Нелинейные системы

© 2023 г. **В.Р. БАРСЕГЯН, д-р физ.-мат. наук (barseghyan@sci.am)**
(Ереванский государственный университет;
Институт механики НАН Армении, Ереван)

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕКОТОРОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

В предлагаемой статье изучена задача граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением с кусочно-постоянными характеристиками. Принято, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением на двух концах. Предложен конструктивный подход построения управляющего воздействия, переводящего колебания за заданный промежуток времени из начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в конечное состояние. Схема построения заключается в следующем: исходная задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее используется метод разделения переменных и методы теории управления конечномерных систем с многоточечными промежуточными условиями. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

Ключевые слова: управление колебаниями, граничное управление, неоднородный колебательный процесс, волновое уравнение, кусочно-постоянные характеристики, разделение переменных.

DOI: 10.31857/S0005231023020046, **EDN:** OMXOQO

1. Введение

Задачам граничного управления и оптимального управления распределенными колебательными системами посвящены многие исследования, в частности, [1–15]. Для распределенной однородной колебательной системы, описываемой однородным волновым уравнением, с многоточечными промежуточными условиями задачи граничного управления рассмотрены в исследованиях [2–6]. В них решения задач построены на основе методов Фурье и теории управления конечномерных систем с многоточечными промежуточными условиями.

К исследованию решений задач управления разнородных распределенных составных систем посвящены, в частности, [7–15]. Одной из первых работ в этой области является [8], где решена поставленная А.Г. Бутковским задача управления распределенной колебательной системой, состоящей из двух кусочно-однородных сред. Построение решения задачи основано на методе распространяющих волн. В [9, 10] и других исследованиях этого же автора и его учеников изучены подобные задачи граничного управления неоднородными колебательными процессами. При исследовании этих задач граничного управления использован метод Даламбера и выведены формулы типа Даламбера. К краевым задачам для уравнения, описывающего процесс продольных колебаний стержня с кусочно-постоянными характеристиками (состоящих из не менее двух участков) со свободным либо закрепленным правым концом, посвящены, в частности, [13–19]. В них исследования проведены в классе обобщенного решения. В [20] рассмотрена механическая система, состоящая из двух кусков струны равной длины, соединенных между собой пружиной. С помощью формулы Даламбера исследована задача граничного управления колебаниями сложносочлененной системы с особенностями.

Необходимость моделирования и управления распределенных колебательных процессов составных систем с кусочно-постоянными (неоднородными) характеристиками возникает во многих теоретических и прикладных областях науки и техники. Однако научное направление по управлению неоднородными упругими колебаниями пока еще недостаточно исследовано и находится на стадии становления.

В настоящей статье рассмотрена задача граничного управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. Распределенная неоднородная колебательная система, описываемая однородным волновым уравнением, в частности, описывает не только поперечные колебания неоднородной струны, но и продольные колебания неоднородного стержня. Колебательный процесс характеризуется разными упругими свойствами и плотностями участков. Их длины таковы, что время прохождения волны по каждой из частей одинаково.

Условия, определяющие контактные взаимодействия материалов разнородных тел, имеют важные значения. При математическом моделировании учет этих условий сопряжения, соединения (склейки) двух участков с разными физическими характеристиками материалов, должен соответствовать условиям непрерывного истечения возбуждаемых волновых процессов.

Цель данной статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции граничного управления одномерными колебательными неоднородными процессами, переводящими колебания за заданный промежуток времени из начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в конечное состояние.

2. Постановка задачи

Рассматриваются колебания распределенной кусочно-однородной среды, расположенной вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l$ и состоящей из двух участков: участок $-l_1 \leq x \leq 0$ и участка $0 \leq x \leq l$. Скорость прохождения по участкам волны обозначим $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$, где $\rho_i = \text{const}$ — плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. Следуя [9], предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \le x \le 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \le x \le l$, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}. \tag{2.1}$$

Отметим, что описанным колебательным неоднородным процессом могут быть продольные колебания кусочно-однородного стержня (ρ — плотность, k — модуль упругости) или поперечные колебания кусочно-однородной струны (ρ — плотность, k — натяжение струны).

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны), представлено функцией $Q(x,t)$, $-l_1 \le x \le l$, $0 \le t \le T$. Отклонение от состояния равновесия описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & -l_1 \le x \le 0, \quad 0 \le t \le T \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & 0 \le x \le l, \qquad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{2.2}$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.3}$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t)$$

$$a_1^2 \rho_1 \left| \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \right._{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \left| \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \right._{x=0+0}. \tag{2.4}$$

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \le x \le l, \tag{2.5}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \le x \le l. \tag{2.6}$$

Пусть также в некоторые промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots$ $\ldots, m)$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения функции состояния в виде

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \le x \le l, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.7}$$

В формуле (2.3) *функции* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$ — *управляющие воздействия (граничные управления).*

Предполагается, что функция $Q(x,t)\in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T=\{(x,t)\colon x\in[-l_1,l],\ t\in[0,T]\}$, а функции $\varphi_i(x)\in C^2[-l_1,l]$, $i=0,1,\ldots,m,m+1$, $\psi_0(x)$, $\psi_T(x)\in\in C^1[-l_1,l]$.

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются следующие условия согласования.

$$\mu(0)=\varphi_0(-l_1),\quad \dot\mu(0)=\psi_0(-l_1),\quad \nu(0)=\varphi_0(l),\quad \dot\nu(0)=\psi_0(l),$$
$$\mu(t_i)=\varphi_i(-l_1),\quad \nu(t_i)=\varphi_i(l),\quad i=1,\ldots,m, \tag{2.8}$$
$$\mu(T)=\varphi_T(-l_1),\quad \dot\mu(T)=\psi_T(-l_1),\quad \nu(T)=\varphi_T(l),\quad \dot\nu(T)=\psi_T(l).$$

Задача граничного управления. Требуется найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ $(0\le t\le T)$, переводящие колебания системы (2.2) из заданного начального состояния (2.5) через промежуточные состояния (2.7) в конечное состояние (при $t=T$) (2.6).

Отметим, что условия сопряжения в точке стыка $x=0$ (2.4) *выполняются и для функции* $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1,\ldots,m$.

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями

Для решения поставленной задачи перейдем к новой переменной [21]

$$\xi=\begin{cases}\dfrac{a_2}{a_1}x, & -l_1\le x\le 0,\\ x, & 0\le x\le l,\end{cases} \tag{3.1}$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1\le x\le 0$ относительно точки $x=0$. При этом с учетом (2.1) будем иметь, что отрезок $-l_1\le x\le 0$ переходит к отрезку $-l\le\xi\le 0$. Для функции $Q(\xi,t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2}=\begin{cases}a_2^2\dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial\xi^2}, & -l\le\xi\le 0,\ \ 0\le t\le T\\ a_2^2\dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial\xi^2}, & 0\le\xi\le l,\ \ \ \ 0\le t\le T\end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2}=a_2^2\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial\xi^2},\quad -l\le\xi\le l,\ \ 0\le t\le T \tag{3.2}$$

с соответствующими граничными условиями

$$Q(-l,t)=\mu(t),\quad Q(l,t)=\nu(t),\quad 0\le t\le T, \tag{3.3}$$

с начальными условиями

$$(3.4)\qquad Q(\xi,0)=\varphi_0(\xi),\quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_0(\xi),\quad -l\le x\le l,$$

промежуточными условиями

$$(3.5)\qquad Q(\xi,t_i)=\varphi_i(\xi),\quad -l\le \xi\le l,\quad i=1,\dots,m,$$

с конечными условиями

$$(3.6)\qquad Q(\xi,T)=\varphi_T(\xi),\quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T}=\psi_T(\xi),\quad -l\le \xi\le l,$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi=0$ соединения участков

$$(3.7)\quad Q(0-0,t)=Q(0+0,t),\quad a_1\rho_1\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\mid_{\xi=0-0}=a_2\rho_2\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\mid_{\xi=0+0}.$$

Отметим, что для удобства после замены переменной (3.1) все функции оставлены в исходных обозначениях.

Так как граничные условия (3.3) неоднородны, решение уравнения (3.2) построим в виде суммы

$$(3.8)\qquad Q(\xi,t)=V(\xi,t)+W(\xi,t),$$

где $V(\xi,t)$ — функция с граничными условиями

$$(3.9)\qquad V(-l,t)=V(l,t)=0,$$

требующая определения, а функция $W(\xi,t)$ — решение уравнения (3.2) с условиями

$$(3.10)\qquad W(-l,t)=\mu(t),\quad W(l,t)=\nu(t).$$

и имеет вид

$$(3.11)\qquad W(\xi,t)=\frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(t)+(l+\xi)\nu(t)\right].$$

Подстановка (3.8) в (3.2) с учетом (3.11), приводит к следующему уравнению для определения функции $V(\xi,t)$

$$(3.12)\qquad \frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial t^2}=a_2^2\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial \xi^2}+F(\xi,t),\quad -l\le \xi\le l,\quad 0\le t\le T,$$

где

$$(3.13)\qquad F(\xi,t)=\frac{1}{2l}\left[(\xi-l)\ddot{\mu}(t)-(\xi+l)\ddot{\nu}(t)\right].$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему (3.7) условию сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков. Отметим, что согласно (3.1) будем иметь

$$\begin{gathered}\varphi_0(-l_1) = \varphi_0(-l), \quad \varphi_i(-l_1) = \varphi_i(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l), \\ \psi_0(-l_1) = \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l_1) = \psi_T(-l).\end{gathered} \tag{3.14}$$

В силу начальных, промежуточных и конечных условий, соответственно (3.4)–(3.6), функция $V(\xi, t)$ должна удовлетворять следующим начальным

$$\begin{gathered}V(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(0) + (l+\xi)\nu(0)\right], \\ \left.\frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\dot{\mu}(0) + (l+\xi)\dot{\nu}(0)\right],\end{gathered} \tag{3.15}$$

промежуточным условиям

$$V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(t_i) + (l+\xi)\nu(t_i)\right], \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.16}$$

и конечным условиям

$$\begin{gathered}V(\xi, T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(T) + (l+\xi)\nu(T)\right], \\ \left.\frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\dot{\mu}(T) + (l+\xi)\dot{\nu}(T)\right].\end{gathered} \tag{3.17}$$

С учетом условий (2.8) и (3.14), условия (3.15)–(3.17) запишутся следующим образом, соответственно:

$$\begin{gathered}V(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_0(-l) + (l+\xi)\varphi_0(l)\right], \\ \left.\frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_0(-l) + (l+\xi)\psi_0(l)\right],\end{gathered} \tag{3.18}$$

$$V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_i(-l) + (l+\xi)\varphi_i(l)\right], \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered}V(\xi, T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_T(-l) + (l+\xi)\varphi_T(l)\right], \\ \left.\frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_T(-l) + (l+\xi)\psi_T(l)\right].\end{gathered} \tag{3.20}$$

Таким образом, решение задачи сведено к задаче управления колебанием, описываемым уравнением (3.12) с однородными граничными условиями (3.9), которая формулируется следующим образом: требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которых колебание, описываемое уравнением (3.12) с граничными условиями (3.9), переходит из заданного начального состояния (3.18) через промежуточные состояния (3.19) в конечное состояние (3.20).

4. Решение задачи

Решение уравнения (3.12), с учетом граничных условий (3.9) и условия согласованности, ищем в виде

$$(4.1)\qquad V(\xi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(t)\sin\frac{\pi k\xi}{l},\quad V_k(t)=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}V(\xi,t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}d\xi.$$

Функции $F(\xi,t)$, $\varphi_i(\xi)$ $(i=0,1,\ldots,m+1)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ представим в виде рядов Фурье, в базисе $\left\{\sin\frac{\pi k\xi}{l}\right\}$ $(k=1,2,\ldots)$, и, подставив их значения вместе с $V(\xi,t)$ в уравнения (3.12), (3.13) и в условия (3.18)–(3.20), получим

$$(4.2)\qquad \ddot V_k(t)+\lambda_k^2V_k(t)=F_k(t),\quad \lambda_k^2=\left(\frac{a_2\pi k}{l}\right)^2,\quad k=1,2,\ldots,$$

$$(4.3)\qquad F_k(t)=\frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\ddot\nu(t)\left(2(-1)^k-1\right)-\ddot\mu(t)\right],$$

$$V_k(0)=\varphi_k^{(0)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_0(-l)-\varphi_0(l)\left(2(-1)^k-1\right)\right],$$

$$(4.4)\qquad \dot V_k(0)=\psi_k^{(0)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_0(-l)-\psi_0(l)\left(2(-1)^k-1\right)\right],$$

$$(4.5)\qquad V_k(t_i)=\varphi_k^{(i)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_i(-l)-\varphi_i(l)\left(2(-1)^k-1\right)\right],$$

$$V_k(T)=\varphi_k^{(T)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_T(-l)-\varphi_T(l)\left(2(-1)^k-1\right)\right],$$

$$(4.6)\qquad \dot V_k(T)=\psi_k^{(T)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_T(-l)-\psi_T(l)\left(2(-1)^k-1\right)\right].$$

Здесь коэффициенты Фурье функции $F(\xi,t)$, $\varphi_i(\xi)$ $(i=0,1,\ldots,m,m+1)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ $(i=0,1,\ldots,m,m+1)$, $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ соответственно.

Общее решение уравнения (4.2) с условиями (4.4) и его производная имеют вид

$$V_k(t)=V_k(0)\cos\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\dot V_k(0)\sin\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau,$$

$$(4.7)\qquad \dot V_k(t)=-\lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t+\dot V_k(0)\cos\lambda_k t+\int\limits_0^t F_k(\tau)\cos\lambda_k(t-\tau)d\tau.$$

Следуя [2–6, 22], с учетом условий (4.5) и (4.6) из (4.7), получим, что функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k удовлетворяют следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau + E_k\int_0^T \nu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}(T),$$

$$\int_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau + E_k\int_0^T \nu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}(T), \tag{4.8}$$

$$\int_0^T \mu(\tau)h_k^{(i)}\,(\tau)\,d\tau + E_k\int_0^T \nu(\tau)h_k^{(i)}\,(\tau)\,d\tau = C_{1k}(t_i),\quad i=1,\dots,m$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k} + X_{1k} + E_kY_{1k}\right],$$

$$\tilde{C}_{1k} = \lambda_kV_k(T) - \lambda_kV_k(0)\cos\lambda_kT - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_kT,$$

$$C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k} + X_{2k} + E_kY_{2k}\right],$$

$$\tilde{C}_{2k} = \dot{V}_k(T) + \lambda_kV_k(0)\sin\lambda_kT - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_kT,$$

$$C_{1k}(t_i) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} + E_kY_{1k}^{(i)}\right],$$

$$\tilde{C}_{1k}(t_i) = \lambda_kV_k(t_i) - \lambda_kV_k(0)\cos\lambda_kt_i - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_kt_i,$$

$$X_{1k} = \lambda_k\varphi_T(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_kT - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_kT,\quad E_k = 1-2(-1)^k, \tag{4.9}$$

$$X_{2k} = \psi_T(-l) - \psi_0(-l)\cos\lambda_kT + \lambda_k\varphi_0(-l)\sin\lambda_kT,$$

$$Y_{1k} = \lambda_k\varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_kT - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_kT,$$

$$Y_{2k} = \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_kT + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_kT,$$

$$X_{1k}^{(i)} = \lambda_k\varphi_i(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_kt_i - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_kt_i,$$

$$Y_{1k}^{(i)} = \lambda_k\varphi_i(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_kt_i - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_kt_i,$$

$$h_k^{(i)}(\tau) = \begin{cases} \sin\lambda_k(t_i-\tau) & \text{при}\quad 0\le\tau\le t_i \\ 0 & \text{при}\quad t_i<\tau\le T. \end{cases}$$

Обозначим

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\lambda_k\,(T-\tau) & E_k\sin\lambda_k\,(T-\tau) \\ \cos\lambda_k\,(T-\tau) & E_k\cos\lambda_k\,(T-\tau) \\ h_k^{(1)}\,(\tau) & E_kh_k^{(1)}\,(\tau) \\ \dots & \dots \\ h_k^{(m)}\,(\tau) & E_kh_k^{(m)}\,(\tau) \end{pmatrix},$$

$$C_k(t_1, \ldots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \\ \vdots \\ C_{1k}(t_{m-1}) \end{pmatrix},$$

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} \mu(\tau) \\ \nu(\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Равенство (4.8) примет вид

$$\int_0^T \bar{H}_k(\tau) U(\tau) d\tau = C_k(t_1, \ldots, t_m, T), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.11}$$

Следовательно, для нахождения функции $U(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (4.11).

На практике задача синтеза управления распределенной системой решается, используя методы теории управления конечномерными системами [1, 22, 23]. Следовательно, для первых n гармоник, из (4.11) будем иметь

$$\int_0^T H_n(\tau)\, U_n(\tau) d\tau = \eta_n, \tag{4.12}$$

где введены следующие обозначения блочных матриц

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1(t_1, \ldots, t_m, T) \\ C_2(t_1, \ldots, t_m, T) \\ \vdots \\ C_n(t_1, \ldots, t_m, T) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

с размерностями $H_n(\tau)$ — $(n\,(m+2) \times 2)$, η_n — $(n\,(m+2) \times 1)$. *Здесь и далее обозначение в нижнем индексе буквы “n” будет означать — “для первых n гармоник”.*

Таким образом, из (4.12) следует, что первые n гармоники системы (4.2) с условиями (4.3)–(4.6) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n (4.13) можно найти управление $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (4.12).

Управляющее воздействие $U_n(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (4.12), представим в виде [22, 23]

$$U_n(t) = H_n^T(t) S_n^{-1} \eta_n + f_n(t), \tag{4.14}$$

где $H_n^T(t)$ — транспонированная матрица, $f_n(t)$ — вектор-функция и такая, что

$$\int_0^T H_n(t) f_n(t) dt = 0, \quad S_n = \int_0^T H_n(t)\, H_n^T(t)\, dt. \tag{4.15}$$

Здесь S_n — известная матрица размерностью $(n\,(m+2) \times n\,(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n \neq 0$.

Из формулы (4.14) следует, что существует множество управляющих функций, решающих задачу граничного управления.

Учитывая обозначения функции $h_k^{(i)}(\tau)$ для промежутков времени $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, m+1$ функции управления $\mu_n(t)$ и $\nu_n(t)$ (при $f_n(t) = 0$) представляются в виде:

$$\mu_n(t) = \begin{cases} \mu_n^{(1)}(t), & 0 \le t \le t_1 \\ \mu_n^{(2)}(t), & t_1 < t \le t_2 \\ \ldots \\ \mu_n^{(m)}(t), & t_{m-1} < t \le t_m \\ \mu_n^{(m+1)}(t), & t_m < t \le T, \end{cases} \qquad \nu_n(t) = \begin{cases} \nu_n^{(1)}(t), & 0 \le t \le t_1 \\ \nu_n^{(2)}(t), & t_1 < t \le t_2 \\ \ldots \\ \nu_n^{(m)}(t), & t_{m-1} < t \le t_m \\ \nu_n^{(m+1)}(t), & t_m < t \le T. \end{cases} \tag{4.16}$$

Подставляя построенные выражения для функции $\mu_n(t)$ и $\nu_n(t)$ в (4.3), а найденное для $F_k(t)$ выражение — в (4.7), получим функцию $V_k(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (4.1) будем иметь

$$V_n(\xi, t) = \sum_{k=1}^{n} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi, \tag{4.17}$$

а с помощью (3.7) и (3.10) функция колебания $Q_n(\xi, t)$, $-l \le \xi \le l$ для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n(\xi, t) = V_n(\xi, t) + W_n(\xi, t), \tag{4.18}$$

где

$$W_n(\xi, t) = \frac{1}{2l} \left[(l - \xi)\mu_n(t) + (l + \xi)\nu_n(t) \right]. \tag{4.19}$$

Учитывая обозначения (3.1), функция $Q_n(x, t)$ при $-l_1 \le x \le l$ представляется в виде:

$$Q_n(x, t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \mu_n(t) + \left(1 + \frac{x}{l_1}\right) \nu_n(t) \right], \\ \qquad\qquad -l_1 \le x \le 0, \quad 0 \le t \le T \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n(t) + \left(1 + \frac{x}{l}\right) \nu_n(t) \right], \\ \qquad\qquad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{4.20}$$

Здесь функции управления $\mu_n(t)$ и $\nu_n(t)$ имеют вид (4.17).

5. Пример

Для иллюстрации вышеизложенного построения предположим, что в граничных условиях (2.3) правый конец закреплен: $Q(l,t)=0,\ 0\le t\le T$ (т.е. $\nu(t)=0$). Рассмотрим случай $m=1$, т.е. когда в одном промежуточном моменте времени t_1 $(0<t_1<T)$ задано состояние колебания:

$$Q(x,t_1)=\varphi_1(x), \quad -l_1\le x\le l.$$

В этом случае из формулы (4.3) следует $F_k(t)=-\frac{a_2}{\lambda_k l}\ddot{\mu}(t)$, а согласно формулам (4.8) будем иметь следующие интегральные соотношения:

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau=C_{1k}(T), \quad \int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau=C_{2k}(T),$$

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)h_k^{(1)}(\tau)\,d\tau=C_{1k}(t_1), \quad k=1,2,\ldots,$$

где

$$C_{1k}(T)=\frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}+X_{1k}\right], \quad C_{2k}(T)=\frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k}+X_{2k}\right],$$

$$C_{1k}(t_1)=\frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}(t_1)+X_{1k}^{(1)}\right].$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k},\tilde{C}_{2k},\tilde{C}_{1k}(t_1),X_{1k},X_{2k}$ и $X_{1k}^{(1)}$ определяются из формулы (4.9). Следовательно,

$$\bar{H}_k(\tau)=\begin{pmatrix}\sin\lambda_k(T-\tau)\\ \cos\lambda_k(T-\tau)\\ h_k^{(1)}(\tau)\end{pmatrix}, \quad C_k(t_1,T)=\begin{pmatrix}C_{1k}(T)\\ C_{2k}(T)\\ C_{1k}(t_1)\end{pmatrix}, \quad k=1,2,\ldots.$$

Для простоты изложения, согласно формуле (4.12) (или (4.14)), (4.13), построим функцию граничного управления $\mu_n(t)$ при $n=1$ (следовательно, $k=1$). Тогда, согласно (4.10), будем иметь $H_1(\tau)=\bar{H}_1(\tau)$, $\eta_1=C_1$, а из (4.15), элементы матрицы

$$S_1=\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}&s_{13}\\ s_{21}&s_{22}&s_{23}\\ s_{31}&s_{32}&s_{33}\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы S_1, согласно обозначениям (4.15), имеют следующий вид:

$$s_{11}=\frac{T}{2}-\frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T, \quad s_{12}=s_{21}=\frac{1}{2\lambda_1}\sin^2\lambda_1 T, \quad s_{22}=\frac{T}{2}+\frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T,$$

$$s_{13} = s_{31} = \frac{t_1}{2}\cos\lambda_1\left(T - t_1\right) - \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \cos\lambda_1 T,$$

$$s_{23} = s_{32} = \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \sin\lambda_1 T - \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1\left(T - t_1\right), \quad s_{33} = \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 t_1,$$

при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$.

Обозначим $S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{s}_{11} & \widehat{s}_{12} & \widehat{s}_{13} \\ \widehat{s}_{21} & \widehat{s}_{22} & \widehat{s}_{23} \\ \widehat{s}_{31} & \widehat{s}_{32} & \widehat{s}_{33} \end{pmatrix}$,

где

$$\widehat{s}_{11} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T\right)\left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 t_1\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \sin\lambda_1 T - \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1\left(T - t_1\right)\right)^2\right],$$

$$\widehat{s}_{12} = \widehat{s}_{21} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{t_1}{2}\cos\lambda_1\left(T - t_1\right) - \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \cos\lambda_1 T\right) \times \right.$$

$$\times \left(\frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \sin\lambda_1 T - \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1\left(T - t_1\right)\right) -$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1}\cos^2\lambda_1 T\right)\left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 t_1\right)\right],$$

$$\widehat{s}_{13} = \widehat{s}_{31} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1}\cos^2\lambda_1 T\right)\left(\frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \sin\lambda_1 T - \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1(T - t_1)\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{t_1}{2}\cos\lambda_1\left(T - t_1\right) - \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \cos\lambda_1 T\right)\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T\right)\right],$$

$$\widehat{s}_{22} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T\right)\left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 t_1\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{t_1}{2}\cos\lambda_1\left(T - t_1\right) - \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \cos\lambda_1 T\right)^2\right],$$

$$\widehat{s}_{23} = \widehat{s}_{32} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1}\cos^2\lambda_1 T\right)\left(\frac{t_1}{2}\cos\lambda_1(T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \cos\lambda_1 T\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T\right)\left(\frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \sin\lambda_1 T - \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1\left(T - t_1\right)\right)\right],$$

$$\widehat{s}_{33} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{T^2}{4} - \frac{1}{4\lambda_1^2}\sin^2\lambda_1 T \cos^2\lambda_1 T\right) - \left(\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1}\cos^2\lambda_1 T\right)^2\right].$$

Из формулы (4.14) следует, что $\mu_1(\tau) = H_1^T(\tau) S_1^{-1}\eta_1 + f_1(\tau)$. Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, согласно (4.16), получим
при $\tau \in [0, t_1]$

$$\mu_1^{(1)}(\tau) = \sin\lambda_1 (T-\tau)\left[\widehat{s}_{11}C_{11}(T) + \widehat{s}_{12}C_{21}(T) + \widehat{s}_{13}C_{11}(t_1)\right] +$$
$$+\cos\lambda_1 (T-\tau)\left[\widehat{s}_{21}C_{11}(T) + \widehat{s}_{22}C_{21}(T) + \widehat{s}_{23}C_{11}(t_1)\right] +$$
$$+\sin\lambda_1 (t_1-\tau)\left[\widehat{s}_{31}C_{11}(T) + \widehat{s}_{32}C_{21}(T) + \widehat{s}_{33}C_{11}(t_1)\right],$$

при $\tau \in (t_1, T]$

$$\mu_1^{(2)}(\tau) = \sin\lambda_1 (T-\tau)\left[\widehat{s}_{11}C_{11}(T) + \widehat{s}_{12}C_{21}(T) + \widehat{s}_{13}C_{11}(t_1)\right] +$$
$$+\cos\lambda_1 (T-\tau)\left[\widehat{s}_{21}C_{11}(T) + \widehat{s}_{22}C_{21}(T) + \widehat{s}_{23}C_{11}(t_1)\right].$$

Отметим, что согласно формулам (4.17)–(4.19) будем иметь $Q_1(\xi, t)$ при $-l \le \xi \le l$ в виде

$$Q_1(\xi,t) = \begin{cases} V_1(t)\sin\dfrac{\pi}{l}\xi + \dfrac{1}{2l}(l-\xi)\mu_1^{(1)}(t), & 0 \le \tau \le t_1 \\ V_1(t)\sin\dfrac{\pi}{l}\xi + \dfrac{1}{2l}(l-\xi)\mu_1^{(2)}(t), & t_1 < \tau \le T. \end{cases}$$

Учитывая обозначения (3.1) функция состояния $Q_n(x,t)$ при $-l_1 \le x \le l$ представляется в виде:
при $\tau \in [0, t_1]$

$$Q_1(x,t) = \begin{cases} V_1(t)\sin\dfrac{\pi}{l_1}x + \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{l_1}\right)\mu_1^{(1)}(t), & -l_1 \le x \le 0, \\ V_1(t)\sin\dfrac{\pi}{l}x + \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)\mu_1^{(1)}(t), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$

при $\tau \in (t_1, T]$

$$Q_1(x,t) = \begin{cases} V_1(t)\sin\dfrac{\pi}{l_1}x + \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{l_1}\right)\mu_1^{(2)}(t), & -l_1 \le x \le 0, \\ V_1(t)\sin\dfrac{\pi}{l}x + \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)\mu_1^{(2)}(t), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

6. Заключение

В работе рассмотрена задача граничного управления одномерным волновым уравнением, описывающим поперечные колебания кусочно-однородной струны или продольные колебания кусочно-однородного стержня. Предложен конструктивный подход построения функции граничного управления одномерными неоднородными колебательными процессами. При этом явное выражение функции граничного управления представлено через заданные начальные, промежуточные и конечные функции состояния распределенной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. *Barseghyan V.R.* Control Problem of String Vibrations with Inseparable Multipoint Conditions at Intermediate Points in Time // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54, Issue 8, pp. 1216–1226. https://doi.org/10.3103/S0025654419080120
3. *Barsegyan V.R.* The problem of optimal control of string vibrations // International Applied Mechanics, 56(4), (2020), 471–48.
https://doi.org/10.1007/s10778-020-01030-w
4. *Барсегян В.Р.* Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // АиТ. 2020. № 2. С. 36–47. https://doi.org/10.31857/S0005231020020038

   Barseghyan V.R. Optimal control of string vibrations with nonseparate state function conditions at given intermediate instants // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 226–235.
5. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal Boundary Control of String Vibrations with Given Shape of Deflection at a Certain Moment of Time. Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021 // Lecture Notes in Computer Science. 2021. V. 12755. P. 299–313. https://doi.org/10.1007/978-3-030-77876-7_20
6. *Barseghyan V., Solodusha S.* On One Problem in Optimal Boundary Control for String Vibrations with a Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time // Conference Paper. Publisher: IEEE. 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). P. 343–349.
https://doi.org/10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537514
7. *Barseghyan V.R.* On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure // Proceedings of 2016 International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference), STAB 2016. https://doi.org/10.1109/STAB.2016.7541163
8. *Львова Н.Н.* Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой // АиТ. 1973. № 10. С. 22–32.
9. *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 159–163.
10. *Ильин В.А.* О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2010. Т. 435. № 6. С. 732–735.
11. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Тр. ИММ УрОРАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 85–92.

12. *Провоторов В.В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2012. Вып. 1. С. 62–71.

13. *Amara J. Ben, Bouzidi H.* Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients // Journal of Mathematical Physics. 2018. V. 59. No. P. 1–22.

14. *Amara J. Ben, Beldi E.* Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients // SIAM J. Control Optim. 2019. V. 57. No. 5. P. 3360–3387. https://doi.org/10.1137/16M1100496

15. *Mercier D., Régnier V.* Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses // Collectanea Mathematica. 2009. V. 60. No. 3. P. 307–334. https://doi.org/10.1007/BF03191374

16. *Кулешов А.А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Доклады РАН. 2012. Т. 442. № 5. С. 594–597.

17. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады РАН. 2011. Т. 441. № 4. С. 449–451.

18. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады РАН. 2012. Т. 444. С. 488–491.

19. *Аниконов Д.С., Коновалова Д.С.* Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 61–72.

20. *Зверева М.Б., Найдюк Ф.О., Залукаева Ж.О.* Моделирование колебаний сингулярной струны // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. 2014. № 2. С. 111–119.

21. *Холодовский С.Е., Чухрий П.А.* Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13. № 4. С. 42–50. https://doi.org/10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50

22. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.

23. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 08.03.2022

После доработки 15.09.2022

Принята к публикации 26.10.2022