запасов продукцией от первого q_{21} и от второго q_{22} поставщиков соответственно равны:

$$q_{21} = r_{21}t_s + r_{22}\tau_{21}, \quad q_{22} = (r_{21} + r_{22})t_{2s} - r_{21}\tau_{21}, \quad \tau_{21} < t_{2s}.$$

Из условия равенства $q_{21} = q_{22}$ и ограничений $q_{21} \leq Q_2$, $q_{22} \leq Q_2$ по аналогии с тем, как это было сделано ранее, определяется величина τ_{21} и ограничение на величину t_{2s}

$$\tau_{21} = \frac{r_{22}}{r_{21} + r_{22}} t_{2s}, \quad t_{2s} \leq \frac{(r_{21} + r_{22}) Q_2}{(r_{21} r_{22} + r_{22}^2 + r_{21}^2)}.$$

Поэтому, как и в ранее рассмотренном случае, если величина t_{2s} окажется меньше величины t_2^* , определяемой из (4.2), то в качестве интервала времени между смежными пополнениями второго склада \tilde{t}_2 выбирается величина t_{2s} , в противном случае выбирается величина t_2^* , т.е.

$$\tilde{t}_2 = \min \{t_2^*, t_{2s}\}.$$

На первый склад при каждом пополнении от первого поставщика доставляется количество продукции, равное $(p_{11} + \tilde{p}_{11})$, и от второго поставщика – количество продукции, равное $(p_{12} + \tilde{p}_{12})$. Количество продукции p_{11} и p_{12} должно обеспечить снабжение собственных потребителей первого склада до его следующего пополнения. Эта продукция равномерно расходуется, и ее запасы заканчиваются к моменту следующей поставки соответствующей продукции на склад. Количество продукции \tilde{p}_{11} и \tilde{p}_{12} должно обеспечить снабжение второго склада продукцией от первого и второго поставщиков до следующего пополнения первого склада этой продукцией. Продукция, полученная от этих поставщиков, партиями в количестве p_{21} и p_{22} будет поставляться на снабжаемый склад, чтобы обеспечить его работу без дефицита запасов продукции. Продукция, поступающая на первый склад, как от первого, так и от второго поставщиков, хранится на складе без первых партий, которыми продукция поставляется на второй склад. Эти партии целесообразно сразу отправлять на второй склад для снабжения клиентов этого склада и на первом складе не хранить.

Поэтому в течение первого интервала времени между смежными пополнениями запасов на втором складе продукцией от первого поставщика \tilde{t}_2 на первом складе будет храниться только часть продукции в количестве $p_{21}(n_2 - 1)$ из продукции от первого поставщика \tilde{p}_{11} , предназначенной для снабжения второго склада. Во второй интервала времени \tilde{t}_2 на первом складе будет храниться продукция в количестве $p_{21}(n_2 - 2)$, поскольку одна партия размером p_{21} будет отправлена на второй склад и т.д. Такой процесс будет продолжаться до $(n_2 - 1)$ -го интервала времени \tilde{t}_2 , на котором будет храниться только одна партия продукции в количестве p_{21} . На последнем интервале времени \tilde{t}_2 непосредственно перед пополнением первого склада на нем не хранится продукция, предназначенная для снабжения второго склада, поскольку эта продукция уже должна быть доставлена на второй склад.

Спустя время τ_1 после пополнения первого склада продукцией от первого поставщика на этот склад поступает продукция в количестве $(p_{12} + \tilde{p}_{12})$ от второго поставщика. Эта продукция расходуется по такой же схеме, как и

продукция от первого поставщика. После пополнения первого склада весь описанный процесс повторяется.

Тогда стоимость хранения на первом складе продукции от первого и второго поставщиков для снабжения второго склада \hat{D}_1 будет

$$\begin{aligned}\hat{D}_1 &= C_{11}(p_{21}(n_2 - 1)t_2 + p_{21}(n_2 - 2)t_2 + \dots + p_{21}t_2) + \\ &+ C_{12}(p_{22}(n_2 - 1)t_2 + p_{22}(n_2 - 2)t_2 + \dots + p_{22}t_2) = \\ &= \frac{C_{11}p_{21}n_2(n_2 - 1)t_2}{2} + \frac{C_{12}p_{22}n_2(n_2 - 1)t_2}{2} = \\ &= \frac{C_{11}r_{21}t_1t_2(n_2 - 1)}{2} + \frac{C_{12}r_{22}t_1t_2(n_2 - 1)}{2}.\end{aligned}$$

Кроме этой продукции на первый склад, как уже отмечалось выше, должна быть направлена продукция в количестве p_{11} и p_{12} для снабжения собственных потребителей первого склада до его следующего пополнения, которое произойдет спустя интервал времени t_1 . Стоимость хранения этой продукции в течение времени t_1 при постоянном спросе r_{11} и r_{12} будет

$$\bar{D}_1 = \frac{C_{11}p_{11}t_1}{2} + \frac{C_{12}p_{12}t_1}{2} = \frac{C_{11}r_{11}t_1^2}{2} + \frac{C_{12}r_{12}t_1^2}{2} = \frac{(C_{11}r_{11} + C_{12}r_{12})t_1^2}{2}.$$

Тогда затраты на доставку пополнений и хранение запасов на первом складе в течение планируемого периода T можно записать с учетом условия $t_1 = n_2t_2$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}D_1 &= \left(\bar{D}_1 + \hat{D}_1 + \tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12}\right) \frac{T}{t_1} = \\ &= \frac{C_{11}r_{11}t_1^2}{2} + \frac{C_{12}r_{12}t_1^2}{2} + \frac{r_{11}r_{21}t_1t_2(n_2 - 1)}{2} + \\ &+ \frac{(C_{11}(r_{11} + r_{21}) + C_{12}(r_{12} + r_{22}))t_1T}{2} - \\ &- \frac{(C_{11}r_{21} + C_{12}r_{22})t_2T}{2} + \frac{(\tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12})T}{t_1}.\end{aligned}$$

Поскольку величина t_2 уже была вычислена, будем определять величину t_1^* из условия $\frac{dD_1(t_1)}{dt_1} = 0$ минимума функции D_1 при известном t_2 . Тогда величина t_1^* будет

$$t_1^* = \sqrt{\frac{2(\tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12})}{(C_{11}(r_{11} + r_{21}) + C_{12}(r_{12} + r_{22}))}}.$$

На вместимость первого склада также наложены ограничения. Как и в рассмотренном выше случае, величины запасов q_1 и q_2 на первом складе в

моменты пополнения запасов склада от первого и от второго поставщиков будут соответственно

$$q_{11} = r_{11}t_{1s} + r_{21} \left(t_{1s} - \check{t}_2 \right) + (r_{21} + r_{22}) \tau_1,$$

$$q_{12} = (r_{11} + r_{12}) t_{1s} + (r_{21} + r_{22}) \left(t_{1s} - \check{t}_2 \right) - (r_{11} + r_{12}) \tau_1,$$

где τ_1 – время поставки пополнения от второго поставщика с момента поставки от первого.

Из условия равенства $q_{11} = q_{12}$ и ограничений $q_{11} \leq Q_1$, $q_{12} \leq Q_1$ по аналогии с тем, как это было сделано ранее, определяется величина τ_1 и ограничение на величину t_{1s}

$$(4.3) \quad \tau_1 = \frac{r_{21} \check{t}_2 + (r_{12} + r_{22}) \left(t_{1s} - \check{t}_2 \right)}{(r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22})},$$

$$(4.4) \quad t_{1s} \leq \frac{\left(Q_1 (r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22}) + (r_{11} + r_{12}) (r_{21} - r_{12} - r_{22}) \check{t}_2 \right)}{\left((r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22})^2 - (r_{11}r_{12} + r_{12}^2 + r_{11}r_{22} + r_{12}r_{22}) \right)}.$$

Здесь, как и в ранее рассмотренном случае, если величина t_{1s} окажется меньше t_1^* , то в качестве интервала времени между смежными пополнениями второго склада \check{t}_1 выбирается величина t_{1s} , в противном случае выбирается величина t_1^* , т.е. $\check{t}_1 = \min \{t_1^*, t_{1s}\}$.

После определения величин \check{t}_1 и \check{t}_2 необходимо произвести корректировку величины \check{t}_2 , если величина n_2 в ограничении $\check{t}_1 = n_2 \check{t}_2$ не будет целой. Для этого вычисляется отношение $\tilde{n}_{12} = \frac{\check{t}_1}{\check{t}_2}$. Сначала величина n_2 полагается равной $n_{12} = [\tilde{n}_{12}]$, где $[\tilde{n}_{12}]$ и обозначает целую часть числа \tilde{n}_{12} . После этого определяется величина \tilde{t}_2 из условия $\tilde{t}_2 = \frac{\check{t}_1}{n_{12}}$ и производится проверка выполнения ограничения $r_2 \tilde{t}_2 \leq Q_2$. Если это ограничение выполняется, то корректировка и выбор величины \tilde{t}_2 заканчиваются. В противном случае n_{12} полагается равным $n_{12} = [\tilde{n}_{12}] + 1$. С этим значением n_{12} определяется новая величина \tilde{t}_2 из условия $\tilde{t}_2 = \frac{\check{t}_1}{n_{12}}$, которая будет меньше \check{t}_2 , поскольку n_{12} будет уже больше \tilde{n}_{12} . Поэтому ограничение $r_2 \tilde{t}_2 \leq Q_2$ при таком \tilde{t}_2 должно выполняться.

5. Управление запасами в иерархических системах складов

Рассмотрим вывод основных соотношений для определения параметров в задаче управления запасами в иерархической системе складов, в которой имеются ограничения на вместимость каждого склада. Спрос на хранящуюся на складах продукцию является постоянным. На склад первого уровня для пополнения запасов поступает продукция от двух поставщиков.

Вывод указанных соотношений, как и в пункте 4, начинается с одного из складов, например, с m -го, находящегося на последнем N -м уровне иерархической системы складов, с которого не производится снабжения других складов. В системе складов такие склады могут находиться на всех уровнях системы, кроме первого, а на последнем уровне все склады не являются снабжающими.

Величина спроса на продукцию v -го типа ($v \in J_{Nm}$) в единицу времени от i -го поставщика на этом складе равна спросу на эту продукцию только собственных клиентов склада r_{Nmvi} . Тогда затраты $D_{Nm}(t_{Nm})$ на хранение и пополнение запасов на складе в течение планируемого интервала времени T в соответствии с выводом аналогичных соотношений из пункта 3 можно представить в следующем виде:

$$D_{Nm}(t_{Nm}) = \left(\frac{t_{Nm}T}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{v \in V_{Nmi}} C_{Nmvi} r_{Nmvi} + \frac{T}{t_{Nm}} \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{Nmi} \right),$$

где V_{Nmi} – множество типов продукции, которое хранится на m -м складе N -го уровня и поставляется i -м поставщиком, C_{Nmvi} – стоимость хранения в единицу времени единицы продукции v -го типа от i -го поставщика на m -м складе N -го уровня, \tilde{C}_{Nmi} – стоимость доставки пополнения m -го склада N -го уровня продукцией от i -го поставщика.

Величина t_{Nm}^* интервалов времени между смежными пополнениями склада следующим образом:

$$t_{Nm}^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{Nmi}}{C_{Nm} \sum_{i=1}^2 \sum_{v \in V_{Nmi}} r_{Nmiv}}} = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{Nmi}}{C_{Nm} (R_{Nm1} + R_{Nm2})}},$$

где

$$R_{Nm1} = \sum_{v \in V_{Nm1}} r_{Nm1v}, \quad R_{Nm2} = \sum_{v \in V_{Nm2}} r_{Nm2v}.$$

Величины t_{Nm} и τ_{Nmj} , при которых не происходит нарушения вместимости Q_{Nm} m -го склада N -го уровня, определяются с помощью соотношений, полученных по аналогии с выводом соотношений (4.3)–(4.4), и имеющих следующий вид:

$$\tau_{Nm} \leq \frac{R_{Nm2}}{(R_{Nm1} + R_{Nm2})} t_{Nm},$$

$$t_{Nm} \leq \frac{(R_{Nm1} + R_{Nm2}) Q_{Nm}}{(R_{Nm1}^2 + R_{Nm1} R_{Nm2} + R_{Nm2}^2)}.$$

Поэтому, как и в ранее рассмотренном случае, если величина t_{Nm} окажется меньше t_{Nm}^* , то в качестве интервала времени между смежными попол-

нениями второго склада \tilde{t}_{Nm} выбирается величина t_{Nm} , в противном случае выбирается величина t_{Nm}^* , т.е. $\tilde{t}_{Nm} = \min \{t_{Nm}^*, t_{Nm}\}$.

Затраты $D_{sj}(t_{sj})$ на хранение и пополнение запасов на j -м складе ($j \in M_s$) s -го уровня системы складов при $1 \leq s \leq N - 1$, с которых производится снабжение складов $(s+1)$ -го уровня в течение планируемого интервала времени T в соответствии с выводом аналогичных соотношений из пункта 3, можно представить в следующем виде:

$$D_{sj}(t_{sj}) = \frac{T t_{sj}}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{v \in V_{sji}} C_{sji} R_{sjiv} + \frac{T \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{sji}}{t_{sj}} - P,$$

где

$$R_{sjiv} = r_{sjiv} + \sum_{m \in J_{sj}} r_{(s+1)miv} \quad (R_{Njiv} = r_{Njiv}),$$

$J_{(s+1)j}$ – множество складов на $(s+1)$ -м уровне системы, которые снабжаются с j -го склада, находящегося на s -м уровне системы складов,

$$P = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{m \in J_{(s+1)j}} t_{(s+1)m} \sum_{v \in V_{(s+1)ji}} C_{(s+1)mi} R_{(s+1)miv}.$$

Величина t_{sj}^* интервалов времени между смежными пополнениями склада определяется без учета ограничений на вместимость склада из условия минимума функции $D_{sj}(t_{sj})$ согласно следующему соотношению:

$$t_{sj}^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{sji}}{\sum_{i=1}^2 \sum_{v \in V_{sji}} C_{sji} R_{sjiv}}}.$$

Величины t_{sj} и τ_{sj} , при которых не происходит нарушения вместимости Q_{sj} j -го склада s -го уровня, определяются с помощью соотношений, полученных по аналогии с выводом соотношений (4.3)–(4.4), и имеющих следующий вид:

$$\tau_{sj} = \frac{\tilde{B}t_{sj} - \sum_{k \in K_{(s+1)j}} t_k \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl}}{\tilde{A}},$$

$$t_{sj} \leq \frac{\tilde{F}\tilde{A} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} t_k \tilde{B} \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl}}{(\tilde{D}\tilde{A} + \tilde{B}^2)},$$

где \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{D} , \tilde{F} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{sj} &= \left(\sum_{l \in L_{sj1}} r_{sj1} + \sum_{l \in L_{sj2}} r_{sj2} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} \sum_{l \in L_{(s+1)k1}} R_{(s+1)kl} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl} \right), \\ \tilde{B} &= \left(\sum_{l \in L_{sj2}} r_{sj2} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl} \right), \\ \tilde{D} &= \left(\sum_{l \in L_{sj1}} r_{sj1} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} \sum_{l \in L_{(s+1)k1}} R_{(s+1)kl} \right), \\ \tilde{F} &= \left(Q_{sj} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} t_k \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl} \right). \end{aligned}$$

Поэтому, как и в ранее рассмотренном случае, если величина t_{sj} окажется меньше величины t_{sj}^* , то в качестве интервала времени между смежными пополнениями j -го склада s -го уровня \tilde{t}_{sj} выбирается величина t_{sj} , в противном случае выбирается величина t_{sj}^* , т.е. $\tilde{t}_{sj} = \min \{t_{sj}^*, t_{sj}\}$.

Таким образом, определение величин спроса в системе складов начинается со складов последнего N -го уровня, для которых эти величины равны спросу на хранимую продукцию только у клиентов этих складов. Далее процесс определения этих величин последовательно продолжается для складов предпоследнего уровня и т.д. до склада первого уровня.

После этого проводится корректировка интервалов времени t_{si} между смежными пополнениями запасов i -го склада s -го уровня ($s = 2, \dots, N$; $i \in M_s$). Такая корректировка начинается со складов второго уровня, проводится по описанной выше схеме и заканчивается на складах последнего N -го уровня.

Когда корректировка времени пополнения складов системы будет завершена, определяются величины пополнений складов.

6. Результаты вычислительных экспериментов

В качестве примера использования предложенных методов рассмотрим систему складов, в состав которой входит десять складов. Со склада, находящегося на первом уровне системы складов, в которой имеется три уровня, снабжаются остальные склады продукцией трех различных типов, которая измеряется в тоннах. На втором уровне находится три склада, которые непо-

Таблица

№ склада	Уровень склада	№ склада снабжения	Продукт 1		Продукт 2		Продукт 3		Затраты поставок
			C_{1j}	r_{1j}	C_{2j}	r_{2j}	C_{3j}	r_{3j}	\tilde{C}_j
			п/т сут	т/сут	п/т сут	т/сут	п/т сут	т/сут	руб
1	I		2	16	2,5	17	1,5	18	55 4300
2	II	1	8	10	7	12	8	11	65 000
3	II	1	7	8	6	9	5	8	75 000
4	II	1	6	6	7	7	7	8	65 000
5	III	2	40	5	45	4	40	6	12 000
6	III	2	35	6	39	4	36	5	12 000
7	III	3	36	7	34	6	38	8	18 000
8	III	3	34	7	36	5	35	8	13 000
9	III	4	35	8	38	7	40	5	12 500
10	III	4	32	8	33	7	35	6,5	12 500

средственно снабжаются со склада первого уровня. На третьем уровне находится шесть складов, которые снабжаются со складов второго уровня.

Стоимость хранения единицы i -й продукции в единицу времени на j -м складе C_{ij} ($i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 10$) и спрос на продукцию i -го типа в единицу времени на j -м складе r_{ij} приводятся в таблице. Там же приводится стоимость доставки продукции со склада снабжения на j -й склад системы \tilde{C}_j .

В первом столбце слева введены номера складов. В следующем столбце указаны уровни каждого склада. В третьем столбце приводится номер склада, с которого снабжается склад, соответствующий номеру склада, находящегося в первом столбце этой строки. Следующие три «больших» столбца содержат информацию соответственно по первому, второму и третьему типу, хранящейся в системе складов продукции. Каждый из этих складов после первой ячейки разделяется на два столбца. В левом столбце, каждого разделившегося «большого» столбца, приводится стоимость хранения в рублях единицы продукции соответствующего типа за сутки на складе, находящимся в первом столбце этой строки. В другом столбце этого разделившегося «большого» столбца приводится спрос, являющийся в данной задаче постоянным, в тоннах за сутки на складе, находящимся в первом столбце этой строки.

В последнем столбце приводится стоимость доставки пополнения запасов на склад, находящийся в первом столбце этой строки.

В результате определения параметров управления запасами и проведения их корректировки были получены следующие значения этих параметров: $t_1 = 48$ сут, $q_{11} = 3888$ т, $q_{12} = 3744$ т, $q_{13} = 4008$ т, $t_2 = 16$ сут, $q_{21} = 336$ т, $q_{22} = 320$ т, $q_{23} = 368$ т, $t_3 = 24$ сут, $q_{31} = 528$ т, $q_{32} = 480$ т, $q_{33} = 576$ т, $t_4 = 16$ сут, $q_{41} = 352$ т, $q_{42} = 336$ т, $q_{43} = 312$ т, $t_5 = 8$ сут, $q_{51} = 40$ т, $q_{52} = 32$ т, $q_{53} = 48$ т, $t_6 = 8$ сут, $q_{61} = 48$ т, $q_{62} = 32$ т, $q_{63} = 40$ т, $t_7 = 8$ сут, $q_{71} = 56$ т, $q_{72} = 48$ т, $q_{73} = 64$ т, $t_8 = 8$ сут, $q_{81} = 56$ т, $q_{82} = 40$ т, $q_{83} = 64$ т, $t_9 = 5,3$ сут,

$q_{91} = 42,64$ т, $q_{92} = 37,3$ т, $q_{93} = 26,65$ т, $t_{10} = 5,3$ сут, $q_{101} = 42,64$ т, $q_{102} = 37,31$ т, $q_{103} = 34,6$ т.

Кроме этой задачи для проверки работоспособности предложенных методов было решено более 20 тестовых задач. Их решение подтвердило работоспособность этих методов. Расчеты параметров управления запасами при решении тестовых задач занимали не более нескольких минут (от 1 до 4 мин).

7. Заключение

Задачи управления многономенклатурными запасами в иерархических системах складов имеют важное прикладное значение. Их решение используется для определения параметров управления запасами при организации и снабжении регионов продукцией, лекарствами, запасными частями, особенно автомобильными и т.д. Вычислительные эксперименты, проведенные предложенными моделями и методами, подтвердили их достаточно высокую эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калинин Н.М., Хоботов Е.Н.* Модели управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе // *АиТ.* 2008. № 9. С. 156–169.
2. *Хоботов Е.Н.* Методы решения задач управления многопродуктовыми запасами при случайном спросе // *Изв. РАН ТиСУ.* 2011. № 2. С. 91–102.
3. *Хедли Д., Уайтин Т.* Анализ систем управления запасами. М.: Наука, 1969.
4. *Хоботов Е.Н.* Задачи и методы управления многономенклатурными запасами в условиях производства продукции // *Изв. РАН ТиСУ.* 2011. № 6. С. 221–232.
5. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами. Учеб. пособие для вузов. СПб: Издательский дом “Питер”, 2001.
6. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. М.: Наука, 1991.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 01.06.2023

После доработки 21.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

© 2023 г. Е.Н. ХОБОТОВ, д-р техн. наук (e_khobotov@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЙ РАБОТ ДЛЯ ПРЕДПРИЯТИЙ СО СТАПЕЛЬНОЙ СБОРКОЙ ВЫПУСКАЕМЫХ ИЗДЕЛИЙ

Рассматриваются задачи построения расписаний работ для предприятий со стапельной сборкой изделий. В состав таких предприятий может входить несколько производственных подразделений, в которых изготавливаются комплектующие, предназначенные для сборки из них на стапелях выпускаемых изделий. Для решения рассматриваемых задач предлагаются методы, позволяющие строить согласованные расписания работ для всех производственных подразделений предприятия.

Ключевые слова: теория расписаний, стапели, стапельная сборка изделий, методы агрегирования, «каркасные» расписания, методы построения расписаний, производственные подразделения.

DOI: 10.31857/S0005231023120073, **EDN:** NGKFUJ

1. Введение

Повышению эффективности предприятий машиностроения в последние годы во многих странах начали уделять повышенное внимание. Для предприятий с дискретным характером производства, к которым относятся машиностроительные предприятия, повышению эффективности в значительной степени способствуют методы теории расписаний [1–3].

Такие методы были разработаны для построения расписаний в производственных системах, участках и подразделениях предприятий, и их использование позволило заметно сокращать время изготовления поступающих заказов.

К сожалению, для построения расписаний работ на предприятиях со стапельной сборкой выпускаемых изделий разработанные методы [1–3] оказались непригодными из-за большой размерности возникающих задач. В [4] для решения этой проблемы был предложен подход, основанный на использовании методов агрегирования информации. В [5] на основе этого подхода были предложены алгоритмы построения расписаний работ на предприятиях с конвейерной сборкой выпускаемых изделий.

Однако специальных методов для построения расписаний работ на предприятиях со стапельной сборкой выпускаемых изделий разработано не было, хотя в промышленности многих стран предприятий указанного типа имеется достаточно много. К ним относятся, например, станкостроительные, судостроительные, многие авиастроительные и машиностроительные предприятия.

В данной работе предлагаются методы построения расписаний работ на предприятиях со стапельной сборкой выпускаемых изделий. Для построения этих методов был использован предложенный в [4] подход, основанный на использовании принципов агрегирования информации. Кроме того, в работе приводятся результаты вычислительных экспериментов, полученных при использовании разработанных методов для построения расписания обработки комплектующих на тестовом примере предприятия со стапельной сборкой.

2. Постановка задачи построения расписаний

Постановка задачи построения расписаний работ на предприятии со стапельной сборкой выпускаемых изделий, для решения которой предназначены предлагаемые методы, может быть сформулирована следующим образом.

Пусть на предприятии с дискретным характером производства имеется M ступеней различных типов и R производственных подразделений. На этих ступенях из комплектующих, которые изготавливаются в производственных подразделениях предприятия, производится сборка изделий L типов.

Количество и типы комплектующих, которые входят в состав любого производимого на предприятии изделия, известны. Часть комплектующих, используемых для сборки производимых изделий, изготавливается на предприятии, а часть может закупаться на стороне. Для каждой комплектующей любого изделия, производимой на предприятии, известны последовательность и времена ее обработки на всем используемом оборудовании предприятия, а также времена переналадки этого оборудования для ее обработки. Нормативы времени и последовательность установки каждой комплектующей в собираемое изделие также известны.

Изделия на ступенях собираются обычно в соответствии со следующей схемой. Сначала перед сборкой каждого изделия в производственных подразделениях предприятия изготавливается часть комплектующих, которая обычно устанавливается в собираемое изделие в соответствии с технологией сборки в первую очередь. Порядок установки каждой комплектующей в соответствующее собираемое изделие задан. Пока изготовленные комплектующие устанавливаются в собираемое изделие, в производственных подразделениях предприятия изготавливаются те комплектующие, которые должны устанавливаться в собираемое изделие в следующую очередь и т.д. Такой процесс продолжается до тех пор, пока сборка изделия не будет завершена. При одновременной сборке различных изделий на ступенях комплектующие для них изготавливаются совместно в одних и тех же производственных подразделениях предприятия.

В задаче требуется построить расписания работ на предприятии таким образом, чтобы поступивший заказ, который состоит из заданного количества N_l ($l = 1, \dots, L$) изделий, производимых на предприятии, был выполнен за меньшее время. Сборку каждого изделия желательно производить по воз-

возможности без перерывов на ожидание доставки недостающих комплектующих.

Требование, связанное с проведением сборки изделий без перерывов на ожидание комплектующих, обусловлено тем, что качество производимой продукции, как отмечалось на 2-й Международной конференции по гибким производственным системам, г. Магдебург, 1985 г., в значительной степени зависит от ритмичности производства.

3. Принципы построения расписаний работ в условиях одного стапеля

Принципы построения расписаний работ удобно сначала рассмотреть на примере сборки на одном стапеле изделий L разных типов, имеющих в своем составе \tilde{M}_l ($l = 1, \dots, L$) типов комплектующих.

Известны состав оборудования в каждом подразделении предприятия, последовательность и время обработки каждой комплектующей для собираемых изделий на всем используемом оборудовании, а также последовательность и время \hat{t}_{il} установки каждой комплектующей i ($i = 1, \dots, \tilde{M}_l$) в собираемое изделие l ($l = 1, \dots, L$). Для сокращения времени обработки комплектующих целесообразно предварительно строить расписания работ и в соответствии с ним производить обработку комплектующих. Это во многих случаях [1–5] позволяет заметно сокращать время выполнения поступивших заказов.

Комплектующие, которые будут совместно обрабатываться в производственных подразделениях предприятия и затем устанавливаться в собираемые изделия, назовем набором комплектующих. Каждый из таких наборов должен включать только те комплектующие, которые в соответствии с порядком сборки могут быть установлены в изделие и позволят установить остальные комплектующие набора. В наборе не должны отсутствовать комплектующие, без которых невозможна установка каких-либо других комплектующих набора.

Комплектующие из каждого набора перед установкой в собираемое изделие хранятся в межоперационных складах, которые используются для этих целей при стапельной сборке. Вместимость таких складов обычно ограничена. Поэтому количество комплектующих, которое может быть включено в любой набор, должно быть тоже ограничено. Минимальное количество наборов комплектующих K_l , которое может быть использовано для изготовления l -го изделия, определяется с помощью соотношения

$$(3.1) \quad K_l = \left[\frac{\tilde{M}_l}{v} \right] + 1,$$

где $[a]$ – целая часть числа a , v – максимальное количество комплектующих, которые могут храниться на межоперационном складе при стапеле.

Пусть для сборки l -го изделия сформировано согласно (3.1) k_l ($k_l \geq K_l$) наборов комплектующих, каждый из которых включает n_{il} ($i = 1, \dots, k_l$) комплектующих в порядке их установки в изделие и может быть размещен на межоперационном складе при стапеле, т.е. все $n_{il} \leq v$.

Время завершения обработки комплектующих, устанавливаемых в первую очередь в соответствии с построенным расписанием в l -е изделие, пусть будет равно \tilde{t}_{1l} . Тогда время начала сборки l -го изделия T_{1l} должно быть больше этого времени и удовлетворять условию: $T_{1l} \geq \tilde{t}_{1l}$. Во время установки на стапеле в собираемое изделие изготовленных комплектующих в производственных подразделениях предприятия обрабатываются комплектующие для установки в изделие в следующую очередь.

Установка комплектующих из второго набора в собираемое изделие может начаться только тогда, когда завершится установка всех ранее обработанных комплектующих из первого набора в это изделие и будет завершена обработка комплектующих второго набора. Если установка комплектующих из первого набора завершится позже или одновременно с завершением обработки комплектующих из второго набора, то установка комплектующих из второго набора в собираемое изделие может производиться без вынужденных простоев на ожидание доставки необходимых комплектующих.

В противном случае установка комплектующих из второго набора в l -е изделие может начаться только после завершения их обработки и доставки на сборку, т.е. с вынужденным простоем для ожидания их доставки. Для того чтобы не было вынужденных простоев в процессе сборки изделия, сборку можно начинать позже.

Время T_{2l} , когда можно начать сборку изделия после начала обработки комплектующих, чтобы не ожидать поступления комплектующих из второго набора для установки их в собираемое изделие, можно определить с помощью следующего соотношения:

$$(3.2) \quad T_{2l} = T_{1l} + \max \{ \tilde{t}_{2l} - \tilde{t}_{1l} - \hat{t}_{1l}, 0 \}, \quad T_{1l} = \tilde{t}_{1l},$$

где \tilde{t}_{2l} – время завершения обработки комплектующих из второго набора для l -го изделия, \hat{t}_{1l} – время установки комплектующих из первого набора в l -е изделие.

Из соотношения (3.2) видно, что правильно рассчитанная задержка начала сборки позволяет обеспечить в данном случае установку второго набора комплектующих без перерывов на ожидание завершения их обработки. Время с начала обработки комплектующих l -го изделия T_{il} , которое определяет начало сборки этого изделия после установки в него комплектующих из i -го набора, чтобы не было вынужденных простоев, можно определить из соотношения

$$(3.3) \quad T_{il} = T_{i-1l} + \max \{ \tilde{t}_{il} - \tilde{t}_{i-1l} - \hat{t}_{i-1l}, 0 \}, \quad i = 2, \dots, k_l,$$

где \tilde{t}_{il} – время, прошедшее с начала обработки комплектующих и до завершения обработки комплектующих из i -го набора, \hat{t}_{i-1l} – время установки ком-

плектующих из $(i-1)$ -го набора в l -е изделие, \tilde{t}_{kl} – время, прошедшее с начала обработки комплектующих и до завершения обработки комплектующих последнего k_l -го набора, в который входит последняя M_l -я комплектующая l -го изделия.

Время T_{kl} определяет момент, когда можно начать сборку l -го изделия после начала изготовления комплектующих для него, чтобы в процессе сборки не было вынужденных простоев из-за ожидания комплектующих.

Времена \tilde{t}_{il} ($i = 1, \dots, k_l$) в (3.3) могут быть определены в результате построения расписания обработки комплектующих из соответствующего набора. Методы построения таких расписаний будут рассмотрены в следующем разделе

Время последовательной установки комплектующих i -го набора в l -е изделие можно определить с использованием соотношения

$$\hat{t}_{il} = \sum_{j \in J_{il}} \tau_{jil},$$

где τ_{jil} – время установки j -й комплектующей i -го набора в l -е изделие, J_{il} – множество комплектующих i -го набора l -го изделия, содержащее n_{il} элементов.

После обработки комплектующих i -го набора при $i < k_l$ начинаются обработка комплектующих $(i + 1)$ -го набора и установка комплектующих i -го набора в собираемое изделие. Когда завершится обработка комплектующих k_l -го набора, то начинается их установка в изделие, завершающая сборку l -го изделия. После этого может начаться обработка комплектующих для сборки следующего изделия.

Если на стапеле изготавливаются последовательно L типов изделий и имеется возможность выбирать последовательность их изготовления, то можно выбрать такой порядок их сборки, при котором длительность их сборки будет меньшей. Процесс изготовления изделий на стапеле, который выполняется в соответствии с описанной выше схемой, можно представить с использованием «каркасного» расписания [6] в виде, показанном на рис. 1.

В соответствии с этой схемой сначала изготавливается определенная часть комплектующих, которые в первую очередь устанавливаются в собираемое изделие. Затем одновременно с этой установкой производится обработка сле-

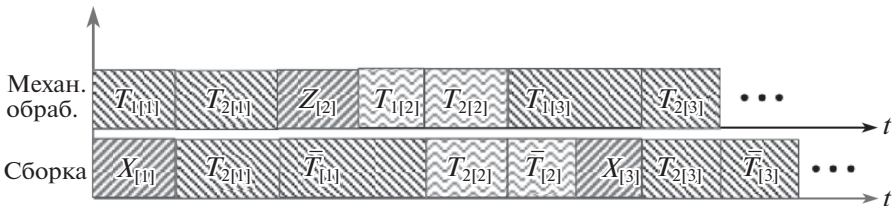


Рис. 1. Диаграмма Гантта «каркасного» расписания изготовления на стапеле изделий.

дующего набора и т.д., до изготовления комплектующих k_l -го набора. Во время их установки в l -е изделие, что завершает сборку l -го изделия, может начаться обработка комплектующих для другого изделия.

На рис. 1 через $T_{1[l]}$ обозначен «каркас» времени [6] обработки комплектующих перед установкой их в изделие, которое будет собираться l -м по порядку, через $X_{[l]}$ – «каркас» времени, которое выделяется для изготовления или завершения изготовления первого набора комплектующих перед их установкой в изделие, собираемое l -м по порядку, через $T_{2[l]}$ – время, в течение которого изготавливаются комплектующие для собираемого l -м по порядку сборки изделия и одновременно производится установка уже изготовленных комплектующих в это изделие, через $\bar{T}_{[l]}$ – время, в течение которого в l -е по порядку сборки изделие устанавливаются уже изготовленные последние комплектующие, через $Z_{[l]}$ – время задержки начала обработки комплектующих для изделия, собираемого l -м по порядку.

Для определения последовательности, в которой целесообразно производить сборку L изделий на одном стапеле, если порядок их сборки может быть выбран, предлагается использовать теорему [6], которая для этого случая имеет вид.

Теорема. Пусть требуется изготовить L типов изделий, сборка каждого из которых производится по описанной выше схеме, а времена $T_{1[l]}$, $\bar{T}_{[l]}$ и $T_{2[l]}$ для каждого изделия известны. Тогда, при одновременной доступности всех работ и оборудования, последовательность изготовления изделий, при которой длительность «каркасного» расписания изготовления всех изделий будет минимальной, когда сумма

$$\sum_{l=1}^{L-1} \max \{T_{1[l+1]} - \bar{T}_{[l]}, 0\} + T_{1[1]}$$

достигает максимального значения.

4. Принципы построения расписаний работ в случае нескольких стапелей

Рассмотрим теперь задачу, в которой требуется построить расписание работ по изготовлению N_l ($l = 1, \dots, L$) изделий на предприятии, имеющем M стапелей для сборки выпускаемых изделий.

Комплектующие одновременно собираемых изделий предлагается, как и в случае одного стапеля, объединять в совместно обрабатываемые на предприятии наборы комплектующих и строить для их обработки расписания работ.

Будем считать, что на предприятии для каждого стапеля определен порядок сборки изделий из этого задания. Если порядок сборки изделий на стапелях может быть выбран, то возникает достаточно сложная задача формирования групп одновременно собираемых изделий и определения наиболее выгодного порядка сборки изделий на каждом стапеле.

К сожалению, пока не разработано эффективных алгоритмов формирования таких групп, но определен ряд рекомендаций, позволяющих при их формировании исключать не совсем подходящие варианты.

При формировании групп одновременно собираемых изделий целесообразно рассматривать для включения в каждую группу изделия, имеющие приблизительно одинаковое количество комплектующих и время сборки из них изделий без учета вынужденных простоев.

Нецелесообразно включать в группу одновременно собираемых изделие, значительная часть комплектующих которого обрабатывается на оборудовании, наиболее загруженном комплектующими уже включенными в эту группу изделий.

Для включения в группу одновременно собираемых могут рассматриваться изделия, обработка комплектующих которых не приведет к значительной разнице в загрузке оборудования предприятия. При этом желательно, чтобы рассматриваемые изделия имели бы количество комплектующих и времена установки в изделия приблизительно такие же, как и у включенных уже в эту группу изделий.

После формирования групп одновременно собираемых изделий целесообразно строить расписания обработки их комплектующих. Это позволит наглядно и достаточно точно оценить, являются ли подходящими сформированные группы одновременно собираемых изделий, и в случае необходимости произвести корректировку их формирования.

Комплектующие, которые целесообразно включать в указанные наборы, должны быть после обработки установлены в собираемые изделия в соответствии с порядком, заданным технологией сборки, до установки комплектующих из следующего набора.

После завершения установки последней комплектующей в собираемое изделие и проведения контрольных операций соответствующий станель освобождается от собранного изделия и на нем может начаться сборка следующего изделия. Поэтому часто могут возникать ситуации, когда для изделий, собираемых на одних станелях, продолжается сборка изделий, а на других станелях сборка изделий будет только начинаться.

Принципы построения расписаний работ по изготовлению комплектующих в условиях станельной сборки будут рассмотрены в следующем разделе.

Пусть изготовление поступившего заказа производится по описанной выше схеме. Тогда будем считать, что начало установки комплектующих в собираемые изделия T_1 должно удовлетворять условию: $T_1 \geq \hat{t}_1$, где \hat{t}_1 – время завершения работ по изготовлению первого набора комплектующих с момента начала изготовления комплектующих.

Установка комплектующих из следующего набора в собираемые изделия начинается, когда завершится обработка всех комплектующих из этого набора и будет окончена установка всех комплектующих из предыдущего набора.

Если установка комплектующих из предыдущего набора завершится позже, чем будет завершена обработка комплектующих из следующего набора,

то установка комплектующих из следующего набора в собираемые изделия может производиться без вынужденных простоев на ожидание необходимых комплектующих.

В противном случае установка комплектующих из следующего набора в собираемые изделия может начаться только после завершения их обработки и доставки на сборку, т.е. с вынужденным простоем для ожидания доставки комплектующих.

Для устранения возможности появления вынужденных простоев придется задерживать начало сборки некоторых изделий без изменения времени начала обработки комплектующих для множества одновременно собираемых изделий.

Время T_{jl} , когда можно начать сборку l -го изделия, чтобы из-за задержек при обработке комплектующих j -го набора не возникло вынужденных простоев во время сборки l -го изделия, можно определить из соотношения:

$$(4.1) \quad T_{jl} = T_{(j-1)l} + \max \{ \tilde{t}_j - \tilde{t}_{j-1} - \hat{t}_{(j-1)l}, 0 \}, \quad j = 2, \dots, k_l, \quad T_{1l} = \tilde{t}_1,$$

где \tilde{t}_j – время, прошедшее с начала обработки комплектующих до завершения обработки j -го набора комплектующих, $\hat{t}_{(j-1)l}$ – время установки комплектующих из $(j-1)$ -го набора в l -е изделие, T_{kl} – время, когда следует начать сборку l -го изделия, чтобы из-за установки в него комплектующих и в том числе последнего для этого изделия k_l -го набора не возникло вынужденных простоев.

Таким образом, в результате построения расписания работ, связанных с изготовлением l -го изделия, согласно (4.1) вычисляется время T_{kl} с начала изготовления комплектующих, когда следует начать сборку l -го изделия, чтобы в ее процессе не возникало вынужденных простоев из-за ожидания комплектующих. Определяются моменты \tilde{t}_{il} ($i = 1, \dots, k_l$) начала и завершения обработки комплектующих i -го набора ($i = 1, \dots, k_l$). После обработки комплектующих i -го набора при $i < k_l$ начинаются обработка комплектующих $(i + 1)$ -го набора и установка комплектующих i -го набора в собираемое изделие. После изготовления комплектующих k_l -го набора производится их установка в l -е изделие, завершающая его сборку.

Если возникновение вынужденных простоев допускается, то ни вычисления величин T_{kl} , ни задержек в сборке изделий не потребуется.

5. Построение расписаний работ на предприятиях со ступенчатой сборкой

Рассмотрим принципы создания методов, которые позволят строить расписания работ по обработке комплектующих на предприятиях со ступенчатой сборкой выпускаемых изделий.

Как уже отмечалось выше, планы и расписания работ для повышения эффективности предприятий следует строить для всех подразделений предприятия таким образом, чтобы они были согласованными между собой.

Под согласованными планами и расписаниями работ здесь понимаются такие планы и расписания работ, когда с их помощью можно определить время начала и завершения обработки каждой детали на всем используемом для ее обработки оборудовании. Такие планы и расписания работ в [4] были названы планами и расписаниями работ на уровне предприятий. Для их построения в [4] был предложен подход, основанный на использовании методов агрегирования информации.

Необходимость использования этого подхода была вызвана непригодностью имевшихся методов [1–3] построения расписаний работ для формирования таких планов и расписаний. Действительно, эти методы были разработаны для построения расписаний работ в производственных подразделениях предприятия.

С их помощью можно попытаться построить расписания работ на предприятии двумя способами.

При использовании первого способа предприятие рассматривается, как большое подразделение, для которого строится расписание работ. Однако в этом случае может оказаться, что количество оборудования в таком подразделении достаточно большое и требуется обработать очень большое количество деталей на многих типах оборудования. Задача построения такого расписания может иметь очень большую размерность и для ее решения с помощью таких методов потребуется большое время, которое в некоторых случаях, как показали расчеты, может в несколько раз превышать время реальной обработки этих комплектующих на предприятии.

При использовании второго способа можно попытаться строить расписания работ для отдельных подразделений и потом на их основе формировать общее расписание работ на предприятии.

При таком способе для каждого подразделения необходимо выбрать времена начала построения расписания обработки групп комплектующих в этом подразделении. Кроме того, в каждую группу надо включить комплектующие, обработку которых можно начать в эти моменты времени. Под такими комплектующими здесь понимаются комплектующие, которые к началу построения расписания в этом подразделении были обработаны на всем оборудовании по технологии их изготовления до обработки в данном подразделении.

Однако в этом случае совсем непонятно, как выбирать времена для начала построения таких расписаний в каждом подразделении, как подбирать комплектующие в группы, расписания обработки которых можно начинать строить в эти времена без уже построенных расписаний обработки.

В методах, предлагаемых в работе, эти проблемы решаются в результате построения «каркасных» расписаний, которые формируются на основе идеи агрегирования информации [4] и будут описаны далее.

Идея агрегирования информации при построении расписаний на уровне предприятия состоит в формировании из комплектующих, подлежащих изготовлению, специальных групп. Каждая комплектующая такой группы до-

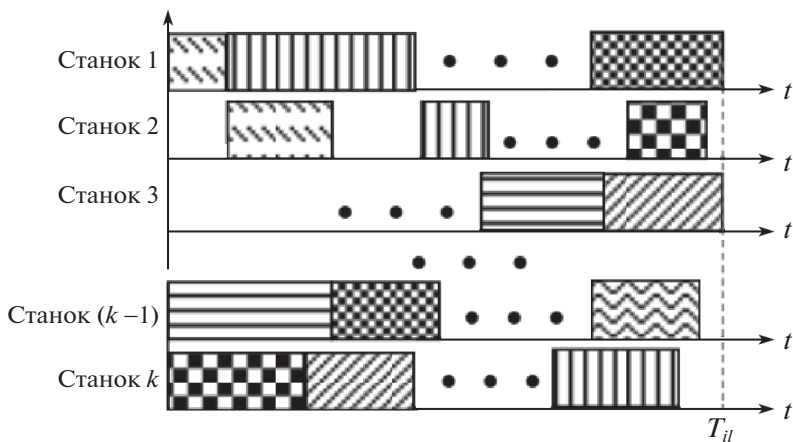


Рис. 2. Диаграмма Ганта, представляющая пример расписания обработки i -й группы деталей в l -м производственном подразделении.

ставляется в процессе своей обработки к одним производственным подразделениям предприятия, в которых эти комплектующие обрабатываются, в одном порядке. При этом любая комплектующая группы может обрабатываться в каждом подразделении предприятия, где она изготавливается, по «своему» технологическому маршруту. Такие группы рассматриваются как «обобщенные детали», производственные подразделения предприятия – как «обобщенные станки», а задача построения расписания работ на предприятии – как задача построения расписания обработки «обобщенных деталей» на «обобщенных станках» в «обобщенном подразделении».

Для каждой «обобщенной детали» известен маршрут поступления на обработку к соответствующим «обобщенным станкам», т.е. известен маршрут поступления каждой сформированной группы на обработку в соответствующие подразделения предприятия. Это справедливо, поскольку в группу включались только те комплектующие, которые поступали на обработку в подразделения предприятия в одной последовательности и эта последовательность известна.

При построении расписания обработки таких групп комплектующих требуется минимизировать общее время их изготовления.

Для построения такого расписания должно быть определено время обработки каждой «обобщенной детали» на всех используемых «обобщенных станках», т.е. время обработки каждой группы деталей в тех производственных подразделениях предприятия, где эта группа обрабатывается. Времена обработки могут определяться как с использованием традиционных методов построения расписаний [1–3], так и оценочных моделей [4].

Пример определения времени обработки i -й группы деталей в l -м производственном подразделении T_{il} с использованием расписания ее обработки в этом подразделении приведен на рис. 2.

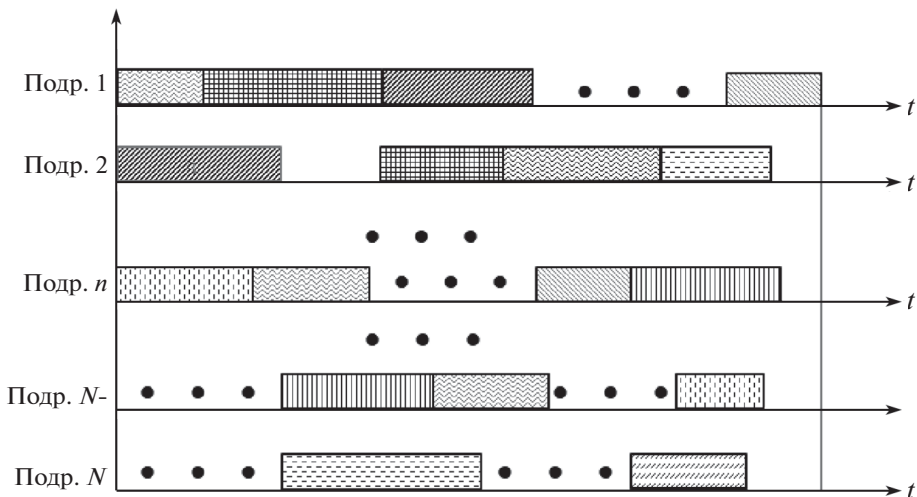


Рис. 3. Диаграмма Гантта, представляющая пример «каркасного» расписания.

После определения величин T_{ij} для всех сформированных групп комплектующих деталей и подразделений предприятия, в которых эти группы обрабатываются, фактически возникает традиционная задача теории расписаний, связанная с построением расписания обработки «обобщенных деталей» в производственном подразделении, состоящем из «обобщенных станков». В [4] подобное расписание изготовления групп деталей в подразделениях предприятия названо «каркасным». Пример такого расписания приведен на рис. 3.

«Каркасное» расписание, как видно из рис. 3, имеет практически такой же вид, как и расписание обработки деталей в производственном подразделении, представленное на рис. 2. Однако в диаграмме Гантта, представляющей «каркасное» расписание, вместо станков по оси ординат откладываются производственные подразделения предприятия (производственные системы и участки, цеха), а вместо времени обработки деталей по каждой из осей абсцисс откладываются времена обработки групп деталей в соответствующих подразделениях. Для построения «каркасных» расписаний могут использоваться традиционные методы построения расписаний [1–3], поскольку размерность задач при агрегировании значительно снижается.

В «каркасном» расписании в отличие от расписания обработки деталей в подразделении строится обработка групп деталей в подразделениях предприятий. В связи с этим часто оказывается, что в некоторые моменты времени для части деталей группы обработка оказывается завершенной. Такие детали могут быть переданы в следующее подразделение предприятия по маршруту обработки этой группы. Подобная возможность оказывается чрезвычайно полезной, особенно в те моменты, когда в следующем подразделении заканчивается обработка деталей и может возникнуть простой из-за задержки деталей, обработка которых еще не завершена. Такая ситуация возникает, например, в подразделениях 1 и 2 (рис. 3). При обработке деталей в подраз-

делениях это невозможно, поскольку часть детали, даже полностью обработанную, передавать куда-либо нельзя.

В [5], как уже отмечалось, на основе описанных выше идей и принципов были разработаны методы построения расписаний работ для предприятий, имеющих в своем составе несколько производственных подразделений и конвейеры, которые использовались для сборки выпускаемых изделий.

С помощью методов, построенных на основе агрегирования информации, удалось достаточно быстро строить расписания работ на предприятиях, имеющих в своем составе более пяти производственных подразделений, в каждом из которых было более двух десятков единиц обрабатывающего оборудования. На предприятии обрабатывалось несколько сот тысяч типов деталей. Построенное «каркасное» расписание было «детализировано» [4–6] до обработки отдельных комплектующих на всем используемом для этого оборудовании.

Здесь, однако, следует отметить, что построение планов и расписаний работ для предприятий со ступенчатой сборкой выпускаемых изделий оказалось значительно более сложной задачей, чем построение расписаний работ для предприятий с конвейерной сборкой выпускаемых изделий.

Это связано с тем, что все группы деталей, сформированные для построения «каркасных» расписаний на предприятиях с конвейерной сборкой изделий, при изменении производственного задания по изготовлению освоенных изделий сохраняют типы включенных в них комплектующих. Меняются только размеры партий этих деталей в соответствующих группах, каждая из которых сохраняет типы включенных в нее комплектующих. Типы включенных в сформированные группы комплектующих могут меняться только в тех случаях, когда изменяется конструкция собираемых изделий, технология изготовления комплектующих изделия или производятся изменения в оборудовании производственных подразделений предприятия. В производственных подразделениях предприятия во время сборки партии каких-либо изделий на конвейере изготавливаются, как правило, только те комплектующие, из которых будут собираться изделия следующей партии. Поэтому типы комплектующих, включенных в сформированные группы, могут не меняться, если не производится модернизация собираемых изделий или предприятия. Для изделий каждого типа могут независимо формироваться свои группы.

На предприятиях со ступенчатой сборкой одновременно на разных ступенях собираются различные изделия, время сборки которых часто оказывается разным. Заранее определить количество и типы комплектующих, которые следует изготавливать в периодически формируемых наборах комплектующих для сборки одновременно собираемых на ступенях изделий, очень сложно.

Поэтому предлагается комплектующие выпускаемых изделий предварительно разделить на такие группы. В каждую группу могут входить комплектующие различных изделий, но все они по технологии изготовления должны в одном порядке поступать на обработку в производственные подразделения

предприятия. Тогда при построении «каркасных» расписаний формирование таких групп из комплектующих разных изделий не вызовет особых затруднений, больших затрат времени и заметно сократит время построения «каркасных» расписаний обработки комплектующих.

Обработка комплектующих группами, сформированными по описанным выше правилам, позволяет, как и для предприятий с конвейерной сборкой выпускаемых изделий [5], не только строить расписания работ на уровне предприятий, но и организовывать эффективную доставку комплектующих для их обработки на производственные подразделения предприятий.

На основе построенных «каркасных» расписаний [5] могут быть сформированы расписания обработки комплектующих в подразделениях на всем используемом для этого оборудовании.

6. Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты проводились на примере построения расписания по изготовлению четырех изделий на предприятии, имеющем в своем составе три производственных подразделения, на которых изготавливались комплектующие для сборки на двух стапелях по два изделия. Для сокращения весьма немалых объемов исходной информации и получения оптимальных расписаний обработки комплектующих в производственных подразделениях было лишь по два станка.

Информация о количестве комплектующих каждого изделия, времени и последовательности обработки каждой комплектующей на всем используемом оборудовании производственных подразделений предприятия приводится в приведенных ниже табл. 1–4. Там же приводятся время и последовательность установки каждой комплектующей в соответствующее изделие.

Информация о времени обработки комплектующих в целях проверки некоторых гипотез была подготовлена таким образом, что обработка комплектую-

Таблица 1

1-й стапель		1-е подразделение		2-е подразделение		3-е подразделение		
Порядок установки деталей	Время установки деталей мин	Порядок обработки	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин
1.1.1.	25	I	25	5				
1.1.2.	30	I	10	20				
1.1.3.	15	I	5	30				
1.1.4.	20	I	20	25				
1.1.5.	25	I, III	15	10			25	10
1.1.6.	20	I, III	10	25			5	20

Таблица 2

1-й стапель			1-е подразделение		2-е подразделение		3-е подразделение	
Порядок установки деталей	Время установки деталей мин	Порядок обработки	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин
1.2.1.	25	II			25	10		
1.2.2.	20	II			15	25		
1.2.3.	25	II, III			30	5	25	10
1.2.4.	20	I, II	35	15	20	25		
1.2.5.	15	II, III			25	10		
1.2.6.	20	II			5	20		
1.2.7.	35	II, III			25	20	5	25

Таблица 3

1-й стапель			1-е подразделение		2-е подразделение		3-е подразделение	
Порядок установки деталей	Время установки деталей мин	Порядок обработки	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин
2.1.1.	25	II			35	10		
2.1.2.	20	II			20	25		
2.1.3.	25	II			5	20		
2.1.4.	30	II, III			20	25	20	25
2.1.5.	15	II			15	20		
2.1.6.	20	II, III			5	25	10	20

щих для первого (1.1.1.–1.1.6.) и второго (2.2.1.–2.2.7.) изделий, собираемых соответственно на первом и втором стапелях, производилась в основном на оборудовании первого подразделения, а обработка комплектующих для второго (1.2.1.–1.2.7.) и первого (2.1.1.–2.1.6.) – в основном на оборудовании второго подразделения.

Для этой задачи было построено три расписания работ по изготовлению комплектующих и сборки из них на двух стапелях по два изделия.

В первом расписании все комплектующие обрабатывались в подразделениях в порядке их установки в соответствующие изделия, который указан в исходных данных. Расписания их обработки не строились. При возникновении конфликтных ситуаций, связанных с назначением комплектующих на обработку, преимущество отдавалось тем комплектующим, которые устанавливались в изделие, собираемое на первом стапеле. Сборка изделий начиналась после обработки трех комплектующих. Время завершения работ по изготов-

Таблица 4

1-й стапель		1-е подразделение		2-е подразделение		3-е подразделение		
Порядок установки деталей	Время установки деталей мин	Порядок обработки	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин	Время обработки I станок мин	Время обработки II станок мин
2.2.1.	20	I	35	10				
2.2.2.	25	I	15	25				
2.2.3.	15	I, III	5	25			20	30
2.2.4.	20	I	45	15				
2.2.5.	15	II, III			10	20	15	10
2.2.6.	20	I	25	35				
2.2.7.	25	I, II, III	25	35	15	20	5	20

лению первого изделия на первом стапеле заняло 240 мин (комплектующие 1.1.1.–1.1.6.), второго изделия на первом стапеле – 450 мин (комплектующие 1.2.1.–1.2.7.), первого изделия на втором стапеле – 285 мин (комплектующие 2.1.1.–2.1.6.), второго изделия на втором стапеле – 460 мин (комплектующие 2.2.1.–2.2.7.).

Во втором расписании все комплектующие обрабатывались наборами комплектующих, которые формировались по описанным в статье правилам, и в соответствии с построенным расписанием работ. Расписание работ строилось с использованием условий оптимальности Джонсона и являлось оптимальным для подразделений, состоящих из двух станков. Сборка изделий производилась с задержкой, которая обеспечивала непрерывный процесс сборки без вынужденных простоев на ожидание комплектующих. Время завершения работ по изготовлению первого изделия на первом стапеле заняло 220 мин (комплектующие 1.1.1.–1.1.6.), второго изделия на первом стапеле – 430 мин (комплектующие 1.2.1.–1.2.7.), первого изделия на втором стапеле – 265 мин (комплектующие 2.1.1.–2.1.6.), второго изделия на втором стапеле – 425 мин (комплектующие 2.2.1.–2.2.7.). Построение расписаний работ по обработке комплектующих позволило сократить время изготовления изделий из задания по сравнению с первым расписанием.

Третье расписание работ строилось для случая, когда на первом стапеле изделия собираются в прежнем порядке, а на втором стапеле – в обратном. Время завершения работ по изготовлению первого изделия на первом стапеле заняло 250 мин (комплектующие 1.1.1.–1.1.6.), второго изделия на втором стапеле – 350 мин (комплектующие 2.2.1.–2.2.7.), второго изделия на первом стапеле – 525 мин (комплектующие 1.2.1.–1.2.7.), первого изделия на втором стапеле – 470 мин (комплектующие 2.1.1.–2.1.6.).

При построении этого расписания, когда порядок изготовления первого и второго изделия на втором стапеле поменялся, оказалось, что комплектую-

щие для одновременно собираемых изделий обрабатываются практически на одном и том же оборудовании. Поэтому из-за увеличения времени изготовления комплектующих заметно увеличилось и время изготовления собираемых изделий.

7. Заключение

Для предприятий со стапельной сборкой выпускаемых изделий использование идей агрегирования информации позволяет:

- разработать методы построения расписаний обработки комплектующих и сборки выпускаемых изделий на уровне предприятий;
- строить расписания обработки комплектующих, заметно сокращающие время изготовления поступающих заказов;
- организовать эффективную доставку комплектующих в процессе их изготовления между производственными подразделениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinedo M.L.* Planning and Scheduling in Manufacturing and Services. Leipzig: Springer, 2014. V. 1.
2. *Bruker P.* Scheduling Algorithms. Leipzig: Springer. 2007. 371 p.
3. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019.
4. *Хоботов Е.Н.* О некоторых моделях и методах решения задач планирования в дискретных производственных системах // *АиТ.* 2007. № 12. С. 85–100.
Khobotov E.N. On some models and methods of the solution of scheduling problems in discrete enterprises // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 12. pp. 2172–2186.
5. *Хоботов Е.Н., Ермолова М.А.* Агрегирование в задачах построения расписаний работ на предприятиях с конвейерной сборкой изделий // *АиТ.* 2019. № 5. С. 118–130.
Khobotov E.N., Ermolova M.A. Aggregation in Job-Shop Scheduling Problems on Facilities with Conveyor Assembly of Finished Products // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 5. pp. 915–928.
6. *Сидоренко А.М., Хоботов Е.Н.* Агрегирование при планировании работ на машиностроительных предприятиях // *Теория и системы управления.* 2013. № 5. С. 132–144.
Sidorenko A.M., Khobotov E.N. Aggregation in Job Scheduling in Machine Works / *Journal of Computer and Systems Sciences International.* Moscow, Russia: Pleiades Publishing, Ltd., 2013. Vol. 52, No. 5. pp. 800–810.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 01.06.2023

После доработки 21.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

© 2023 г. В.Н. БУРКОВ, д-р техн. наук (vlab17@bk.ru),
И.В. БУРКОВА, д-р техн. наук (irbur27@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.Р. КАШЕНКОВ, канд. техн. наук (alex27k@mail.ru)
(Вологодский государственный технический университет)

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ГРУППОВОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ

Рассматривается задача стимулирования сокращения продолжительности проекта. Заданы величины сокращения продолжительностей работ проекта и соответствующие затраты. Для компенсации затрат применяется система группового стимулирования. В этой системе все работы разбиваются на группы и для каждой группы применяется унифицированная система стимулирования. Рассмотрены два типа унифицированных систем для групп — линейная и скачкообразная. Задача заключается в разбиении работ на группы и в выборе системы стимулирования для каждой группы так, чтобы суммарный фонд стимулирования был минимален. Предложены алгоритмы решения, в основе которых лежит определение кратчайшего пути в сети. Рассмотрен также ряд частных случаев (разбиение с минимальным числом групп и разбиение с максимальным числом групп).

Ключевые слова: система группового стимулирования, унифицированная система линейного стимулирования, унифицированная система скачкообразного стимулирования, кратчайший путь в сети.

DOI: 10.31857/S0005231023120085, EDN: NETGTR

1. Введение

Рассматривается проект из n работ. Для каждой работы заданы величина сокращения ее продолжительности и затраты на это сокращение. Для компенсации затрат определяется система стимулирования.

Задачи построения оптимальных систем стимулирования рассматривались во многих работах ([1–3] и др.). В основном рассматриваются системы двух типов — системы индивидуального стимулирования и системы унифицированного стимулирования. В системах индивидуального стимулирования для каждой группы определяется своя система, выбранная из заданного класса систем (линейные, скачкообразные, ранговые и др. [1]). В системах унифицированного стимулирования определяется единая система для всех агентов. Достоинством систем индивидуального стимулирования является существенно меньший в ряде случаев фонд стимулирования по сравнению с системами унифицированного стимулирования, а недостатками — незаинтересованность в снижении издержек и достаточно большие возможности для манипулирования. Достоинством систем унифицированного стимулирования являются

меньшие возможности для манипулирования, существенно большая заинтересованность в снижении издержек, а недостатком — существенно большая во многих случаях величина фонда стимулирования. Системы группового стимулирования занимают промежуточное положение. В таких системах множество всех агентов разбивается на группы и для каждой группы применяется система унифицированного стимулирования. Системы группового стимулирования сохраняют в определенной степени достоинства систем унифицированного и индивидуального стимулирования и в то же время снижают их недостатки.

В статье дается постановка задач синтеза оптимальных систем группового стимулирования и рассматриваются методы их решения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим проект, состоящий из n работ. Определен план сокращения продолжительности проекта, согласно которому продолжительность работы i сокращается на величину y_i . Определены также затраты исполнителей на сокращение продолжительности z_i , $i = \overline{1, n}$.

Для компенсации затрат требуется определить систему группового стимулирования (ГС). Рассмотрим систему ГС, в которой все работы разбиваются на $1 < m < n$ групп и для каждой группы определяется некоторая система унифицированного стимулирования (УС). Будем рассматривать два класса систем УС — системы линейного стимулирования (ЛС) и системы скачкообразного стимулирования (СС). Обозначим через R_j множество работ, входящих в группу j .

$$(1) \quad \bigcup_j R_j = R, \quad R_i \cap R_j = \emptyset$$

для всех i, j (R — множество всех работ). Если для группы j выбрана система ЛС, то очевидно, что для компенсации затрат всех исполнителей работ этой группы минимальный фонд стимулирования составит

$$(2) \quad S_j = a_j T_j,$$

где

$$a_j = \max_{i \in R_j} k_i, \quad T_j = \sum_{i \in R_j} y_i, \quad k_i = \frac{z_i}{y_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если для группы j выбрана система СС, то до минимальной фонд стимулирования на компенсацию затрат исполнителей составит

$$(3) \quad S_j = n_j \max_{i \in R_j} z_i,$$

где n_j — число работ в группе j .

Задача 1. Определить разбиение R_j , $j = \overline{1, m}$, и выбрать систему стимулирования для каждой группы так, чтобы фонд стимулирования был минимальным. Эту задачу будем рассматривать в трех вариантах: в первом — для всех групп используются только системы класса ЛС, во втором — только системы класса СС, а в третьем могут использоваться системы обоих классов.

Дадим формальную постановку задачи. Обозначим $x_{ij} = 1$, если работа i входит в группу j , $x_{ij} = 0$ — в противном случае. В случае системы ЛС фонд стимулирования j -й группы составит

$$(4) \quad S_{1j} = \left(\sum_i x_{ij} y_i \right) \max_i k_i x_{ij}.$$

В случае системы СС фонд стимулирования j -й группы составит

$$(5) \quad S_{2j} = \left(\sum_i x_{ij} \right) \max_i k_i y_i x_{ij},$$

а в случае смешанной системы фонд стимулирования j -й группы составит

$$(6) \quad S_{3j} = \min(S_{1j}, S_{2j}).$$

Соответственно, общий фонд стимулирования равен

$$(7) \quad S_k = \sum_j S_{kj}, \quad k = \overline{1, 3}$$

в зависимости от выбранной системы стимулирования k .

Ограничения задачи могут иметь различный вид. Так, если задано число n_j работ в каждой группе, то ограничения принимают вид

$$(8) \quad \sum_i x_{ij} = n_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Если число работ в группе должно быть в определенных границах, то ограничения принимают вид

$$(9) \quad l_1 \leq \sum_i x_{ij} \leq l_2.$$

Возможны и другие ограничения.

Задача 2. Определить (x_{ij}) , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, минимизирующие (7) при заданных ограничениях (8), (9) или других.

Рассмотрим методы решения поставленных задач.

3. Системы ЛС при равных y_i

Рассмотрим случай, когда все $y_i = y$, $i = \overline{1, n}$. Пусть работы пронумерованы по возрастанию (неубыванию) k_i , т.е.

$$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n.$$

Назовем эту последовательность исходной.

Определение 1. Куском исходной последовательности называется ее часть от некоторой работы i до работы $j > i$.

Теорема 1. Оптимальное разбиение работ на группы представляет собой совокупность кусков исходных последовательностей.

Доказательство. Примем сначала, что все k_i различны. Пусть P — оптимальное разбиение. Рассмотрим группу с максимальным k_n . Если эта группа не является куском, то найдется максимальный номер s исходной последовательности такой, что соответствующая работа отсутствует в группе с k_n , а присутствует в другой группе, причем в этой группе она имеет максимальную величину k_s . Поменяем местами работу s с любой работой из группы с k_n , не входящей в кусок. Очевидно, что затраты на стимулирование в группе с максимальным k_n не изменятся, в то же время в группе с i_s затраты на стимулирование уменьшатся, так как максимальная k_i в группе с i_s меньше, чем k_s , что противоречит оптимальности разбиения P . Таким образом, группа с работой n является куском. Далее аналогично рассматриваем следующую группу с максимальным k_i и т.д.

Откажемся от предположения, что все k_i различны. В этом случае существует несколько исходных последовательностей, однако для любого оптимального разбиения найдется исходная последовательность такая, что разбиение будет совокупностью кусков этой последовательности. Теорема доказана.

Пусть работы пронумерованы по возрастанию (неубыванию) k_i , т.е.

$$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n.$$

Построим сеть допустимых разбиений (СДР) работ на группы. Сеть состоит из входа, выхода и $(m - 1)$ слоя. Каждой вершине i p -го слоя соответствует суммарное число работ Q_{ip} , входящих в первые p групп. Заметим, что минимальное число работ равно 2, а максимальное — $n - 2(m - p)$, поскольку в каждую группу должно входить не менее двух работ. Поэтому число вершин p -го слоя равно

$$a = n - 2(m - p) - 2p + 1 = n - 2m + 1$$

и не зависит от p .

Вершину i p -го слоя соединяем дугой с вершиной j $(p + 1)$ -го слоя, если

$$Q_{jp+1} - Q_{ip} \geq 2.$$

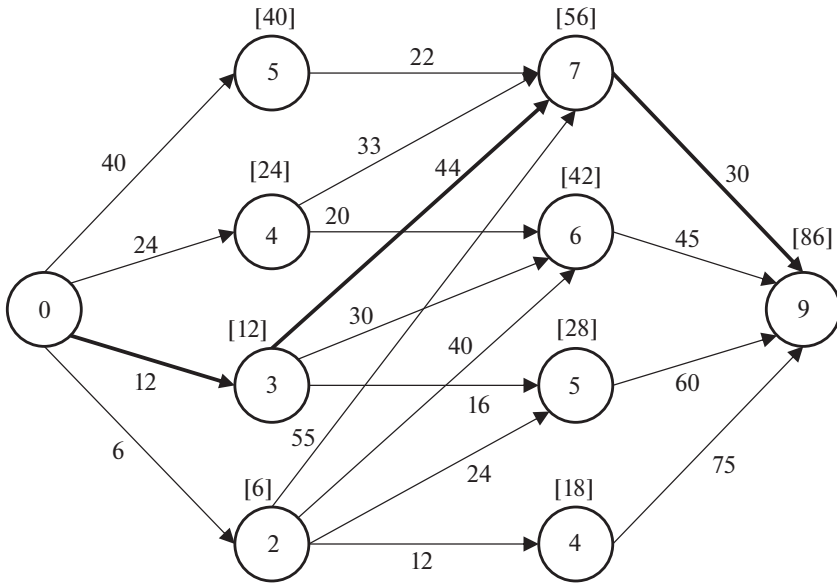


Рис. 1.

Вход сети 0 соединяем дугой с каждой вершиной 1-го слоя, а каждую вершину $(m - 1)$ слоя соединяем дугой с выходом сети.

Теорема 2. Каждому допустимому варианту разбиения работ на группы соответствует единственный путь в сети ДР, и каждому пути в сети ДР соответствует единственный вариант разбиения работ на группы.

Доказательство. Каждому допустимому варианту (n_1, \dots, n_m) соответствует последовательность чисел Q_{ip} , $p = \overline{1, m - 1}$ таких, что разность чисел соседних слоев больше или равна 2. Согласно построению сети ДР в этом случае существует дуга, соединяющая соответствующие вершины. И наоборот, каждому пути в сети ДР соответствует последовательность (n_1, \dots, n_m) , где n_k равно разности $(Q_{jk+1} - Q_{ik})$ соответствующих смежных вершин. Эта последовательность определяет единственное разбиение работ на группы. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим проект из 9 работ. Пусть $m = 3$. Имеем

$$q = 9 - 6 + 1 = 4.$$

Соответствующая сеть приведена на рис. 1. В табл. 1 приведены данные о работах. Примем $y_i = 1$ для всех i , т.е. $z_i = k_i$. Длины дуг указаны на рис. 1. Кратчайший путь $(0, 3, 7, 9)$ имеет длину 86. Оптимальное разбиение на три группы: $R_1 = (1, 2, 3)$, $R_2 = (4, 5, 6, 7)$, $R_3 = (8, 9)$.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_i	1	3	4	6	8	10	11	12	15
z_i	1	15	12	12	8	40	33	24	15

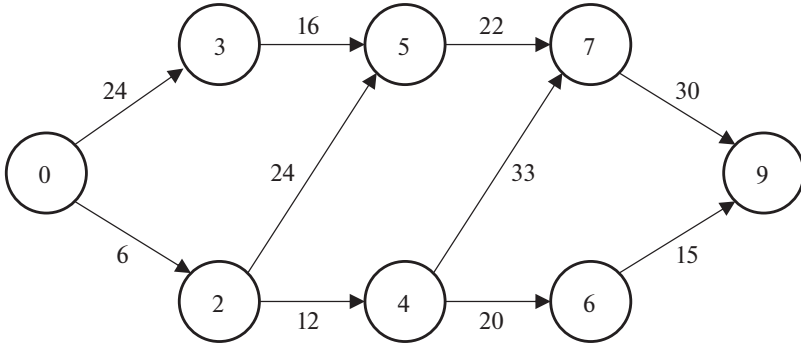


Рис. 2.

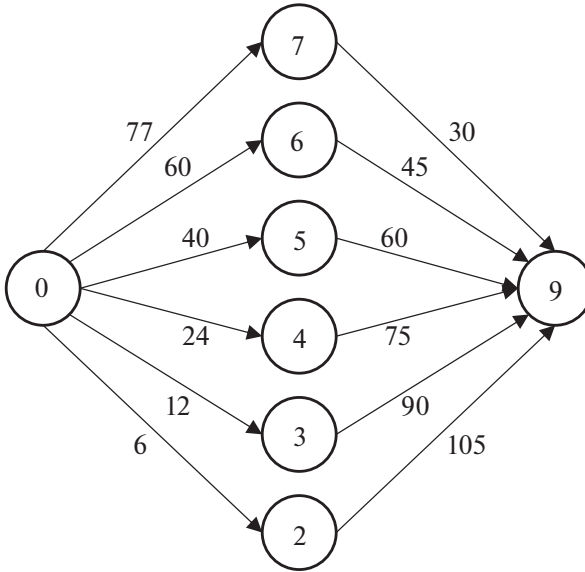


Рис. 3.

Решим задачу для максимального числа групп $m = \lfloor n/2 \rfloor = 4$. Соответствующая сеть ДР приведена на рис. 2 ($q = 2$).

Вычисляем индексы вершин λ_{ip} :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{вх}} &= 0, & \lambda_{11} &= 6, & \lambda_{21} &= 24, \\ \lambda_{12} &= \lambda_{11} + 12 = 18, \\ \lambda_{22} &= \min [\lambda_{11} + 24, \lambda_{21} + 16] = 30, \\ \lambda_{13} &= \lambda_{12} + 20 = 38, \\ \lambda_{23} &= \min [\lambda_{12} + 33, \lambda_{22} + 22] = 51, \\ \lambda_{\text{вых}} &= \min [\lambda_{13} + 45, \lambda_{23} + 30] = 81. \end{aligned}$$

Оптимальное разбиение — на четыре группы (1, 2), (3, 4), (5, 6, 7), (8, 9).

Решим задачу для минимального числа групп $m = 2$, $q = 6$. Соответствующая сеть приведена на рис. 3.

Вычисляем:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{вх}} &= 0, \quad \lambda_{11} = 6, \quad \lambda_{21} = 12, \\ \lambda_{31} &= 24, \quad \lambda_{41} = 40, \quad \lambda_{51} = 60, \quad \lambda_{61} = 77, \\ \lambda_{\text{вых}} &= \min [\lambda_{11} + 105, \lambda_{21} + 90, \lambda_{31} + 75, \lambda_{41} + 60, \lambda_{51} + 45, \lambda_{61} + 30] = 99. \end{aligned}$$

Оптимальное разбиение — (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9).

Заметим, что с ростом числа групп затраты на стимулирование уменьшаются, что достаточно очевидно.

4. Эвристический алгоритм

Описываемый алгоритм можно применить для общего случая разных y_i как эвристический. Для его обоснования заметим, что если существует разбиение на группы такое, что для каждой группы коэффициенты k_i одинаковы, то очевидно, что это разбиение оптимально. Поэтому разумно предположить, что чем ближе коэффициенты k_i в группах, тем ближе разбиение к оптимальному.

Пример 2. Берем данные табл. 1. Рассмотрим задачу для трех групп. Соответствующая сеть, совпадающая с сетью на рис. 1, с длинами дуг, полученными согласно (5), приведена на рис. 4.

Вычисляем:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{вх}} &= 0, \quad \lambda_{11} = 18, \quad \lambda_{21} = 36, \quad \lambda_{31} = 66, \quad \lambda_{41} = 96, \\ \lambda_{12} &= 48, \quad \lambda_{22} = \min [18 + 48, 36 + 24] = 60, \quad \lambda_{32} = 106, \quad \lambda_{42} = 146, \\ \lambda_{\text{вых}} &= \min [48 + 165, 60 + 150, 106 + 90, 146 + 45] = 191. \end{aligned}$$

Оптимальное решение будет (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7), (8, 9).

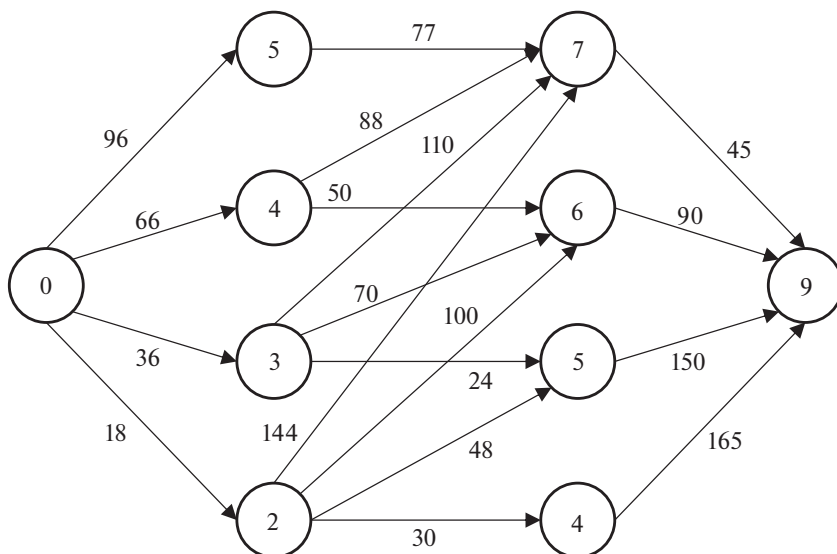


Рис. 4.

5. Система стимулирования скачкообразного типа

Рассмотрим системы С-типа. Для таких систем имеет место теорема, аналогичная теореме 1. Пусть все работы пронумерованы по возрастанию (неубыванию) z_i т.е.

$$z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n.$$

Эту последовательность также будем называть исходной. Определение куска последовательности также совпадает с определением для систем линейного типа (т.е. кусок — это часть исходной последовательности).

Теорема 3. Оптимальное разбиение представляет собой совокупность кусков исходной последовательности (одной из них, если исходных последовательностей несколько).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Рассматриваем оптимальное разбиение. Берем группу с максимальным z_n . Покажем, что это кусок. Пусть это не кусок. Определяем работу с максимальной величиной z_s , которая входит в кусок, но отсутствует в этой группе, а присутствует в другой группе. Меняем местами работу s с любой работой из группы с работой n , не принадлежащий куску. Нетрудно видеть, что затраты на стимулирование уменьшаются. Таким образом, группа с работой n является куском. Далее удаляем работы этого куска, рассматриваем следующую группу с максимальной величиной z и т.д.

Пример 3. Рассмотрим пример с данными табл. 1. Перенумеруем работы так, чтобы получить исходную последовательность.

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_i	1	8	4	6	15	3	12	11	10
y_i	1	1	3	2	1	5	2	3	4
z_i	1	8	12	12	15	15	24	33	40

Определим оптимальную систему ГС из трех групп. Заметим, что соответствующая сеть будет иметь вид рис. 1, но с другими длинами дуг. Она приведена на рис. 5.

Вычисляем:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{вх}} &= 0, & \lambda_{11} &= 16, & \lambda_{21} &= 36, & \lambda_{31} &= 48, & \lambda_{41} &= 75, \\ \lambda_{12} &= 40, & \lambda_{22} &= \min [16 + 45, 36 + 30] = 61, \\ \lambda_{32} &= \min [48 + 30, 36 + 45, 16 + 60] = 76, \\ \lambda_{42} &= \min [75 + 48, 48 + 72, 36 + 96, 16 + 120] = 120, \\ \lambda_{\text{вых}} &= \min [40 + 200, 61 + 160, 76 + 120, 120 + 80] = 196. \end{aligned}$$

Оптимальное разбиение будет (1, 2), (3, 4, 5, 6), (7, 8, 9).

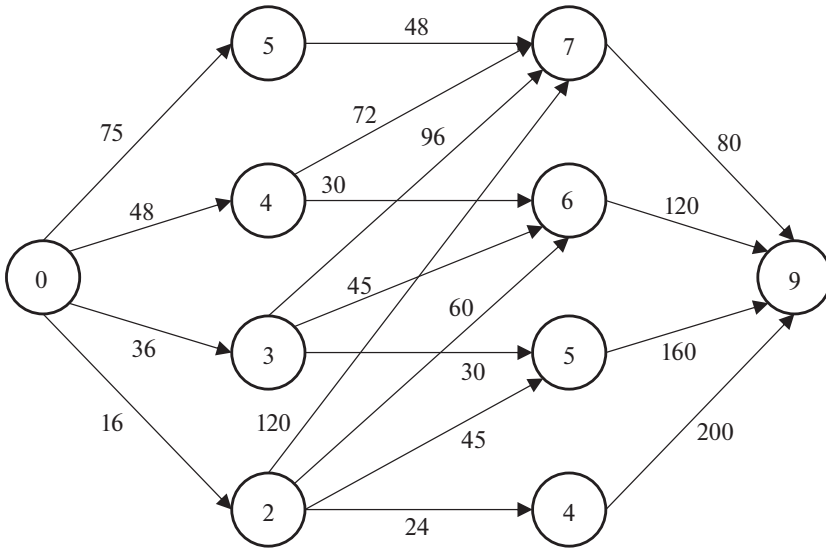


Рис. 5.

6. Разбиение на две группы для линейной системы стимулирования

Рассмотрим частный случай разбиения на две группы. Примем, что задан максимальный коэффициент k_j второй группы. В этом случае задача легко решается. Если $k_j < k_{n-1}$, то в первую группу входят все работы с $k_i > k_j$, а во вторую — все работы с $k_i \leq k_j$. Действительно, любой перенос работы с $k_i \leq k_j$ в первую группу увеличивает фонд стимулирования на $(k_{n-1} - k_j)y_i > 0$. Если $k_j = k_{n-1} < k_n$, то необходимо добавить в первую группу одну работу с тем, чтобы число работ было больше одной. Добавляем работу с минимальным y .

Пример 4. Берем данные табл. 1. Вычисляем:

1. $k_j = 12$. Добавляем в первую группу работу 1 с минимальной продолжительностью $y_1 = 1$. Фонд стимулирования равен:

$$\Phi_1 = 15 \cdot 2 + 12 \cdot 20 = 270.$$

2. $k_j = 11$. В первую группу входят работы 8 и 9.

$$\Phi_2 = 45 + 209 = 254.$$

3. $k_j = 10$. В первую группу входят работы 7, 8 и 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_3 = 90 + 160 = 250.$$

4. $k_j = 8$. В первую группу входят работы 6, 7, 8 и 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_4 = 150 + 96 = 246.$$

5. $k_j = 6$. В первую группу входят работы 5, 6, 7, 8 и 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_5 = 165 + 66 = 231.$$

6. $k_j = 4$. В первую группу входят работы с 4 по 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_6 = 195 + 36 = 231.$$

7. $k_j = 3$. В первую группу входят работы с 3 по 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_4 = 240 + 18 = 258.$$

Оптимальное разделение на группы: (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7, 8, 9).

7. Заключение

В статье рассмотрены задачи синтеза систем группового стимулирования для линейных и скачкообразных систем стимулирования. Заметим, что решение задачи разбиения на две группы для систем линейного стимулирования показывает, что эвристический алгоритм во многих случаях дает оптимальное решение. Представляет интерес обосновать этот вывод более строго. Представляется также интересным рассмотрение других систем стимулирования (базовых и комбинированных). Что касается систем смешанного стимулирования, то заметим, что любую систему линейного или скачкообразного стимулирования можно превратить в систему смешанного стимулирования, пересчитав длины дуг соответствующей сети по формуле (6). Однако в общем случае полученное решение не будет оптимальным. Задача поиска оптимальной системы смешанного стимулирования пока не решена. Перечисленные задачи требуют дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003.
2. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф. 2000.
3. Бурков В.Н., Буркова И.В. и др. Механизмы управления: Мультифункциональное учебное пособие / Бурков В.Н., Буркова И.В., Губко М.В. и др. / Под ред. Д.А. Новикова. Изд. 2-е переработанное и доп. М.: ЛЕНАНД, 2013.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 30.05.2023

После доработки 10.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

© 2023 г. А.В. ЩЕПКИН, д-р техн. наук (av_shch@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СРАВНЕНИЕ ПРОЦЕДУР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МЕХАНИЗМЕ СМЕШАННОГО ФИНАНСИРОВАНИЯ

Анализируется механизм смешанного финансирования мегапроекта, состоящего из нескольких проектов. Одна часть средств на выполнение проекта поступает от руководителя мегапроекта, другая часть от исполнителя проекта. При распределении средств на выполнение проектов руководитель мегапроекта учитывает информацию о размере собственных средств исполнителя на выполнение проекта. Исполнители проектов стремятся получить больше средств от руководителя мегапроекта, в свою очередь, руководитель мегапроекта заинтересован в привлечении большего размера средств от исполнителей проекта. Для достижения этой цели руководитель мегапроекта использует различные процедуры распределения финансовых средств. Соответственно, исполнители проекта для увеличения выделяемых для них средств используют информацию, сообщаемую руководителю мегапроекта. Анализируются процедуры прямых и обратных приоритетов распределения в механизме смешанного финансирования. В ситуации равновесия по Нэшу определяется процедура распределения финансовых средств, которая стимулирует исполнителей проекта выделять больший объем собственных средств на выполнение проекта.

Ключевые слова: смешанное финансирование, прямые приоритеты, обратные приоритеты, плановая прибыль, фактическая прибыль.

DOI: 10.31857/S0005231023120097, EDN: NGLOEU

1. Введение

Для финансирования мегапроектов часто привлекаются несколько источников поступления финансовых средств. При этом достаточно типичной является ситуация, когда одним из источников финансирования выступает руководитель мегапроекта, а другим источником являются сами исполнители отдельных проектов, составляющих мегапроект. Другими словами реализуется механизм смешанного финансирования [1–3]. Бюджет всего мегапроекта, как правило, ограничен и зачастую недостаточен для реализации необходимого числа проектов. В [4] отмечается, что идея смешанного финансирования состоит в том, что средства из бюджета мегапроекта выделяются при условии, что исполнитель каждого проекта обязуется выделить на свой проект собственное финансирование.

Применение механизма смешанного финансирования подразумевает, что самим исполнителям проектов выгодно вкладывать свои средства в их реализацию. Но при этом перед руководителем мегапроекта стоит задача распределения финансовых средств среди исполнителей проектов. Традиционно

в теории активных систем [5, 6] для реализации соответствующих механизмов распределения руководитель мегапроекта запрашивает информацию о требуемых финансах у исполнителей проектов. Размер получаемых исполнителями проектов средств существенным образом зависит от сообщенной ими информации, размера распределяемых средств и процедуры распределения этих средств, причем размер средств каждого исполнителя зависит не только от его информации, но и от информации всех исполнителей проектов.

В работах зарубежных ученых рассмотрено смешанное финансирование связано с оценением конкретных инструментов, таких как акционерный капитал, гарантии, займы и т.д. [7, 8]. При этом смешанное финансирование рассматривается как использование капитала из государственных или благотворительных источников для увеличения инвестиций частного сектора [9]. Особое внимание уделяется вопросом инвестирования, при котором смешанное финансирование повышает потенциальную доходность инвестиций или снижает факторы риска, делая их более привлекательными для инвесторов [10, 11].

В настоящей статье проводится анализ процедур прямых и обратных приоритетов распределения, которые использует руководитель мегапроекта в механизме смешанного финансирования. Определяется процедура, которая в ситуации равновесия по Нэшу [5] стимулирует исполнителей проекта выделять больший объем собственных средств на выполнение проекта.

2. Финансирование агентов при полной информированности центра

Рассматривается двухуровневая система, состоящая из Центра — руководителя мегапроекта (верхний уровень), распределяющего средства на выполнение проектов, и агентов (нижний уровень) — исполнителей проектов. Мегапроект состоит из n проектов и выполняется n исполнителями (агентами). Каждому агенту известны фактические затраты на выполнение проекта z_i , $i = 1, \dots, n$. Центр располагает средствами в размере R , которые распределяются между исполнителями проектов. Полная информированность Центра предполагает, что Центру известны фактические затраты на выполнение каждого проекта.

Рассмотрим теоретико-игровую постановку задачи.

1. Каждый агент сообщает в Центр значение w — часть фактических затрат на выполнение проекта, которую агент финансирует из собственных средств. Таким образом, планируемый размер собственных средств $u_i^{(п)}$ на выполнение проекта i -го агента определяется следующим выражением:

$$u_i^{(п)} = w_i z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что заявка на финансирование i -го агента определяется как

$$s_i = (1 - w_i) z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Центр определяет размер средств c_i , $i = 1, \dots, n$ для всех проектов на основе полученной информации. Если $c_i < s_i$, то для выполнения проекта фактический размер собственных средств агента $u_i^{(\Phi)}$, $i = 1, \dots, n$ будет определяться как

$$u_i^{(\Phi)} = z_i - c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Агенты и Центр определяют выигрыши. Выигрышем агента является его прибыль. Функция выигрыша Центра может быть различной. В данном случае это не важно, так как цель настоящей статьи — определение условий, обеспечивающих выделение большего объема собственных средств агентов на выполнение проекта.

Здесь будем предполагать, что i -й агент получает эффект от выполненного проекта в размере Θ_i . Также предполагается, что проект будет выполнен, и эффект будет получен агентом, только если $c_i + u_i^{(\Phi)} \geq z_i$. В этом случае прибыль i -го агента может быть представлена в виде

$$(1) \quad f_i = \Theta_i + c_i - u_i^{(\Phi)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим сначала случай, когда Центр в состоянии выделить всем агентам запрашиваемые средства в полном объеме. Тогда, очевидно, $c_i = s_i$, $i = 1, \dots, n$, и, соответственно,

$$(2) \quad f_i = \Theta_i + (1 - 2w_i)z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из (2) следует, что для увеличения своей прибыли агенты заинтересованы уменьшать свои собственные средства на выполнение проекта и максимально увеличивать свою заявку на финансирование. Для того, чтобы подобную заинтересованность устранить, Центр вводит дополнительное условие. Для получения средств от Центра агенты должны выделить собственные средства в размере не менее, чем dz_i , где d — установленная Центром доля от фактических затрат. Очевидно, что в этом случае заявка агентов будет определяться как

$$s_i = (1 - d)z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Прибыль i -го агента в этой ситуации определяется как

$$f_i = \Theta_i + (1 - 2d)z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

При этом, как следует из последнего выражения, агент может влиять на размер прибыли, только если он установит $w_i > d$. Но, как было отмечено выше, агенты заинтересованы уменьшать свои собственные средства на выполнение проекта, а это соответствует тому, что $w_i = d$.

В случае, когда средства Центра ограничены, то для определения размера финансирования c_i i -го проекта, $i = 1, \dots, n$, используются приоритетные процедуры распределения [6].

Процедура прямых приоритетов

$$c_i^{(\text{пр})} = \min \left\{ s_i; \frac{A_i s_i}{\sum_{q=1}^n A_q s_q} R \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Процедура обратных приоритетов

$$(3) \quad c_i^{(\text{об})} = \min \left\{ s_i; \frac{A_i}{s_i \sum_{q \in N} A_q / s_q} R \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь A_i — приоритет проекта, установленный Центром для i -го агента.

Рассмотрим сначала процедуру прямых приоритетов. Так как финансирование агентов осуществляется при полной информированности Центра, объем средств, который выделяется на выполнение i -го проекта, определяется как

$$(4) \quad c_i^{(\text{пр})} = \frac{A_i(1 - w_i)z_i}{\sum_{q=1}^n A_q(1 - w_q)z_q} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для того чтобы i -й агент получил эффект Θ_i , должно выполняться условие $c_i^{(\text{пр})} + u_i^{(\Phi)} \geq z_i$. Отсюда следует

$$(5) \quad \sum_{q=1}^n u_q^{(\Phi)} \geq \sum_{q=1}^n z_q - R.$$

Этот вывод достаточно очевиден. Если для выполнения всех проектов требуется финансирование в размере $\sum_{q=1}^n z_q$, а Центр выделяет средства в размере R , то объем собственных средств, выделяемых агентами, как раз определяется выражением (5).

Целевая функция i -го агента (1) при выполнении (4) принимает вид

$$f_i = \Theta_i + \frac{2A_i(1 - w_i)z_i}{\sum_{q=1}^n A_q(1 - w_q)z_q} R - z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_i} = -2A_i z_i \frac{\sum_{q=1}^n A_q(1 - w_q)z_q - A_i z_i(1 - w_i)}{\left(\sum_{q=1}^n A_q(1 - w_q)z_q \right)^2} R < 0.$$

Отсюда следует: агенты заинтересованы уменьшать свои собственные средства на выполнение проекта и максимально увеличивать свою заявку на финансирование.

Так как Центр стремится заинтересовать агентов выделять больший объем собственных средств на выполнение проекта, то для этого Центр формирует приоритет i -го агента таким образом, чтобы он увеличивался с ростом объема собственных средств на выполнение проекта. Например, Центр может установить приоритет в виде

$$(6) \quad A_i = \frac{a_i}{1 - w_i}.$$

Особенность этого приоритета следующая. Чем больше собственных средств выделяет агент на выполнение проекта, тем выше его приоритет.

В этом случае (4) можно записать в виде

$$(7) \quad c_i^{(\text{III})} = \frac{a_i z_i}{\sum_{q=1}^n a_q z_q} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Соответственно, фактический объем собственных средств i -го агента, $i = 1, \dots, n$, на выполнение проекта равен

$$u_i^{(\Phi, \text{III})} = z_i - c_i^{(\text{III})}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В дальнейшем будем считать, что для всех выполняемых проектов справедливо следующее условие.

Условие 1. Все проекты разделены на две группы. Проекты первой группы имеют номера $i = 1, \dots, m$ и являются наиболее приоритетными, для них установлены приоритеты $a_i = b^3 > 1$, соответственно, проекты второй группы — менее приоритетные имеют номера $i = m + 1, \dots, n$, для них установлены приоритеты $a_i = 1$.

В этом случае (7) можно записать в виде

$$(8) \quad c_i^{(\text{III})} = \begin{cases} \frac{b^3 z_i}{b^3 \sum_{q=1}^m z_q + \sum_{q=m+1}^n z_q} R, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{z_i}{b^3 \sum_{q=1}^m z_q + \sum_{q=m+1}^n z_q} R, & i = m + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Пусть $z_1 = z_n$, т.е. затраты на проект № 1 с высоким приоритетом совпадают с затратами на проект № n с низким приоритетом. В этом случае из (8) можно заключить, что агент, проект которого имеет меньший приоритет, получает меньше средств из Центра и, соответственно, выделяет больше собственных средств на выполнение проекта.

Кроме того, из (7) следует, что объем финансирования агентов не зависит от информации, сообщаемой агентами.

Рассмотрим теперь процедуру обратных приоритетов. Процедуру (3) можно переписать в виде

$$c_i^{(\text{оп})} = \min \left\{ (1 - w_i)z_i; \frac{A_i}{(1 - w_i)z_i \sum_{q \in N} A_q / [(1 - w_q)z_q]} R \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Агент получает максимальное финансирование, если выполняется условие

$$(1 - w_i)z_i = \frac{A_i}{(1 - w_i)z_i \sum_{q \in N} A_q / [(1 - w_q)z_q]} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда легко получить

$$(9) \quad (1 - w_i)z_i = \frac{\sqrt{A_i}}{\sum_{q \in N} \sqrt{A_q}} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если Центр установил приоритеты (6), то (9) можно переписать как

$$(10) \quad c_i^{(\text{оп})} = (1 - w_i)z_i = \frac{\sqrt[3]{a_i z_i}}{\sum_{q \in N} \sqrt[3]{a_q z_q}} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

И, соответственно,

$$u_i^{(\text{ф,оп})} = z_i - c_i^{(\text{оп})}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В случае выполнения условия 1, (10) можно записать в виде

$$(11) \quad c_i^{(\text{оп})} = \begin{cases} \frac{b \sqrt[3]{z_i}}{b \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{z_q}} R, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{\sqrt[3]{z_i}}{b \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{z_q}} R, & i = m + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Здесь также предполагая, что $z_1 = z_n$, и учитывая (11), получаем $u_1^{(\text{ф,оп})} = z_1 - c_1^{(\text{оп})}$ и $u_n^{(\text{ф,оп})} = z_n - c_n^{(\text{оп})}$. Сравнивая $u_1^{(\text{ф,оп})}$ и $u_n^{(\text{ф,оп})}$, получаем результат, аналогичный результату, полученному для принципа прямых приоритетов.

3. Финансирование агентов при неполной информированности центра

Неполная информированность Центра предполагает, что Центру не известны фактические затраты на выполнение каждого проекта z_i , $i = 1, \dots, n$, а информацию о планируемых затратах на выполнение проектов Z_i , $i = 1, \dots, n$ Центр получает от агентов.

В этом случае каждый агент сообщает в Центр значение планируемых затрат Z_i , $i = 1, \dots, n$ и значение w_i — часть планируемых затрат, которую агент финансирует из собственных средств. Отсюда получаем

$$u_i = w_i Z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Соответственно, заявка на финансирование i -го агента определяется как

$$(12) \quad s_i = (1 - w_i) Z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Фактическая прибыль i -го агента определяется как

$$(13) \quad f_i^{(\Phi)} = \Theta_i + c_i - z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

в то время как плановая прибыль может быть записана в виде

$$f_i^{(\text{пл})} = \Theta_i + c_i - Z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Перепишем (13) в виде

$$f_i^{(\Phi)} = \Theta_i + c_i - z_i = \Theta_i + c_i - (z_i - Z_i + Z_i) = f_i^{(\text{пл})} + Z_i - z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Учитывая, что фактические затраты z_i известны агентам и агент не может получить от Центра больше средств, чем он планирует потратить, естественно предполагать, что планируемые затраты Z_i больше фактических, и в этом случае разницу $Z_i - z_i > 0$ можно считать сверхплановой прибылью $f_i^{(\text{сн})} = Z_i - z_i$. В дальнейшем будем считать, что фактическая прибыль i -го агента рассчитывается как

$$(14) \quad \begin{aligned} f_i^{(\Phi)} &= f_i^{(\text{пл})} + q f_i^{(\text{сн})} = \Theta_i + c_i - Z_i + q(Z_i - z_i) = \\ &= \Theta_i + c_i - (1 - q)Z_i - qz_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где $q \leq 1$. Если $q \in (0; 1]$, то это означает, что Центр оставляет в распоряжении агента часть сверхплановой прибыли. Соответственно, q — норматив, определяющий величину сверхплановой прибыли, остающейся у агента. Если же $q \leq 0$, то q — коэффициент штрафа за искажение информации агента о затратах на выполнение проекта [12].

Здесь также сначала рассмотрим случай, когда Центр в состоянии выделить всем агентам запрашиваемые средства в полном объеме. Тогда, очевидно, $c_i = s_i$, $i = 1, \dots, n$ и, соответственно,

$$(15) \quad f_i^{(\Phi)} = \Theta_i + s_i - (1 - q)Z_i - qz_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Учитывая (12), выражение (15) можно переписать в виде

$$(16) \quad f_i^{(\Phi)} = \Theta_i + (1 - w_i + q)Z_i - qz_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из (16) легко видеть, что агентам всегда выгодно завышать планируемые затраты, так как для $q \in (0; 1]$ всегда справедливо неравенство

$$1 - w_i + q > 0.$$

Если средства Центра ограничены, то, как и в случае полной информированности для определения размера финансирования c_i i -го проекта, $i = 1, \dots, n$, Центр использует приоритетные процедуры распределения [6], а целевая функция агента записывается в виде (14).

Рассмотрим сначала процедуру прямых приоритетов. Объем средств, который выделяет Центр на выполнение i -го проекта, при этом определяется как

$$c_i^{(\text{пр})} = \frac{A_i(1 - w_i)Z_i}{\sum_{q=1}^n A_q(1 - w_q)Z_q} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если Центр установил приоритеты как (6), то

$$c_i^{(\text{пр})} = \frac{a_i Z_i}{\sum_{q=1}^n a_q Z_q} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Целевая функция (14) в этом случае записывается в виде

$$f_i^{(\Phi)} = \Theta_i + \frac{a_i Z_i}{\sum_{q=1}^n a_q Z_q} R - (1 - q)Z_i - qz_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для определения плановых значений затрат Z_i^* в ситуации равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений

$$(17) \quad \frac{\partial f_i^{(\Phi)}}{\partial Z_i} = a_i \frac{\sum_{q=1}^n a_q Z_q - a_i Z_i}{\left(\sum_{q=1}^n a_q Z_q \right)^2} R - (1 - q) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Решая систему (17) получаем

$$(18) \quad Z_i^* = \frac{n - 1}{(1 - q)a_i \sum_{q=1}^n \frac{1}{a_q}} R \left(1 - \frac{n - 1}{a_i \sum_{q=1}^n \frac{1}{a_q}} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда легко получить размер финансирования агентов в ситуации равновесия по Нэшу

$$(19) \quad c_i^{*(\text{III})} = \left(1 - \frac{n-1}{a_i \sum_{q=1}^n \frac{1}{a_q}} \right) R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Соответственно, можем записать $u_i^{*(\text{III})} = z_i - c_i^{*(\text{III})}$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть выполнено условие 1, тогда (18) можно записать в виде

$$(20) \quad Z_i^{*(\text{III})} = \begin{cases} \frac{(n-1)[(b^3-1)(n-m)+1]}{(1-q)[m+b^3(n-m)]^2} R, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{(n-1)b^3[b^3-m(b^3-1)]}{(1-q)[m+b^3(n-m)]^2} R, & i = m+1, \dots, n. \end{cases}$$

Размер финансирования агентов в ситуации равновесия по Нэшу определяется как

$$c_i^{*(\text{III})} = \begin{cases} \frac{(b^3-1)(n-m)+1}{m+b^3(n-m)} R, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{b^3-m(b^3-1)}{m+b^3(n-m)} R, & i = m+1, \dots, n. \end{cases}$$

Требование положительного значения финансирования проектов приводит к необходимости выполнения следующего неравенства:

$$(21) \quad b^3 - (b^3 - 1)m > 0.$$

Из (21) получаем

$$(22) \quad m < \frac{b^3}{b^3 - 1}.$$

Неравенство (22) означает, что чем больше отношение максимального приоритета к минимальному, тем меньше должно быть проектов с максимальным приоритетом.

В случае, когда $m = n$, т.е. все проекты одинаково важны для Центра, выражения (18) и (19) записываются в виде

$$(23) \quad \begin{cases} \hat{Z}_i^* = \frac{n-1}{(1-q)n^2} R, \\ \hat{c}_i^{*(\text{III})} = R/n, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Учитывая (23) можем выразить размер собственных средств агентов в ситуации равновесия по Нэшу, направляемых на выполнение проектов $\hat{u}_i^{*(\text{III})} = z_i - \hat{c}_i^{*(\text{III})}$, $i = 1, \dots, n$.

Если предположить, что $z_1 = z_n$, то сравнивая $\hat{u}_1^{*(\text{III})}$ и $\hat{u}_n^{*(\text{III})}$, можно утверждать, что агент, проект которого имеет меньший приоритет, выделяет больше собственных средств на его выполнение.

Действительно, это легко видеть из неравенства

$$z_n - \frac{b^3 - m(b^3 - 1)}{m + b^3(n - m)}R > z_1 - \frac{(b^3 - 1)(n - m) + 1}{m + b^3(n - m)}R.$$

Рассмотрим теперь процедуру обратных приоритетов. Объем средств, который выделяет Центр на выполнение i -го проекта, в этом случае определяется как

$$c_i^{(\text{on})} = \min \left\{ (1 - w_i)Z_i; \frac{A_i}{(1 - w_i)Z_i \sum_{q \in N} A_q / [(1 - w_q)Z_q]} R \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Агент получает максимальное финансирование, если выполняется условие

$$(1 - w_i)Z_i = \frac{A_i}{(1 - w_i)Z_i \sum_{q \in N} A_q / [(1 - w_q)Z_q]} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда легко получить

$$(24) \quad c_i^{(\text{on})} = \frac{\sqrt[3]{a_i Z_i}}{\sum_{q \in N} \sqrt[3]{a_q Z_q}} R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть выполнено условие 1, тогда (24) можно записать в виде

$$(25) \quad c_i^{(\text{on})} = \begin{cases} \frac{b \sqrt[3]{Z_i}}{b \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{Z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{Z_q}} R, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{\sqrt[3]{Z_i}}{b \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{Z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{Z_q}} R, & i = m + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Целевая функция (14) в этом случае записывается в виде

$$f_i^{(\Phi)} = \begin{cases} \Theta_i + \frac{b\sqrt[3]{Z_i}}{b \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{Z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{Z_q}} R - (1-q)Z_i - qz_i, & i = 1, \dots, m, \\ \Theta_i + \frac{\sqrt[3]{Z_i}}{b \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{Z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{Z_q}} R(1-q)Z_i - qz_i, & i = m+1, \dots, n. \end{cases}$$

При выполнении условия слабого влияния [5]

$$\frac{\partial}{\partial Z_i} \frac{1}{b \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{Z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{Z_q}} = 0$$

для определения плановых значений затрат Z_i^* в ситуации равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений

$$(26) \quad \frac{\partial f_i^{(\Phi)}}{\partial Z_i} = \begin{cases} \frac{b}{3Z_i^{2/3} \left[be \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{Z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{Z_q} \right]} R - (1-q) = 0, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{3Z_i^{2/3} \left[be \sum_{q=1}^m \sqrt[3]{Z_q} + \sum_{q=m+1}^n \sqrt[3]{Z_q} \right]} R - (1-q) = 0, & i = m+1, \dots, n. \end{cases}$$

Из (26) получаем

$$(27) \quad Z_i^* = \begin{cases} \frac{b\sqrt{b}}{3(1-q) [mb\sqrt{b} + (n-m)]} R, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{3(1-q) [mb\sqrt{b} + (n-m)]} R, & i = m+1, \dots, n. \end{cases}$$

Выражение (27) означает, что плановые затраты агента, который имеет более высокий приоритет в ситуации равновесия по Нэшу, всегда оказывается выше плановых затрат агента с более низким приоритетом.

Учитывая (25), легко получить размер финансирования агентов в ситуации равновесия по Нэшу

$$(28) \quad c_i^{*(\text{оп})} = \begin{cases} \frac{b^{3/2}}{b^{3/2}m + (n-m)} R, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{b^{3/2}m + (n-m)} R, & i = m+1, \dots, n. \end{cases}$$

Выражение (28) означает, что финансирование агента, который имеет более высокий приоритет в ситуации равновесия по Нэшу, всегда оказывается выше финансирования агента с более низким приоритетом.

Учитывая (28), можем выразить размер собственных средств агентов в ситуации равновесия по Нэшу, направляемых на выполнение проектов $u_i^{*(\text{оп})} = z_i - c_i^{*(\text{оп})}$.

Если предположить, что $z_1 = z_n$, то, сравнивая $u_1^{*(\text{пп})}$ и $u_n^{*(\text{пп})}$, можно утверждать, что агент, проект которого имеет меньший приоритет, выделяет больше собственных средств на его выполнение.

Действительно, это легко видеть из неравенства

$$z_n - \frac{1}{b^{3/2}m + (n - m)}R > z_1 - \frac{b^{3/2}}{b^{3/2}m + (n - m)}R.$$

В случае, когда $m = n$, т.е. все проекты одинаково важны для Центра, выражения (27) и (28) записываются в виде

$$Z_i^* = \frac{R}{3(1 - q)}, \quad i = 1, \dots, n$$

и $c_i^{*(\text{оп})} = R/n, i = 1, \dots, n$.

Покажем, что

$$(29) \quad c_i^{*(\text{пп})} < c_i^{*(\text{оп})}, \quad i = m + 1, \dots, n.$$

Перепишем (29) в виде

$$\frac{b^3 - m(b^3 - 1)}{m + b^3(n - m)}R < \frac{1}{b^{3/2}m + (n - m)}R.$$

После несложных преобразований получаем

$$(30) \quad [b^3 - m(b^3 - 1)](b^{3/2} - 1) - (n - 1)(b^3 - 1) < 0.$$

Так как $m \geq 1$, то неравенство (30) будет выполняться всегда, если справедливо неравенство

$$(b^{3/2} - 1) - (n - 1)(b^3 - 1) < 0.$$

Переписав это неравенство в виде

$$1 - (n - 1)(b^{3/2} + 1) < 0.$$

Легко убедиться, что неравенство (29) справедливо. Фактически здесь показано, что в ситуации равновесия по Нэшу распределение Центром средств на основе принципа обратных приоритетов обеспечивает агентам с более низким приоритетом получение большего объема финансирования, чем при распределении средств на основе принципа прямых приоритетов. Отсюда следует, что $u_i^{*(\text{ф,оп})} < u_i^{*(\text{ф,пп})}, i = m + 1, \dots, n$.

4. Заключение

Анализ функционирования модели механизма смешанного финансирования позволяет сделать следующие выводы. Агенты выделяют разный объем собственных средств на выполнение проектов, имеющих разные приоритеты, но требующих одинаковых фактических затрат в случае, когда финансирование осуществляется при полной информированности Центра и применяется или принцип прямых приоритетов, или принцип обратных приоритетов. При этом агент, проект которого имеет низкий приоритет, получает меньше средств из Центра и, соответственно, выделяет больше собственных средств на выполнение проекта.

В случае финансирования агентов при неполной информированности Центра и применения или принципа прямых приоритетов, или принципа обратных приоритетов агент, который имеет более высокий приоритет в ситуации равновесия по Нэшу, всегда получает больше средств, чем агент с более низким приоритетом. И при совпадении фактических затрат, агент, проект которого имеет низкий приоритет, выделяет больше собственных средств на выполнение проекта. Кроме того, следует отметить, что в ситуации равновесия по Нэшу распределение Центром средств на основе принципа обратных приоритетов обеспечивает агентам с более низким приоритетом получение большего объема финансирования, чем при распределении средств на основе принципа прямых приоритетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997.
2. Новиков Д.А., Пузырев С.А., Хорохордина Н.В. Механизмы смешанного финансирования // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 2 (20). С. 71–72.
3. Бурков В.Н., Буркова И.В., Губко М.В. и др. Механизмы управления: Мультифункциональное учебное пособие; под ред. Д.А. Новикова. Изд. 2-е переработанное и доп. М.: ЛЕНАНД, 2013.
4. Иващенко А.А., Колобов Д.В., Новиков Д.А. Механизмы финансирования инновационного развития фирмы. М.: ИПУ РАН, 2005.
5. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
6. Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Введение в теорию управления организационными системами: учебник; под ред. Д.А. Новикова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
7. Habbel V., Jackson E., Orth M. et al. Evaluating blended finance instruments and mechanisms: Approaches and methods // OECD Development Co-operation Working Papers, Paris, No 101, OECD Publishing, 2021, 65 p.
8. Andersen W.O., Basile I., Gotz G. et al. Blended Finance Evaluation: Governance and Methodological Challenges, OECD Development Co-operation Working Papers, Paris, 2019, No 51, OECD Publishing, <https://dx.doi.org/10.1787/4c1fc76e-en>.
9. Javier Pereira. Blended Finance: What is it, how it works and how it is used // Oxfam International, Feb. 13 2017, <https://www.oxfam.org/en/research/blended-finance-what-it-how-it-works-and-how-it-used>.

10. *Chainz Christina, Hendrik Hakenes*. The politician and his banker — How to efficiently grant state aid // Journal of Public Economics. 2012. V. 96. P. 218–225.
11. *Chen J.* Risk-Adjusted Return, Investopedia, Dec. 20 2018, <https://www.investopedia.com/terms/r/riskadjustedreturn.asp>.
12. *Бурков В.Н., Щепкин А.В.* Противозатратные механизмы ценообразования при ограничении на сумму цен // Проблемы управления. 2021. № 3. С. 42–49.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 31.05.2023

После доработки 14.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

© 2023 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПРИТЯГИВАЮЩИЙ ЦИКЛ В СВЯЗАННОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ФАЗОВЫМИ СДВИГАМИ В КОЛЕБАНИЯХ ПОДСИСТЕМ

Рассматривается множество обратимых механических систем с колебаниями одного периода и индивидуальными фазовыми сдвигами в них. Решается задача агрегирования связанной системы с притягивающим циклом. Развивается подход с выбором ведущей (управляющей) системы, которая через одностороннюю связь–управление действует на остальные (ведомые) системы: в агрегированной системе непосредственные связи между ведомыми системами отсутствуют. Применяются универсальные связи–управления. Особое внимание уделяется консервативным системам. Даются возможные сценарии функционирования агрегированной системы.

Ключевые слова: обратимая механическая система, симметричные периодические движения, связи–управления, ведущая система, ведомая система, притягивающий цикл, стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231023120103, EDN: NEQFMD

1. Предварительные замечания

Модели, содержащие связанные подсистемы, изучаются в различных областях знаний. В механике такой (классической) моделью стали симпатические маятники А. Зоммерфельда. Другие примеры даются, например, в [1–5].

Агрегирование заключается в конструировании на основе данного множества систем связанной системы, которая как одно целое будет обладать нужным динамическим свойством. Это свойство в задаче стабилизации колебания достигается, в частности, в притягивающем цикле системы. Само агрегирование происходит путем нахождения подходящих связей–управлений между системами.

Задача агрегирования в [6] решалась для набора консервативных систем. Доказывалось, что [6, лемма 1] цикл в системе существует только в случае, когда все механические системы, за исключением, быть может, одной системы с вырожденным семейством колебаний, содержат невырожденные семейства колебаний. При этом агрегирование проводилось для систем, содержащих невырожденные семейства колебаний, которые в несвязанной системе, как в целом, также образуют невырожденное семейство. Рассматривался случай,

когда колебания в системах были синхронизированными по фазе. Применялось универсальное управление из [7].

В то же время интерес представляют режимы колебаний, в которых фазы в колебаниях систем равноудалены друг от друга, например, или соседние системы колеблются в противофазе. Поэтому в общей ситуации встает задача нахождения связей–управлений, посредством которых реализуется притягивающий цикл связанной механической системы с фазовыми сдвигами в колебаниях входящих в него систем. Интересно также агрегировать связанную систему, содержащую одну или несколько механических систем с вырожденными семействами колебаний. Таким образом, возникает общая постановка задачи агрегирования связанной системы с притягивающим циклом на множестве механических систем, допускающих колебания.

Заметим, что подходы к агрегированию автономной системы общего вида с притягивающим циклом предложены в [8], а способы агрегирования сложной системы методом Ляпунова приводятся в [9].

2. Постановка задачи

Рассматривается множество Ξ из n гладких обратимых механических систем с одной степенью свободы

$$(1) \quad \ddot{q}_s + f_s(q_s, \dot{q}_s) = 0, \quad f_s(q_s, -\dot{q}_s) = f_s(q_s, \dot{q}_s), \quad s = 1, \dots, n.$$

Фазовый портрет s -й системы симметричен относительно неподвижного множества $M_s = \{q_s, \dot{q}_s : \dot{q}_s = 0\}$, где q_s – обобщенная координата. Предполагается, что каждая из систем множества Ξ допускает одночастотное колебание. Оно будет симметричным относительно множества M_s и представляет собой симметричное периодическое движение (СПД). СПД описывается формулой

$$q_s = \varphi_s(h_s, t + \gamma_s), \quad s = 1, \dots, n,$$

в которой от параметра h_s зависит период $T_s(h_s)$, а параметром γ_s задается сдвиг начальной точки по времени: при $\gamma_s = 0$ начальная точка принадлежит неподвижному множеству M_s . В этом случае СПД описывается четной функцией по t . СПД всегда образуют семейства. В консервативной системе функция f_s не зависит от скорости \dot{q}_s .

Далее используется определение из [6].

Определение 1. Семейство СПД по параметру h называется невырожденным, если на нем производная от периода $T(h)$ по переменной h отлична от нуля. СПД невырожденного семейства называется невырожденным.

Период $T(h)$ на семействе невырожденных СПД может возрастать или убывать. К примеру, период колебаний математического маятника монотонно увеличивается вместе с энергией маятника, и колебания — невырожденные.

Решения уравнения $\ddot{x} + x^3 = 0$ принадлежат к семейству СПД с убывающим периодом.

Колебания линейного осциллятора — изохронные и образуют вырожденное семейство СПД. В нелинейной системе вырожденное СПД, как правило, находится на границе семейства невырожденных СПД. В консервативной системе за параметр h обычно выбирается постоянная интеграла энергии.

В общей постановке задачи рассматривается множество Ξ обратимых механических систем, содержащих невырожденные (и/или вырожденные) семейства СПД с возрастающими (и/или убывающими) на семействе периодами. При этом в случае одновременного наличия в Ξ системы с возрастающим ($dT_1/dh_1 > 0$) периодом и системы с убывающим ($dT_2/dh_2 < 0$) периодом кривые периодов пересекаются в одной точке, где $T_1(h_1^*) = T_2(h_2^*) = T^*$. Фазы колебаний в общем случае различны. При наличии в Ξ еще системы с вырожденным семейством период на нем также будет равняться T^* . Набор из трех уравнений в Ξ приводит в связанной системе к двум произвольным фазам колебаний в системах. В случае произвольного числа n уравнений в Ξ принимается, что $\gamma_s = \gamma_1 + \delta_s$, $s = 2, \dots, n$. Поэтому ставится задача агрегирования связанной системы с притягивающим циклом при всех возможных векторах $\delta = (\delta_2, \dots, \delta_n)$.

Далее исследуется автономная связанная механическая система

$$(2) \quad \ddot{q}_s + f_s(q_s, \dot{q}_s) = \varepsilon \sigma_s u_s(q, \dot{q}), \quad s = 1, \dots, n,$$

где связь–управление

$$(3) \quad u(q, \dot{q}) = (u_1(q, \dot{q}), \dots, u_n(q, \dot{q}))$$

действует с малым коэффициентом усиления ε : переключатели σ_s равны $+1$ или (-1) . Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ система (2), рассматриваемая как одно целое, допускает T^* -периодическое СПД. Ставится задача нахождения связи–управления (3), гарантирующей существование в системе (2) притягивающего цикла с периодом T^* .

Поставленная задача содержит, в качестве частных, случаи: 1) все входящие в множество Ξ обратимые механические системы допускает семейство невырожденных СПД с возрастающим (убывающим) периодом, 2) характер монотонности периода в системах различный, 3) множество механических систем содержит невырожденные и вырожденные семейства СПД.

В [6] случай 1) исследовался для консервативных систем при дополнительном предложении, что множество несвязанных систем, как целое, допускает невырожденное семейство СПД.

3. Универсальные связи–управления при $\delta \neq 0$

Для вектора $\delta \neq 0$ находятся универсальные связи–управления, которые гарантируют существование и орбитальную асимптотическую устойчивость

цикла системы (2). Такие связи–управления можно рассматривать как обобщение связей из [7].

Предлагаются универсальные связи–управления

$$(4) \quad \begin{aligned} u_1 &= [1 - K_1(h_1)q_1^2]\dot{q}_1, \\ u_j &= [1 - K_j(h_j, \delta_j)q_1^2]\dot{q}_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Функция $K_1(h_1)$ и функции $K_j(h_j, \delta_j)$ вычисляются далее.

Принимается, что при $\varepsilon = 0$ система (2) допускает T^* -периодическое СПД, которому в подсистемах соответствуют значения $h_s = h_s^*$, $s = 1, \dots, n$. Из формул (4) следует, что уравнения в (2) становятся не равноправными: конструируется управляемая связанная система, в которой система с номером $s = 1$ становится ведущей, а остальные системы — ведомыми. Другая особенность управлений (4) заключается в том, что подсистемы с номерами $s = 2, \dots, n$ не оказывают непосредственного влияния друг на друга. С учетом этих замечаний к анализу предъявляются $n - 1$ независимых однотипных подсистем

$$(5) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_1 + f_1(q_1, \dot{q}_1) &= \varepsilon\sigma_1[1 - K_1(h_1^*)q_1^2]\dot{q}_1, \\ \ddot{q}_j + f_j(q_j, \dot{q}_j) &= \varepsilon\sigma_j[1 - K_j(h_j^*, \delta_j)q_1^2]\dot{q}_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Для подсистемы, выделенной в (5) номером j , решается задача о цикле при $\varepsilon \neq 0$. Тогда, применяя полученный результат ко всем подсистемам с номерами $j = 2, \dots, n$, приходим к решению задачи о цикле для связанной системы. В системе (5) через $K_1(h_1^*)$ и $K_j(h_j^*)$ обозначены числа. При этом h_1^* и h_j^* означают, что управления выбраны для СПД с периодом T^* , которому соответствуют значения $h_1 = h_1^*$ и $h_j = h_j^*$. С другой стороны, при решении задачи управления в (5) для другой пары (h_1, h_j) , выбирается другая пара коэффициентов $(K_1(h_1), K_j(h_j, \delta))$: в (6) применяется управление, в котором меняются коэффициенты K_1 и K_j . Следовательно, в (6) конструируется адаптивная система управления.

Таким образом, для адаптивной системы управления (6) необходимо найти зависимости $K_1(h_1)$ и $K_j(h_j, \delta)$, во второй из которых содержится параметр δ , которые обеспечивают существование притягивающего цикла.

Для подсистемы с номером j записывается система амплитудных уравнений

$$(6) \quad \begin{aligned} I_1(h_1) &\equiv \int_0^{T^*} [1 - K_1(h_1^*)\varphi_1^2(h_1, t)]\dot{\varphi}_1(h_1, t)\psi_1(h_1, t)dt = 0, \\ I_j(h_1, h_j, \delta_j) &\equiv \int_0^{T^*} [1 - K_j(h_j^*, \delta_j)\varphi_1^2(h_1, t)]\dot{\varphi}_j(h_j, t + \delta_j)\psi_j(h_j, t + \delta_j)dt = 0, \end{aligned}$$

для нахождения $h_1 = h_1^*$ и $h_j = h_j^*$, отвечающих необходимым условиям существования цикла с периодом T^* в управляемой системе (5). Через

$(\psi_1(h_1, t), \psi_j(h_j, t + \delta_j))$ в (6) обозначается решение сопряженного уравнения для $q_1 = \varphi_1(h_1, t)$, $q_j = \varphi_j(h_j, t + \delta_j)$. Вычисление этого решения дается в Приложении.

В системе (6) первое из уравнений одно и то же для всех номеров j . Оно анализируется независимо от второго уравнения.

Сначала рассматривается первое уравнение в (5). Необходимые условия существования цикла должны выполняться для всех значений параметра h_1 и соответствующих значений периода $T_1(h_1)$. Поэтому справедливо тождество

$$(7) \quad \int_0^{T_1(h_1)} [1 - K_1(h_1)\varphi_1^2(h_1, t)]\dot{\varphi}_1(h_1, t)\psi_1(h_1, t)dt,$$

откуда выводится формула

$$K_1(h_1) = \frac{\int_0^{T_1(h_1)} \dot{\varphi}_1(h_1, t)\psi_1(h_1, t)dt}{\int_0^{T_1(h_1)} \varphi_1^2(h_1, t)\dot{\varphi}_1(h_1, t)\psi_1(h_1, t)dt}.$$

В этом выражении знаменатель не равен нулю, что показывается в случае консервативной системы в разделе 4. В общем случае обратимой механической системы утверждение следует из приведенного в Приложении вычисления решения сопряженного решения.

Из тождества (7) с учетом нечетности функции $\dot{\varphi}_1(h_1, t)$ и равенства $T_1(h_1^*) = T^*$ вычисляется производная от функции $I_1(h_1)$ в точке $h_1 = h_1^*$:

$$\frac{dI_1(h_1^*)}{dh_1} = \chi_1\nu_1,$$

$$\chi_1 = \frac{dK_1(h_1^*)}{dh_1}, \quad \nu_1 = \int_0^{T^*} \varphi_1(h_1^*, t)^2 \dot{\varphi}_1(h_1^*, t)\psi_1(h_1^*, t)dt.$$

Выполнение равенства $I(h_1^*) = 0$ означает, что в первом уравнении системы (5) выполняется необходимое условие существования T^* -периодического решения. Неравенство $\chi_1\nu_1 \neq 0$ гарантирует, что решение является циклом. При надлежащем выборе знака σ_1 цикл становится притягивающим (см. [7]).

Аналогично исследуется второе уравнение системы (6). Для него определяется функция

$$K_j(h_j, \delta_j) = \frac{\int_0^{T_j(h_j)} \dot{\varphi}_j(h_j, t + \delta_j)\psi_j(h_j, t + \delta_j)dt}{\int_0^{T_j(h_j)} \varphi_1^2(h_1^*, t)\dot{\varphi}_j(h_j, t + \delta_j)\psi_j(h_j, t + \delta_j)dt},$$

и при $h_j = h_j^*$ ($h_1 = h_1^*$) вычисляется производная

$$\frac{dI_j(h_1^*, h_j^*, \delta_j)}{dh_j} = \chi_j \nu_j,$$

$$\chi_j = \frac{dK_j(h_j^*, \delta_j)}{dh_j}, \quad \nu_j = \int_0^{T^*} \varphi_1(h_1^*, t)^2 \dot{\varphi}_j(h_j^*, t + \delta_j) \psi_j(h_j^*, t + \delta_j) dt.$$

Условия $\chi_1 \nu_1 \neq 0$, $\chi_j \nu_j \neq 0$ являются теперь достаточными для существования простого корня (h_1^*, h_j^*) системы амплитудных уравнений (6) при фиксированном j . Тогда простота корня гарантирует существование цикла в системе (5) с фиксированным номером j . Цикл будет притягивающим, если переключатели выбираются из условий $\sigma_1 \chi_1 \nu_1 < 0$, $\sigma_j \chi_j \nu_j < 0$.

Рассмотрим системы амплитудных уравнений (6) для всех номеров $j = 2, \dots, n$. Тогда при выполнении неравенств $\chi_s \nu_s \neq 0$, $s = 1, \dots, n$ в связанной системе (5) реализуется цикл. При дополнительном условии $\sigma_s \chi_s \nu_s < 0$, $s = 1, \dots, n$ цикл становится притягивающим.

Таким образом, справедлива теорема 1.

Теорема 1. Пусть множество обратимых механических систем с одной степенью свободы допускает T^ -периодическое движение. Тогда связанная механическая система (5), где $j = 2, \dots, n$, обладает единственным циклом периода T^* , если $\chi_s \nu_s \neq 0$, $s = 1, \dots, n$. При дополнительных условиях $\sigma_s \chi_s \nu_s < 0$, $s = 1, \dots, n$ цикл становится притягивающим.*

Замечание 1. Цикл связанной системы (5) определяется с точностью до одного произвольного сдвига на траектории. При этом порождающие цикл колебания имеют сдвиги $\delta_2, \dots, \delta_n$ по фазе относительно фазы колебания в первом уравнении системы (5).

Замечание 2. В системе (6) интеграл

$$\kappa_j = \int_0^{T^*} \dot{\varphi}_j(h_j^*, \tau + \delta_j) \psi_j(h_j^*, \tau + \delta_j) d\tau$$

на периоде не зависит от δ_j . Поэтому при $\kappa_j \neq 0$ задается T^* -периодическая по δ_j функция

$$(8) \quad K_j(h_j^*, \delta_j) = \frac{\kappa_j}{\int_0^{T^*} \varphi_1^2(h_1^*, \tau - \delta_j) \dot{\varphi}_j(h_j^*, \tau) \psi_j(h_j^*, \tau) d\tau},$$

которая будет T^* -периодической по δ_j .

Замечание 3. В формуле (8) неравенство нулю знаменателя определяет область значений сдвига фазы δ_j в j -й подсистеме системы (5).

Замечание 4. В теореме 1 конструируется кусочно-непрерывная система (5). Существование цикла в силу независимости амплитудных уравнений (6) от σ_j гарантируется в каждой гладкой без переключения системе. Условия притяжения ($\chi_s \nu_s \neq 0$) должны выполняться в подсистеме на траекториях как с $h_s > h_s^*$, так и с $h_s < h_s^*$. Поэтому знаки σ_s для этих траекторий, как правило, — разные. Пример закона управления переключателями дается, например, в [10].

4. Консервативные системы

Для множества консервативных систем функции f_s в (1) не зависят от скоростей \dot{q}_s , и каждая система при $\varepsilon = 0$ допускает интеграл энергии. Уравнения в вариациях для СПД содержат симметричную матрицу, поэтому для рассматриваемой системы с одной степенью свободы выполняются равенства

$$\psi_s(h_s^*, \tau + \delta_s) = -\dot{\varphi}_s(h_s^*, \tau + \delta_s), \quad s = 1, \dots, n \quad (\delta_1 = 0).$$

В результате получается: $\nu_s > 0, \kappa_s < 0, s = 1, \dots, n$.

Подынтегральная функция в (8) получается $(T^*/2)$ -периодической по δ и каждому значению $K_j(h_j^*, \delta^*)$ отвечают две симметричные относительно неподвижного множества точки. Этим точкам отвечает один цикл.

Таким образом, справедлива следующая теорема 2.

Теорема 2. Для множества консервативных систем с одной степенью свободы, допускающей T^* -периодическое СПД, связанная система (5) обладает единственным притягивающим циклом, если выполняются условия $\sigma_s \chi_s < 0, s = 1, \dots, n$.

Пример 1. В связанной системе

$$(9) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + \sin x &= \varepsilon(1 - K_x(h_x)x^2)\dot{x}, \\ \ddot{y} + y^3/4 &= \sigma\varepsilon(1 - K_y(h_y,\delta)x^2)\dot{y} \end{aligned}$$

при $\varepsilon = 0$ первое уравнение описывает математический маятник. Период $T_x(h_x)$ на семействе колебаний, начиная с 2π , монотонно растет с энергией маятника h_x , причем функция $K_x(h_x)$ монотонно убывает (см. [11]). Решения второго уравнения образуют семейство колебаний с убывающим от постоянной энергии h_y периодом $T_y(h_y)$.

В самом деле, период $T_y(h_y)$ вычисляется по формуле

$$T_y(h_y) = 2 \int_{-y(0)}^{y(0)} \frac{dy}{\sqrt{h - y^4}},$$

где $y(0)$ — начальное значение переменной y . Тогда, переходя к переменной $z = y/h_y^{1/4}$, получим

$$T_y(h_y) = \frac{2}{h_y^{1/4}} \int_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}} = \frac{a}{h_y^{1/4}}, \quad a = 4 * 1.3 \dots,$$

явную зависимость периода от энергии системы.

Из проведенного анализа следует, что для любого h_x^* , $T_x(h_x^*) > 2\pi$, находится такое h_y^* , что в (9) выполняется равенство периодов $T_x(h_x^*) = T_y(h_y^*)$ с возрастающей функцией $f: h_y^* = f(h_x^*)$. Следовательно, система (9) при $\varepsilon = 0$ допускает однопараметрическое по h_x^* семейство СПД.

Функция $K_x(h_x)$ монотонно убывает. Поэтому при $h_x = h_x^*$ первое уравнение в (9) обладает притягивающим циклом. Выполнение еще одного условия $dK_y(h_y^*, \delta)/dh_y \neq 0$ по теореме 2 приводит к притягивающему циклу связанной системы (9).

Таким образом, для любого колебания математического маятника, отвечающего значению энергии h_x^* , находится энергия h_y^* второго уравнения в (9) такая, что в связанной системе реализуется притягивающий цикл. При этом фазы в колебаниях уравнений различаются на желаемое число δ .

5. Случай вырожденного семейства СПД

В [6, лемма 1] установлено, что в случае одинаковых фаз в колебаниях подсистем цикл в связанной системе существует только в случае, когда все механические системы, за исключением, быть может, одной системы с вырожденным семейством СПД, содержат невырожденные семейства СПД. Здесь более подробно рассматривается случай, когда одно из семейств является вырожденным. Допускается, что колебания в системах не синхронизированы по фазам. В системе (5) полагается $n = 2$.

Анализируется система

$$(10) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + x &= \varepsilon(1 - K_x(h_x)x^2)\dot{x}, \\ \ddot{y} + f(y) &= \varepsilon\sigma(1 - K_y(h_y, \delta)x^2)\dot{y}, \end{aligned}$$

в которой при $\varepsilon = 0$ первое уравнение содержит вырожденное семейство колебаний, а во втором уравнении период колебаний монотонно зависит от энергии h_y . Решение несвязанной системы при этом описывается формулами $x = A_x \cos t$ и $y = \varphi(h_y, t + \delta)$. На порождающем решении $A_x = 2/\sqrt{K_x}$, а значению постоянной h_y^* во втором уравнении соответствует период колебаний 2π . Находится связь между $K_y(h_y, \delta)$ и K_x .

Формула (8) для системы (10) записывается в виде

$$(11) \quad \begin{aligned} K_y(h_y^*, \delta) &= -\frac{\kappa}{T^*}, \\ \kappa &= -\int_0^{T^*} \dot{\varphi}^2(h_y^*, t) dt, \quad T^* = 2\pi. \end{aligned}$$

Преобразуем интеграл в знаменателе

$$\frac{1}{2} \int_0^{T^*} (1 + \cos 2t) \dot{\varphi}^2(h_y^*, t + \delta) dt = \frac{1}{2} \int_{\delta}^{T^* + \delta} \dot{\varphi}^2(h_y^*, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \left(\cos 2\delta \int_{\delta}^{T^* + \delta} \cos 2\tau \dot{\varphi}^2(h_y^*, \tau) d\tau + \sin 2\delta \int_{\delta}^{T^* + \delta} \sin 2\tau \dot{\varphi}^2(h_y^*, \tau) d\tau \right).$$

Здесь в скобке первый интеграл от 2π -периодической функции на периоде не зависит от δ , второй интеграл берется от нечетной функции и обращается в нуль. Получается линейная функция от $\cos 2\varphi$; $K_y(h_y^*, \delta)$ задается четной, π -периодической функцией δ .

С учетом равенства $K_x = 4/A_x^2$ формула (11) преобразуется к виду

$$(12) \quad K_y(h_y^*, \delta) = \frac{K_x \int_0^{T^*} \dot{\varphi}^2(h_y^*, t) dt}{2 \int_0^{T^*} (1 + \cos 2\delta \cos 2t) \dot{\varphi}^2(h_y^*, t) dt}.$$

Производная от (12) будет нечетной π -периодической функцией δ . В интервале $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$ эта производная обращается в нуль при $\delta = 0$.

Для построения цикла связанной системы (10) применяется теорема 2. Характеристика $K_y(h_y, \delta)$ вычисляется для заданной функции $\varphi(h_y, t)$. Для математического маятника функция $K_y(h_y, \delta)$ при $\delta = 0$ монотонно убывает (см. [11]).

Пример 2. Система (10), в которой во втором уравнении функция $K_y(h_y, \delta)$ не зависит от δ и совпадает с K_x , применяется в мехатронной схеме стабилизации колебаний [12]. В ней путем выбора амплитуды A_x в точке $\delta = \delta^*$ настраивается режим выполнения равенства $K_y(h_y^*, \delta) = K_x = 4/A_x^2$. В результате получается один из возможных сценариев рождения цикла, описанный в [10]: само существование сценария доказывалось путем анализа второго уравнения в (10) с подстановкой порождающего решения первого уравнения. Сдвиг по времени δ^* между колебаниями осциллятора Ван дер Поля и механической системы находится в мехатронной схеме стабилизации по формуле (12).

6. Случай двух вырожденных семейств

В системе (10) осциллятор Ван дер Поля применяется в качестве генератора сигналов для механической системы, допускающей невырожденное семейство колебаний. Сама система предназначена для стабилизации механических колебаний. В разделе 5 показано, что при $K_y = K_x$ сдвиг δ в решениях уравнений системы (10) находится по формуле (12).

Интересно проанализировать, как в цикле связанной системы синхронизируются амплитуда и фаза колебаний в ведущей и ведомой системах. Задача рассматривается для равноправности систем в Ξ , на примере двух идентичных линейных осцилляторов. Тогда к анализу предъявляется связанная система

$$(13) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + x &= \varepsilon(1 - K_x(h_x)x^2)\dot{x}, \\ \ddot{y} + y &= \varepsilon\sigma(1 - K_y(h_y, \delta)x^2)\dot{y}, \end{aligned}$$

где первым уравнением описывается осциллятор Ван дер Поля, а второе уравнение становится ведомым для этого осциллятора.

При $\varepsilon = 0$ система (13) по каждой координате колеблется с частотой 1: колебания – изохронные. Порождающие колебания описываются формулами

$$x = A_x \cos t, \quad A_x = 2/\sqrt{K_x}, \quad y = A_y \cos(t + \delta).$$

При этом для второго уравнения в (13) вычисляется $\kappa = -\int_0^{2\pi} A_y^2 \sin^2 t dt = -\pi A_y^2$.

В связанной системе $K_y = K_y(h_y, \delta)$. Поэтому по формуле (8) получается

$$K_y(h_y, \delta) = -\frac{4\kappa}{A_x^2 A_y^2 \pi (2 - \cos 2\delta)} = \frac{4}{A_x^2 (2 - \cos 2\delta)} = \frac{K_x}{2 - \cos 2\delta}.$$

Отсюда следует, что в цикле связанной системы амплитуды колебаний в ведущей и ведомой системах синхронизируются ($K_y = K_x$) только при $\delta = 0$, синхронизация фаз происходит также при $\delta = 0$.

Из формулы $K_y(h_y, \delta) = 2/(h_y(2 - \cos 2\delta))$ следует, что условия существования цикла в связанной системе (10) выполняются везде по δ . Для притягивающего цикла выбирается закон управления $\sigma = 1$.

Заметим, что амплитуды колебаний в системах связанной системы (13) близки к линейным колебаниям. Поэтому в цикле (рабочем режиме) рассматриваемой конкретной связанной системы (13), независимо от сдвига δ , колебания в системах будут казаться синхронизированными по δ .

7. Заключение

Предлагается подход к агрегированию связанной системы с притягивающим циклом на данном множестве n обратимых механических систем с колебаниями. Выбирается ведущая (управляющая) система, которая односторонней связью–управлением действует на остальные (ведомые) системы: непосредственные связи между ведомыми системами отсутствуют. Сама связанная система колеблется как $n - 1$ независимых подсистем, управляемых ведущей системой. При этом в колебании каждой системы допускается индивидуальный сдвиг по фазе с фазой колебания в ведущей системе.

Для агрегированной системы возможны различные сценарии управления. При отсутствии сдвига фаз в подсистемах реализуется (см. [6]) сценарий *одновременного управления* $n - 1$ механических систем. При задании закона изменения сдвигов в $n - 1$ механических системах в управляемой связанной системе реализуется *конвертный* сценарий, когда, например, достижение максимальной амплитуды колебания в ведомых системах разнесены по времени. Для $n = 2$ реализуется распространенный сценарий *ведущий-ведомый*, описанный, к примеру, в [12] для мехатронной схемы стабилизации колебаний.

Подход к агрегированию изложен на примере обратимых механических систем на плоскости. Он остается справедливым для множества механических систем произвольной размерности. Построенная связанная система представляет собой один уровень иерархии многоуровневой агрегированной системы с притягивающим циклом (по вопросу см. [8]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления сопряженного решения полезна лемма 1.

Рассматривается гладкая обратимая механическая система второго порядка

$$\dot{u} = U(u, v), \quad \dot{v} = V(u, v), \quad U(u, -v) = -U(u, v), \quad V(u, -v) = V(u, v).$$

Пусть система допускает СПД. Оно описывается функциями

$$u = \varphi(t), \quad v = \theta(t), \quad \varphi(-t) = \varphi(t), \quad \theta(-t) = -\theta(t).$$

Уравнения в вариациях для СПД записываются в виде

$$(П.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= a_-(t)x + a_+(t)y, \\ \dot{y} &= b_+(t)x + b_-(t)y, \end{aligned}$$

где $a_{\pm}(t), b_{\pm}(t)$ обозначаются четные (+) и нечетные (-) периодические функции. Они имеют решение $x = \dot{\varphi}(t), y = \dot{\theta}(t)$.

Лемма 1. По данному СПД решение сопряженной к (П.1) системы вычисляется по конструктивным формулам.

Доказательство. Выполняется преобразование

$$x = \xi_+(t)\tilde{x}, \quad y = \eta_+(t)\tilde{y}$$

с четными периодическими функциями $\xi_+(t)$ и $\eta_+(t)$, средние которых отличны от нуля. Тогда получается

$$\begin{aligned} \xi_+(t)\dot{\tilde{x}} + \dot{\xi}_+(t)\tilde{x} &= a_-(t)\xi_+(t)\tilde{x} + a_+(t)\eta_+(t)\tilde{y}, \\ \eta_+(t)\dot{\tilde{y}} + \dot{\eta}_+(t)\tilde{y} &= b_+(t)\xi_+(t)\tilde{x} + b_-(t)\eta_+(t)\tilde{y}. \end{aligned}$$

Функции $\xi_+(t)$ и $\eta_+(t)$ выбираются такими, чтобы выполнялись равенства

$$\dot{\xi}_+ = a_-(t)\xi_+, \quad \dot{\eta}_+ = b_-(t)\eta_+.$$

Тогда в преобразованной системе

$$(П.2) \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{a}_+(t)\tilde{y}, \quad \dot{\tilde{y}} = \tilde{b}_+(t)\tilde{x}$$

отсутствуют нечетные функции t .

Аналогично преобразуется сопряженная система

$$x_1 = \xi_{1+}(t)\tilde{x}_1, \quad y_1 = \eta_{1+}(t)\tilde{y}_1.$$

Получается

$$(П.3) \quad \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{b}_+(t)\tilde{y}_1, \quad \dot{\tilde{y}}_1 = -\tilde{a}_+(t)\tilde{x}_1.$$

В переменных $\tilde{x}_1 = -\tilde{y}$, $\tilde{y}_1 = \tilde{x}$ полученная система (П.3) совпадает с (П.2). Значит, ее решение дается формулами $\tilde{x}_1 = -\xi_+(t)^{-1}\dot{\theta}(t)$, $\tilde{y}_1 = \eta_+(t)^{-1}\dot{\varphi}(t)$. Поэтому решение сопряженной системы записывается в виде

$$x_1 = -\xi_{1+}(t)\xi_+(t)^{-1}\dot{\theta}(t), \quad y_1 = \eta_{1+}(t)\eta_+(t)^{-1}\dot{\varphi}(t).$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Поперечные колебания стержня, вызванные кратковременным продольным ударом // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 37–41.
2. Kovaleva A., Manevitch L.I. Autoresonance Versus Localization in Weakly Coupled Oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 320 (15 Apr. 2016). P. 1–8.
3. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 411–425.
4. Rompala K., Rand R., Howland H. Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. No. 5. P. 794–803.
5. Yakushevich L.V., Gara S., Awrejcewicz J. Mechanical Analog of the DNA Base Pair Oscillations // 10th Conf. on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879–886.
6. Барабанов И.Н., Тхай В.Н. Стабилизация цикла в связанной механической системе // АиТ. 2022. № 1. С. 67–76.
Barabanov I.N., Tkhai V.N. Stabilization of a Cycle in a Coupled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 1. P. 54–61.
7. Тхай В.Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
8. Тхай В.Н. Агрегирование автономной системы с притягивающим циклом // АиТ. 2022. № 3. С. 41–53.
Tkhai V.N. Aggregation of an Autonomous System with an Attracting Cycle // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 332–342.

9. Александров А.Ю., Платонов А.В. Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. СПб: Изд-во СПбГУ. 2012.
10. Тхай В.Н. Режим цикла в связанной консервативной системе // АиТ. 2022. № 2. С. 90–106.
Tkhai V.N. Cycle Mode in a Coupled Conservative System // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 2. P. 237–251.
11. *Tkhai V.N. On stabilization of pendulum type oscillations of a rigid body // Proc. 2018 14th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). IEEE Xplore: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408408>
<https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408408>*
12. Тхай В.Н. Мехатронная схема стабилизации колебаний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 1. С. 9–16.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 24.04.2023

После доработки 19.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (alvzuev@yandex.com)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток)

МЕТОД ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ¹

Предлагается метод диагностирования линейных динамических систем, описываемых дискретными моделями при наличии внешних возмущений, на основе интервальных наблюдателей. Приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель, формирующий два значения невязки так, что если число нуль находится между этими значениями, то дефекты, на обнаружение которых рассчитан наблюдатель, в системе отсутствуют. Случай, когда нуль не попадает между этими значениями, квалифицируется как появление дефекта. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: линейные системы, дискретные модели, интервальные наблюдатели, диагностирование, дефекты.

DOI: 10.31857/S0005231023120115, **EDN:** NGUJRY

1. Введение и постановка задачи

Настоящая статья является развитием работ [1, 2], в которых рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями, при наличии внешних возмущений. Эта задача активно исследуется последние годы, обстоятельные обзоры полученных за это время результатов содержатся в [3, 4], решения для различных классов систем, а также практические приложения можно найти в [5–10]. Характерной особенностью этих работ является то, что в них, как правило, интервальный наблюдатель имеет размерность, совпадающую с размерностью исходной системы, и определяется оценка множества допустимых значений полного вектора состояния, в то время как теоретический и практический интерес может представлять интервальная оценка только для значений заданной линейной функции этого вектора. Решающий эту задачу интервальный наблюдатель может оказаться существенно проще наблюдателя для полного вектора состояния, а ширина интервала заметно меньше.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-29-00191), <https://rscf.ru/project/23-29-00191/>.

В [11–16] интервальные наблюдатели используются для решения задачи функционального диагностирования. В [11–13, 15] наблюдатель также строится на основе исходной системы, что приводит к громоздким конструкциям и сложным методам минимизации влияния внешних возмущений на процесс диагностирования. В [14] рассматривается задача диагностирования в семействе связанных подсистем, где для каждой такой подсистемы строится свой интервальный наблюдатель полной размерности; в [16] решается практическая задача на основе интервального наблюдателя специального вида.

Известно, что для уменьшения вероятностей ложных тревог и пропусков дефектов при диагностировании традиционно используется адаптивный порог, устанавливающий пределы, в которых должна находиться невязка при отсутствии дефектов. Хотя идея использования адаптивного порога появилась более 30 лет назад, она разрабатывается для различных классов систем до настоящего времени (см., например, [17, 18]). В этих работах невязка генерируется диагностическим наблюдателем, а адаптивный порог формируется отдельно, что приводит к достаточно сложным схемам диагностирования.

В отличие от этого, интервальный диагностический наблюдатель (в соответствии со своей спецификой) формирует только два значения невязки, что существенно упрощает схему. При этом невязки формируются так, что при отсутствии дефектов значения одной из них являются неположительными, второй — неотрицательными, т.е. если число нуль находится между этими значениями, то дефекты, на обнаружение которых рассчитан наблюдатель, в системе отсутствуют. Случай, когда нуль не попадает между этими значениями, квалифицируется как появление дефекта. Кроме того, в отличие от традиционных схем с адаптивным порогом, значения невязок, формируемых интервальным наблюдателем, не зависят от управляющих и выходных сигналов диагностируемой системы, что также упрощает процесс принятия решений по результатам диагностирования.

В статье ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей минимальной размерности для стационарных дискретных систем, описываемых линейными динамическими моделями, работающих в условиях действия внешних возмущений, которые предназначены для решения задач функционального диагностирования — обнаружения и локализации дефектов. В отличие от [1, 2], где интервальные наблюдатели использовались для оценки значений заданной линейной функции вектора состояния исходной системы, в настоящей работе в соответствии с задачей диагностирования изменена конструкция наблюдателя, а также рассмотрен ряд вопросов, характерных для этой задачи: максимизация чувствительности к дефектам и метод локализации дефектов.

Рассматривается класс систем, описываемых линейной динамической моделью с дискретным временем

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Dd(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F , G , H , L и D – известные постоянные матрицы; $\rho(t) \in \mathbb{R}^q$ описывает возмущения, действующие на систему, предполагается, что $\rho(t)$ – неизвестная ограниченная функция времени: $\underline{\rho} \leq \rho(t) \leq \bar{\rho}$ для известных $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$. Поскольку во многих случаях появление в системе дефектов является следствием недопустимых изменений ее параметров, будем полагать, что вариации функции $d(t) \in \mathbb{R}^p$ в пределах $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$ для известных \underline{d} и \bar{d} являются допустимыми и не рассматриваются в качестве дефекта; выход за пределы интервала $[\underline{d}, \bar{d}]$ квалифицируется как дефект, что должно быть обнаружено. Как и в [3], для векторов x^1, x^2 и матриц A^1, A^2 отношения $x^1 \leq x^2$ и $A^1 \leq A^2$ понимаются поэлементно.

2. Основной результат

В основе решения рассматриваемой задачи лежит модель системы (1.1) минимальной размерности, которая в общем случае описывается уравнением

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + D_*d(t) + L_*\rho(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$, $k < n$ – размерность модели, $y_* \in \mathbb{R}$, F_* , G_* , J_* , H_* , D_* , L_* – матрицы, подлежащие определению. Предполагается, что при отсутствии дефектов и возмущений справедливы соотношения $x_*(t) = \Phi x(t)$ и $y_*(t) = R_*y(t)$ для некоторых матриц Φ и R_* . Правила построения такой модели рассматриваются в разд. 3.

Известно [1, 2], что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют условиям

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi F &= F_*\Phi + J_*H, & R_*H &= H_*\Phi, \\ \Phi G &= G_*, & \Phi D &= D_*, & \Phi L &= L_*. \end{aligned}$$

Как показано в [1], матрицы F_* и H_* могут быть приняты в канонической форме

$$(2.3) \quad F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

С точки зрения решаемой задачи такая форма является идеальной, поскольку матрица F_* устойчива для дискретных систем и неотрицательна, что необходимо для построения интервального наблюдателя, а H_* неотрицательна, что упрощает вид наблюдателя.

Искомый интервальный наблюдатель строится на основе модели (2.1) и по аналогии с [12, 13] ищется в виде

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_*(t+1) &= F_*\underline{x}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d} + L_*^+\underline{\rho} - L_*^-\bar{\rho}, \\
 \bar{x}_*(t+1) &= F_*\bar{x}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d} + L_*^+\bar{\rho} - L_*^-\underline{\rho}, \\
 \underline{y}_*(t) &= H_*\underline{x}_*(t), \\
 \bar{y}_*(t) &= H_*\bar{x}_*(t), \\
 \underline{r}(t) &= R_*y(t) - \bar{y}_*(t), \\
 \bar{r}(t) &= R_*y(t) - \underline{y}_*(t),
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

где $A^+ = \max\{0, A\}$, $A^- = A^+ - A$ для произвольной матрицы A ; нетрудно видеть, что $A^+ \geq 0$ и $A^- \geq 0$.

Теорема 1. Если $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, то при отсутствии дефектов для всех $t \geq 0$ выполняется соотношение $0 \in [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$; случай, когда $0 \notin [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ при некотором $t > 0$, квалифицируется как появление дефекта.

Доказательство. Введем ошибки $\underline{e}(t) = x_*(t) - \underline{x}_*(t)$ и $\bar{e}(t) = \bar{x}_*(t) - x_*(t)$, запишем уравнения для первой ошибки и преобразуем его с учетом соотношений (1.1), (2.1) и (2.2):

$$\begin{aligned}
 \underline{e}(t+1) &= x_*(t+1) - \underline{x}_*(t+1) = \\
 &= F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + D_*d(t) + L_*\rho(t) - \\
 &\quad - (F_*\underline{x}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d} + L_*^+\underline{\rho} - L_*^-\bar{\rho}) = \\
 \tag{2.5} &= F_*(\underline{e}(t) + \underline{x}_*(t)) - F_*\underline{x}_*(t) + D_*d(t) - (D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) + \\
 &\quad + L_*\rho(t) - (L_*^+\underline{\rho} - L_*^-\bar{\rho}) = \\
 &= F_*\underline{e}(t) + D_*d(t) - (D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) + L_*\rho(t) - (L_*^+\underline{\rho} - L_*^-\bar{\rho}).
 \end{aligned}$$

Поскольку $D_* = D_*^+ - D_*^-$, то

$$\begin{aligned}
 D_*d(t) - (D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) &= D_*^+d(t) - D_*^-d(t) - (D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) = \\
 &= D_*^+(d(t) - \underline{d}) + D_*^-(\bar{d} - d(t)).
 \end{aligned}$$

Так как при отсутствии дефектов $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$, а также $D_*^+ \geq 0$, $D_*^- \geq 0$, то

$$D_*d(t) - (D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) \geq 0.$$

Аналогично показывается, что

$$L_*\rho(t) - (L_*^+\underline{\rho} - L_*^-\bar{\rho}) \geq 0.$$

Так как по предположению $\underline{e}(0) = x_*(0) - \underline{x}_*(0) \geq 0$ и $F_* \geq 0$, из (2.5) следует $\underline{e}(1) \geq 0$. По индукции отсюда получаем $\underline{e}(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Подобным образом доказывается, что $\bar{e}(t) \geq 0$.

Далее из (2.4) с учетом (2.2) и $H_* \geq 0$ следует

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= R_* y(t) - \bar{y}_*(t) = R_* H x(t) - H_* \bar{x}_*(t) = \\ &= H_* \Phi x(t) - H_* (\bar{e}(t) + x_*(t)) = \\ &= H_* x_*(t) - H_* (\bar{e}(t) + x_*(t)) = \\ &= -H_* \bar{e}(t) \leq 0 \end{aligned}$$

при всех $t \geq 0$. Аналогично показывается, что $\bar{r}(t) = R_* y(t) - \underline{y}_*(t) \geq 0$. Два последних неравенства эквивалентны доказываемому утверждению, которое можно записать в виде импликации

$$d(t) \in [\underline{d}, \bar{d}] \Rightarrow 0 \in [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$$

при всех $t \geq 0$. Тогда если $0 \notin [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ при некотором $t > 0$, то применение операции отрицания к этой импликации дает

$$0 \notin [\underline{r}(t), \bar{r}(t)] \Rightarrow d(t) \notin [\underline{d}, \bar{d}],$$

что соответствует появлению дефекта. Максимальная чувствительность к дефектам обеспечивается соответствующим выбором матриц, описывающих наблюдатель, эта задача рассмотрена в разд. 3. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ в принципе может быть опущено, поскольку из-за устойчивости наблюдателя требование $0 \in [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ будет теперь выполняться при всех $t \geq t_0$ для некоторого конечного t_0 .

Замечание 2. Поскольку матрица F_* устойчива по построению, наблюдатель (2.4) устойчив. Естественно предполагать, что исходная система также устойчива и управление $u(t)$ конечно, а тогда переменные $y(t)$, $\underline{y}_*(t)$, $\bar{y}_*(t)$ и невязки $\underline{r}(t)$ и $\bar{r}(t)$ также будут конечными.

Таким образом, построенный наблюдатель формирует интервал $[\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$, и если нуль попадает в этот интервал, принимается решение об отсутствии дефектов в указанном в разд. 1 смысле, в противном случае делается заключение о появлении дефектов. Как следует из уравнений (2.4), описывающих наблюдатель, на ширину интервала $[\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ оказывают влияние внешние возмущения и диапазон допустимых значений переменной $d(t)$, и чем меньше эта ширина, тем надежнее обнаруживаются дефекты.

С точки зрения качества диагностирования, в частности, чувствительности к дефектам, наилучшим является наблюдатель с минимальной шириной интервала $[\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$. Из (2.4) следует, что этому отвечает случай, когда модель нечувствительна к возмущению, т.е. $L_* = \Phi L = 0$. Метод построения такой модели разработан в [1, 2], коротко опишем его.

3. Построение модели

3.1. Основные соотношения

С учетом канонической формы (2.3) уравнения (2.2) принимают вид

$$(3.1) \quad \Phi_1 = R_* H, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \Phi_k F = J_{*k} H,$$

где Φ_i и J_{*i} – i -е строки матриц Φ и J_* , $i = 1, \dots, k$, k – размерность модели (2.1). Известно [1, 2], что эти уравнения можно свернуть в одно:

$$(3.2) \quad (R_* \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k})V^{(k)} = 0,$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \dots \\ H \end{pmatrix}.$$

Условие нечувствительности к возмущениям $\Phi L = 0$ может быть представлено в форме

$$(3.3) \quad (R_* \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k})L^{(k)} = 0,$$

где

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & HF^2L & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & HFL & \dots & HF^{k-2}L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как строка $(R_* \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k})$ удовлетворяет условию (3.2), из (3.2) и (3.3) получаем

$$(3.4) \quad (R_* \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k})(V^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0.$$

Уравнение (3.4) имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} \quad L^{(k)}) < l(k+1).$$

Из последнего условия, начиная с $k = 1$, определяется минимальная размерность k , при которой (3.4) имеет решение, находится решение уравнения (3.4), из (3.1) определяются строки матрицы Φ и принимается $G_* := \Phi G$ и $D_* := \Phi D$.

3.2. Максимизация чувствительности к дефектам

Если уравнение (3.4) при минимальном k имеет несколько решений, из них можно выбрать одно, дающее максимальный вклад дефектов в наблюдатель, и, соответственно, максимальную чувствительность к дефектам, оцениваемую нормой матрицы $D_* = \Phi D$. Более эффективно это можно сделать следующим образом. По аналогии с анализом вклада возмущений введем матрицу

$$D^{(k)} = \begin{pmatrix} HD & HFD & HF^2D & \dots & HF^{k-1}D \\ 0 & HD & HFD & \dots & HF^{k-2}D \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом соотношений (3.1) можно показать, что

$$\|D_*\| = \|(R_* - J_1 - J_2 \dots - J_k)D^{(k)}\|.$$

Тогда задача максимизации вклад дефектов сводится к максимизации нормы $\|(R_* - J_1 - J_2 \dots - J_k)D^{(k)}\|$ при выполнении условия (3.4).

При решении этой задачи предлагается найти такое минимальное значение размерности k , при котором уравнение (3.4) имеет несколько (более одного) линейно независимых решений вида $(R_* - J_{*1} - J_{*2} \dots - J_{*k})$. Все эти решения сводятся в матрицу W , каждая строка которой представляет некоторое решение уравнения (3.4); из сказанного выше также следует, что решением является и произвольная линейная комбинация строк этой матрицы с вектором весовых коэффициентов $w = (w_1, \dots, w_N)$, где N – число строк матрицы W . Задача состоит в определении такого вектора w , который дает максимум нормы $\|wWD^{(k)}\|$.

Для решения этой задачи найдем сингулярное разложение матричного произведения $WD^{(k)}$, т.е. представим матрицу $WD^{(k)}$ в виде

$$WD^{(k)} = U_D \Sigma_D V_D,$$

где U_D и V_D – ортогональные матрицы, Σ_D в зависимости от соотношения чисел строк и столбцов матрицы $WD^{(k)}$ имеет вид

$$\Sigma_D = (\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \ 0) \quad \text{или} \quad \Sigma_D = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$s = \min(N, kp)$, $0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_s$ – сингулярные числа матрицы $WD^{(k)}$ [19, 20]. Если в качестве вектора весовых коэффициентов $w = (w_1, \dots, w_N)$ выбрать i -й транспонированный столбец матрицы U_D , то $\|wWD^{(k)}\| = \sigma_i$ [19, 20]. Из сказанного следует, что в качестве вектора $w = (w_1, \dots, w_N)$ следует выбирать транспонированный столбец матрицы U_D , соответствующий максимальному сингулярному числу, и принять $(R - J_{*1} - J_{*2} \dots - J_{*k}) := wW$. Далее из (3.1) определяются строки матрицы Φ и принимается $G_* := \Phi G$ и $D_* := \Phi D$.

Отметим, что это решение будет оптимальным для выбранной размерности k ; увеличение размерности сверх минимального значения может дать лучший вариант решения задачи по критерию максимума нормы матрицы $(R - J_{*1} - J_{*2} \dots - J_{*k})D^{(k)}$.

3.3. Минимизация вклада возмущения

Если при всех $k < n$ решение уравнения (3.4) отсутствует, то линейную модель, не чувствительную к возмущениям, построить невозможно, необходимо обращаться к робастным методам, минимизирующей вклад возмущения в модель [19]. Из полученных выше результатов ясно, что задача минимизации вклада возмущения сводится к минимизации нормы $\|(R_* - J_1 - J_2 \dots - J_k)L^{(k)}\|$ при выполнении условия (3.2).

Эта задача решается по аналогии с изложенным выше, а именно, предлагается найти такое минимальное значение размерности k , при котором уравнение (3.2) имеет несколько линейно независимых решений вида $(R_* - J_{*1} - J_{*2} \dots - J_{*k})$. Все эти решения в количестве M сводятся в матрицу V , каждая строка которой представляет некоторое решение уравнения (3.2). Задача состоит в определении такого вектора весовых коэффициентов $v = (v_1, \dots, v_M)$, который дает минимум нормы $\|vVL^{(k)}\|$.

Далее находится сингулярное разложение матричного произведения $VL^{(k)}$: $VL^{(k)} = U_L \Sigma_L V_L$ и первый транспонированный столбец матрицы U_L выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов $v = (v_1, \dots, v_M)$. На основании сказанного можно заключить, что линейная комбинация решений, представленных строками матрицы V с весами v_1, \dots, v_M , дает оптимальное решение $(R_* - J_{*1} - J_{*2} \dots - J_{*k}) = vV$. Далее из (3.1) определяются строки матрицы Φ и принимается $G_* := \Phi G$ и $D_* := \Phi D$, чем завершается синтез робастной модели.

Другие способы построения робастных моделей, в частности, с учетом вклада дефектов, рассмотрены в [19].

4. Решение задачи локализации дефектов

Построенный наблюдатель позволяет решить задачу обнаружения того множества дефектов, которые определяются условием $D_* := \Phi D \neq 0$. Для решения задачи локализации дефектов, т.е. определения места появления дефекта, необходимо построить банк наблюдателей, каждый из которых будет чувствителен к определенному множеству дефектов и нечувствителен к остальным. Построить такой банк можно следующим образом. Пусть вместо члена $Dd(t)$ в уравнении (1.1) множество возможных дефектов определяется слагаемым $\sum_{i=1}^s D_i d_i(t)$. Рассмотрим первый дефект и построим модель, нечувствительную к нему, решая уравнение

$$(4.1) \quad (R_* - J_{*1} - J_{*2} \dots - J_{*k})(V^{(k)} D_1^{(k)}) = 0,$$

определяя минимальную размерность k , начиная с $k = 1$, где

$$D_1^{(k)} = \begin{pmatrix} HD_1 & HFD_1 & HF^2D_1 & \dots & HF^{k-1}D_1 \\ 0 & HD_1 & HFD_1 & \dots & HF^{k-2}D_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее определяются строки матрицы Φ , принимается $G_* := \Phi G$ и по изложенным выше правилам строится интервальный наблюдатель. Он будет нечувствителен к ряду других дефектов, в частности, к тем, для которых $D_j = D_1 N$ с некоторой матрицей N . К дефектам, для которых выполняется условие $\Phi D_j \neq 0$, наблюдатель чувствителен. Выберем среди таких дефектов первый по порядку и аналогичным образом построим модель и наблюдатель,

нечувствительный к нему. Процедура продолжается до тех пор, пока не будут рассмотрены все дефекты.

Информация о чувствительности и нечувствительности каждого наблюдателя отражается в матрице синдромов S , строки которой соответствуют наблюдателям, столбцы — дефектам, при этом $S(i, j) = 0$, если i -й наблюдатель нечувствителен к j -му дефекту, $S(i, j) = 1$ в противном случае. Может оказаться так, что в этой матрице окажутся два и более одинаковых столбца, это означает, что в системе есть дефекты, которые невозможно отличить друг от друга описываемой процедурой, необходимо применить более изоциренные подходы.

Наиболее удобными с точки зрения решения задачи локализации являются матрицы, имеющие следующую структуру:

$$S^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Первая из них позволяет локализовать дефекты произвольной кратности, но ее редко удается реализовать на практике, поскольку требование нечувствительности к большому числу дефектов является весьма жестким. С этой точки зрения более практична вторая матрица, но и она не всегда реализуема. Дело в том, что между элементами матрицы S могут существовать определенные соотношения, вызванные особенностями системы (1.1) и возникающими в ней дефектами, из-за чего эти элементы не могут быть произвольными.

5. Практический пример

Рассмотрим электропривод, разомкнутая цепь которого с учетом вязкого трения описывается следующей моделью:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x_1(t+1) &= \gamma_1 x_2(t) + x_1(t), \\ x_2(t+1) &= \gamma_2 x_2(t) + \gamma_3 x_3(t) + \rho(t), \\ x_3(t+1) &= \gamma_4 x_2(t) + \gamma_5 x_3(t) + \gamma_6 u(t) + d(t), \\ y_1(t) &= x_2(t), \quad y_2(t) = x_3(t), \end{aligned}$$

где x_1 — угол поворота выходного вала редуктора, x_2 — угловая скорость вращения вала электродвигателя, x_3 — ток электродвигателя, $\gamma_1 - \gamma_6$ — коэффициенты, зависящие от параметров электропривода и интервала дискретизации, в частности, вязкое трение описывается коэффициентом γ_2 . При этом

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\Delta t}{i_r}, & \gamma_2 &= -\frac{\Delta t k_b}{J} + 1, & \gamma_3 &= \frac{\Delta t k_m}{J}, \\ \gamma_4 &= -\frac{\Delta t k_\omega}{L_m}, & \gamma_5 &= -\frac{\Delta t R_m}{L_m} + 1, & \gamma_6 &= \frac{\Delta t k_u}{L_m}, \end{aligned}$$

где Δt – интервал дискретизации; i_r – передаточное отношение редуктора; k_b – коэффициент вязкого трения; k_m – коэффициент крутящего момента; J – момент инерции ротора электродвигателя и вращающихся частей редуктора, приведенный к этому ротору; k_ω – коэффициент противо-э.д.с.; R_m – номинальное активное сопротивление цепи якоря; L_m – индуктивность цепи якоря; k_u – коэффициент усиления усилителя мощности; $u(t)$ – входное напряжение электропривода.

Электропривод описывается следующими матрицами:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построим модель, нечувствительную к возмущению. Примем $k = 1$ и найдем матрицы $V^{(1)}$ и $B^{(1)}$:

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rank}(V^{(1)}, B^{(1)}) = 3 < 2(1 + 1) = 4$, уравнение (3.4) имеет решение с матрицами

$$R_* = (\gamma_4 - \gamma_1), \quad J_* = (\gamma_4 - \gamma_1\gamma_5),$$

откуда $\Phi = (\gamma_4 \ 0 \ -\gamma_1)$, $G_* = -\gamma_1\gamma_6$, $D_* = -\gamma_1$. Модель (2.1) принимает вид

$$(5.2) \quad \begin{aligned} x_*(t+1) &= \gamma_4 y_1(t) - \gamma_1 \gamma_5 y_2(t) - \gamma_1 \gamma_6 u(t) - d(t), \\ y_*(t) &= x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_* = \gamma_4 x_1 - \gamma_1 x_3$. Нетрудно видеть, что $D_*^+ = 0$, $D_*^- = \gamma_1$.

Согласно (2.4) и (5.2) интервальный наблюдатель описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= \gamma_4 y_1(t) - \gamma_1 \gamma_5 y_2(t) - \gamma_1 \gamma_6 u(t) - \gamma_1 \bar{d}, \\ \bar{x}_*(t+1) &= \gamma_4 y_1(t) - \gamma_1 \gamma_5 y_2(t) - \gamma_1 \gamma_6 u(t) - \gamma_1 \underline{d}, \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_*(t), \\ \underline{r}(t) &= \gamma_4 y_1 - \gamma_1 y_3 - \bar{y}_*(t), \quad \bar{r}(t) = \gamma_4 y_1 - \gamma_1 y_3 - \underline{y}_*(t). \end{aligned}$$

Для моделирования для простоты примем $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_6 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_5 = -1$, $u(t) = 2 + \sin(t)$; возмущение $\rho(t)$ представлено случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-0,2; 0,2]$; интервал $[\underline{d}, \bar{d}]$ допустимых вариаций функции $d(t)$ задан в виде $[-0,05; 0,05]$. На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования наблюдателя с начальными состояниями $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $\underline{x}_*(0) = -0,2$, $\bar{x}_*(0) = 0,2$.

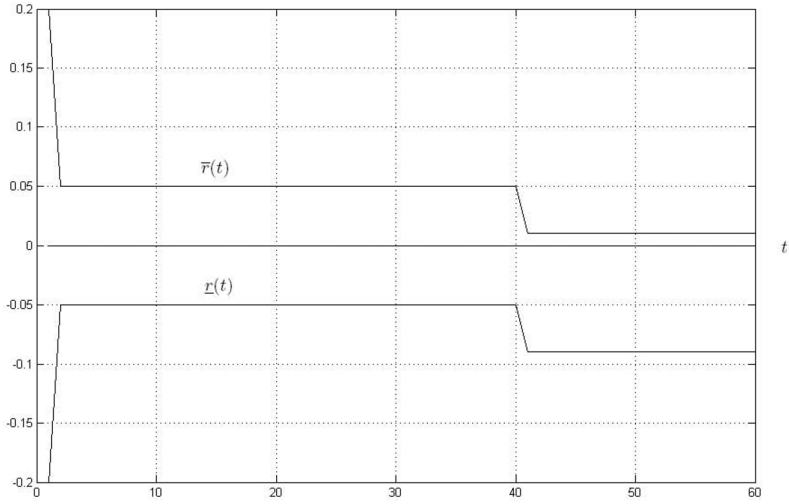


Рис. 1. Поведение невязок \underline{r} и \bar{r} при отсутствии дефектов.

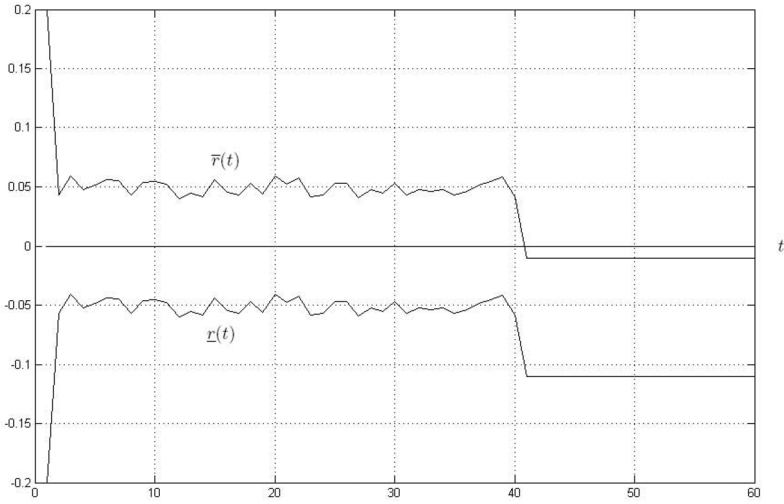


Рис. 2. Поведение невязок \underline{r} и \bar{r} при появлении дефектов.

На рис. 1 $d(t) = 0$, $t < 40$ с, $d(t) = 0,04$, $t \geq 40$ с; поскольку значение $d(t) = 0,04$ остается в пределах допустимого интервала, то $0 \in [\underline{d}, \bar{d}]$, что квалифицируется как отсутствие дефектов. На рис. 2 функция $d(t)$ представлена случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-0,01; 0,01]$, $t < 40$ с, $d(t) = 0,06$, $t \geq 40$ с; поскольку теперь $0 \notin [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ при $t > 40$ с, делается заключение о появлении дефекта.

Из рис. 2 видно, что когда $d(t)$ представлена случайной величиной, это отражается на поведении функций $\underline{r}(t)$ и $\bar{r}(t)$. Возмущение $\rho(t)$ также представлено случайной величиной, но на рис. 1 функции $\underline{r}(t)$ и $\bar{r}(t)$ постоянны

(за исключением скачка, вызванного изменением функции $d(t)$), откуда следует, что возмущение не влияет на результат.

6. Заключение

В работе рассмотрена задача функционального диагностирования линейных динамических систем, описываемых дискретными моделями при наличии внешних возмущений, на основе интервальных наблюдателей. Получены расчетные соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель, не чувствительный к возмущениям, и чувствительный в ограниченной степени. Такой наблюдатель формирует два значения невязки так, что попадание числа нуль между этими значениями квалифицируется как отсутствие дефектов, на обнаружение которых рассчитан наблюдатель. Теоретические результаты иллюстрированы примером построения наблюдателей для реальной технической системы. Результаты моделирования подтвердили правильность теоретических построений, связанных с задачей обнаружения дефектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир.* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 4 С. 22–32.
2. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е., Ким Чхун Ир.* Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования и оценивания // АиТ. 2022. № 9. С. 49–67.
Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V., Shumsky A., Kim C. Jordan Canonical Form in the Diagnosis and Estimation Problems // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 9. P. 1355–1370.
3. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // АиТ. 2016. № 2. С. 5–49.
Efimov D., Raissi T. Design of Interval State Observers for Uncertain Dynamical Systems // Autom. Remote Control. V. 77. No. 2. P. 191–225.
4. *Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L.* Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // IET Circuits Devices Syst. 2020. V. 14. P. 721–740.
5. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. №. 4. С. 42–46.
6. *Efimov D., Raissi T., Perruquetti W., Zolghadri A.* Estimation and control of discrete-time LPV systems using interval observers // 52nd IEEE Conf. On Decision and Control. Florence, Italy. 2013. P. 5036–5041.
7. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval observers for continuous-time LPV systems with L_1/L_2 performance // Automatica. 2015. V. 51. P. 82–89.
8. *Mazenc F., Bernard O.* Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles // IEEE Trans. Automatic Control. 2010. V. 55. No. 2. P. 523–527.

9. *Zheng G., Efimov D., Perruquetti W.* Interval state estimation for uncertain non-linear systems // IFAC Nolcos 2013. Toulouse, France, 2013.
10. *Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C.* Interval sliding mode based fault accommodation for non-minimal phase LPV systems with online control application // Int. J. Control. 2019. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1687932>
11. *Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E.* Using fuzzy interacting observers for fault diagnosis in systems with parametric uncertainty // Proc. XII-th Inter. Symp. Intelligent Systems, INTELS'16, 5–7 October 2016, Moscow, Russia. P. 499–504.
12. *Zhang Z., Yang G.* Fault detection for discretetime LPV systems using interval observers // Int. J. Syst. Sci. 2017. <https://doi.org/10.1080/00207721.2017.1363926>
13. *Zhang Z., Yang G.* Event-triggered fault detection for a class of discrete-time linear systems using interval observers // ISA Transactions. 2017. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2016.11.016>
14. *Zhang Z., Yang G.* Interval observer-based fault isolation for discrete-time fuzzy interconnected systems with unknown interconnections // IEEE Trans. Cybernetics. 2017. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2017.2707462>
15. *Yi Z., Xie W., Khan A., Xu B.* Fault detection and diagnosis for a class of linear time-varying discrete-time uncertain systems using interval observers // Proc. 39th Chinese Control Conf., July 27–29, 2020, Shenyang, China. P. 4124–4128.
16. *Rotondo D., Fernandez-Cantia R., Tornil-Sina S., Blesa J., Puig V.* Robust fault diagnosis of proton exchange membrane fuel cells using a Takagi-Sugeno interval observer approach // Int. J. Hydrogen Energy. 2015. P. 2875–2886.
17. *Saijai J., Ding S., Abdo A., Shen B., Damlakhi W.* Threshold computation for fault detection in linear discrete-time Markov jump systems // Int. J. Adapt. Control Signal Process. 2014. Vol. 28. P. 1106–1127.
18. *Шумский А.Е., Журабок А.Н.* Принятие решений при диагностировании нелинейных динамических систем непараметрическим методом // АИТ. 2021. № 2. С. 111–131.
Shumsky A., Zhirabok A. Decision making in nonlinear dynamical system diagnostics by a nonparametric method // Autom. Remote Control. 2021. Vol. 82. No. 2. P. 278–293.
19. *Журабок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю.* Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // АИТ. 2017. № 9. С. 34–48.
Zhirabok A., Shumsky A., Solyanik S., Suvorov A. Design of Nonlinear Robust Diagnostic Observers // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78. No. 9. P. 1572–1584.
20. *Low X., Willsky A., Verghese G.* Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems // Automatica. 1996. Vol. 22. P. 333–344.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 18.08.2023

После доработки 23.10.2023

Принята к публикации 01.11.2023

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. В.Б. МЕЛЕХИН, д-р техн. наук (pashka1602@rambler.ru)
(Дагестанский государственный технический университет, Махачкала),
М.В. ХАЧУМОВ, канд. физ.-мат. наук (khmike@inbox.ru)
(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский;
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва;
Российский университет дружбы народов, Москва)

ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОЭТАПНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫМ РОБОТОМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹

Показана актуальность создания интеллектуальных роботов различного назначения, способных эффективным образом решать сложные многоэтапные задачи целенаправленной деятельности в априори неопределенных проблемных средах. Предложены оригинальные по содержанию элементы продукционной модели представления знаний безотносительно к конкретной предметной области. Построенная таким образом модель представления знаний позволяет интеллектуальным роботам автоматически планировать целенаправленную деятельность в условиях неопределенности, опираясь на обобщенное описание возможных закономерностей проблемной среды. Разработаны процедуры автоматического синтеза графа “видимости”, определяющего формальным образом воспринимаемый интеллектуальным роботом участок проблемной среды. Это, в свою очередь, позволяет роботу автоматически формировать локально-оптимальный маршрут целенаправленного перемещения в априори неопределенных условиях функционирования. Синтезированы процедуры автоматического планирования интеллектуальным роботом целенаправленной деятельности, связанной с преобразованием текущей ситуации проблемной среды в заданную целевую ситуацию в условиях неопределенности.

Ключевые слова: интеллектуальный робот, многоэтапное поведение, проблемная среда, элементы модели представления знаний, акты поведения, граф “видимости”, планирование целенаправленной деятельности.

DOI: 10.31857/S0005231023120127, **EDN:** NGVHRW

1. Введение

Создание интеллектуальных роботов (ИР) различного назначения, способных решать сложные многоэтапные задачи в условиях неопределенности, сводящиеся к необходимости перехода с одного участка проблемной среды

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-10056), <https://rscf.ru/project/21-71-10056>.

(ПС) на другие ее участки с целью перевода текущей ситуации в требуемое целевое состояние, является одной из актуальных и сложных проблем искусственного интеллекта.

В общем случае многоэтапная целенаправленная деятельность ИР складывается из ряда этапов, взаимосвязанных между собой достижением общей заданной роботу цели. Каждый такой этап может быть связан с характерным для него видом целенаправленной деятельности ИР. Достижение же текущей подцели поведения на отдельном его этапе является предпосылкой для перехода робота на следующий этап целенаправленной деятельности и т.д. до выполнения ИР полученного задания. Иначе говоря, многоэтапная деятельность ИР на каждом участке ПС, как правило, состоит из следующих двух фаз. В первой фазе целенаправленной деятельности ИР автоматически строит и обрабатывает маршрут перемещения из исходного к целевому местоположению на заданном участке ПС. Во второй фазе ИР планирует и обрабатывает упорядоченную последовательность действий, позволяющих выполнить преобразование исходной ситуации на текущем участке проблемной среды в заданную целевую ситуацию.

К одной из попыток решения данной сложной проблемы следует отнести когнитивные инструменты планирования ИР полифазной деятельности, предложенные в [1]. Однако модель представления знаний, на которую опираются в процессе вывода решений данные когнитивные инструменты, не позволяет в полной мере учитывать сложившиеся в ПС условия функционирования, влияющие на текущие функциональные возможности ИР. Другими словами, используемая в данном случае модель представления и обработки знаний не позволяет наделить ИР способностью на альтернативной основе автоматически формировать наиболее эффективный по принятой “стоимости” план многоэтапной деятельности, учитывающий сложившиеся в ПС условия функционирования. Например, при наличии грязи после дождя, препятствующей эффективному перемещению ИР в ПС. Это, в свою очередь, приводит к необходимости корректировки сформированного плана целенаправленной деятельности во время его реализации с учетом наблюдаемых в ПС неучтенных в процессе планирования особенностей. Либо ИР вынужден реализовать не совсем эффективный по принятой “стоимости” план целенаправленной деятельности.

Что же касается использования в рассматриваемом случае известных алгоритмических моделей представления и обработки знаний [2], позволяющих организовать планирование целенаправленной деятельности ИР, например [3–7], то такие модели фактически не предусматривают возможности решения интеллектуальным роботом сложных многоэтапных задач в условиях неопределенности. Помимо этого, алгоритмический подход к созданию интеллектуальных решателей задач имеет существенный недостаток, препятствующий построению ИР, которые способны целенаправленно функционировать в условиях неопределенности. Этот недостаток заключается в том, что применение алгоритмических методов вывода решений требует разработки

подробной модели представления знаний, ориентированной на выполнение ИР конкретных заданий в текущих условиях функционирования. Формулируемая ИР цель поведения в этом случае достигается путем планирования и отработки действий, обеспечивающих целенаправленное изменение значений отношений пространства состояний между различными объектами проблемной среды в пределах разрешающей способности подсистемы его технического зрения. Иначе говоря, известные методы планирования целенаправленной деятельности ИР, базирующиеся на аксиоматическом подходе вывода решений с применением логики предикатов первого порядка и ее различных модификаций, не позволяют решать многоэтапные задачи в условиях неопределенности [8]. Это связано с тем, что они требуют подробного формального описания закономерностей ПС и применения в худшем случае сложных процедур вывода решений методом перебора с экспоненциальной сложностью [9].

В свою очередь, для сетевого подхода к созданию интеллектуальных решателей задач ИР, связанного с использованием нейронных сетей для представления и обработки знаний [10, 11], характерны те же основные недостатки, что и для алгоритмического подхода. Данное обстоятельство обусловлено следующими двумя особенностями организации современного сетевого интеллекта. Во-первых, с моделированием на ЭВМ процессов вывода решений на нейронных сетях. Такое моделирование нейросетевых технологий фактически сводит процессы планирования целенаправленной деятельности ИР на основе решателя задач, организованного по принципу сетевого интеллекта, к процессам, свойственным алгоритмическому интеллекту. Во-вторых, нейронные сети в рассматриваемом случае, как правило, должны отражать подробное формальное описание закономерностей текущих условий функционирования ИР. Это, в свою очередь, не позволяет роботу решать задачи в условиях неопределенности и требует предварительного обучения нейронных сетей [12].

Кроме того, на практике построить подробную модель закономерностей реальной сложной ПС не представляется возможным [13], особенно если речь идет о труднодоступных и агрессивных для человека средах, в которых в основном и предстоит функционировать ИР.

Таким образом, отмеченные выше обстоятельства приводят к объективной необходимости разработки элементов процедурной модели представления знаний безотносительно к конкретной предметной области, позволяющих ИР адаптироваться к различным априори неописанным условиям функционирования [14]. Кроме того, такие элементы представления знаний должны обеспечивать ИР возможность планирования целенаправленной деятельности с учетом влияния текущих условий ПС на функциональные возможности робота.

Следует также отметить, что для планирования целенаправленных перемещений ИР в априори неописанной проблемной среде в настоящее время широко используются SLAM методы [15, 16]. На основе данных методов вначале строится формальное описание карты местности в виде помеченного гра-

фа, которая затем используется для маршрутизации перемещений ИР в ПС. С этой целью применяется один из методов поиска оптимального пути на графах [17]. Однако учитывая, что в процессе многоэтапной деятельности задача маршрутизации движения ИР решается в реальном времени, применение в рассматриваемом случае SLAM методов является нецелесообразным. В этой связи в работе предлагается оригинальный эвристический метод формирования модели воспринимаемого участка среды в виде графа “видимости”. Автоматическое построение такого графа позволяет ИР параллельно с его синтезом сформировать локально-оптимальный маршрут движения к целевому местоположению. Кроме того, предложенный метод маршрутизации движения ИР в отличие от SLAM методов, а также известных методов построения графов “видимости” [18, 19], не требует выполнения трудоемких вычислений.

Помимо метода планирования перемещений ИР в условиях неопределенности в настоящей статье предлагаются также различные элементы модели представления и обработки знаний безотносительно к конкретной предметной области. Использование такого вида элементов представления знаний позволяет ИР организовать модельный подход к организации вывода решений в процессе автоматического планирования многоэтапной целенаправленной деятельности в априори неописанных и нестабильных условиях ПС. При этом предлагаемая в статье модель представления и обработки знаний позволяет ИР организовать планирование многоэтапной деятельности в условиях неопределенности с приемлемой для бортовой ЭВМ полиномиальной сложностью.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ИР как мобильную систему, оснащенную манипулятором, которая ориентирована на решение определенного класса задач. Как правило, такая система состоит из сенсорной, решающей и моторной подсистем [4]. Сенсорная подсистема ИР включает модуль технического зрения и ряд датчиков, связанных с управлением навигацией робота в ПС, а также обеспечением данными, необходимыми для проведения анализа условий и результатов отработки различных действий. Решающая подсистема ИР состоит из базы знаний, в которой хранится модель их представления, и интеллектуального решателя задач, предназначенного для планирования многоэтапной деятельности, связанной с выполнением сформулированного интеллектуальному роботу задания. Моторная подсистема служит для отработки различных действий в процессе перемещения ИР в ПС и манипулирования находящимися в среде объектами в процессе целенаправленного преобразования текущей ситуации в целевую ситуацию проблемной среды.

Таким образом, ИР можно охарактеризовать множеством обрабатываемых элементарных действий $B = \{b_{i_1}\}$, $i_1 = \overline{1, n_1}$, например, поднять объект, подойти, захватить объект и т.д.; множествами объектов $O = \{o_2(X_{i_2})\}$, $i_2 = \overline{1, n_2}$ и событий $D = \{d_{i_3}(Y_{i_3})\}$, $i_3 = \overline{1, n_3}$, соответственно находящихся и происходящих в ПС, которые интеллектуальный робот способен распознать,

планируя целенаправленную деятельность. Здесь X_{i_2} и Y_{i_3} – множества характеристик, соответственно определяющих объекты и события ПС. В общем же случае функциональные возможности ИР определяются заданной моделью представленных в общем виде знаний и процедурами автоматического планирования целенаправленной деятельности в различных условиях априори неописанной ПС.

В свою очередь, нестабильную ПС в общем случае можно охарактеризовать

– множеством находящихся в среде объектов $o_{i_2}(X_{i_2}) \in O$;

– происходящими независимо от деятельности ИР событиями $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$, спонтанное проявление которых в проблемной среде может препятствовать результативной отработке интеллектуальным роботом элементарных действий $b_{i_1} \in B$;

– различным видом семантических отношений [20] $R = \{r_{i_4}\}$, $i_4 = \overline{1, n_4}$, которые выполняются в ПС между объектами, событиями и находящимся в среде ИР.

В целом же ПС определяется сложившейся в ней текущей ситуацией $S = \{S_{i_5}\}$, $i_5 = \overline{1, n_5}$, содержание которой зависит от состояния находящихся в ней объектов $o_{i_2}(X_{i_2}) \in O$ и происходящих $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$, а также видом и значениями выполняющихся в среде отношений $r_{i_4} \in R$ между объектами, событиями и ИР.

Задание к выполнению ИР получает в декларативно-процедурной форме представления в виде упорядоченной последовательности сложных действий B_{j_1} , $j_1 = \overline{1, m_1}$ [21] и условий, которые должны выполняться в ПС для их результативной отработки. В общем случае целевое задание имеет следующую структуру и содержание:

$$\langle S_1^I \& B_{j_1}^1 \rightarrow S_1^II \& B_{j_1}^2 \rightarrow S_2^II, \dots, S_{k-1}^II \& B_{j_1}^k \rightarrow S_k^II \rangle,$$

где, например, S_1^I и S_1^II – описание в обобщенном виде соответственно исходных условий и условий, отражающих достижение подцели соответствующего этапа целенаправленной деятельности. Таким образом, в рассматриваемом случае целевая ситуация предыдущего этапа поведения, например, S_1^II определяет исходную ситуацию S_2^II для следующего этапа целенаправленной деятельности ИР.

Сложные действия B_{j_1} состоят из кортежей элементарных действий $b_{i_1} \in B$ и фактически отражают содержание соответствующего им этапа целенаправленной деятельности ИР. Например, полученное ИР задание может иметь следующее содержание: “найти на заданном участке ПС определенного вида объекты, перевести их в необходимое состояние или перенести в заданное местоположение”. При этом, если результативность определенных действий $b_{i_1} \in B$ зависит от текущего состояния ПС, то их отработка сопровождается проверкой определенного условия. По ее результатам либо действие непосредственно выполняется ИР, либо выбирается по ссылке другой

элемент модели представления знаний, позволяющий ИР отработать данное действие с учетом сложившихся в ПС условий. Например, действие подойти к объекту может быть непосредственно отработано по прямой линии движения только при отсутствии препятствий на пути перемещения ИР к этому объекту. В случае же наличия в ПС таких препятствий для отработки данного действия ИР требуется предварительно сформировать план движения к заданному объекту по проходимым между препятствиями участкам среды. Такой подход к построению типовых элементов модели представления знаний позволяет существенным образом

— снизить сложность процесса вывода решений за счет автоматического перехода по ссылкам от одного к другому типовому элементу представления знаний;

— сократить их количество за счет возможности использования одного и того же элемента для решения одной и той же по назначению подзадачи в различных условиях ПС.

Требуется, опираясь на вышеизложенное описание ИР, проблемной среды и заданной роботу цели, разработать такие типовые элементы модели представления знаний, которые позволяют автоматически строить планы многоэтапной деятельности в сложных априори неописанных условиях ПС. В общем случае такой план целенаправленной деятельности ИР представляет собой дерево вывода решений в пространстве состояний [8].

Следует отметить, что решение подзадач, связанных с распознаванием различных образов ПС в процессе планирования ИР целенаправленной деятельности, является самостоятельной проблемой, требующей отдельного обсуждения, и в настоящей статье по причине ее ограниченного объема не рассматривается.

3. Типовые элементы модели представления знаний ИР

В общем случае модель представления знаний состоит из декларативных и процедурных элементов, позволяющих ИР планировать многоэтапную деятельность в условиях неопределенности. Декларативные элементы модели представления знаний предназначены для формального описания допустимых ситуаций (состояний) ПС $S_{i_5} \in S$, а также их отдельных фрагментов $\Delta S_{i_5}^{j_2} \subset S_{i_5}$, $j_2 = \overline{1, m_2}$. Данные фрагменты ситуаций ПС служат для построения различных элементов процедурной модели представления знаний ИР. Здесь m_2 – множество допустимых фрагментов (частей), на которые допускается разбиение текущих ситуаций ПС $S_{i_5} \in S$.

Следует отметить, что минимальный допустимый фрагмент текущей ситуации ПС может состоять из двух объектов или одного объекта среды и ИР, а также отношений, которые выполняются между ними в проблемной среде.

Процедурные знания представляют собой набор элементов, определяющих безотносительно к конкретной предметной области решение различного вида типовых подзадач целенаправленной деятельности, т.е. “кирпичиков”, на основе которых ИР планирует свое поведение.

Формальное представление различных ситуаций ПС и их фрагментов зависит от роли, которую они выполняют в процессе вывода решений. Так, для обобщенного представления различных аналогичных друг другу ситуаций $S_{i_5} \in S$ и их фрагментов $\Delta S_{i_5}^{j_2} \subset S_{i_5}$, предназначенных для построения типовых элементов модели представления процедурных знаний ИР относительно к конкретной предметной области, используются активные нечеткие семантические сети [22]. Для описания же текущих ситуаций ПС служат классические семантические сети [8].

В общем случае активные нечеткие семантические сети, служащие для обобщенного описания различных ситуаций $S_{i_5} \in S$ и их отдельных частей $\Delta S_{i_5} \subset S_{i_5}$, представляют собой нечетко помеченный граф $G_a = (v_0, V_a, E_a)$. Здесь v_0 – базовая вершина сети, определяемая ИР, V_a, E_a – соответственно множества активных вершин и ребер. Активные вершины $v_{i_6} \in V_a, V_a = \{v_{i_6}\}$, $i_6 = \overline{1, n_6}$ согласно их назначению представляются слотами $O^* = \{o_{i_7}^*(X_{i_7}^*)\}$, $i_7 = \overline{1, n_7}$ и $D^* = \{d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*)\}$, $i_8 = \overline{1, n_8}$, которые в текущих условиях ПС помечаются соответственно находящимися в среде объектами $o_{i_2}(X_{i_2}) \in O$ и происходящими в ней событиями $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$. Активные вершины $v_{i_6} \in V_a$ в нечеткой семантической сети G_a , определяемые слотами $o_{i_7}^*(X_{i_7}^*) \in O^*$ и $d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*) \in D^*$, могут быть помечены конкретными объектами $o_{i_2}(X_{i_2})$ и событиями $d_{i_3}(Y_{i_3})$ ПС, если они удовлетворяют следующим условиям $X_{i_7}^* \subseteq X_{i_2}$ и $Y_{i_8}^* \subseteq Y_{i_3}$.

Активные ребра $e_{i_9} \in E_a, E_a = \{e_{i_9}\}$, $i_9 = \overline{1, n_9}$ могут быть неориентированными и ориентированными. Неориентированные ребра $e_{i_7}^0 \in E_1^0$ в сети G^0 помечаются следующими тройками $\langle T_{j_3}^*(r_{i_4}), (r_{j_3}^*, r_{j_3+1}^*) \rangle$, где $T_{j_3}^*(r_{i_4})$ – j_3 терм лингвистической переменной (в общем случае $j_3 = \overline{1, 5}$ [23]) с названием, совпадающим с наименованием соответствующего отношения $r_{i_4}(X_{i_4}) \in R$, выполняющегося в ПС между двумя объектами или объектом и ИР; $(r_{j_3}^*, r_{j_3+1}^*)$ – соответственно нижняя и верхняя границы подынтервала численных значений термина $T_{j_3}^*(r_{i_4})$ на шкале количественных оценок соответствующей лингвистической переменной.

Ориентированные ребра $e_{i_9} \in E_a$ помечаются следующими тройками $\langle F_{i_9}, (t_{j_2}^1, t_{j_2}^2) \rangle$, где F_{i_9} – множество характеристик, описывающих влияние событий $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$, определяемых активной вершиной $d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*) \in D^*$, на состояние ПС при их появлении; $(t_{j_2}^1, t_{j_2}^2)$ – интервал времени t , в течение которого может проявиться результат влияния событий $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$ на текущую деятельность ИР. Кроме того, события $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$ могут также влиять на состояние объекта ПС $o_{i_2}(X_{i_2}) \in O$, удовлетворяющего требованиям активной вершины $o_{i_7}^*(X_{i_7}^*) \in O^*$, в которую это ребро входит.

Текущие ситуации ПС $S_{i_5} \in S$ в модели представления знаний АР описываются семантическими сетями, представляющими собой помеченный граф $G_{i_{10}}^{i_5} = (v_0, V_{i_{10}}^{i_5}, E_{i_{10}}^{i_5})$, который формируется в сенсорной подсистеме интеллектуального робота на основе информации, поступающей из проблемной среды. Здесь v_0 – ключевая помеченная ИР вершина, относительно кото-

рой формируется семантическая сеть. Остальные же вершины $V_{i_{10}}^{i_5} = \{v_{i_{11}}\}$, $i_{11} = \overline{1, n_{11}}$ графа $G_{i_{10}}^{i_5}$ в соответствии с их назначением определяются находящимися в ПС объектами $o_{i_2}(X_{i_2}) \in O$ и происходящими в ней событиями $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$. Ребра $E_{i_{10}}^{i_5} = \{e_{i_{12}}\}$, $i_{12} = \overline{1, n_{12}}$ в сети $G_{i_{10}}^{i_5}$ могут быть также ориентированными и неориентированными. Неориентированные ребра в сети $G_{i_{10}}^{i_5}$ помечаются количественными оценками $r_{i_4}^*$ отношений $r_{i_4}(X_{i_4}) \in R$, которые выполняются в ПС между ИР и находящимися в ней объектами. Ориентированные же ребра $e_{i_{12}} \in E_{i_{10}}^{i_5}$, определяющие характер влияния происходящих в среде событий на находящиеся в ней объекты и текущую деятельность ИР, помечаются так же, как и в активных нечетких семантических сетях тройками $\langle F_{i_9}, (t_{j_2}^1, t_{j_2}^2) \rangle$.

Содержание и структура типовых элементов процедурной модели представления знаний определяются функциональным назначением ИР. В общем случае такие элементы представления знаний с учетом их функционального назначения могут быть следующих видов.

1. Импликативные решающие правила, позволяющие ИР выявлять необходимые для достижения заданной подцели процедуры автоматического построения маршрута целенаправленного перемещения в ПС

$$(1) \quad F_{j_4} : S_{i_5}^I(j_4) \& B_{j_1}(j_4) \rightarrow S_{i_5}^{II}(j_4), \quad j_4 = \overline{1, 3},$$

где F_{j_4} – идентификатор, определяющий назначение решаемой на основе j_4 правила подзадачи, например, “маршрутизация движения в ПС с препятствиями”; $S_{i_5}^I(j_4)$ – исходная ситуация участка ПС, на котором ИР находится в текущий момент времени; $S_{i_5}^{II}(j_4)$ – ситуация, определяющая участок проблемной среды, на который ИР требуется перейти для достижения заданной подцели текущего этапа поведения; $B_{j_1}(j_4)$ – метод планирования маршрута движения, связанного с переходом ИР в текущее целевое местоположение.

2. Элементы представления знаний, характеризующие требуемые исходные условия и результаты отработки ИР элементарных действий $b_{i_1} \in B$

$$(2) \quad F_{j_5} : \Delta S_{i_1}^I(j_5) \& b_{i_1}(j_5) \rightarrow \Delta S_{i_1}^P(j_5), \quad j_5 = \overline{1, m_4},$$

где F_{j_5} – идентификатор подзадачи, решение которой обеспечивает ИР получение локального результата $\Delta S_{i_1}^P(j_5)$; $\Delta S_{i_1}^I(j_5) \& b_{i_1}(j_5) \rightarrow \Delta S_{i_1}^P(j_5)$ – элементарный акт поведения ИР, показывающий, что если в текущей ситуации ПС $S_{i_5} \in S$ выполняется условие $\Delta S_{i_1}^I(j_5) \subset S_{i_5}$, то для получения в среде локального результата $\Delta S_{i_1}^P(j_5)$ роботу следует отработать действие $b_{i_1}(j_5)$; m_4 – подмножество допустимых фрагментов $\Delta S_{i_1}^I(j_5) \subset S_{i_5}$, определяющих различные локальные условия, которые могут возникнуть в текущей ситуации ПС.

Таким образом, импликативные решающие правила (2) позволяют ИР устанавливать различные действия $b_{i_1}(j_5) \in B$, которые после их отработки в ПС приводят к получению результата $\Delta S_{i_1}^P(j_5)$ в соответствии со сложившимися в проблемной среде локальными условиями $\Delta S_{i_1}^I(j_4)$.

При этом множество элементов представления знаний (2) целесообразно разбить на классы эквивалентности по идентичности получаемого на их основе результата $\Delta S_{i_1}^P(j_5)$. Каждый такой класс определяется либо идентификатором F_{j_5} , либо локальным результатом $\Delta S_{i_1}^P(j_5)$, который ИП требуется получить для достижения текущей подцели поведения. Следовательно, если ИП в текущий момент времени необходимо обеспечить локальный результат $\Delta S_{i_1}^P(j_5)$ в текущей ситуации ПС $S_{i_5} \in S$, то по соответствующему ему содержанию в модели представления знаний в первую очередь определяется обеспечивающий этот результат класс элементов модели представления знаний (2). Затем в выбранном классе устанавливается типовой элемент представления знаний, у которого фрагменты $\Delta S_{i_1}^I(j_5)$ и $\Delta S_{i_1}^P(j_5)$ являются нечетко вложенными соответственно в текущую и целевую ситуации проблемной среды. Например, таким образом группируются в один класс эквивалентности все действия, связанные с изменением местоположения различных объектов в ПС. Так, одни объекты из-за их габаритных размеров и веса ИП может поднять и перенести, вторые только перекатить, а третьи — перетащить и т.п.

3. Описание в модели представления знаний ИП условий и результатов выполнения сложных действий B_{j_1} определяется следующими актами поведения:

$$(3) \quad F_{j_6} : S_{i_5}^I(j_6) \& B_{j_1} \left[S_{i_1}^{1,I}(j_6) \& b_{i_1}^1 \rightarrow \left(\Delta S_{i_1}^{1,P}(j_6) \approx \Delta S_{i_1}^{2,I}(j_6) \right) \& b_{i_1}^2 \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \Delta S_{i_1}^{2,P}(j_6) \approx, \dots, \approx \Delta S_{i_1}^{k,I}(j_6) \& b_{i_1}^k \rightarrow \Delta S_{i_1}^{k,P}(j_6) \right] \Rightarrow S_{i_5}^{II}(j_6), \quad j_6 = \overline{1, m_6}.$$

Импликативные решающие правила (3) означают следующее. Если текущее состояние ПС определяется ситуацией $S_{i_5} \in S$, в которую нечетко вложено обобщенное описание $S_{i_5}^I(j_6)$ аналогичных друг другу допустимых подситуаций проблемной среды, то для ее преобразования в целевую ситуацию, определяющуюся обобщенным описанием $S_{i_5}^{II}(j_6)$, ИП требуется выполнить сложное действие B_{j_1} , состоящее из кортежа элементарных действий $\langle b_{i_1}^1, b_{i_1}^2, \dots, b_{i_1}^k \rangle$. Здесь \approx — знак нечеткого равенства сравниваемых между собой семантических сетей.

4. Для планирования многоэтапной деятельности в ПС, в которой спонтанно возникают события $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$, негативно влияющие (препятствующие эффективной результативной обработке роботом определенных действий) на целенаправленную деятельность ИП, для построения подплана поведения, связанного со снижением и устранением такого влияния, используются следующие два вида импликативных решающих правил.

Первый вид данных импликативных решающих правил имеет следующую структуру и содержание:

$$(4) \quad F_{j_7} : \langle \Delta S_{i_5}^I(j_7), d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*) \rangle \& b_{i_1}(j_7) \rightarrow \overline{\Delta d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*)_{j_5}}, \quad j_7 = \overline{1, m_7},$$

где элементарный акт поведения $\Delta S_{i_5}^I(j_7) \& b_{i_1}(j_7) \rightarrow \overline{\Delta d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*)}$ означает, что если в текущую ситуацию ПС $S_{i_5} \in S$ нечетко вложен фрагмент $\Delta S_{i_5}^I(j_7)$, то

при появлении в проблемной среде события $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$, удовлетворяющего требованиям слота $d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*) \in D^*$, обработка ИР элементарного действия $b_{i_1}(j_7)$ позволяет снизить $\Delta d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*)_{j_5}$ его негативное влияние на дальнейшую целенаправленную деятельность робота.

Второй вид таких правил вывода имеет следующее представление:

$$(5) \quad F_{j_8} : < S_{i_5}^I(j_8), S_{i_5}^P(j_8), d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*) > \& B_{j_1}(j_8) \rightarrow \overline{d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*)}, \quad j_8 = \overline{1, m_8},$$

где импликативные решающие правила (5) означают следующее. Если текущая ситуация ПС S_{i_5} является нечетко равной обобщенному описанию $S_{i_5}^I(j_8)$ аналогичных друг другу ситуаций проблемной среды, а заданная ИР цель поведения представлена семантической сетью $S_{i_5}^P(j_8)$, то при появлении в среде событий $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$, удовлетворяющих требованиям слота $d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*) \in D^*$, выполнение роботом сложного действия $B_{j_1}(j_8)$ позволяет устранить $\overline{d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*)}$ негативное влияние этого события на дальнейшую целенаправленную деятельность.

Например, при наличии в ПС тумана, ИР для избегания столкновения с различными находящимися в среде объектами, используя правило (4), определяет, что ему в этом случае требуется снизить скорость своего передвижения и т.п.

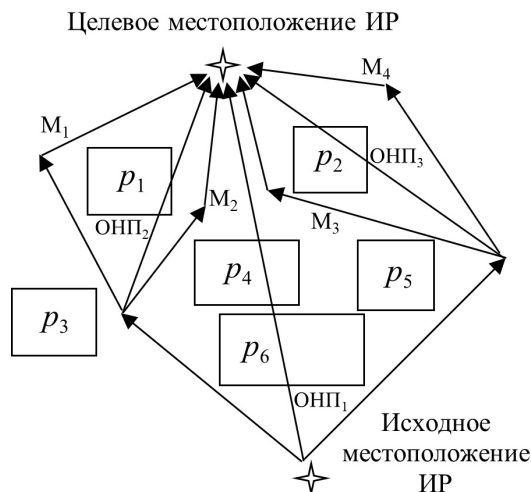
Следует отметить, что множества решающих правил (3)–(5) по характерному для них общему признаку (например, назначению), как и правила (2), разбиваются на соответствующие им классы эквивалентности. Это позволяет ИР эффективным образом определять результативные решающие правила на каждом этапе планирования целенаправленной деятельности в соответствии с текущими условиями ПС и заданной подцелью поведения.

4. Методы планирования многоэтапной деятельности ИР

Как уже отмечалось выше, на каждом этапе целенаправленной деятельности ИР в ПС с препятствиями, как правило, требуется автоматическое построение маршрута перемещения для перехода с одного участка проблемной среды на другой ее участок. В процессе решения данной подзадачи на основе типовых элементов представления знаний (1) ИР может столкнуться со следующими тремя случаями:

- целевое местоположение находится в зоне прямой видимости сенсорной подсистемы робота, а на пути движения к нему имеются препятствия;
- интеллектуальному роботу известны только координаты своего целевого местоположения в ПС с препятствиями;
- требуется найти заданные объекты в априори неописанной ПС с препятствиями.

В первом случае для построения маршрута движения к целевому местоположению в среде с препятствиями, габаритные размеры и координаты местоположения которых в ПС априори роботу не известны, используется ме-



Построение ИР графа “видимости” для выбора эффективного маршрута движения к целевому местоположению: (p_1-p_6) – препятствия; $(ОНП_1-ОНП_3)$ – основные направления перемещения; (M_1-M_4) – альтернативные маршруты движения к целевому местоположению.

мод 1. На основе *метода 1* и данных, поступающих из сенсорной подсистемы ИР, в его интеллектуальном решателе задач строится граф “видимости” $G_B = (V_B, E_B)$. Здесь $V_B = \{v_{i_{13}}\}$, $i_{13} = \overline{1, n_{13}}$ – множество вершин, соответствующих проходимым между препятствиями зонам ПС; $E_B = \{e_{i_{14}}\}$, $i_{14} = \overline{1, n_{14}}$ – множество ребер, определяющих связь между смежными проходимыми зонами ПС, которые определяются “затратами”, связанными с переходом ИР от одной такой зоны к смежной с ней в проблемной среде. Параллельно построению данного графа выбирается также и направление перемещения ИР на каждом шаге целенаправленного движения.

В общем случае *метод 1* автоматического построения графа “видимости” $G_B = (V_B, E_B)$ и локально-оптимального маршрута целенаправленного движения ИР к воспринимаемому целевому местоположению (при отсутствии формального описания карты местности) можно представить следующим образом:

1. Принять в качестве исходной вершины $v_{i_{13}}^0(0) \in V_B$ или истока графа “видимости”, имеющего нулевую условную стоимость, исходное местоположение ИР (см. рисунок).

2. Определить первое основное направление перемещения к цели $(ОНП_1)$, представляющее собой прямую или кратчайшее расстояние между исходным и целевым местоположением ИР.

3. Выбрать расположенные по разные стороны от $ОНП_1$ две отстоящие от него на минимальном расстоянии проходимые между препятствиями зоны, которые будут определять вершины $v_{i_{13}}^1(c_{i_{13}}^1)$ и $v_{i_{13}}^2(c_{i_{13}}^2)$ строящегося графа G_B , смежные с вершиной $v_0(0)$ и имеющие соответственно условные стоимости $c_{i_{13}}^1$ и $c_{i_{13}}^2$.

4. Определить для каждой принятой таким образом вершины $v_{i_{13}}^1(c_{i_{13}}^1), v_{i_{13}}^2(c_{i_{13}}^2) \in V_B$ их условные стоимости $c_{i_{13}}^1$ и $c_{i_{13}}^2$, равные стоимости инцидентных им ребер $e_{i_{14}} \in E_B$ и зависящие

— от расстояния, которое необходимо преодолеть ИР для перехода от текущего местоположения за пределы соответствующей вершине проходимой зоны ПС;

— от вида грунта на поверхности, по которому интеллектуальному роботу предстоит движение к каждой проходимой зоне с учетом конструктивных особенностей хода моторной системы.

5. Построить для каждой из выявленных на текущем шаге формирования графа “видимости” вершин $v_{i_{13}}^1(c_{i_{13}}^1), v_{i_{13}}^2(c_{i_{13}}^2) \in V_B$ исходящие из них основные направления перемещения ИР к целевому местоположению (например, на приведенном рисунке – это ОНП₂ и ОНП₃).

6. Выбрать относительно каждого построенного ОНП₂ и ОНП₃ по две отстоящие от них по разные стороны на минимальном расстоянии проходимые зоны ПС, которые определяют следующие вершины $v_{i_{13}}^k(c_{i_{13}}^k) \in V_B$, $k = \overline{1, 4}$ строящегося графа “видимости” G_B , смежные с присоединенными к нему на предыдущем шаге вершинами. Определить стоимость $c_{i_8}^k$ вершин $v_{i_{13}}^k(c_{i_{13}}^k) \in V_B$, складывающуюся из стоимости смежных с ними вершин строящегося графа “видимости” и стоимости инцидентных им ребер $e_{i_{14}} \in E_B$.

7. Продолжить дальнейшее построение графа “видимости” $G_B = (V_B, E_B)$ по описанному в пп. 1–6 принципу. В этом случае построение графа “видимости” происходит до тех пор, пока к каждой входящей в его структуру вершине, найденной на предыдущем шаге его построения, не будет присоединена вершина, соответствующая проходимой зоне ПС, между которой и заданным целевым местоположением ИР отсутствуют препятствия.

Определить “стоимость” каждой выявленной таким образом вершины, которая складывается из “стоимости” смежной с ней вершины и “стоимости”, зависящей от сложности перемещения ИР по отрезку прямой, связывающему соответствующую этой вершине проходимую зону и текущее целевое местоположение робота.

8. Присоединить к каждой вершине строящегося графа “видимости”, удовлетворяющей условиям п. 7, вершину – сток $v_{\text{ц}} \in E_B$, соответствующую целевому местоположению ИР.

Построенный таким способом граф “видимости” $G_B = (V_B, E_B)$ позволяет ИР определить локально-оптимальный маршрут $L_{j_9}(v_{\text{и}}, v_{\text{ц}})$, $j_9 = \overline{1, m_9}$ с минимальной “стоимостью” $C_{j_9} = \sum_{j_{10}=1}^{m_{10}} e_{i_{14}}^{j_9}(c_{i_{14}}^{j_9}, j_{10}) \rightarrow \min$. Здесь $v_{\text{и}}$ и $v_{\text{ц}}$ – вершины графа G_B , соответственно определяющие исходное и целевое местоположение интеллектуального робота; $e_{i_{14}}^{j_9}(c_{i_{14}}^{j_9}, j_{10})$ – ребра графа G_B , входящие в j_9 маршрут движения ИР к целевому местоположению; $c_{i_{14}}^{j_9}$ – “стоимость” j_9 ребра $e_{i_{14}}^{j_9} \in L_{j_9}(v_{\text{и}}, v_{\text{ц}})$.

Следует отметить, что построенный на основе *метода 1* граф “видимости” (см. рисунок) параллельно сопровождается формированием ИР в условиях

неопределенности локально-оптимального маршрута движения M_2 к заданному целевому местоположению.

Для второго случая, когда заданы только координаты целевого местоположения, и оно расположено за пределами зоны прямой видимости ИР, для планирования перемещения используется *метод 2*, имеющий следующее содержание:

1. На первом шаге планирования поведения определяется стратегическое направление движения ИР к целевому местоположению, которым является прямая, связывающая его исходное и целевое местоположения в ПС.

2. На втором шаге на стратегическом направлении движения выбирается наиболее удаленная точка, попадающая в зону прямой видимости и играющая роль подцели на текущем шаге планирования перемещения ИР.

3. На третьем шаге, используя приведенные выше инструменты планирования поведения при расположении целевого местоположения в зоне прямой видимости, ИР строит относительно выбранной точки, расположенной на стратегическом направлении движения, подграф “видимости”. Это позволяет ИР определить эффективный маршрут движения к данной точке, т.е. маршрут, имеющий минимальную “стоимость” в пределах видимого роботу участка ПС.

4. На четвертом шаге выбирается новая точка, расположенная на стратегическом направлении движения, относительно которой строится следующий соответствующий ей подграф “видимости” и т.д., пока ИР не достигнет заданного целевого местоположения.

В случае, когда ИР требуется найти в априори неописанной ПС заданные объекты, для планирования целесообразного поведения на заданном участке местности эффективно могут быть использованы алгоритмы самообучения, предложенные в [24].

Что же касается планирования целенаправленной деятельности ИР, связанной с манипулированием на каждом этапе деятельности находящимися в ПС объектами, то следует отметить, что основной операцией, которая выполняется в процессе вывода решений в этом случае, является операция сравнения между собой различных семантических сетей. В общем случае данная операция может быть связана

1. С необходимостью сравнения между собой семантической сети, соответствующей текущей ситуации ПС $S_{i_5} \in S$, и активной нечеткой семантической сети S_a на предмет их нечеткого равенства в процессе выбора сложного действия B_{j_1} , результативного с точки зрения достижения заданной подцели в текущих условиях среды.

Определение 1. Сравнимые между собой семантические сети $G_a = (v_0, V_a, E_a)$ и $G_{i_{10}}^{i_5} = (v_0, V_{i_{10}}^{i_5}, E_{i_{10}}^{i_5})$ нечетко равны, если они удовлетворяют следующим условиям [25]:

— *данные семантические сети имеют одинаковое количество вершин и ребер;*

– для каждой вершины $v_{i_7} \in V_a$, помеченной в сети G_a слотом $o_{i_7}^*(X_{i_7}^*)$ или слотом $d_{i_8}^*(Y_{i_8}^*)$, имеется структурно эквивалентная ей вершина $v_{i_{11}} \in V_{i_{10}}^{i_5}$, помеченная в сети $G_{i_{10}}^{i_5}$ соответственно объектом $o_{i_2}(X_{i_2})$ или происходящим в проблемной среде событием $d_{i_3}(Y_{i_3}) \in D$, для которых справедливы следующие условия $X_{i_7}^* \subseteq X_{i_2}$ и $Y_{i_8}^* \subseteq Y_{i_3}$. В этом случае принимается решение, что пометки структурно эквивалентных вершин в сетях G_a и $G_{i_{10}}^{i_5}$ являются нечетко равными между собой ввиду того, что они определяются одними и теми же признаками, характерными для аналогичных друг другу объектов и событий ПС;

– для каждого неориентированного ребра $e_{i_9} \in E_a$, помеченного в сети G_a тройкой $\langle T_{j_3}^*(r_{i_4}), (r_{j_3}^*, r_{j_3+1}^*) \rangle$, имеется структурно эквивалентное ему неориентированное ребро $e_{i_{12}} \in E_{i_{10}}^{i_5}$, помеченное значением $r_{i_4}^*$ одноименного с этой тройкой отношения $r_{i_4} \in R$, для которого выполняется условие $r_{i_4}^* \in (r_{j_3}^*, r_{j_3+1}^*)$ или пометки сравниваемых между собой ребер нечетко равны между собой, так как определяются одним и тем же термом $T_{j_3}^*(r_{i_4})$;

– для каждого ориентированного ребра $e_{i_9} \in E_a$, помеченного в сети G_a тройкой $\langle T_{j_3}^*(r_{i_4}), (r_{j_3}^*, r_{j_3+1}^*) \rangle$, имеется структурно эквивалентное ему одинаково с ним помеченное ориентированное ребро $e_{i_{12}} \in E_{i_{10}}^{i_5}$.

В противном случае, если хотя бы одно из перечисленных выше условий не выполняется, то сравниваемые между собой семантические сети не являются нечетко равными.

2. С определением нечеткого вложения фрагментов $\Delta S_a = (\Delta V_a, \Delta E_a)$, имеющих нечеткое описание, в текущую ситуацию ПС $G_{i_{10}}^{i_5} = (v_0, V_{i_{10}}^{i_5}, E_{i_{10}}^{i_5})$, например, в процессе построения целенаправленной последовательности элементарных действий $b_{i_1} \in B$.

Определение 2. Нечетко заданный фрагмент $\Delta S = (\Delta V_a, \Delta E_a)$ обобщенного описания аналогичных друг другу ситуаций ПС $S_{i_5} \in S$ является нечетко вложенным в текущую ситуацию проблемной среды $G_{i_{10}}^{i_5} = (v_0, V_{i_{10}}^{i_5}, E_{i_{10}}^{i_5})$, если его матрица смежности $M(\Delta S_a)$ является частью матрицы смежности $M(G_{i_{10}}^{i_5})$ сети $G_{i_{10}}^{i_5}$ при нечетком равенстве пометок структурно эквивалентных в этих сетях вершин и ребер.

Необходимо отметить, что столбцы и строки в матрицах смежности, участвующих в определении нечеткого вложения одной семантической сети в другую, определяются пометками соответствующих им вершин. В свою очередь, элементы в данных матрицах представлены нечеткими значениями пометок ребер инцидентных вершинам, определяющим их соответствующие столбцы и строки.

В общем случае планирование многоэтапной деятельности ИР опирается на сформулированное роботу задание и имеющиеся у него типовые элементы модели представления знаний. Пусть на j_{11} этапе планирования в модели представления знаний имеется согласованная между собой и с полученным заданием пара имплекативных решающих правил $\langle (1), (3) \rangle$. Допустим, что для данных элементов соответственно выполняются следующие условия:

фрагмент ситуации $S_{i_5}^I(j_4)$ типового элемента (1) является нечетко вложенным в исходную на j_{11} шаге деятельности ситуацию ПС $S_{j_{11}}^I$ (см. определение 2); $S_{i_5}^I(j_4) \approx S_{i_5}^I(j_6)$ и фрагмент ситуации $S_{i_5}^I(j_6)$ типового элемента (4) является нечетко вложенным в целевую ситуацию среды $S_{i_{11}}^I$. Тогда задача планирования целенаправленной деятельности на данном этапе решается ИР на основе *метода 3* путем построения упорядоченной цепочки, состоящей из таких пар. При этом типовой элемент (1) при наличии на пути движения ИР препятствий по заданной ссылке встраивается в структуру типового элемента представления знаний (4) вместо элементарного действия “подойти к объекту”.

Следует отметить, учитывая, что ИР априори неизвестны условия ПС, в которых ему предстоит действовать на каждом следующем этапе, робот вначале обрабатывает подплан действий, полученный на текущем этапе функционирования. Затем ИР переходит к планированию дальнейшей целенаправленной деятельности следующего этапа поведения.

В противном случае, когда ИР для выполнения подзадания текущего этапа поведения требуется решить несколько подзадач, планирование целенаправленной деятельности на этом этапе сводится к автоматическому построению дерева вывода решений на основе имплицативных решающих правил (1)–(5) с использованием *метода 4*. Данный метод планирования имеет следующее описание.

1. На первом шаге построения дерева вывода решений соответствующего, например, текущему j_{11} этапу деятельности, его корневая вершина $v_0(j_{11})$ помечается целевой ситуацией $S_{j_{11}}^I$. Затем в модели представления знаний определяется первый акт поведения (3), у которого содержание ситуации $S_{i_5}^{1,I}(j_6)$ совпадает с содержанием целевой ситуации $S_{j_{11}}^I$.

При этом может возникнуть одно из условий: ситуация $S_{i_5}^{1,I}(j_6)$ является нечетко равной (см. определение 1), или нечетко вложенной (см. определение 2) в целевую ситуацию $S_{j_{11}}^I$. В первом случае осуществляется переход на следующий шаг построения дерева вывода решений (п. 2), в противном случае выполняется переход к п. 3.

2. На данном шаге построения дерева вывода решений проверяется условие: является или нет исходная ситуация $S_{i_5}^{1,I}(j_6)$ выбранного элемента представления знаний нечетко вложенной в текущую ситуацию ПС $S_{i_5} \in S$. Если данное условие выполняется, то план поведения, связанный с преобразованием текущей ситуации ПС S_{i_5} в ее целевую ситуацию $S_{j_{11}}^I$, является построенным. Таким образом, для достижения заданной подцели на текущем этапе деятельности ИР выполняет выбранное сложное действие $B_{j_1}^1$. В противном случае построение плана целенаправленной деятельности продолжается следующим образом.

На текущем k , $k = 2, \dots, n$ шаге построения дерева вывода решений определяется результирующий акт поведения (3), у которого ситуация $S_{i_5}^{k,I}(j_6)$

является либо нечетко равной исходной ситуации $S_{i_5}^{k-1,И}(j_6)$ акта поведения выбранного на предыдущем шаге ее роста, либо нечетко вложена в эту ситуацию.

В случае, когда $S_{i_5}^{k,П}(j_6) \approx S_{i_5}^{k-1,И}(j_6)$, проверяется условие: является или нет исходная ситуация $S_{i_5}^{k,И}(j_6)$ последнего выбранного акта поведения нечетко вложенной в текущую ситуацию ПС $S_{i_5} \in S$. Если данное условие является справедливым, то принимается решение о том, что план целенаправленного поведения сформирован. Таким образом, для достижения заданной подцели $S_{j_{10}}^{П}$ ИР требуется выполнить построенный кортеж сложных действий $\langle B^k, \dots, B_{j_1}^2, B_{j_1}^1 \rangle$.

В случае же, когда условие $S_{i_5}^{k,П}(j_6) \approx S_{i_5}^{k-1,И}(j_6)$ не выполняется, построение основной ветви дерева вывода решений продолжается по вышеописанному принципу до тех пор, пока к нему не будет присоединен акт поведения z , у которого исходная ситуация $S_{i_5}^{z,И}(j_6)$ является нечетко вложенной в текущую ситуацию ПС $S_{i_5} \in S$.

Если же ситуация $S_{i_5}^{k,П}(j_6)$ оказывается нечетко вложенной в ситуацию $S_{i_5}^{k-1,И}(j_6)$, то это сигнализирует решающей подсистеме ИР о том, что требуется разветвление строящегося дерева вывода решений и осуществляется переход к п. 3.

3. На данном шаге определяются подцели поведения ИР для образующихся ветвей строящегося дерева вывода решений путем выполнения следующих операций над нечеткими семантическими сетями. Для определения подцели поведения и продолжения роста основной ветви дерева вывода или его ствола, например на $k + 1$ шаге планирования из исходной ситуации $S_{i_5}^{k-1,И}(j_6)$ акта поведения, выявленного на $k - 1$ шаге, вырезается подграф структурно эквивалентный семантической сети $S_{i_5}^{k,П}(j_6)$, соответствующей акту поведения, выбранному на k шаге построения дерева вывода решений. Затем выполняется переход к п.2, на котором продолжается построение ствола дерева вывода решений на основе полученной таким образом подцели поведения.

В оставшейся же части $\Delta S_{i_5}^{k-1,И}(j_6) \subset S_{i_5}^{k-1,И}(j_6)$ разбиваемой семантической сети к ее разрезанным ребрам присоединяются вершины, которые были им инцидентны в исходной семантической сети $S_{i_5}^{k-1,И}(j_5)$. В результате определяется фрагмент активной нечеткой семантической сети, определяющий подцель поведения ИР $\Delta S_{i_5}^{k+1,П}(j_6)$ для боковой ветви строящегося дерева вывода решений. Затем выполняется переход к п. 4.

4. На данном шаге для дальнейшего роста боковой ветви дерева вывода решений в модели представления знаний определяется акт поведения, у которого для целевой подситуации $S_{i_5}^{П}(j_6)$ выполняется условие $S_{i_5}^{П}(j_5) \approx \Delta S_{i_5}^{k+1,П}(j_5)$. Если найден такой акт поведения, то для дальнейшего роста боковой ветви выполняется переход к п. 2. Если же выполняется условие $S_{i_5}^{П}(j_5) \subset \Delta S_{i_5}^{k+1,П}(j_5)$, то рост боковой ветви дерева вывода решений осуществляется по описанному в пп. 3, 4 принципу.

В случае же, когда такой акт поведения не найден, то дальнейший рост боковой ветви дерева вывода решений осуществляется по тому же принципу, что и на основе формального описания условий и результатов выполнения сложных действий B_{j_1} , но только с использованием элементарных актов поведения (2).

Таким образом, построенное описанным выше способом дерево вывода решений определяет план целенаправленной деятельности ИР, состоящий из входящих в него различных актов поведения, связанных между собой условиями нечеткого равенства или нечеткого вхождения соответствующих им фрагментов нечетких семантических сетей. Обработка ИР данного плана целенаправленной деятельности начинается с выполнения последнего сложного действия, присоединенного к стволу дерева вывода решений. При этом подпланы целенаправленной деятельности, соответствующие боковым ветвям построенного дерева, отрабатываются в порядке возникновения условий, сигнализирующих о необходимости их построения, начиная с последнего присоединенного к ним сложного действия.

Примеры планирования целенаправленной деятельности ИР на основе предложенных типовых элементов представления знаний с использованием методов 3, 4 приводятся в Приложении П.1.

При самопроизвольном появлении в ПС событий $d_{i_5}(Y_{i_5}) \in D$, препятствующих эффективной обработке действий сформированного на текущем этапе плана поведения, ИР приостанавливает свою текущую целенаправленную деятельность и переключается к построению и отработке подплана, связанного с устранением негативного влияния этих событий на его дальнейшую деятельность. Данный подплан поведения автоматически формируется таким же способом, как и основной план целенаправленной деятельности. Только в этом случае процесс построения дерева вывода решений на первом шаге осуществляется на основе импликативных решающих правил (4) и (5). После устранения негативного влияния возникшего в ПС события $d_{i_5}(Y_{i_5}) \in D$, ИР продолжает свою многоэтапную целенаправленную деятельность. Для этого он, в зависимости от сложившейся в ПС ситуации $S_{i_5} \in S$, использует либо ранее разработанный план целенаправленной деятельности, либо перепланирует свою дальнейшую деятельность с учетом произошедших в проблемной среде изменений.

Предложение 1. Функциональная сложность β метода 4 планирования целенаправленной деятельности на каждом ее этапе зависит от количества операций сравнения пометок вершин и ребер в сопоставляемых между собой семантических сетях и определяется следующими граничными оценками:

$$3\delta \sum_{j_{12}=1}^{\delta} n_{j_{12}}^2 \leq \beta \leq 3\delta\lambda \sum_{j_{12}=1}^{\delta} n_{j_{12}}^2,$$

где δ, λ – соответственно общее количество выполненных шагов вывода решений и импликативных решающих правил, хранящихся в модели представ-

ления знаний, связанных с решаемой ИР задачей на текущем этапе деятельности; $n_{j_{12}}$ – количество вершин у максимальной по размерам семантической сети, участвующей в процессе вывода решений на j_{12} шаге планирования.

Доказательство сформулированного предложения приводится в Приложении П.2.

Таким образом, наиболее трудоемкий метод 4 планирования многоэтапной деятельности ИР имеет полиномиальную сложность второго порядка. Это позволяет ориентировочно определить производительность бортовой ЭВМ, необходимой для его реализации с учетом функционального назначения создаваемого интеллектуального робота.

5. Заключение

1. Предложенные элементы модели представления знаний позволяют ИР адаптироваться к априори неописанным проблемным средам путем конкретизации в процессе вывода решений имеющихся в их структуре слотов с учетом текущей ситуации ПС. Это, в свою очередь, обеспечивает ИР возможность на основе разработанных процедур вывода решений автоматически генерировать планы целенаправленной многоэтапной деятельности в нестабильных априори неописанных условиях функционирования.

2. Разработанные типовые элементы представления знаний позволяют существенным образом сузить пространство поиска решаемых ИР задач за счет выбора на каждом шаге планирования целенаправленной деятельности не одного, а сразу нескольких результативных действий. Кроме того, определение таких результативных действий осуществляется не путем перебора, а на основе целенаправленного выбора с учетом условий ПС, в которых ИР предстоит решать стоящую перед ним подзадачу на каждом этапе целенаправленной деятельности.

3. Важная особенность предложенных элементов представления знаний и методов вывода решений заключается в возможности их использования для вывода решений на семантических сетях, позволяющих наиболее выразительно и компактно выполнить формальное описание текущих условий функционирования ИР в различных по сложности ПС.

4. К основному недостатку предложенного подхода к построению интеллектуального решателя задач, позволяющего ИР планировать целенаправленную деятельность в априори неописанных нестабильных проблемных средах, следует отнести громоздкость задаваемой роботу цели. В этой связи возникает необходимость в дальнейшем развитии проведенного исследования, связанного с построением типовых элементов представления знаний, позволяющих формулировать ИР цель поведения в виде одной общей задачи. Затем выполнять разбиение этой задачи на подзадачи, решение которых обеспечивает достижение полученных подцелей в сложившихся в ПС условиях на различных этапах функционирования.

П.1. Примеры решения ИР гипотетических задач

Задача 1. Допустим, что робот получил следующее задание. Находясь на одном из участков ПС с препятствиями, роботу требуется перейти на другой ближайший к нему участок этой среды, на котором необходимо перенести объект $o_1(X_1)$ и поставить на объект $o_2(X_2)$. Затем попасть на следующий участок ПС, на котором следует заменить объект $o_3(X_3)$ (например, разряженную батарею питания), находящийся в закрытой дверцей нише объекта $o_4(X_4)$ (например, электронного прибора) на объект $o_5(X_5)$ (заряженную батарею питания).

Пусть в ПС выполняются следующие условия. В исходном состоянии ИР наблюдает объект $o_1(X_1)$, а на пути движения к этому объекту имеются препятствия. Между объектами $o_1(X_1)$ и $o_2(X_2)$ препятствия отсутствуют. Из местоположения объекта $o_2(X_2)$ ИР становится видимым объект $o_4(X_4)$, а между данными объектами в ПС имеются непреодолимые для робота препятствия. Объект $o_5(X_5)$ находится в специальном для этого “кармане 1” ИР.

Следует отметить, что сформулированное ИР задание состоит из следующих двух этапов. На первом этапе ИР требуется перейти в ПС с препятствиями к местоположению объекта $o_1(X_1)$. После этого захватить этот объект и перенести его к местоположению объекта $o_2(X_2)$. Затем поставить объект $o_1(X_1)$ на поверхность объекта $o_2(X_2)$.

На втором этапе ИР необходимо перейти в ПС с препятствиями к местоположению объекта $o_4(X_4)$. После этого заменить объект $o_3(X_3)$, находящийся в специальной для этого нише внутри объекта $o_4(X_4)$, на объект $o_5(X_5)$.

Таким образом, ИР для выполнения сформулированного ему задания требуется использовать типовые элементы модели представления знаний, обеспечивающие решение следующих подзадач.

1. Построить маршрут перемещения ИР в ПС с препятствиями, при условии воспринимаемого в среде целевого местоположения (типовой элемент представления процедурных знаний для решения данной подзадачи определяется *методом 1*).

2. Отработать сложное действие B_1 (поставить объект $o_1^*(X_1^*)$ на объект $o_2^*(X_2^*)$) при условии, что данные объекты расположены в зоне прямой видимости за пределами рабочей зоны манипулятора ИР. Здесь характеристики X_1^* слота $o_1^*(X_1^*)$ показывают, что первый, находящийся в ПС объект $o_1(X_1)$, для эффективной отработки действий данного элемента модели представления знаний должен иметь определенные габаритные размеры и вес, позволяющие ИР захватить поднять и перенести этот объект. В свою очередь, характеристики X_2^* слота $o_2^*(X_2^*)$ показывают, что для того, чтобы ИР мог поставить объект $o_1(X_1)$ на объект $o_2(X_2)$, последний должен иметь плоскую поверхность.

Сложное действие B_1 данного элемента представления знаний состоит из кортежа следующих элементарных действий: <подойти к объекту $o_1^*(X_1^*)$

(при наличии в ПС препятствий отработать данное действие, используя *метод 1*); захватить объект $o_1^*(X_1^*)$; поднять объект $o_1^*(X_1^*)$; перейти к объекту $o_2^*(X_2^*)$ (при наличии в ПС препятствий отработать данное действие, используя *метод 1*); поставить объект $o_1^*(X_1^*)$ на поверхность объекта $o_2^*(X_2^*)$ >.

3. Выполнить сложное действие B_2 [провести замену объекта $o_3^*(X_3^*)$, находящегося в нише с дверцей объекта $o_4^*(X_4^*)$, на объект $o_5^*(X_5^*)$]. В данном элементе представления знаний характеристики X_1^* слота $o_1^*(X_1^*)$ показывают, что имеющийся у ИР объект $o_5(X_5)$ для эффективной отработки действий данного элемента модели представления знаний должен удовлетворять следующему условию $X_5^* \subseteq X_5$. В свою очередь, для выполнения сложного действия B_2 для объектов $o_3(X_3)$ и $o_4(X_4)$ соответственно должны выполняться следующие условия $X_3^* \subseteq X_3$ и $X_4^* \subseteq X_4$.

При этом сложное действие B_2 состоит из следующего кортежа элементарных действий: <подойти к объекту $o_4^*(X_4^*)$ [при наличии в ПС препятствий для отработки действия использовать *метод 1*]; открыть дверцу ниши объекта $o_4^*(X_4^*)$, в которой расположен объект; отключить объект $o_3^*(X_3^*)$ от сети питания; вынуть объект $o_3^*(X_3^*)$ из ниши объекта $o_4^*(X_4^*)$; опустить объект $o_3^*(X_3^*)$ на поверхность земли; достать из “кармана 1” объект $o_5^*(X_5^*)$; вставить объект $o_5^*(X_5^*)$ в нишу объекта $o_4^*(X_4^*)$; подключить объект $o_5^*(X_5^*)$ к сети питания, закрыть крышку ниши объекта $o_4^*(X_4^*)$; поднять с земли объект $o_3^*(X_3^*)$ и поместить его в “карман 2”>.

Таким образом, используя *метод 3* и сформулированное задание, ИР приступает к планированию целенаправленной деятельности, связанной с выполнением первого этапа функционирования. Пусть на первом шаге такого планирования на основе *метода 3* робот устанавливает, что для объектов $o_1(X_1)$, $o_2(X_2)$ и типового элемента представления знаний “поставить объект $o_1^*(X_1^*)$ на объект $o_2^*(X_2^*)$ ” соответственно выполняются следующие условия $X_1^* \subseteq X_1$ и $X_2^* \subseteq X_2$. Отсюда для решения подзадачи первого этапа целенаправленной деятельности, ИР использует типовой элемент представления знаний, связанный с выполнением сложного действия B_1 . Таким образом, подплан первого этапа будет определяться кортежем элементарных действий этого сложного действия, в котором слоты $o_1^*(X_1^*)$ и $o_2^*(X_2^*)$ помечены соответственно находящимися в ПС объектами $o_1(X_1)$ и $o_2(X_2)$.

При этом, учитывая, что на пути движения робота к объекту $o_1(X_1)$ в среде имеются препятствия, отработка первого действия полученного подплана поведения выполняется с привлечением по ссылке *метода 1*. В итоге подплан первого этапа целенаправленной деятельности состоит из двух типовых элементов процедурной модели представления знаний ИР.

Кроме того, исходя из того, что ИР априори неизвестны условия ПС, в которых предстоит выполнять второй этап целенаправленной деятельности, робот непосредственно реализует подплан поведения первого этапа. В результате этого ИР переходит на новый участок ПС, на котором, согласно текущим условиям функционирования, объект $o_4(X_4)$ ему становится видимым. Это позволяет ИР на втором этапе планирования целенаправленной

деятельности, для достижения соответствующей ему подцели, выбрать элемент представления знаний, соответствующий сложному действию B_2 .

Пусть для объектов ПС $o_3(X_3)$, $o_4(X_4)$ и $o_5(X_5)$, а также данного элемента представления знаний, соответственно выполняются следующие условия $X_3^* \subseteq X_3$, $X_4^* \subseteq X_4$ и $X_5^* \subseteq X_5$. В этом случае, согласно *методу 3*, подплан целенаправленной деятельности ИР второго этапа будет состоять из кортежа элементарных действий сложного действия B_2 , в котором слоты помечены удовлетворяющими их требованиям объектами ПС. При этом первое действие этого кортежа выполняется с привлечением выбранного по его ссылке *метода 1*.

В итоге выполнение сформулированного ИР задания сводится к отработке следующего кортежа сложных действий $\langle B_1, B_2 \rangle$, в которых первые элементарные действия “подойти к заданному объекту” реализуются с привлечением *метода 1*.

Задача 2. Рассмотрим случай, когда ИР на одном из этапов требуется решить несколько взаимосвязанных между собой подзадач. Например, “снять объект $o_5(X_5)$, расположенный на объекте $o_6(X_6)$ ” и “заменить объект $o_7(X_7)$, находящийся в закрытой дверцей нише объекта $o_8(X_8)$, на объект $o_5(X_5)$ ”.

В этом случае для планирования целенаправленной деятельности ИР использует *метод 4*. При этом сформированный подплан целенаправленной деятельности ИР будет состоять из следующего кортежа типовых элементов модели представления знаний \langle сложное действие B_3 , сложное действие $B_2 \rangle$. Здесь третье сложное действие определяется следующим типовым элементом B_3 (снять объект $o_5^*(X_5^*)$, расположенный на объекте $o_6^*(X_6^*)$). При этом, если на пути движения ИР к объекту $o_6(X_6)$ и пути перехода от местоположения объекта $o_6(X_6)$ к местоположению в ПС объекта $o_8(X_8)$ имеются препятствия, то первые элементарные действия сложных действий B_3 и B_2 отрабатываются роботом с привлечением для этого *метода 1*.

П.2. Доказательство сформулированного утверждения

Доказательство предложения 1. Справедливость сформулированного предложения вытекает из следующих соображений.

1. На каждом j_{12} шаге вывода решений сравниваются между собой семантические сети, представляющие собой помеченные графы. Следовательно, количество сравнений между собой пометок имеющих в них структурно эквивалентных вершин и ребер не может превышать величины, равной $n_{j_{12}}^2$.

2. Каждый шаг вывода решений в процессе построения плана целенаправленного поведения на текущем этапе деятельности сводится к выбору путем направленного перебора акта поведения, удовлетворяющего следующим условиям: $S_{i_5}^I(j_4) \approx S_{j_{11}}^I$, $S_{i_5}^{II}(j_4) \approx S_{i_5}^I(j_6)$ и $S_{i_5}^{II}(j_6) \approx S_{j_{11}}^{II}$.

Таким образом, количество сравнений пометок в сопоставляемых между собой семантических сетях, в лучшем случае, когда результативный акт по-

ведения выбирается в первую очередь (что вполне вероятно), может быть не менее трех. Следовательно, в течение δ шагов синтеза дерева вывода решений, исходя из п. 1 проводимого доказательства, количество таких сравнений не может быть менее величины, равной $3\delta \sum_{j_{12}=1}^{\delta} n_{j_{12}}^2$.

В худшем же случае, когда необходимое импликативное решающее правило определяется в последнюю очередь, количество сравнений пометок в сопоставляемых между собой семантических сетях на каждом j_{12} шаге вывода решений выполняется не более λ раз. Следовательно, количество сравнений между собой пометок структурно эквивалентных вершин и ребер в сопоставляемых семантических сетях на протяжении всего процесса построения дерева вывода решений, состоящего из δ шагов, не может превышать величины, равной $3\delta\lambda \sum_{j_{12}=1}^{\delta} n_{j_{12}}^2$.

3. Из пп. 1–2 проводимого доказательства с очевидностью следует справедливость сформулированного *предложения*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Melekhin V.B., Khachumov M.V.* Planning polyphasic behavior of autonomous intelligent mobile systems in uncertain environments // Inform. Control. Syst. 2021. V. 113. No. 4. P. 28–36.
2. *Амосов Н.М.* Алгоритмы разума. Киев: Наукова думка, 1979.
3. *Kelly A.* Mobile Robotics: Mathematics, Models, and Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
4. *Давыдов О.И., Платонов А.К.* Роботы и искусственный интеллект. Технократический подход // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 112. 24 с.
5. *Гаазе-Рапопорт М.Г., Поспелов Д.А.* От амёбы к роботу. Модели поведения. 4 изд., стереотип. М.: URSS, 2019.
6. *Kober J., Peters J.* Learning Motor Skills: From Algorithms to Robot Experiments. Cham: Springer, 2014.
7. *Абасов И.Б., Игнатъев В.В., Орехов В.В.* Дизайн автономного мобильного робототехнического комплекса // Междунар. науч.-исслед. журн. 2019. № 1–1. С. 3340–3351.
8. *Russell S., Norvig P.* Artificial Intelligence: A Modern Approach. 4 ed. Pearson, 2020.
9. *Вагин В.Н.* Дедуктивный вывод на знаниях / Искусственный интеллект. В 3-х кн. Кн. 2. Методы и модели. Справочник: под ред. Д.А. Поспелова. М.: Радио и связь, 1990. С. 89–105.
10. *Абросимов В.К.* Нейронная пространственно-временная модель движения объектов управления // Нейрокомпьютеры. Разработка, применение. 2014. № 3. С. 26–35.
11. *Бодин О.Н., Безбородова О.Е., Спиркин А.Н., Шерстнев В.В.* Бионические системы управления робототехническими комплексами. Пенза: ПГУ, 2022.
12. *Редько В.Г.* Эволюция, нейронные сети, интеллект: Модели и концепции эволюционной кибернетики. М.: Ленанд, 2019.
13. *Каляев А.В., Чернухин Ю.В., Носков В.Н., Каляев И.А.* Однородные управляющие структуры адаптивных роботов. М.: Наука, 1990.

14. Мелехин В.Б., Хачумов М.В. Планирование поведения автономных интеллектуальных систем в условиях неопределенности: под ред. проф. М.В. Хачумова. СПб.: Политехника, 2022.
15. Павловский В.Е., Павловский В.В. Технологии SLAM для подвижных роботов: состояние и перспективы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 1. № 6. С. 384–394.
16. Labbe M., Michaud F. RTAB-Map as an open-source lidar and visual simultaneous localization and mapping library for large-scale and long-term online operation // Field Robotics. 2019. No. 35. P. 416–446.
17. Носков В.П., Рубцов И.В. Ключевые вопросы создания интеллектуальных мобильных роботов // Инженер. журн.: наука и инновации. 2013. Вып. 3. С. 1–11.
18. Заева К.А., Семенов А.Б. Метод маршрутизации с препятствиями на основе параллельных вычислений // Вестник ТвГУ. Прикладная математика. 2016. Вып. 3. С. 85–95.
19. Tomas L.P., Michael A.W. An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles // Commun. ACM. 1979. Vol. 22. No. 10. P. 560–570.
20. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. 2-е изд., стереотип. М.: URSS, 2022.
21. Мелехин В.Б., Хачумов М.В. Элементы понятийного мышления в планировании поведения автономных интеллектуальных агентов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22. № 8. С. 411–419.
22. Melekhin V.B., Khachumov M.V. Fuzzy semantic networks as an adaptive model of knowledge representation of autonomous intelligent systems // Sci. Tech. Inf. Process. 2021. Vol. 48. No. 5. P. 1–8.
23. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение для принятия приближенных решений: пер. с англ. М.: Мир, 1976.
24. Мелехин В.Б., Хачумов М.В. Процедуры самообучения автономных интеллектуальных мобильных систем в нестабильных априори неописанных проблемных средах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 23. № 7. С. 356–366.
25. Мелехин В.Б., Хачумов М.В. Принцип построения процедур планирования поведения автономных интеллектуальных роботов на основе полипеременных условно-зависимых предикатов // АиТ. 2022. № 4. С. 140–154.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 20.07.2022

После доработки 09.06.2023

Принята к публикации 30.09.2023

СОДЕРЖАНИЕ

Тематический выпуск

Академик С.Н. Васильев. 15-я Международная конференция “Управление развитием крупномасштабных систем”. Вступительное слово	3
Митришкин Ю.В., Иванова С.Л., Мухтаров К.С. Алгоритм управления с адаптацией неустойчивым вертикальным положением плазмы в токамаке	6
Ядыкин И.Б., Галяев И.А. Структурные спектральные методы решения непрерывных уравнений Ляпунова	18
Михальский А.И., Новосельцева Ж.А., Анашкина А.А., Некрасов А.Н. Вероятностная оценка влияния состава пентапептида на его устойчивость	38
Цвиркун А.Д., Резчиков А.Ф., Кушников В.А., Дранко О.И., Богомолов А.С., Селютин А.Д. Модели и методы проверки достижимости целей и выполнимости планов в крупномасштабных системах на примере целей и планов ликвидации последствий наводнения	49
Хоботов Е.Н., Аверьянова Е.Е. Задачи и методы управления запасами в иерархической системе складов	64
Хоботов Е.Н. Задачи и методы построения расписаний работ для предприятий со сталельной сборкой выпускаемых изделий	80
Бурков В.Н., Буркова И.В., Кашенков А.Р. Задача оптимизации систем группового стимулирования	96
Щепкин А.В. Сравнение процедур распределения в механизме смешанного финансирования	106

Нелинейные системы

Тхай В.Н. Притягивающий цикл в связанной механической системе с фазовыми сдвигами в колебаниях подсистем	120
---	-----

Робастное, адаптивное и сетевое управление

Жирабок А.Н., Зуев А.В. Метод диагностирования дискретных систем на основе интервальных наблюдателей	133
---	-----

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Мелехин В.Б., Хачумов М.В. Планирование многоэтапной деятельности интеллектуальным роботом в условиях неопределенности	146
---	-----

C O N T E N T S

Topical issue

Academician S.N. Vasiliev. 15th International Conference “Management of Large-Scale Systems Development”. Introductory remarks	3
Mitrishkin Y.V., Ivanova S.L., Mukhtarov K.S. Control Algorithm with Adaptation of Unstable Vertical Plasma Position in Tokamak	6
Yadykin I.B., Galyaev I.A. Structural Spectral Methods for Solving Continuous Lyapunov Equations	18
Mikhalskii A.I., Novoseltseva J.A., Anashkina A.A., Nekrasov A.N. Probabilistic Assessment of a Pentapeptide Composition Influence on Its Stability	38
Tsvirkun A.D., Rezhikov A.F., Kushnikov V.A., Dranko O.I., Bogomolov A.S., Selyutin A.D. Models and Methods for Verifying the Accessibility and Feasibility of Goals and Plans in Large-Scale Systems by Example for the Elimination of Consequences Floods	49
Khobotov E.N., Averyanova E.E. Problems and Methods of Stock Management in a Hierarchical System of Warehouses	64
Khobotov E.N. Problems and Methods of Work Scheduling for Enterprises with Slipway Assembly of Manufactured Products	80
Burkov V.N., Burkova I.V., Kashenkov A.R. The Problem of Optimizing the Group Incentive Systems	96
Shchepkin A.V. Comparison of Distribution Procedures in the Mixed Financing Mechanism	106

Nonlinear Systems

Tkhai V.N. Attractive Cycle in a Coupled Mechanical System with Phase Shifts in Subsystem Oscillations	120
---	-----

Robust, Adaptive and Network Control

Zhirabok A.N., Zuev A.V. Method of fault diagnosis in discrete-time systems based on interval observers	133
--	-----

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Melekhin V.B., Khachumov M.V. Planning Multi-Stage Activities by an Intelligent Robot Under Conditions of Uncertainty	146
--	-----