Российская Академия Наук

Автоматика и телемеханика

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

ЯНВАРЬ

Москва 2024

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
«Издательство «Наука»

© Российская академия наук, 2024
© Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика» (составитель), 2024

Линейные системы

© 2024 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

СИНТЕЗ ОБОБЩЕННОГО H_∞-СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ И АПРИОРНЫМ ДАННЫМ[1]

Показано, что при отсутствии математической модели линейного непрерывного или дискретного динамического объекта закон управления, обеспечивающий субоптимальное гашение начального и/или внешнего возмущений, может быть реализован по экспериментальным и априорным данным. В основе подхода лежат методы построения робастного управления, теория двойственности и аппарат линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: обобщенная H_∞-норма, неопределенность, робастное управление, экспериментальные данные, двойственные системы, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024010015

1. Введение

В последнее время все возрастающее внимание в теории управления уделяется построению законов управления для динамических объектов в условиях большой неопределенности относительно их математических моделей, действующих внешних возмущений и неизвестных начальных условий. В работах этого направления предполагается, что с объектом можно провести серию экспериментов, задавая входные воздействия и измеряя выходные переменные. Задача состоит в том, чтобы на основе полученных измерений, а также априорных данных, не идентифицируя неизвестные параметры объекта, непосредственно определить параметры обратных связей, при которых гарантируется определенное качество замкнутой системы управления.

В [1] было установлено, что для полной характеризации линейной стационарной динамической системы может быть использована единственная траектория, полученная при выполнении так называемого условия неисчезающего возбуждения. С учетом этого фундаментального результата в [2] для объектов с неизвестными матрицами уравнения динамики состояния и заданными матрицами уравнения целевого выхода были предложены различные варианты прямого синтеза законов управления на основе экспериментальных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2023-945).

данных, в которых выполняется указанное условие. В [3] было показано, что для построения законов управления по экспериментальным данным достаточно выполнения условия информативности данных по отношению к синтезируемому закону управления, которое менее ограничительно по сравнению с условием неисчезающего возбуждения. В [4] построение H_2- и H_∞-оптимальных законов управления полностью неопределенным дискретным объектом по измерениям входа и выхода осуществляется на основе матричного варианта S-леммы [5], а в [6] – на основе леммы Питерсена [7]. В [8, 9] параметры обратной связи по состоянию находятся на основе априорных данных и измерений входа и выхода дискретного неопределенного объекта, на который действует неизмеряемое возмущение из определенного класса.

В настоящей работе синтез обобщенных H_∞-субоптимальных, обеспечивающих гашение начального и/или внешнего возмущения и, как частный случай, линейно-квадратичных законов управления для непрерывных и дискретных объектов с полностью неизвестными матрицами уравнений динамики состояния и целевого выхода осуществляется на основе априорных и экспериментальных данных. В основу синтеза положен подход, примененный в [9] и состоящий в "погружении" неопределенной системы в искусственную систему с известными уравнениями и с дополнительным возмущением, влияние которого соответствует влиянию неизвестных слагаемых в исходном уравнении. Идея такого искусственного "погружения" или, другими словами, представление неопределенной системы в виде системы, в обратной связи которой находится блок с неизвестными ограниченными параметрами или неизвестный ограниченный оператор, активно применялась в синтезе робастного управления на основе H_∞-оптимального управления (см. обзор [10]). Однако непосредственное применение такого подхода к синтезу законов управления на основе экспериментальных данных вызывало трудности. В данной работе показано, что эта проблема разрешается, если перейти от исходной неопределенной системы к двойственной неопределенной системе, которую следует "погрузить" в соответствующую расширенную систему. Для реализации такого подхода потребовалось предварительно установить связь между обобщенными H_∞-нормами прямой и двойственной систем.

Статья структурирована следующим образом. После введения в разделе 2 дается общая постановка задачи и показывается, как на основе априорных и экспериментальных данных выводятся два квадратичных неравенства относительно неизвестных матриц уравнений динамики состояния и целевого выхода. В разделе 3 приводятся необходимые сведения об обобщенной H_∞-норме и доказывается утверждение о вычислении этой нормы в терминах двойственной системы. В разделе 4 описывается процедура синтеза обобщенных H_∞-субоптимальных законов управления по априорным и экспериментальным данным и доказывается основная теорема. В разделе 5 приводятся результаты ряда экспериментов с неопределенной системой, показывающие эффективность синтезируемого управления. В разделе 6 подводятся итоги и делаются выводы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неопределенную систему вида

$$\begin{aligned} &\partial x(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \quad x(0) = x_0, \\ &z(t) = Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ∂ – оператор дифференцирования в непрерывном случае или оператор сдвига на единицу вперед в дискретном случае, $x(t) \in \mathrm{R}^{n_x}$ – состояние, $u(t) \in \mathrm{R}^{n_u}$ – управление, $w(t) \in \mathrm{R}^{n_w}$ – возмущение, $z(t) \in \mathrm{R}^{n_z}$ – целевой выход. Предполагается, что возмущение $w(t) \in L_2(l_2)$ и матрицы системы A, B, C и D неизвестны. В общем плане требуется на основе априорной информации и данных, полученных из экспериментов, синтезировать линейные обратные связи по состоянию, при которых уровень гашения возмущений в замкнутой системе не превышает заданное значение.

Информация о неизвестных параметрах системы (2.1) извлекается из конечного набора измерений ее траектории. А именно, допустим, что в случае дискретной системы получены измерения ее состояния $x_0, x_1, \ldots, x_N$ и целевого выхода $z_0, \ldots, z_{N-1}$ при выбранных управлениях $u_0, \ldots, u_{N-1}$ и некотором неизвестном возмущении $w_0, \ldots, w_{N-1}$. Составим матрицы

$$\Phi = (x_0 \cdots x_{N-1}), \quad \Phi_+ = (x_1 \cdots x_N),$$
$$U = (u_0 \cdots u_{N-1}), \quad W = (w_0 \cdots w_{N-1}), \quad Z = (z_0 \cdots z_{N-1}).$$

В случае непрерывной системы допустим, что имеются измерения в моменты времени $t_0, \ldots, t_{N-1}$ состояния $x(t_0), \ldots, x(t_{N-1})$, производных состояния $\dot{x}(t_0), \ldots, \dot{x}(t_{N-1})$ и целевого выхода $z(t_0), \ldots, z(t_{N-1})$ при выбранных управлениях $u(t_0), \ldots, u(t_{N-1})$ и некоторых неизвестных возмущениях $w(t_0), \ldots, w(t_{N-1})$. Составим матрицы

$$\Phi = (x(t_0) \cdots x(t_{N-1})), \quad \Phi_+ = (\dot{x}(t_0) \cdots \dot{x}(t_{N-1})),$$
$$U = (u(t_0) \cdots u(t_{N-1})), \quad W = (w(t_0) \cdots w(t_{N-1})), \quad Z = (z(t_0) \cdots z(t_{N-1})).$$

Для матриц с экспериментальными данными в непрерывном и дискретном случаях имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi_+ = A_{real}\Phi + B_{real}U + W, \\ &Z = C_{real}\Phi + D_{real}U, \end{aligned} \tag{2.2}$$

в которых A_{real}, B_{real}, C_{real} и D_{real} – реальные неизвестные матрицы уравнений системы. Обозначим:

$$\Delta_{real} = \begin{pmatrix} A_{real} & B_{real} \\ C_{real} & D_{real} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi \\ U \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_+ \\ Z \end{pmatrix}, \quad \widehat{W} = \begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix}$$

и запишем уравнения (2.2) в виде линейной матричной регрессии

$$\widetilde{\Phi} = \Delta_{real}\widehat{\Phi} + \widehat{W}. \tag{2.3}$$

Допустим, что возмущение в эксперименте удовлетворяет условию

$$\sum_{i=0}^{N-1} w(t_i)w^{\mathrm{T}}(t_i) = WW^{\mathrm{T}} \leqslant \Omega. \tag{2.4}$$

В частности, если возмущение при всех t удовлетворяет ограничению $\|w(t)\|_\infty \leqslant d_w$ для некоторого заданного d_w, которое будем называть уровнем возмущения, то $\Omega = d_w^2 n_w N I_{n_x}$. В случае, когда суммарная энергия возмущения во время эксперимента ограничена $\sum_{i=0}^{N-1} |w(t_i)|^2 \leqslant \alpha^2$, то $\Omega = \alpha^2 I$. Если в (2.1) $w(t) = B_v v(t)$, $v(t) \in \mathrm{R}^{n_v}$ для некоторой матрицы B_v и $\|v(t)\|_\infty \leqslant d_v$, то $\Omega = d_v^2 n_v N B_v B_v^{\mathrm{T}}$.

Из (2.4) следует, что

$$\widehat{W}\widehat{W}^{\mathrm{T}} \leqslant \begin{pmatrix} \Omega & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\Omega}. \tag{2.5}$$

Определим множество $\mathbf{\Delta_p}$ матриц Δ порядка $(n_x+n_z)\times(n_x+n_u)$, которые могли бы генерировать полученные в эксперименте матрицы Φ, Φ_+ и Z при выбранных управлениях U и некоторых допустимых возмущениях W, удовлетворяющих ограничению (2.4). Для этих матриц равенство $\widetilde{\Phi} = \Delta\widehat{\Phi} + \widehat{W}$ должно выполняться при некоторой $\widehat{W}$, удовлетворяющей (2.5). Следовательно,

$$\mathbf{\Delta_p} = \left\{ \Delta : \widetilde{\Phi} = \Delta\widehat{\Phi} + \widehat{W}, \quad \widehat{W}\widehat{W}^{\mathrm{T}} \leqslant \widehat{\Omega} \right\}$$

и $\Delta \in \mathbf{\Delta_p}$ тогда и только тогда, когда

$$(\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi})(\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi})^{\mathrm{T}} \leqslant \widehat{\Omega}. \tag{2.6}$$

Очевидно, что $\Delta_{real} \in \mathbf{\Delta_p}$. Для дальнейшего применения представим последнее неравенство в виде

$$(\Delta\, I_{n_x+n_z})\, \Psi_1\, (\Delta\, I_{n_x+n_z})^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \tag{2.7}$$

где симметрическая матрица Ψ_1 порядка $2n_x + n_u + n_z$ разбивается на блоки соответствующего порядка и вычисляется следующим образом:

$$\Psi_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} \Phi\Phi^{\mathrm{T}} & * & * & * \\ U\Phi^{\mathrm{T}} & UU^{\mathrm{T}} & * & * \\ \hline -\Phi_+\Phi^{\mathrm{T}} & -\Phi_+U^{\mathrm{T}} & \Phi_+{\Phi_+}^{\mathrm{T}} - \Omega & * \\ -Z\Phi^{\mathrm{T}} & -ZU^{\mathrm{T}} & Z{\Phi_+}^{\mathrm{T}} & ZZ^{\mathrm{T}} \end{array} \right). \tag{2.8}$$

Таким образом, множество матриц Δ, согласованных с полученными экспериментальными данными, удовлетворяет неравенству (2.7). Условия ограниченности множества $\mathbf{\Delta_p}$ формулируются в следующем утверждении, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 2.1. Если информационная матрица $\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}$ *невырожденна, то множество* $\mathbf{\Delta_p}$ *представляет собой невырожденный "матричный эллипсоид" с центром в* Δ_{LS}*, определяемый неравенством*

$$(\Delta - \Delta_{LS})(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})(\Delta - \Delta_{LS})^{\mathrm{T}} \leqslant \Gamma, \tag{2.9}$$

в котором

$$\Gamma = \widehat{\Omega} + \widetilde{\Phi}[\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\widehat{\Phi} - I]\widetilde{\Phi}^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \tag{2.10}$$

а $\Delta_{LS} = \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}$ *– оптимальная оценка неизвестной матрицы* Δ_{real} *в* (2.3) *методом наименьших квадратов, минимизирующая по* Δ *квадрат матричной нормы невязки* $\|\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi}\|_F^2$.

Из этой леммы следует, что при невырожденности информационной матрицы "размер" множества $\mathbf{\Delta_p}$ определяется матрицами регрессоров $\widehat{\Phi}$ и в конечном итоге зависит от реального объекта, выбираемых в эксперименте управлений U и возмущений W.

Далее, пусть имеется дополнительная информация о том, что неизвестная матрица Δ_{real} удовлетворяет ограничению

$$(\Delta - \Delta_*)(\Delta - \Delta_*)^{\mathrm{T}} \leqslant \rho^2 I, \quad \Delta_* = \begin{pmatrix} A_* & B_* \\ C_* & D_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_*^{(1)} \\ \Delta_*^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

в котором Δ_* и ρ – заданные матрица и параметр, характеризующие центр и размер области неопределенности. Запишем это неравенство в виде

$$(\Delta\, I_{n_x+n_z})\, \Psi_2\, (\Delta\, I_{n_x+n_z})^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \tag{2.12}$$

где

$$\Psi_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n_x} & \star & \star & \star \\ 0_{n_u\times n_x} & I_{n_u} & \star & \star \\ \hline -A_* & -B_* & \Delta_*^{(1)}\Delta_*^{(1)\mathrm{T}} - \rho^2 I_{n_x} & \star \\ -C_* & -D_* & \Delta_*^{(2)}\Delta_*^{(1)\mathrm{T}} & \Delta_*^{(2)}\Delta_*^{(2)\mathrm{T}} - \rho^2 I_{n_z} \end{array}\right). \tag{2.13}$$

Обозначим: $\mathbf{\Delta_a}$ – множество матриц, которые удовлетворяют неравенству (2.12), и $\mathbf{\Delta_{set}} = \mathbf{\Delta_p} \bigcap \mathbf{\Delta_a}$ – множество матриц, которые удовлетворяют неравенствам (2.7) и (2.12). Очевидно, что $\Delta_{real} \in \mathbf{\Delta_{set}}$ (см. рис. 1).

Качество системы (2.1) при заданной матрице Δ, замкнутой управлением вида линейной стационарной обратной связи по состоянию $u(t) = \Theta x(t)$, будем оценивать уровнем гашения внешнего и начального возмущений, т.е. обобщенной H_∞-нормой

$$\gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) = \sup_{x_0,\, w} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|w\|^2\right)^{1/2}},$$

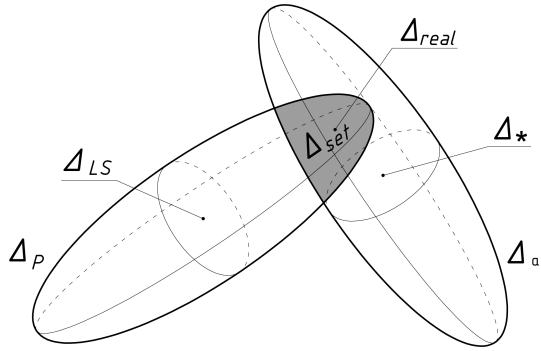


Рис. 1. Множество $\mathbf{\Delta_{set}}$ неизвестных параметров Δ, согласованных с экспериментальными и априорными данными.

где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ – весовая матрица, $\|\xi\|^2 = \sum_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2$ в дискретном случае и $\|\xi\|^2 = \int_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2$ в непрерывном случае. При отсутствии внешнего возмущения, т.е. при $w(t) \equiv 0$, обобщенная H_∞-норма принимает вид так называемой γ_0-нормы

$$\gamma_0(\Delta, \Theta) = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0\right)^{1/2}},$$

которая характеризует "наихудшее" значение квадратичного функционала на траекториях системы, когда начальное состояние принадлежит эллипсоиду $x^{\mathrm{T}} R^{-1} x \leqslant 1$. Если начальное состояние нулевое, то обобщенная H_∞-норма (при $R \to 0$) превращается в обычную H_∞-норму

$$\gamma_\infty(\Delta, \Theta) = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|}{\|w\|}.$$

Качество неопределенной системы (2.1), замкнутой управлением вида $u(t) = \Theta x(t)$, будем оценивать минимальной верхней границей уровня гашения внешнего и начального возмущений, т.е. минимальной верхней границей обобщенной H_∞-нормы для всех матриц объекта, согласованных с экспериментальными и априорными данными:

$$\gamma_*(\Theta) = \sup_{\Delta \in \mathbf{\Delta_{set}}} \gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta). \tag{2.14}$$

Робастное обобщенное H_∞-оптимальное управление определяется как управление с матрицей параметров Θ_*, при которой достигается минимальное значение этой границы, т.е. которая является решением минимаксной задачи

$$\inf_{\Theta} \sup_{\Delta \in \mathbf{\Delta_{set}}} \gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) = \inf_{\Theta} \gamma_*(\Theta) = \gamma_*(\Theta_*). \tag{2.15}$$

Задача заключается в том, чтобы, не имея и не строя математическую модель системы, синтезировать робастное обобщенное H_∞-субоптимальное управление с матрицей параметров Θ, при которой обобщенная H_∞-норма замкну-

той системы для всех объектов, матрицы которых согласованы с полученными экспериментальными данными, ограничена заданной константой, т.е. $\gamma_*(\Theta) < \gamma$.

3. Обобщенная H_∞-норма в терминах двойственной системы

Напомним, что обобщенная H_∞-норма от входа v к выходу z

$$\gamma_{g\infty} = \sup_{x_0,\,v} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2\right)^{1/2}} \tag{3.1}$$

устойчивой системы

$$\begin{aligned} \partial x(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}v(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}x(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

удовлетворяет условию $\gamma_{g\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда разрешимы относительно матрицы $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ следующие линейные матричные неравенства: для непрерывной системы

$$\begin{pmatrix} Y\mathcal{A}^T + \mathcal{A}Y & \star & \star \\ \mathcal{B}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & \star \\ \mathcal{C}Y & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & \star \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0 \tag{3.3}$$

и для дискретной системы

$$\begin{pmatrix} -Y & \star & \star & \star \\ Y\mathcal{A}^{\mathrm{T}} & -Y & \star & \star \\ \mathcal{B}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I & \star \\ 0 & \mathcal{C}Y & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & \star \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0. \tag{3.4}$$

Как показано в [11, 12], неравенства (3.3) и (3.4) означают, что для положительно определенной функции $V(x) = x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x$ с $Y > \gamma^{-2} R$ в силу системы (3.2) выполняется соответствующее из неравенств

$$\dot{V}(x) + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0, \quad \Delta V(x) + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0 \quad \forall\, x, v. \tag{3.5}$$

Следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого приведено в Приложении, позволяет характеризовать обобщенную H_∞-норму системы (3.2) в терминах двойственной системы.

Лемма 3.1. Обобщенная H_∞-норма системы (3.2) *удовлетворяет условию $\gamma_{g\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует положительно определенная квадратичная форма $V_a(x_a) = x_a^{\mathrm{T}} P x_a$ с $P > R$, для которой по траектории двойственной системы*

$$\begin{aligned} \partial x_a(t) &= \mathcal{A}^{\mathrm{T}} x_a(t) + \mathcal{C}^{\mathrm{T}} v_a(t), \\ z_a(t) &= \mathcal{B}^{\mathrm{T}} x_a(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

выполняется соответствующее из неравенств

$$\begin{aligned}&\dot{V}_a(x_a(t)) + |z_a(t)|^2 - \gamma^2|v_a(t)|^2 < 0,\\ &\Delta V_a(x_a(t)) + |z_a(t)|^2 - \gamma^2|v_a(t)|^2 < 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Следствие 3.1. При $v(t) \equiv 0$ γ_0*-норма системы* (3.2) *удовлетворяет условию* $\gamma_0 < \gamma$ *тогда и только тогда, когда существует квадратичная форма* $V_a(x_a) = x_a^{\mathrm{T}} P x_a$ *с* $P > R$*, для которой по траектории двойственной системы*

$$\partial x_a(t) = \mathcal{A}^{\mathrm{T}} x_a(t) + \mathcal{C}^{\mathrm{T}} v_a(t)$$

выполняется соответствующее из неравенств (3.7) *при* $z_a(t) \equiv 0$.

Замечание 1. Формально двойственная система описывается в непрерывном и дискретном случаях уравнениями

$$\begin{aligned}&\dot{\widehat{x}}_a = -\mathcal{A}^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a - \mathcal{C}^{\mathrm{T}} \widehat{v}_a,\\ &\widehat{z}_a = \mathcal{B}^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a\end{aligned} \tag{3.8}$$

и

$$\begin{aligned}&\widehat{x}_a(t) = \mathcal{A}^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a(t+1) + \mathcal{C}^{\mathrm{T}} \widehat{v}_a(t),\\ &\widehat{z}_a(t) = \mathcal{B}^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a(t+1)\end{aligned} \tag{3.9}$$

соответственно. Как показано в доказательстве этой леммы, от систем (3.8) и (3.9) можно перейти к системе (3.6), которая также будет называться двойственной и для которой выполняется соответствующее из неравенств (3.7).

Замечание 2. Матрицы квадратичных форм $V(x) = x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x$ и $V_a(x_a) = x_a^{\mathrm{T}} P x_a$ прямой и двойственной систем, как следует из доказательства леммы 3.1, связаны соотношением $P = \gamma^2 Y$.

4. Синтез обобщенных H_∞-субоптимальных законов управления

Опишем основные шаги получения верхней границы обобщенной H_∞-нормы и соответствующих матриц параметров Θ законов управления для неопределенной замкнутой системы

$$\begin{aligned}&\partial x(t) = (A + B\Theta)x(t) + w(t),\\ &z(t) = (C + D\Theta)x(t).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Предполагая, что параметры Θ выбраны так, что замкнутая система устойчива, и учитывая введенные обозначения, представим эти уравнения в виде

$$\begin{aligned}&\partial x(t) = (I_{n_x}\ 0_{n_x \times n_z})\,\Delta \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{pmatrix} x(t) + w(t),\\ &z(t) = (0_{n_z \times n_x}\ I_{n_z})\,\Delta \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{pmatrix} x(t),\end{aligned} \tag{4.2}$$

где Δ – неизвестная $(n_x + n_z) \times (n_x + n_u)$-матрица, Θ – $(n_u \times n_x)$-матрица параметров регулятора. Уравнения двойственных непрерывной и дискретной систем согласно лемме 3.1 имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\partial x_a(t) = \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} x_a(t) + \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w_a(t), \\
&z_a(t) = x_a(t).
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Рассмотрим систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом $w_\Delta(t) \in L_2(l_2)$ и выходом $z_\Delta(t)$, определяемую в непрерывном и дискретном случаях уравнениями

$$
\begin{aligned}
&\partial \widehat{x}(t) = \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} w_\Delta(t), \\
&\widehat{z}(t) = \widehat{x}(t), \quad z_\Delta(t) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \widehat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \widehat{w}(t),
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

в которых $\widehat{x}(t)$ – состояние, $\widehat{w}(t)$ – возмущение, $\widehat{z}(t)$ – целевой выход. Заметим, что при $w_\Delta(t) = \Delta^{\mathrm{T}} z_\Delta(t)$ уравнения (4.4) совпадают с уравнениями системы (4.3). Допустим, что дополнительные входной и выходной сигналы в системе (4.4) при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяют двум неравенствам

$$
\begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_1 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leqslant 0, \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_2 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{4.5}
$$

где матрицы Ψ_1 и Ψ_2 заданы в (2.8) и (2.13). Множество всех таких сигналов $w_\Delta(t)$ обозначим через $\mathbf{W}_{\mathbf{\Delta}}$. При $w_\Delta(t) = \Delta^{\mathrm{T}} z_\Delta(t)$ для всех $\Delta \in \mathbf{\Delta}_{\mathbf{set}}$, как следует из (2.7) и (2.12), выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_1 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} = z_\Delta^{\mathrm{T}}(t) \begin{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_1 \begin{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leqslant 0, \\
&\begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_2 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} = z_\Delta^{\mathrm{T}}(t) \begin{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_2 \begin{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $w_\Delta(t) = \Delta^{\mathrm{T}} z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_{\mathbf{\Delta}}$ и, следовательно, система (4.3) с $\Delta \in \mathbf{\Delta}_{\mathbf{set}}$, двойственная исходной неопределенной системе, "погружена" в расширенную систему (4.4), (4.5). С учетом леммы 3.1 это позволяет получить верхнюю границу обобщенной H_∞-нормы неопределенной системы, используя соответствующее свойство расширенной системы.

Теорема 4.1. Верхняя граница обобщенной H_∞-нормы неопределенной системы (2.1) *при законе управления $u(t) = \Theta x(t)$, где $\Theta = QP^{-1}$, меньше γ,*

если следующие линейные матричные неравенства разрешимы относительно $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, Q, $\mu_1 \geqslant 0$ *и* $\mu_2 \geqslant 0$*: для непрерывной системы*

$$\begin{pmatrix} I - \sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{11}^{(i)} & \star & \star & \star \\ -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{21}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{22}^{(i)} - \gamma^2 I & \star & \star \\ P - \sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{31}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{32}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{33}^{(i)} & \star \\ Q - \sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{41}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{42}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{43}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{44}^{(i)} \end{pmatrix} < 0 \tag{4.6}$$

и для дискретной системы

$$\begin{pmatrix} -P & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -P + I - \sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{11}^{(i)} & \star & \star & \star \\ 0 & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{21}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{22}^{(i)} - \gamma^2 I & \star & \star \\ P & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{31}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{32}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{33}^{(i)} & \star \\ Q & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{41}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{42}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{43}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \Xi_{44}^{(i)} \end{pmatrix} < 0, \tag{4.7}$$

где $P > R$,

$$\Xi_{11}^{(1)} = \Phi_+ {\Phi_+}^{\mathrm{T}} - \Omega, \quad \Xi_{21}^{(1)} = Z {\Phi_+}^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{22}^{(1)} = Z Z^{\mathrm{T}},$$
$$\Xi_{31}^{(1)} = -\Phi {\Phi_+}^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{32}^{(1)} = -\Phi Z^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{33}^{(1)} = \Phi \Phi^{\mathrm{T}},$$
$$\Xi_{41}^{(1)} = -U {\Phi_+}^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{42}^{(1)} = -U Z^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{43}^{(1)} = U \Phi^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{44}^{(1)} = U U^{\mathrm{T}},$$
$$\Xi_{11}^{(2)} = \Delta_*^{(1)} \Delta_*^{(1)\mathrm{T}} - \rho^2 I_{n_x}, \quad \Xi_{21}^{(2)} = \Delta_*^{(2)} \Delta_*^{(1)\mathrm{T}}, \quad \Xi_{22}^{(2)} = \Delta_*^{(2)} \Delta_*^{(2)\mathrm{T}} - \rho^2 I_{n_z},$$
$$\Xi_{31}^{(2)} = -A_*^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{32}^{(2)} = -C_*^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{33}^{(2)} = I_{n_x},$$
$$\Xi_{41}^{(2)} = -B_*^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{42}^{(2)} = -D_*^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{43}^{(2)} = 0_{n_u \times n_x}, \quad \Xi_{44}^{(2)} = I_{n_u}.$$

Доказательство теоремы 4.1. Выясним условия, при которых существует положительно определенная квадратичная функция $\widehat{V}(\widehat{x}) = \widehat{x}^{\mathrm{T}} P \widehat{x}$ с $P > R$, для которой в силу уравнений расширенной системы (4.4) при всех $w_\Delta(t)$, удовлетворяющих (4.5), выполняется соответствующее из неравенств (3.7). Достаточным условием для этого в силу S-процедуры является

существование функции $\widehat{V}(\widehat{x}) = \widehat{x}^{\mathrm{T}} P \widehat{x}$ с $P > R$, для которой в силу уравнений (4.4) при всех $\widehat{x}$, $\widehat{w}$, w_Δ и некоторых $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ выполняется соответствующее неравенство

$$
\begin{aligned}
&\dot{\widehat{V}}(\widehat{x}) + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |\widehat{w}|^2 - \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0, \\
&\Delta \widehat{V}(\widehat{x}) + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |\widehat{w}|^2 - \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Эти неравенства сводятся к следующим неравенствам для квадратичных форм относительно переменных $\widehat{x}$, $\widehat{w}$, w_Δ:

$$
\begin{aligned}
&2\widehat{x}^{\mathrm{T}} P \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} w_\Delta + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |\widehat{w}|^2 - \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0, \\
&w_\Delta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} w_\Delta - \widehat{x}^{\mathrm{T}} P \widehat{x} + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |\widehat{w}|^2 - \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0,
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

где $\widehat{z} = \widehat{x}$ и $z_\Delta = \operatorname{col}(\widehat{x}, \widehat{w})$. Так как система (4.3), являющаяся двойственной к исходной системе (4.2), "погружена" в расширенную систему и выполняется условие (4.5), то по траекториям (4.3) при всех $\Delta \in \mathbf{\Delta_{set}}$ выполняется неравенство (3.7). Согласно лемме 3.1 отсюда следует, что для исходной неопределенной системы при любом $\Delta \in \mathbf{\Delta_{set}}$ выполнено $\gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) < \gamma$ и, следовательно, $\gamma_*(\Theta) < \gamma$. Осталось только записать неравенства (4.9) для квадратичных форм в виде матричных неравенств, ввести новую матричную переменную $Q = \Theta P$ и, применяя стандартным образом лемму Шура, получить линейные матричные неравенства (4.6) и (4.7) соответственно. Теорема доказана.

Замечание 3. Для нахождения верхней границы γ_0-нормы требуется исключить слагаемое I в блоке, стоящем в первой строке и первом столбце неравенств (4.6) для непрерывной системы, и в блоке, стоящем во второй строке и втором столбце неравенств (4.7) для дискретной системы. Это следует из того, что в случае γ_0-нормы в неравенствах (4.8) и соответственно в (4.9) исчезает слагаемое $|\widehat{z}|^2$. Для нахождения верхней границы "обычной" H_∞-нормы в условиях теоремы 4.1 следует положить $R = 0$.

Замечание 4. Согласно неущербности S-процедуры при двух квадратичных ограничениях (теорема 4.1 [13]), если при некоторых μ_1 и μ_2 выполняется неравенство $\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2 > 0$ (что проверяется непосредственным решением этого линейного матричного неравенства относительно μ_1 и μ_2), то выполнение соответствующего неравенства (4.8) является не только достаточным, но и необходимым условием существования указанной функции $\widehat{V}(\widehat{x}) = \widehat{x}^{\mathrm{T}} P \widehat{x}$ для расширенной системы.

Обозначим минимальное значение γ, при котором каждое из неравенств (4.6) или (4.7) имеет решение, через $\gamma_{rob}(\Theta_{rob})$, где Θ_{rob} – соответствующая матрица параметров управления. Так как

$$\gamma_*(\Theta_*) \leqslant \gamma_*(\Theta_{rob}) \leqslant \gamma_{rob}(\Theta_{rob}),$$

где Θ_* – матрица параметров робастного обобщенного H_∞-оптимального управления, определенного в (2.15), то $\gamma_{rob}(\Theta_{rob})$ является верхней границей минимального уровня гашения возмущений в неопределенной системе при робастном обобщенном H_∞-оптимальном управлении для заданных априорных и экспериментальных данных. Отметим также, что теорема 4.1 позволяет выяснить, является ли гарантированная обобщенная H_∞-норма замкнутой неопределенной системы (4.1) при заданной обратной связи с матрицей параметров $\widehat{\Theta}$ меньше, чем заданное число γ^2. Для этого в неравенстве (4.6) для непрерывной системы или в неравенстве (4.7) для дискретной системы следует положить $Q = \widehat{\Theta}P$ и решить их относительно переменных P, μ_1 и μ_2.

5. Иллюстративный пример

Для иллюстрации рассмотрим дискретный объект вида (2.1) пятого порядка $n_x = 5$ с двумя управлениями $n_u = 2$, возмущением при $n_w = 5$ и двумя целевыми выходами $n_z = 2$ с матрицами, каждый элемент которых был выбран случайно на интервале $[-1, 1]$. Таким образом, система содержит 49 неизвестных параметров. В эксперименте начальные условия и компоненты вектора управления выбирались случайно на интервале $[-1, 1]$, а возмущение – также случайно на интервале $[-d, d]$. Было сделано $N = 50$ измерений. Весовая матрица начального возмущения имеет вид $R = 0{,}01I_5$. На рис. 2 приведены типичные три графика квадратов уровней гашения возмущений замкнутой системы при управлении, синтезированном на основе только экспериментальных данных, в зависимости от уровня возмущения d в эксперименте. Сплошная кривая соответствует квадрату гарантированной обобщенной H_∞-нормы $\gamma^2_{rob}(\Theta_{rob})$ при законе управления с матрицей параметров Θ_{rob}, найденной в результате решения линейных матричных неравенств (4.7) при минимальном значении γ^2. Штрих-пунктирная кривая отвечает квадрату уровня гашения возмущений $\gamma_{real} = \gamma_{g\infty}(\Delta_{real}, \Theta_{rob})$, т.е. обобщенной H_∞-норме замкнутой системы, состоящей из реального объекта с матрицей параметров Δ_{real} (если бы ее знали) и обратной связи с параметрами Θ_{rob}. Пунктирная кривая отвечает квадрату уровня гашения возмущений $\gamma_{prob} = \gamma_{g\infty}(\Delta_{prob}, \Theta_{rob})$, т.е. обобщенной H_∞-норме замкнутой системы, состоящей из пробного объекта, которому соответствует матрица $\Delta_{prob} = \Delta_{LS} + \Gamma^{1/2}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1/2}$, находящаяся согласно лемме 2.1 на границе эллипсоида неопределенности $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{set}}$, и обратной связи с параметрами Θ_{rob}. Рост этих кривых с возрастанием уровня возмущения d в эксперименте объясняется тем, что при увеличении d возрастают размеры эллипсоида $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{p}}$ неизвестных параметров Δ, согласованных с экспериментальными данными.

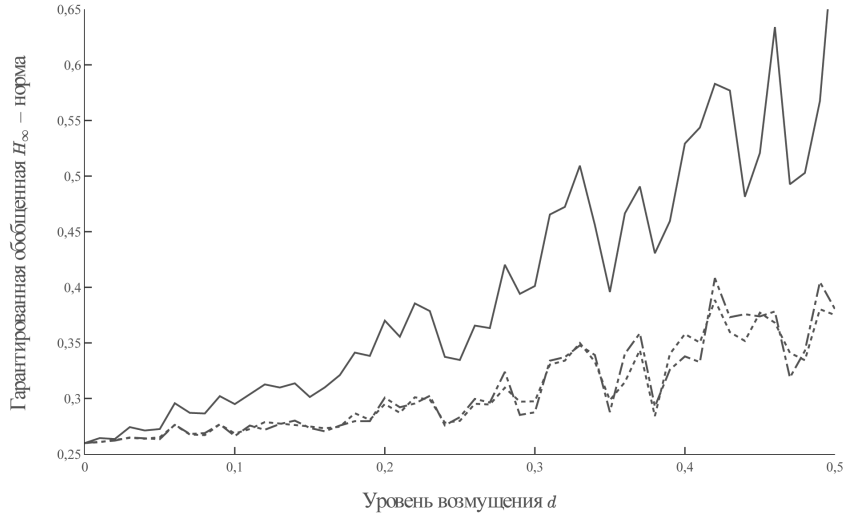


Рис. 2. Гарантированная обобщенная H_∞-норма и обобщенные H_∞-нормы для реального и пробного объектов как функции уровня возмущения в измерениях.

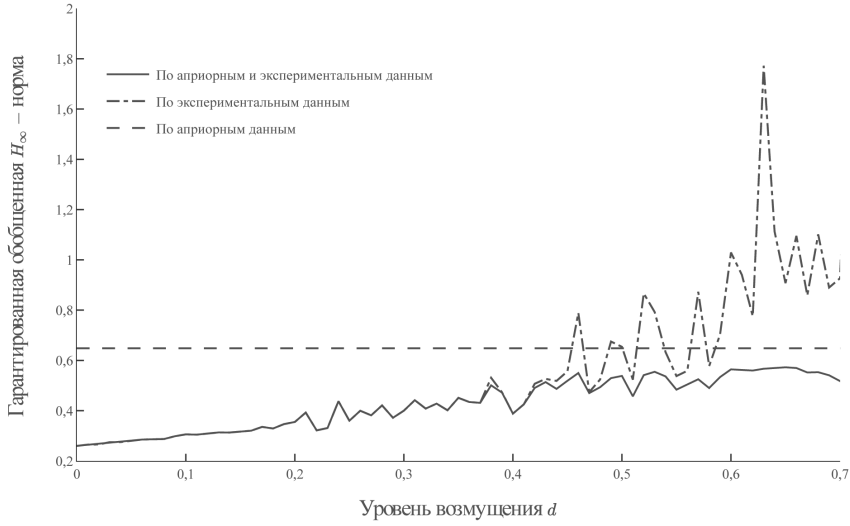


Рис. 3. Гарантированные оценки H_∞-нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

Из рис. 2 видно, что кривая γ^2_{rob} с некоторым запасом мажорирует уровни гашения возмущений замкнутой системы для конкретных объектов с матрицами Δ_{real} и Δ_{prob} из множества $\mathbf{\Delta_{set}}$ и что при найденном законе управления с матрицей параметров Θ_{rob} обобщенные H_∞-нормы замкнутых систем незна-

чительно превышают (особенно при небольших уровнях возмущения d) свои минимальные значения $\gamma^2 \simeq 0{,}26$ для полностью известной модели. Заметим, что запас, с которым γ^2_{rob} превышает γ^2_{real} и γ^2_{prob}, существенным образом зависит от экспериментальных данных и может быть значительно меньше, чем на графиках, приведенных на рис. 2.

На рис. 3 приведены три гарантированные оценки обобщенной H_∞-нормы, полученные только по априорной информации, только по экспериментальным данным и совместно по априорной информации и экспериментальным данным в зависимости от уровня возмущения d в эксперименте. Априорная информация состояла в том, что неизвестные матрицы системы удовлетворяют условию (2.11), в котором $\rho = 0{,}1$ и $A_* = A_{real} + (\rho/2)I$, $B_* = B_{real}$, $C_* = C_{real}$, $D_* = D_{real}$. Эти результаты говорят о том, что гарантированные оценки норм замкнутой неопределенной системы, синтезированной при использовании как априорных, так и экспериментальных данных, начиная с некоторого уровня возмущений в эксперименте значительно меньше соответствующих оценок норм замкнутой системы при управлениях, синтезированных только по априорным или только по экспериментальным данным.

Отметим также следующее. Рассмотрим объект с матрицами A_{LS}, B_{LS}, C_{LS} и D_{LS}, составляющими матрицу параметров Δ_{LS}, полученную методом наименьших квадратов по тем же экспериментальным данным. Найдем для него матрицу параметров обобщенной H_∞-оптимальной обратной связи $\Theta_{LS} = QP^{-1}$, решая линейные матричные неравенства (3.4) при $Y = P$, $\mathcal{A}Y = A_{LS}P + B_{LS}Q$, $\mathcal{C}Y = C_{LS}P + D_{LS}Q$ и $\mathcal{B} = I$. Это, по существу, так называемое непрямое, т.е. найденное по оценкам неизвестных параметров объекта, H_∞-субоптимальное адаптивное управление. Если имеется достаточное число измерений и информационная матрица невырожденная, то обобщенная H_∞-норма замкнутой системы, состоящей из реального объекта и обратной связи с $\Theta = \Theta_{LS}$, может оказаться меньше, чем соответствующая гарантированная обобщенная H_∞-норма при обратной связи с $\Theta = \Theta_{rob}$. Однако в последнем случае имеется верхняя оценка обобщенной H_∞-нормы замкнутой системы для любого объекта из множества $\mathbf{\Delta_{set}}$, согласованного с полученными экспериментальными данными, а для обратной связи с $\Theta = \Theta_{LS}$ получить такую оценку из неравенств (4.7), как показывает эксперимент, удается только при очень маленьких уровнях возмущения d. Так, в рассматриваемом примере при $d = 0{,}02$ имеем $\gamma^2_{rob}(\Theta_{rob}) = 0{,}27$, в то время как $\gamma^2_{rob}(\Theta_{LS}) = 41{,}77$, а при $d > 0{,}03$ неравенство (4.7), в котором $Q = \Theta_{LS}P$, неразрешимо.

6. Заключение

Статья посвящена методам построения обобщенного H_∞-субоптимального и, как частный случай, линейно-квадратичного управления для линейных непрерывных и дискретных динамических объектов при полном отсутствии их математических моделей. В ней показано, что классические методы построения робастного управления по априорным данным для динамических

объектов, уравнения которых содержат неизвестные параметры со значениями в некоторых ограниченных множествах, при должной модификации могут быть применены к синтезу управления по априорным и экспериментальным данным. Эти методы, как известно, состоят в "погружении" неопределенной системы в некоторую расширенную систему с дополнительными входом и выходом, удовлетворяющими квадратичному неравенству, применении S-процедуры и приведении задачи к синтезу H_∞-оптимального управления для расширенной системы. В данной статье показано, что требуемая модификация включает в себя характеризацию критерия управления (обобщенную H_∞-норму системы при наличии начального и внешнего возмущений или значение квадратичного функционала при наличии только начального возмущения) в терминах двойственной системы, "погружение" двойственной неопределенной системы в некоторую расширенную систему и дальнейшее применение техники линейных матричных неравенств. В результате параметры линейных субоптимальных обратных связей выражаются в терминах решений линейных матричных неравенств, содержащих только априорные и экспериментальные данные. Иллюстративный пример со случайно генерированным объектом пятого порядка демонстрирует, что при совместном применении априорных и экспериментальных данных качество системы управления значительно улучшается.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2.1. Для неизвестной матрицы Δ_{real} в (2.3) определим оценку Δ_{LS} методом наименьших квадратов, которая минимизирует по Δ квадрат матричной нормы невязки, т.е. функцию $\|\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi}\|_F^2 = \mathrm{tr}\,(\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi})^{\mathrm{T}}(\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi})$. Вычисляя градиент по Δ от этой функции и приравнивая его к нулю $-2\widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}} + 2\Delta\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}} = 0$, найдем оптимальную оценку $\Delta_{LS} = \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}$ в предположении, что информационная матрица $\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}$ невырожденна. Далее преобразуем неравенство (2.6) к виду

$$\Delta\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}} - \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}} - \Delta\widehat{\Phi}\widetilde{\Phi}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^{\mathrm{T}} - \widehat{\Omega} \leqslant 0$$

и запишем его как

$$[\Delta - \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}](\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})[\Delta - \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}]^{\mathrm{T}} \leqslant \Gamma,$$

где $\Gamma = \widehat{\Omega} + \widetilde{\Phi}[\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\widehat{\Phi} - I]\widetilde{\Phi}^{\mathrm{T}}$. Подставляя в Γ выражение для $\widetilde{\Phi}$ из (2.3) и учитывая (2.5), получим

$$\Gamma = \widehat{\Omega} + \widehat{W}[\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\widehat{\Phi} - I]\widehat{W}^{\mathrm{T}} \geqslant \widehat{W}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\widehat{\Phi}\widehat{W}^{\mathrm{T}} \geqslant 0.$$

Доказательство леммы 3.1. Определим линейный оператор Γ, отображающий пару $(x(0), v(t)) \in \mathrm{R}^n \times L_2(l_2) = \Xi$, состоящую из начального состояния системы и возмущения на входе, в целевой выход $z(t) \in L_2(l_2) = \Upsilon$, т.е.

$$\Gamma : \Xi = \mathrm{R}^{n_x} \times L_2(l_2) \to \Upsilon = L_2(l_2) : (x(0), v) \to z.$$

Скалярные произведения в этих пространствах определяются как

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Xi} = x_1^{\mathrm{T}}(0) R^{-1} x_2(0) + \langle v_1(t), v_2(t) \rangle_{L_2(l_2)}, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Upsilon} = \langle z_1(t), z_2(t) \rangle_{L_2(l_2)}.$$

При этом обобщенная H_∞-норма совпадает с индуцированной нормой такого оператора, так как

$$\|\Gamma\| = \sup_{(x_0,\, v) \neq 0} \frac{\|\Gamma(x_0,\, v)\|}{\|(x_0,\, v)\|} = \sup_{x_0,\, v \neq 0} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2\right)^{1/2}} = \gamma_{g\infty}.$$

Покажем, что сопряженный оператор Γ^* определяется как

$$\Gamma^* : \Upsilon \to \Xi : \widehat{v}_a(t) \to (R\widehat{x}_a(0), \widehat{z}_a(t)),$$

где $\widehat{x}_a(t)$ и $\widehat{z}_a(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.8) и (3.9) в непрерывном и дискретном случаях соответственно.

Действительно, в непрерывном случае в силу уравнений (3.8) имеем

$$\frac{d(x^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a)}{dt} = v^{\mathrm{T}} \widehat{z}_a - z^{\mathrm{T}} \widehat{v}_a,$$

а в дискретном случае в силу уравнений (3.9) имеем

$$x^{\mathrm{T}}(t+1)\widehat{x}_a(t+1) - x^{\mathrm{T}}(t)\widehat{x}_a(t) = v^{\mathrm{T}}(t)\widehat{z}_a(t) - z^{\mathrm{T}}(t)\widehat{v}_a(t).$$

Интегрируя в первом случае и суммируя во втором, получим

$$< z, \widehat{v}_a > = x^{\mathrm{T}}(0) R^{-1} [R\widehat{x}_a(0)] + < v, \widehat{z}_a > .$$

Таким образом,

$$< \Gamma(x(0), v), \widehat{v}_a >_{\Upsilon} = < (x(0), v), \Gamma^*(\widehat{v}_a) >_{\Xi} .$$

Так как нормы сопряженных операторов равны, то

$$\|\Gamma\| = \|\Gamma^*\| = \sup_{\widehat{v}_a \not\equiv 0} \frac{\left(\|\widehat{z}_a\|^2 + \widehat{x}_a^{\mathrm{T}}(0) R \widehat{x}_a(0)\right)^{1/2}}{\|\widehat{v}_a\|}.$$

Далее покажем, что неравенство $\|\Gamma^*\| < \gamma$ выполняется тогда и только тогда, когда существует функция $V(\widehat{x}_a) = \widehat{x}_a^{\mathrm{T}} P \widehat{x}_a$ с $P > R$, для которой по траектории непрерывной системы (3.8) или дискретной системы (3.9) выполняется соответствующее из неравенств

$$\begin{aligned} \dot{V}(\widehat{x}_a(t)) - |\widehat{z}_a(t)|^2 + \gamma^2 |\widehat{v}_a(t)|^2 > 0, \\ \Delta V(\widehat{x}_a(t)) - |\widehat{z}_a(t)|^2 + \gamma^2 |\widehat{v}_a(t)|^2 > 0. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Действительно, интегрируя первое неравенство или суммируя второе неравенство и учитывая, что $P > R$, получим $\|\widehat{z}_a\|^2 + \widehat{x}_a^{\mathrm{T}}(0) R \widehat{x}_a(0) < \gamma^2 \|\widehat{v}_a\|^2$ для

всех $\widehat{v}_a(t)$, т.е. $\|\Gamma^*\| < \gamma$. Обратно, пусть $\|\Gamma^*\| < \gamma$. Отсюда следует, что $\|\Gamma\| < \gamma$. Согласно [11, 12] это значит, что существует функция $V(x) = x^{\mathrm{T}}Y^{-1}x$ с матрицей Y, удовлетворяющая неравенствам (3.3) в непрерывном случае и неравенствам (3.4) в дискретном случае. Рассмотрим здесь только непрерывный случай, так как в дискретном случае доказательство проводится аналогично. Используя лемму Шура, преобразуем первое из неравенств (3.3) к виду

$$\begin{pmatrix} Y\mathcal{A}^T + \mathcal{A}Y + \gamma^{-2}\mathcal{B}\mathcal{B}^{\mathrm{T}} & \star \\ \mathcal{C}Y & -I \end{pmatrix} < 0.$$

Сделаем замену $Y = \gamma^{-2}P$ и запишем это неравенство эквивалентно в виде следующего неравенства для квадратичной формы относительно абстрактных переменных $\widehat{x}_a$ и $\widehat{v}_a$:

$$2\widehat{x}_a^{\mathrm{T}}P(-\mathcal{A}^T\widehat{x}_a - \mathcal{C}^{\mathrm{T}}\widehat{v}_a) - \widehat{x}_a^{\mathrm{T}}\mathcal{B}\mathcal{B}^{\mathrm{T}}\widehat{x}_a + \gamma^2\widehat{v}_a^{\mathrm{T}}\widehat{v}_a > 0,$$

которое совпадает с первым неравенством в (П.1). Учитывая, что $Y > \gamma^{-2}R$, получим, что для функции $V_a(\widehat{x}_a) = \widehat{x}_a^{\mathrm{T}}P\widehat{x}_a$ с $P > R$ по траектории системы (3.8) выполняется первое неравенство в (П.1). Таким образом, неравенство $\|\Gamma^*\| < \gamma$, а значит и неравенство $\|\Gamma\| = \gamma_{g\infty} < \gamma$, выполняется тогда и только тогда, когда в силу системы (3.8) или (3.9) выполняется соответствующее из неравенств (П.1). Теперь осталось только от уравнений (3.8) или (3.9), обратив время, перейти к системе (3.6), по траекториям которой для функции $V(x_a) = x_a^{\mathrm{T}}Px_a$ будет выполняться соответствующее из неравенств (3.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Willems J.C., Rapisarda P., Markovsky I., De Moor B.* A note on persistency of excitation // Syst. Control Lett. 2005. V. 54. P. 325–329.
2. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
3. *Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.
4. *Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M.* From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175.
5. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // Вестн. Ленинград. ун.-та. Математика. 1977. Т. 4. С. 73–93.
6. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen's Lemma // Automatica. 2022. V. 145. Article 110537.
7. *Petersen I.R.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
8. *Berberich J., Scherer C.W., Allgower F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // IEEE Trans. Automat. Control. 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633.

9. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // АиТ. 2023. № 8. С. 24–42.
10. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
11. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // АиТ. 2010. № 6. С. 20–38.
12. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Pareto suboptimal H_∞ controls with transients // Proc. Eur. Control Conf. 2021, Rotterdam. P. 542–547.
13. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // J. Optim. Theory Appli. 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 28.09.2023

После доработки 27.11.2023

Принята к публикации 21.12.2023

Нелинейные системы

© 2024 г. И.С. ГРИГОРЬЕВ, канд. физ.-мат. наук (iliagri@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова),
А.И. ПРОСКУРЯКОВ (ap_91@mail.ru)
(Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в г. Баку)

ЗАДАЧА ВЫВЕДЕНИЯ НА ЦЕЛЕВУЮ ОРБИТУ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МАКСИМАЛЬНОЙ МАССЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВИГАТЕЛЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГИ И СБРОСОМ ОТДЕЛЯЕМЫХ ЧАСТЕЙ СРЕДСТВ ВЫВЕДЕНИЯ В АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ

Проблема космического мусора является одной из актуальных проблем современности. Рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавшего дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли. Решается задача оптимизации траектории перелета космического аппарата с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую эллиптическую орбиту. Выведение осуществляется с помощью РБ с двигательной установкой большой ограниченной тяги и ДТБ. При решении задачи учитывается вторая зональная гармоника гравитационного поля Земли. Решение задачи оптимального управления производится на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина. Громоздкие производные вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования. Полученные в работе экстремали Понтрягина являются очередным этапом методики лестницы задач.

Ключевые слова: космический аппарат, космический мусор, дополнительный топливный бак, разгонный блок, задача с ограниченной тягой, оптимизация траектории, сброс в атмосферу, численно-аналитическое дифференцирование.

DOI: 10.31857/S0005231024010034

1. Введение

Проблема космического мусора является одной из актуальных проблем современности. Пути решения этой проблемы можно разделить на две большие группы: профилактика и уборка. Подробный обзор литературы по соответствующей теме представлен в [1]. Дополнительно отметим работы [2, 3], освещающие вопросы, связанные с мониторингом техногенного засорения космического пространства, и [4–7], представляющие обзор средств захвата и увода крупногабаритного космического мусора.

В данной работе рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства (относящаяся к группе “профилактика”) за счет сброса отработавших частей средств выведения космического аппарата (КА) на орбитах, касающихся условной границы атмосферы Земли, на этапе его выведения на целевую орбиту. Решается задача оптимизации траектории перелета КА с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли заданного радиуса и наклонения на целевую орбиту с помощью разгонного блока (РБ) с двигательной установкой большой ограниченной тяги и дополнительным топливным баком (ДТБ), со сбросом ДТБ и центрального блока (ЦБ) РБ в атмосферу Земли. Довыведение с целевой орбиты на геостационарную орбиту (ГСО) учитывается по упрощенной схеме апсидальной импульсной постановки и осуществляется двигательной установкой КА.

Представленная работа является очередным шагом реализации методики “лестница задач”, заключающейся в последовательной формализации и решении серии задач, где каждое ранее полученное решение используется в качестве начального приближения на последующем шаге. Первоначально была решена простейшая задача в апсидальной импульсной постановке [8]: в результате проведенного исследования было установлено, что для оптимальной траектории с “разделением” первого импульса и при ограничении на характеристическую скорость маневра 1,5 км/с накладные расходы на сброс отработавших частей (ступеней) ЦБ оказались малы. Если же характеристическая скорость маневра довыведения меньше 1,47... км/с, то меняется структура траектории и накладные расходы на сброс ДТБ и ЦБ в атмосферу становятся значительными. На следующем шаге [9, 10] решалась задача без предположения об апсидальности импульсных воздействий. Было установлено, что в задаче с фазовым ограничением на максимально возможное удаление КА от Земли и при не ограниченном заранее времени перелета решение является апсидальным и совпадает с решением, полученным на предыдущем шаге. Необходимость решения задачи в модифицированной импульсной постановке (с учетом сброса ДТБ и ЦБ) [1], являющейся третьим шагом методики “лестница задач”, была вызвана сложностью непосредственного перехода к задаче с большой ограниченной тягой, поскольку модифицированный метод Ньютона не сходился при использовании в качестве начального приближения решения задачи второго шага.

Таким образом, целью работы является построение экстремалей Понтрягина в задаче с большой ограниченной тягой. Структура этой экстремали (последовательность и примерное расположение на траектории активных участков) известна из предыдущих исследований, проведенных в импульсной постановке. Первая серия маневров выведения КА на целевую орбиту осуществляется за счет топлива из ДТБ. После отработки этого топлива КА оказывается на орбите, касающейся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км). На участке пассивного полета, продолжительностью 120 с, осуществляется сброс ДТБ. За счет дополнительного включения двигателя КА возвращается на “безопасную орбиту” (с высотой перигея 200 км). Это

и последующие включения двигателя КА происходят за счет топлива из основного бака ЦБ.

После выполнения второй серии маневров КА оказывается на целевой орбите, такой, что характеристическая скорость маневров довыведения с нее на ГСО ограничена заданной величиной. Из проведенных ранее исследований [1, 8–10] следует, что накладные расходы на сброс малы при биэллиптической схеме довыведения. На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. За счет последнего включения двигателя на остатках топлива из основного бака в окрестности апогея целевой орбиты ЦБ переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, а спутник за счет собственных двигателей переводится на ГСО.

В работе рассматриваются две разные, но близкие постановки задачи. В первом случае предполагается, что в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров, сухая масса ДТБ и масса основного бака ЦБ пропорциональны массе вмещающегося в них топлива с коэффициентом α, а масса двигателя пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β [11]. Во втором случае предполагается, что заданы массовые характеристики РБ: сухие массы ДТБ и основного бака ЦБ, а также ограничения на массы топлива в ДТБ и в основном баке ЦБ.

Функционалом в рассматриваемых задачах является полезная масса, т.е. масса КА, оставшаяся на целевой орбите после отстыковки ЦБ.

Рассматриваемые задачи формализуются как задачи оптимального управления совокупностью динамических систем. На основе соответствующего принципа максимума Л.С. Понтрягина [12] их решение сводится к решению многоточечных краевых задач. Краевые задачи принципа максимума решаются численно методом стрельбы [13, 14]. На основе предыдущих исследований выбираются вычислительные схемы метода стрельбы и хорошие начальные приближения искомых параметров пристрелки. Задача Коши решается методом Дормана–Принса 8(7) с автоматическим выбором шага [15], система нелинейных уравнений — методом Ньютона в модификации Исаева–Сонина [16] с использованием в условиях сходимости нормировки Федоренко [17], входящая в него система линейных уравнений — методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу и повторным пересчетом [18], учет громоздких производных в условиях трансверсальности происходит посредством технологии численно-аналитического дифференцирования [19].

2. Формализация постановки задачи

Перелет рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с центром Земли. Ось z этой системы перпендикулярна плоскости экватора и направлена с юга на север, ось x лежит в плоскости экватора и направлена по линии узлов начальной круговой орбиты от нисходящего узла к восходящему, ось y дополняет систему координат до правой.

Система дифференциальных уравнений движения центра масс КА в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\dot{x}(t) = v_x(t), \quad \dot{y}(t) = v_y(t), \quad \dot{z}(t) = v_z(t), \\
\dot{v}_x(t) = -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)} + \frac{P_x(t)}{m(t)}, \quad \dot{v}_y(t) = -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{P_y(t)}{m(t)}, \\
\dot{v}_z(t) = -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)} + \frac{P_z(t)}{m(t)}, \quad \dot{m}(t) = -\frac{P(t)}{c},
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – координаты центра масс КА в момент времени t; $r = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$ – расстояние от КА до центра Земли в момент времени t; $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ – компоненты вектора скорости центра масс КА в момент времени t; $M(0)$ – масса КА в начальный момент времени; $M(t)$ – масса КА в момент времени t; $m(t) = M(t)/M(0)$ – обезразмеренная (используемая при расчетах) масса КА; $\vec{F}(t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t))$ – вектор реактивной тяги в момент t; $F(t) = |\vec{F}(t)| = \sqrt{F_x^2(t)+F_y^2(t)+F_z^2(t)}$ – величина вектора реактивной тяги; $\vec{P}(t) = (P_x(t), P_y(t), P_z(t)) = (F_x(t)/M(0), F_y(t)/M(0), F_z(t)/M(0))$ – вектор обезразмеренной реактивной тяги; $n = F_{\max}/(M(0)g_З)$ – начальная тяговооруженность; $P(t) = \sqrt{P_x^2(t) + P_y^2(t) + P_z^2(t)}$ – величина вектора обезразмеренной реактивной тяги в момент времени t; $\mu = 398\,601{,}19$ км^3/с^2 – гравитационный параметр Земли; $c = P_{\text{уд}} g_З$ – скорость истечения реактивной струи; $P_{\text{уд}}$ – удельная тяга; $g_З = 9{,}80665$ м/с^2 – гравитационное ускорение у поверхности Земли.

Кроме центрального ньютоновского гравитационного поля рассматривается движение центра масс КА в гравитационном поле с учетом второй зональной гармоники:

$$
\begin{gathered}
\dot{x}(t) = v_x(t), \quad \dot{y}(t) = v_y(t), \quad \dot{z}(t) = v_z(t), \\
\dot{v}_x(t) = -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5(t)} \left(\frac{5x(t)z^2(t)}{r^2(t)} - x(t) \right) + \frac{P_x(t)}{m(t)}, \\
\dot{v}_y(t) = -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5(t)} \left(\frac{5y(t)z^2(t)}{r^2(t)} - y(t) \right) + \frac{P_y(t)}{m(t)}, \\
\dot{v}_z(t) = -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5(t)} \left(\frac{5z^3(t)}{r^2(t)} - 3z(t) \right) + \frac{P_z(t)}{m(t)}, \\
\dot{m}(t) = -\frac{P(t)}{c},
\end{gathered}
$$

где $J_2 = 1082{,}636023 \cdot 10^{-6}$ – коэффициент второй зональной гармоники.

Управления в задаче считаются кусочно-непрерывными функциями:

$$P(t) = \sqrt{(P_x(t))^2 + (P_y(t))^2 + (P_z(t))^2} \leqslant P_{\max},$$

где $P_{\max} = g_З n m_0$ – ограничение величины вектора управляющей тяги, n – начальная тяговооруженность КА, где m_0 – начальная масса КА.

В начальный момент времени ($t = 0$) КА находится на опорной круговой орбите радиуса R_0. В силу выбора системы координат долгота восходящего узла $\Omega_0 = 0$, и потому в качестве формализации условий нахождения КА на начальной круговой орбите могут быть выбраны соотношения:

$$\begin{gathered} x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 = R_0^2, \quad x(0)C_{0x} + y(0)C_{0y} + z(0)C_{0z} = 0, \\ v_x(0) + \frac{v_0}{R_0}\left(y(0)\cos i_0 + z(0)\sin i_0\right) = 0, \;\; v_y(0) - \frac{v_0}{R_0}x(0)\cos i_0 = 0, \\ v_z(0) - \frac{v_0}{R_0}x(0)\sin i_0 = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$C_{0x} = 0, \quad C_{0y} = -C_0 \sin i_0, \quad C_{0z} = C_0 \cos i_0, \quad C_0 = \sqrt{\mu R_0},$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}, \quad R_0 = R_З + h_0.$$

Здесь C_{0x}, C_{0y}, C_{0z} — компоненты вектора кинетического момента орбитального движения КА относительно центра Земли, C_0 — значение модуля этого вектора, v_0 — величина вектора скорости на опорной орбите, R_0 — радиус опорной орбиты, $R_З = 6378{,}25$ км — радиус Земли, $h_0 = 200$ км — высота над поверхностью Земли.

Масса КА считается безразмерной и потому в начальный момент равна 1:

$$m(0) = m_0 = 1. \tag{3}$$

Радиус перигея $r_{\text{п}}(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ мгновенной эллиптической орбиты является функцией координат и скоростей КА и вычисляется по формулам [20]:

$$\begin{gathered} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \\ \cos\varphi = \frac{x v_x + y v_y + z v_z}{rV}, \quad V_{\text{кр}}^2 = \frac{\mu}{r}, \\ e = \sqrt{\left[\left(\frac{V}{V_{\text{кр}}}\right)^2 - 1\right]^2 + \frac{r}{a}\left(\frac{V}{V_{\text{кр}}}\right)^2 \cos^2\varphi}, \\ a = \frac{r}{2 - \left(\frac{V}{V_{\text{кр}}}\right)^2}, \quad r_{\text{п}} = a(1 - e), \end{gathered} \tag{4}$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет, $V_{\text{кр}}$ — круговая скорость на расстоянии r от центра Земли, φ — угол между радиусом-вектором $\vec{r} = (x,\, y,\, z)$ и вектором скорости $\overrightarrow{V} = (v_x,\, v_y,\, v_z)$.

Далее используется следующее обозначение для радиуса перигея орбиты:

$$r_{\text{п}}(\tau) := r_{\text{п}}\left(x(\tau), y(\tau), z(\tau), v_x(\tau), v_y(\tau), v_z(\tau)\right),$$

где τ — произвольный момент времени.

После выполнения первой серии маневров в момент $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ КА должен оказаться на мгновенной кеплеровской орбите, касающейся условной границы атмосферы (на самом деле условия касания атмосферы мгновенной кеплеровской орбиты не гарантируют касания атмосферы орбиты в реальном поле Земли; в работе предполагается, что для быстрого устранения космического мусора этого достаточно). Понижение высоты перигея орбиты до 100 км (условная граница атмосферы) происходит за счет включения двигателя ЦБ на остатках топлива из ДТБ. В момент времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ выполняются условия:

$$r_{\text{п}}(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = R_{\text{З}} + 100\,\text{км}, \tag{5}$$

$$x(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}}) - x(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = 0, \quad y(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}}) - y(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = 0,$$

$$z(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}}) - z(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = 0, \quad v_x(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}}) - v_x(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = 0,$$

$$v_y(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}}) - v_y(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = 0, \quad v_z(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}}) - v_z(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = 0,$$

$$\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}} = 0.$$

После выхода КА на орбиту сброса ДТБ начинается пассивный участок сброса ДТБ $[\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}, \tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}]$. На этом участке масса в системе дифференциальных уравнений не рассматривается. Предполагается, что отстыковка ДТБ занимает заданное время:

$$\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}} = 120\ \text{с}.$$

Рассматриваются две различные, но близкие постановки задачи. В первой постановке предполагается, что сухая масса бака пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом α, в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения маневра, масса двигателя и дополнительных конструкций ЦБ пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β. Во второй постановке предполагается, что заданы все массовые характеристики РБ.

Масса КА после сброса ДТБ в первой постановке задачи определяется соотношением:

$$m\left(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}\right) = m\left(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}\right) - \alpha\left(m_0 - m\left(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}\right)\right), \tag{6}$$

во второй постановке:

$$m\left(\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}\right) = m\left(\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}\right) - m^{\text{ДТБ}}, \tag{7}$$

где $m^{\text{ДТБ}}$ — заданная сухая обезразмеренная масса ДТБ (можно считать, что в эту величину включена также масса неснижаемого остатка топлива).

Ограничение на массу топлива в ДТБ во второй постановке задачи имеет вид

$$m_0 - m\left(\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}\right) \leqslant m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}}. \tag{8}$$

После сброса ДТБ КА совершает маневр перехода на "безопасную" орбиту. Этот маневр заканчивается в момент времени $\tau_{\text{без}}$. На совершение маневра расходуется топливо из основного бака. Как и ранее, функция радиус перицентра $r_{\text{п}}(\cdot)$ является функцией координат и компонент вектора скорости КА (4). В момент времени $\tau_{\text{без}}$ выполняются условия:

$$\begin{gathered} r_{\text{п}}\left(\tau_{\text{без}-}\right) = R_{\text{З}} + 200\,\text{км}, \\ x(\tau_{\text{без}+}) - x(\tau_{\text{без}-}) = 0,\ y(\tau_{\text{без}+}) - y(\tau_{\text{без}-}) = 0,\ z(\tau_{\text{без}+}) - z(\tau_{\text{без}-}) = 0, \\ v_x(\tau_{\text{без}+}) - v_x(\tau_{\text{без}-}) = 0,\ v_y(\tau_{\text{без}+}) - v_y(\tau_{\text{без}-}) = 0,\ v_z(\tau_{\text{без}+}) - v_z(\tau_{\text{без}-}) = 0, \\ \tau_{\text{без}+} - \tau_{\text{без}-} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

После выхода на "безопасную" орбиту начинается вторая серия маневров, после завершения которой КА переходит на целевую орбиту. На целевой орбите спутник отстыковывается от ЦБ. Масса спутника, оставшаяся на целевой орбите, считается полезной и максимизируется:

$$m_{\text{п}} = m\left(\tau_{\text{ц}-}\right) - m\left(\tau_{\text{ц}+}\right) \to \max,$$

где $m\left(\tau_{\text{ц}-}\right)$ — масса КА на целевой орбите до отстыковки спутника, $m\left(\tau_{\text{ц}+}\right)$ — масса ЦБ на целевой орбите после отстыковки спутника. Спутник за счет собственных двигателей переходит на геостационарную орбиту. Предполагается, что характеристическая скорость маневра довыведения с целевой орбиты на геостационарную ограничена заданной величиной Δv^* и линия апсид целевой орбиты лежит в плоскости экватора, т.е. z-компонента вектора Лапласа равна нулю. В момент времени $\tau_{\text{ц}}$ выполняются условия:

$$\begin{gathered} \Delta v_{\text{дов}}(\tau_{\text{ц}-}) := \Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{\text{ц}-}), y(\tau_{\text{ц}-}), z(\tau_{\text{ц}-}), v_x(\tau_{\text{ц}-}), v_y(\tau_{\text{ц}-}), v_z(\tau_{\text{ц}-})) \leqslant \Delta v^*, \\ \mathcal{A}\left(\tau_{\text{ц}-}\right) := C_y\left(\tau_{\text{ц}-}\right) v_x\left(\tau_{\text{ц}-}\right) - C_x\left(\tau_{\text{ц}-}\right) v_y\left(\tau_{\text{ц}-}\right) - \frac{\mu z\left(\tau_{\text{ц}-}\right)}{r\left(\tau_{\text{ц}-}\right)} = 0, \\ x(\tau_{\text{ц}+}) - x(\tau_{\text{ц}-}) = 0,\ y(\tau_{\text{ц}+}) - y(\tau_{\text{ц}-}) = 0,\ z(\tau_{\text{ц}+}) - z(\tau_{\text{ц}-}) = 0, \\ v_x(\tau_{\text{ц}+}) - v_x(\tau_{\text{ц}-}) = 0,\ v_y(\tau_{\text{ц}+}) - v_y(\tau_{\text{ц}-}) = 0,\ v_z(\tau_{\text{ц}+}) - v_z(\tau_{\text{ц}-}) = 0, \\ \tau_{\text{ц}+} - \tau_{\text{ц}-} = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\tau_{\text{ц}}$ — момент выхода на целевую орбиту, $C_x\,(\tau_{\text{ц}-})$, $C_y\,(\tau_{\text{ц}-})$, $C_z\,(\tau_{\text{ц}-})$ — компоненты вектора кинетического момента орбитального движения КА в момент времени $\tau_{\text{ц}-}$.

Отметим, что характеристическая скорость маневров довыведения спутника с целевой орбиты на геостационар учитывается по упрощенной схеме (учитывается в рамках центрального ньютоновского поля, все импульсные маневры считаются апсидальными, поворот орбиты производится только вторым импульсом, первый разгонный и последний установочный импульсы плоскость орбиты не меняют, что в совокупности очень существенно упрощает постановку задачи). В качестве $R_{\max}$ выбирается удаление от Земли, с одной стороны, достаточно большое, а с другой — позволяющее пренебречь влиянием других тел Солнечной системы, в первую очередь влиянием Луны и Солнца, учет, например, Луны, позволит вообще избежать включения двигателя в удаленной точке (см., например, [21]). Разумеется, такой учет возможен на следующих шагах методики лестницы задач, на этой ступени лестницы он также не рассматривается. Довыведение спутника осуществляется за счет трех импульсных воздействий:

$$\Delta v_{\text{дов}}\,(\tau_{\text{ц}}) = \Delta v_{\text{дов1}}\,(\tau_{\text{ц}}) + \Delta v_{\text{дов2}}\,(\tau_{\text{ц}}) + \Delta v_{\text{дов3}}\,(\tau_{\text{ц}})\,.$$

Первое импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов1}}\,(\tau_{\text{ц}})$ подается в перигее целевой орбиты, и оно, не меняя наклона, повышает апогей до максимально возможного удаления КА от Земли $R_{\max}$:

$$\Delta v_{\text{дов1}}\,(\tau_{\text{ц}}) = \sqrt{V_{\text{цп}}^2 + V_{1\text{п}}^2 - 2V_{\text{цп}}V_{1\text{п}}},$$

$$V_{\text{цп}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ац}}}{R_{\text{пц}}(R_{\text{ац}} + R_{\text{пц}})}}, \quad V_{1\text{п}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\max}}{R_{\text{пц}}(R_{\max} + R_{\text{пц}})}}, \tag{11}$$

где $R_{\text{пц}}$ — радиус перигея целевой орбиты, $V_{\text{цп}}$ — скорость в перигее целевой орбиты.

Второе импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов2}}\,(\tau_{\text{ц}})$ подается в апогее, увеличивает перигей до радиуса ГСО $R_{\text{ГСО}}$ и уменьшает наклон до нуля:

$$\Delta v_{\text{дов2}}\,(\tau_{\text{ц}}) = \sqrt{V_{1\text{a}}^2 + V_{2\text{a}}^2 - 2V_{1\text{a}}V_{2\text{a}}\cos i_{\text{ц}}},$$

$$V_{1\text{a}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{пц}}}{R_{\max}(R_{\max} + R_{\text{пц}})}}, \quad V_{2\text{a}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ГСО}}}{R_{\max}(R_{\max} + R_{\text{ГСО}})}}, \tag{12}$$

где $i_{\text{ц}}$ — угол наклона целевой орбиты к плоскости экватора. В момент прохождения апогея эта величина может быть вычислена по формуле

$$\cos i_{\text{ц}} = \frac{\sqrt{v_x^2(\tau_{\text{ц}}) + v_y^2(\tau_{\text{ц}})}}{\sqrt{v_x^2(\tau_{\text{ц}}) + v_y^2(\tau_{\text{ц}}) + v_z^2(\tau_{\text{ц}})}}. \tag{13}$$

Третье импульсное воздействие $\Delta v_{\text{довз}}(\tau_{\text{ц}})$ в перигее, не меняя наклона, уменьшает апогей до радиуса ГСО, тем самым переводя спутник в не заданную заранее точку геостационарной орбиты:

$$\Delta v_{\text{довз}}(\cdot) = V_{2\text{п}} - v_{\text{ГСО}},$$

$$V_{2\text{п}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\max}}{R_{\text{ГСО}}(R_{\max} + R_{\text{ГСО}})}}, \quad v_{\text{ГСО}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{ГСО}}}}. \tag{14}$$

Отметим, что величина $\Delta v_{\text{довз}}$ фактически является константой (зависит от заданной величины $R_{\text{ГСО}}$ и заданного параметра задачи $R_{\max}$).

После отстыковки спутника маневр ЦБ продолжается. За счет дополнительного включения двигателя происходит понижение высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до 100 км (условная граница атмосферы):

$$r_{\text{п}}(T) = R_{\text{З}} + 100\,\text{км}. \tag{15}$$

В конечный момент времени T расходуется все топливо из основного бака ЦБ. Исходя из того, что в первой постановке задачи предполагается, что в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров, и сухая масса основного бака ЦБ пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом α, а масса двигателя пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β [11], получаем:

$$m(T) - \alpha m_{\text{топл.}} - \beta n = 0,$$

$$m_{\text{топл.}} = \left(m\left(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}\right) - m\left(\tau_{\text{ц}-}\right)\right) + \left(m\left(\tau_{\text{ц}+}\right) - m(T)\right). \tag{16}$$

Во второй постановке задачи заданы сухая масса ЦБ и ограничение на топливо в основном баке ЦБ, поэтому

$$m(T) - m^{\text{ЦБ}} = 0,$$

$$\left(m\left(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}\right) - m\left(\tau_{\text{ц}-}\right)\right) + \left(m\left(\tau_{\text{ц}+}\right) - m(T)\right) \leqslant m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}}, \tag{17}$$

где $m^{\text{ЦБ}}$ — заданная сухая обезразмеренная масса ЦБ, включающая массу двигателя и дополнительных конструкций, $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}}$ — максимальная обезразмеренная масса топлива, которое можно залить в основной бак ЦБ.

Стоит отметить, что непрерывность координат и скоростей КА выполняется во все моменты времени. Также отметим особенность рассматриваемой задачи: функционал задачи является функцией фазовых переменных в промежуточный момент времени.

3. Принцип максимума Понтрягина

Рассматриваемая задача является задачей оптимального управления с промежуточными условиями и решается на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [12].

Функция Понтрягина в случае центрального ньютоновского гравитационного поля имеет вид

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_m \left(-\frac{P}{c}\right) +$$

$$+ p_{vx}\left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{P_x}{m}\right) + p_{vy}\left(-\frac{\mu y}{r^3} + \frac{P_y}{m}\right) + p_{vz}\left(-\frac{\mu z}{r^3} + \frac{P_z}{m}\right),$$

в задачах с учетом второй зональной гармоники функция Понтрягина имеет вид

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_m \left(-\frac{P}{c}\right) +$$

$$+ p_{vx}\left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{R_0^2}{r^5}\left(\frac{5xz^2}{r^2} - x\right) + \frac{P_x}{m}\right) +$$

$$+ p_{vy}\left(-\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{R_0^2}{r^5(t)}\left(\frac{5yz^2}{r^2} - y\right) + \frac{P_y}{m}\right) +$$

$$+ p_{vz}\left(-\frac{\mu z}{r^3} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{R_0^2}{r^5}\left(\frac{5z^3}{r^2} - 3z\right) + \frac{P_z}{m}\right),$$

терминант (для первой постановки задачи) —

$$l = l_0 + l_{\text{сб1}} + l_{\text{сб2}} + l_{\text{без}} + l_{\text{ц}} + l_T - \lambda_0\left(m\left(\tau_{\text{ц}}-\right) - m\left(\tau_{\text{ц}}+\right)\right),$$

где

$$l_0 = \lambda_{R0}\left(x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 - R_0^2\right) +$$

$$+ \lambda_{C0}\left(x(0)C_{0x} + y(0)C_{0y} + z(0)C_{0z}\right) +$$

$$+ \lambda_{vx0}\left(v_x(0) + \frac{v_0}{R_0}\left(y(0)\cos i_0 + z(0)\sin i_0\right)\right) +$$

$$+ \lambda_{vy0}\left(v_y(0) - \frac{v_0}{R_0}x(0)\cos i_0\right) +$$

$$+ \lambda_{vz0}\left(v_z(0) - \frac{v_0}{R_0}x(0)\sin i_0\right) + \lambda_{m0}\left(m(0) - m_0\right),$$

$$l_{\text{сб1}} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi\text{сб1}}\left(\xi\left(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}}\right) - \xi\left(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}\right)\right) + \lambda_{\tau\text{сб1}}\left(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}\right) +$$

$$+ \lambda_{\text{сб1}}\left(r_{\text{п}}\left(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}\right) - R_{\text{З}} - 100\right),$$

$$l_{\text{сб2}} = \lambda_{m\tau}\left(m\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}\right) - m\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-}\right) + \alpha\left(m_0 - m\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-}\right)\right)\right) +$$

$$+ \lambda_\tau\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+} - \tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-} - 120\right) + \lambda_{\tau\text{сб2}}\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+} - \tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}\right),$$

$$l_{\text{без}} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi\text{без}}\left(\xi\left(\tau_{\text{без}+}\right) - \xi\left(\tau_{\text{без}-}\right)\right) + \lambda_{\tau\text{без}}\left(\tau_{\text{без}+} - \tau_{\text{без}-}\right) +$$

$$+ \lambda_{\text{без}}\left(r_{\text{п}}\left(\tau_{\text{без}-}\right) - R_{\text{З}} - 200\right),$$

$$l_{\text{ц}} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi\text{ц}}\left(\xi\left(\tau_{\text{ц}+}\right) - \xi\left(\tau_{\text{ц}-}\right)\right) + \lambda_{\tau\text{ц}}\left(\tau_{\text{ц}+} - \tau_{\text{ц}-}\right) +$$

$$+ \lambda_{\text{ц}}\left(C_y(\tau_{\text{ц}-})v_x(\tau_{\text{ц}-}) - C_x(\tau_{\text{ц}-})v_y(\tau_{\text{ц}-}) - \frac{\mu z(\tau_{\text{ц}-})}{r(\tau_{\text{ц}-})}\right) +$$

$$+ \lambda_{\text{дов}}(\Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{\text{ц}-}), y(\tau_{\text{ц}-}), z(\tau_{\text{ц}-}), v_x(\tau_{\text{ц}-}), v_y(\tau_{\text{ц}-}), v_z(\tau_{\text{ц}-})) - \Delta v^*),$$

$$l_T = \lambda_T\left(r_{\text{п}}\left(T\right) - R_{\text{З}} - 100\right) +$$

$$+ \lambda_{mT}\left(m(T) - \alpha\left(\left(m\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}\right) - m\left(\tau_{\text{ц}-}\right)\right) + \left(m\left(\tau_{\text{ц}+}\right) - m(T)\right)\right) - \beta n\right).$$

Во второй постановке задачи $l_{\text{сб2}}$ и l_T имеют вид

$$l_{\text{сб2}} = \lambda_{m\tau 1}\left(m\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}\right) - m\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-}\right) + m^{\text{ДТБ}}\right) +$$

$$+ \lambda_{m\tau 2}\left(m_0 - m\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-}\right) - m^{\text{ДТБ}}_{\text{топл.}}\right) +$$

$$+ \lambda_\tau\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+} - \tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-} - 120\right) + \lambda_{\tau\text{сб2}}\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+} - \tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}\right),$$

$$l_T = \lambda_T\left(r_{\text{п}}\left(T\right) - R_{\text{З}} - 100\right) + \lambda_{mT1}\left(m(T) - m^{\text{ЦБ}}\right) +$$

$$+ \lambda_{mT2}\left(\left(m\left(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}\right) - m\left(\tau_{\text{ц}-}\right)\right) + \left(m\left(\tau_{\text{ц}+}\right) - m(T)\right) - m^{\text{ЦБ}}_{\text{топл.}}\right).$$

Здесь $p_x(\cdot)$, $p_y(\cdot)$, $p_z(\cdot)$, $p_{v_x}(\cdot)$, $p_{v_y}(\cdot)$, $p_{v_z}(\cdot)$, $p_m(\cdot)$ – сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из участков траектории; λ_0, λ_{R0}, λ_{C0}, λ_{vx0}, λ_{vy0}, λ_{vz0}, λ_{m0}, $\lambda_{\xi\text{сб1}}$, $\lambda_{\xi\text{без}}$, $\lambda_{\xi\text{ц}}$ ($\xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z$), $\lambda_{\tau\text{сб1}}$, $\lambda_{\text{сб1}}$, $\lambda_{m\tau}$, λ_τ, $\lambda_{\tau\text{сб2}}$, $\lambda_{\tau\text{без}}$, $\lambda_{\text{без}}$, $\lambda_{\tau\text{ц}}$, $\lambda_{\text{ц}}$, $\lambda_{\text{дов}}$, λ_T, λ_{mT}, $\lambda_{m\tau 1}$, $\lambda_{m\tau 2}$, λ_{mT1}, λ_{mT2} – числовые множители Лагранжа.

Стоит отметить, что на участке $[\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}}, \tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}}]$ отсутствует слагаемое, соответствующее дифференциальному уравнению $\dot{m} = -\frac{P}{c}$ в функции Понтрягина.

Условия стационарности по фазовым переменным (уравнения Эйлера–Лагранжа) имеют вид в случае центрального ньютоновского гравитацион-

$$\dot{p}_x = \frac{\mu}{r^3}\left[p_{vx} - \frac{3x}{r^2}\left(xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}\right)\right],$$

$$\dot{p}_y = \frac{\mu}{r^3}\left[p_{vy} - \frac{3y}{r^2}\left(xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}\right)\right],$$

$$\dot{p}_z = \frac{\mu}{r^3}\left[p_{vz} - \frac{3z}{r^2}\left(xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}\right)\right],$$

$$\dot{p}_{vx} = -p_x, \quad \dot{p}_{vy} = -p_y, \quad \dot{p}_{vz} = -p_z,$$

$$\dot{p}_m = \frac{P_x p_{vx} + P_y p_{vy} + P_z p_{vz}}{m^2}.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа в случае перелета в гравитационном поле с учетом второй зональной гармоники в явном виде не выписывались. Правые части этих уравнений вычислялись с использованием технологии численно-аналитического дифференцирования [19].

Выпишем условия трансверсальности в силу их громоздкости в формальном виде:

$$p_\xi(0) = \frac{\partial l}{\partial \xi(0)}, \quad p_\xi(T) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(T)},$$

$$p_\xi\left(\beta_+\right) = \frac{\partial l}{\partial \xi\left(\beta_+\right)}, \quad p_\xi\left(\beta_-\right) = -\frac{\partial l}{\partial \xi\left(\beta_-\right)},$$

$$\xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad \beta = \tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}, \tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}, \tau_{\text{без}}, \tau_{\text{ц}}.$$

Следствием условий трансверсальности в начальный момент времени являются

$$p_x(0) = 2\lambda_{R0}x(0) + \lambda_{C0}C_{0x} - \frac{v_0}{R_0}\left(p_{vy}(0)\cos i_0 + p_{vz}(0)\sin i_0\right),$$

$$p_y(0) = 2\lambda_{R0}y(0) + \lambda_{C0}C_{0y} + \frac{v_0}{R_0}p_{vx}(0)\cos i_0, \tag{18}$$

$$p_z(0) = 2\lambda_{R0}z(0) + \lambda_{C0}C_{0z} + \frac{v_0}{R_0}p_{vy}(0)\sin i_0.$$

Следствиями условий трансверсальности в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ и $\tau_{\text{без}}$ являются

$$p_\xi\left(\gamma_-\right) - p_\xi\left(\gamma_+\right) + \lambda_i\frac{\partial r_{\text{п}}\left(\gamma_-\right)}{\partial \xi\left(\gamma_-\right)} = 0, \tag{19}$$

$$\xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad \gamma = \tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}, \tau_{\text{без}}, \quad i = \text{сб1}, \text{без}.$$

Следствиями условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{ц}}$ являются

$$p_\xi\left(\tau_{\text{ц}-}\right)-p_\xi\left(\tau_{\text{ц}+}\right)+\lambda_{\text{дов}}\frac{\Delta v_{\text{дов}}\left(\tau_{\text{ц}-}\right)}{\partial\xi\left(\tau_{\text{ц}-}\right)}+\lambda_{\text{ц}}\frac{\partial\mathcal{A}\left(\tau_{\text{ц}-}\right)}{\partial\xi\left(\tau_{\text{ц}-}\right)}=0, \tag{20}$$

$$\xi=x,y,z,v_x,v_y,v_z.$$

Производные функций $r_{\text{п}}(\cdot)$, $\Delta v_{\text{дов}}(\cdot)$, $\mathcal{A}(\cdot)$, входящие в следствия из условий трансверсальности (19), (20), а также условия трансверсальности в конечный момент времени T вычисляются при помощи технологии численно-аналитического дифференцирования.

Следствием условий трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ и T в первой постановке задачи является равенство

$$(1+\alpha)p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})-p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})-\alpha p_m(T)=0. \tag{21}$$

Докажем это следствие. Условия трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ и T имеют вид

$$p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})=-\frac{\partial l}{\partial m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})}=\lambda_{m\tau}(1+\alpha),$$

$$p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})=\frac{\partial l}{\partial m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})}=\lambda_{m\tau}-\alpha\lambda_{mT},$$

$$p_m(T)=-\frac{\partial l}{\partial m(T)}=-\lambda_{mT}(1+\alpha).$$

Имеем следующую цепочку равенств:

$$p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})-\lambda_{m\tau}+\alpha\lambda_{mT}=0,\quad \lambda_{m\tau}=\frac{p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})}{1+\alpha},\quad \lambda_{mT}=-\frac{p_m(T)}{1+\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})-\frac{p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})}{1+\alpha}-\alpha\frac{p_m(T)}{1+\alpha}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1+\alpha)p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})-p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})-\alpha p_m(T)=0.$$

Следствием условий трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ во второй постановке задачи является равенство

$$p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})-p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})=\lambda_{mT2}-\lambda_{m\tau2}. \tag{22}$$

Докажем это равенство. В моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ по переменной m условия трансверсальности имеют вид

$$p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})=\lambda_{m\tau1}+\lambda_{mT2},\quad p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})=\lambda_{m\tau1}+\lambda_{m\tau2}.$$

Вычитаем из первого равенства второе и получаем следствие (22).

Следствием условий трансверсальности по переменной m в момент времени $\tau_{\text{ц}}$ является непрерывность сопряженной переменной:

$$p_m(\tau_{\text{ц}+}) = p_m(\tau_{\text{ц}-}), \tag{23}$$

поскольку $p_m(\tau_{\text{ц}-}) = -\alpha\lambda_{mT}$, $p_m(\tau_{\text{ц}+}) = -\alpha\lambda_{mT}$ – в первой постановке задачи и $p_m(\tau_{\text{ц}-}) = -\alpha\lambda_{mT2}$, $p_m(\tau_{\text{ц}+}) = -\alpha\lambda_{mT2}$ – во второй постановке задачи.

В начальный момент времени условие стационарности отсутствует. Следствием условий стационарности в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ является $H(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) = H(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})$. В моменты времени $\tau_{\text{без}}$ и $\tau_{\text{ц}}$ выполняются условия непрерывности функции Понтрягина: $H(\tau_{\text{без}+}) = H(\tau_{\text{без}-})$ и $H(\tau_{\text{ц}+}) = H(\tau_{\text{ц}-})$. Условие стационарности в не заданный заранее момент времени T: $H(T) = 0$.

Пусть $\vec{e}$ – единичный вектор. Тогда условия оптимальности по управлениям P_x, P_y, P_z имеют вид

$$\overrightarrow{P} = P\vec{e}, \quad \vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$
$$P_x = P\cos\alpha, \quad P_y = P\cos\beta, \quad P_z = P\cos\gamma,$$

$$\overrightarrow{P}_{opt} = \underset{0\leqslant P\leqslant P_{\max}}{arg\,abs\,max}\left[\frac{p_{vx}P_x + p_{vy}P_y + p_{vz}P_z}{m} - \frac{p_m}{c}P\right] =$$
$$= \underset{0\leqslant P\leqslant P_{\max}}{arg\,abs\,max}\left[\frac{p_{vx}P\cos\alpha + p_{vy}P\cos\beta + p_{vz}P\cos\gamma}{m} - \frac{p_m}{c}P\right] =$$
$$= \underset{0\leqslant P\leqslant P_{\max}}{arg\,abs\,max}\left[P\left(\frac{p_{vx}\cos\alpha + p_{vy}\cos\beta + p_{vz}\cos\gamma}{m} - \frac{p_m}{c}\right)\right],$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы.

Если $\left(\dfrac{p_{vx}\cos\alpha + p_{vy}\cos\beta + p_{vz}\cos\gamma}{m} - \dfrac{p_m}{c}\right) > 0$, то $P_{opt} = P_{\max}$; если же $\left(\dfrac{p_{vx}\cos\alpha + p_{vy}\cos\beta + p_{vz}\cos\gamma}{m} - \dfrac{p_m}{c}\right) < 0$, то $P_{opt} = 0$. Таким образом,

$$P_{opt} = \begin{cases} P_{\max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \end{cases}$$

где $\chi \equiv \dfrac{\rho}{m} - \dfrac{p_m}{c}$ – функция переключения.

Заметим, что $p_{vx}\cos\alpha + p_{vy}\cos\beta + p_{vz}\cos\gamma$ – скалярное произведение векторов $\vec{p}_v = (p_{vx}, p_{vy}, p_{vz})$ и $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Оно достигает максимального значения при сонаправленности векторов $\vec{p}_v$ и $\vec{e}$:

$$\cos\alpha_{opt} = \frac{p_{vx}}{\rho}, \quad \cos\beta_{opt} = \frac{p_{vy}}{\rho}, \quad \cos\gamma_{opt} = \frac{p_{vz}}{\rho},$$

где $\rho = \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2}$. Таким образом, учет оптимального направления вектора тяги позволяет определить:

$$(P_x)_{opt} = P_{opt}\frac{p_{vx}}{\rho}, \quad (P_y)_{opt} = P_{opt}\frac{p_{vy}}{\rho}, \quad (P_z)_{opt} = P_{opt}\frac{p_{vz}}{\rho}.$$

Режимы особого управления, потенциально возможные в рассматриваемых задачах, в данной работе не рассматриваются.

Условия дополняющей нежесткости и неотрицательности в первой постановке задачи имеют вид

$$\begin{gathered}\lambda_{\text{дов}}(\Delta v_{\text{дов}}(\tau_{\text{ц}-}) - \Delta v^*) = 0,\\ \lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_{\text{дов}} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Во второй постановке задачи в дополнение к (24) имеются следующие условия дополняющей нежесткости и неотрицательности:

$$\begin{gathered}\lambda_{m\tau 2}\left(m_0 - m\left(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}\right) - m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}}\right) = 0,\\ \lambda_{mT2}\left(\left(m\left(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}\right) - m\left(\tau_{\text{ц}-}\right)\right) + \left(m\left(\tau_{\text{ц}+}\right) - m(T)\right) - m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}}\right) = 0,\\ \lambda_{m\tau 2} \geqslant 0, \quad \lambda_{mT2} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{25}$$

В качестве условия нормировки используется:

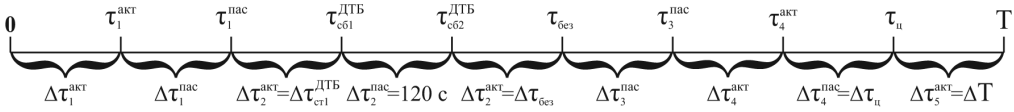
$$p_{vx}^2(0) + p_{vy}^2(0) + p_{vz}^2(0) = 1. \tag{26}$$

4. Структура траектории и численные результаты

Структура траектории определяется на основе результатов проведенных ранее исследований [1, 8–10]. Главным достоинством подхода заданной структуры траектории является то, что он позволяет построить экстремали Потрягина — при наличии "хорошей" вычислительной схемы метода стрельбы и "хорошего" начального приближения модифицированный метод Ньютона сходится за несколько итераций.

Другие возможные способы решения рассматриваемых краевых задач апробировались, но к успеху (к построению экстремалей Понтрягина) не приводили.

Начальное приближение к значениям фазовых и сопряженных переменных, входящих в вектор параметров пристрелки, выбирается на основе ранее полученного решения в модифицированной импульсной постановке [1] в соответствии с [12]: в моменты включения тяги они соответствуют значениям фазовых и сопряженных переменных до импульсного воздействия, в моменты выключения тяги — значениям фазовых и сопряженных переменных после импульсного воздействия, продолжительность активных участков оценивается исходя из расхода топлива на данное включение двигателя, продолжительность пассивных участков равняется соответствующей продолжительности пассивных участков между импульсными воздействиями. Вначале решается задача с большой ограниченной тягой в первой постановке при $n = 10$. Далее методом продолжения по параметру (тяговооруженности) получается решение для $n = 0{,}1$. Переход от задачи в первой постановке к задаче во второй



Вычислительная схема метода стрельбы.

постановке также осуществляется методом продолжения по параметру: соответствующее уравнение из первой постановки задачи умножается на $(1-\gamma)$, а из второй — на γ, где $\gamma \in [0,1]$.

Опишем вычислительную схему метода стрельбы (см. рисунок). В вектор параметров пристрелки входят:

- числовые множители Лагранжа λ_{R0}, λ_{C0}, $\lambda_{\text{сб1}}$, $\lambda_{\text{без}}$, $\lambda_{\text{ц}}$, $\lambda_{\text{дов}}$, λ_T, во второй постановке задачи добавляется еще один числовой множитель Лагранжа λ_{mT2};
- угловое положение КА на опорной круговой орбите φ_0, значения четырех сопряженных переменных в начальный момент времени $p_{vx}(0)$, $p_{vy}(0)$, $p_{vz}(0)$, $p_m(0)$ (по угловому положению вычисляются значения координат и скоростей КА в начальный момент времени, значения сопряженных переменных $p_x(0)$, $p_y(0)$, $p_z(0)$ вычисляются по формулам (18). По условию (3) $m(0)=1$ и, поэтому, $m(0)$ в вектор параметров пристрелки не включается. Таким образом получаем стартовую точку для решения задачи Коши);
- продолжительность первого активного участка $\Delta\tau_1^{\text{акт}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $y(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $z(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}})$;
- продолжительность первого пассивного участка $\Delta\tau_1^{\text{пасс}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $y(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $z(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$;
- продолжительность второго активного участка, на котором происходит понижение высоты перигея орбиты КА до условной границы атмосферы, $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $y(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $z(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $v_x(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $v_y(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $v_z(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_x(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_y(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_z(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_{vx}(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_{vy}(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_{vz}(\tau_{\text{сб1}+}^{\text{ДТБ}})$ (продолжительность второго пассивного участка $\Delta\tau_2^{\text{пасс}}$, во время которого происходит сброс ДТБ является параметром задачи (120 с) и не входит в вектор параметров пристрелки);
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $y(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $z(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $v_x(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $v_y(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $v_z(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_x(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_y(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_z(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_{vx}(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_{vy}(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$, $p_{vz}(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$,

в том числе сопряженная переменная, соответствующая массе $p_m(\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}) = p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})$ (масса КА после сброса ДТБ не входит в вектор параметров пристрелки и вычисляется в первой постановке задачи по формуле (6), во второй постановке – (7));

- продолжительность третьего активного участка $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{без}}$, на котором происходит повышение высоты перигея орбиты КА до 200 км;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{\text{без}+})$, $y(\tau_{\text{без}+})$, $z(\tau_{\text{без}+})$, $v_x(\tau_{\text{без}+})$, $v_y(\tau_{\text{без}+})$, $v_z(\tau_{\text{без}+})$, $p_x(\tau_{\text{без}+})$, $p_y(\tau_{\text{без}+})$, $p_z(\tau_{\text{без}+})$, $p_{vx}(\tau_{\text{без}+})$, $p_{vy}(\tau_{\text{без}+})$, $p_{vz}(\tau_{\text{без}+})$;
- продолжительность третьего пассивного участка $\Delta\tau_3^{\text{пасс}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $y(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $z(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$, $p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$;
- продолжительность четвертого активного участка $\Delta\tau_4^{\text{акт}}$ — в конце данного участка КА выходит на целевую орбиту;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $y(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $z(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}})$, $p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}})$;
- продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{\text{ц}}$ — полет на целевой орбите (для удобства вычислений в качестве точки $\tau_{\text{ц}}$ выбрана точка последнего включения двигателя для сброса ЦБ, а не первая точка целевой орбиты, на которую переходит КА, — это возможно, поскольку данные точки соединены пассивным участком);
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных ЦБ после включения двигателя $x(\tau_{\text{ц}+})$, $y(\tau_{\text{ц}+})$, $z(\tau_{\text{ц}+})$, $v_x(\tau_{\text{ц}+})$, $v_y(\tau_{\text{ц}+})$, $v_z(\tau_{\text{ц}+})$; $p_x(\tau_{\text{ц}+})$, $p_y(\tau_{\text{ц}+})$, $p_z(\tau_{\text{ц}+})$, $p_{vx}(\tau_{\text{ц}+})$, $p_{vy}(\tau_{\text{ц}+})$, $p_{vz}(\tau_{\text{ц}+})$, масса $m(\tau_{\text{ц}+})$ ЦБ после отстыковки спутника (сопряженная переменная $p_m(\tau_{\text{ц}+})$ не входит в вектор параметров пристрелки, поскольку согласно следствию (23) p_m непрерывна в точке $\tau_{\text{ц}}$);
- продолжительность пятого активного участка, на котором происходит понижение перигея ЦБ 100 км (условной границы атмосферы), $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T$.

В вектор-функцию невязок входят:

- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_1^{\text{акт}}$;
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_1^{\text{пасс}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ (19);
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{без}}$ (19);
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_3^{\text{пасс}}$;

- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_4^{\text{акт}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{ц}}$ (20);
- равенство нулю z-компонетны вектора Лапласа (второе условие (10));
- условие расхода всего топлива из основного бака ЦБ в конечный момент времени: в первой постановки задачи — (16), во второй постановке задачи — (17);
- условие дополняющей нежесткости — равенство импульса довыведения с целевой орбиты на геостационарную заданной величине (первое условие (24));
- три условия на перигей орбиты КА в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{без}}$, T (5), (9), (15);
- четыре условия на функцию переключения: $\chi(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = 0$, $\chi(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0$, $\chi(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0$, $\chi(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = 0$;
- шесть условий трансверсальности в конечный момент времени T;
- следствие из условий трансверсальности по переменной m: в первой постановке задачи — (21), во второй постановке задачи — (22) (с учетом $\lambda_{m\tau 2} = 0$);
- три следствия из условий стационарности $H(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) = H(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})$, $H(\tau_{\text{без}+}) = H(\tau_{\text{без}-})$ и $H(\tau_{\text{ц}+}) = H(\tau_{\text{ц}-})$;
- условие стационарности в конечный момент времени: $H(T) = 0$;
- условие нормировки (26),
- во второй постановке задачи в вектор-функцию невязок входит также второе условие дополняющей нежесткости из (25) (первое условие дополняющей нежесткости из (25) не входит в вектор-функцию невязок и выполнение соответствующего неравенства (8) проверяется после решения задачи — на экстремали Понтрягина выполнено строгое неравенство, что соответствует случаю $\lambda_{m\tau 2} = 0$).

Таким образом, в первой постановке задачи — 118 параметров пристрелки и 118 невязок, во второй постановке задачи — 119 параметров пристрелки и 119 невязок, т.е. число неизвестных параметров совпадает с числом уравнений для их определения.

В приложении приводится экстремаль Понтрягина в задаче с учетом второй зональной гармоники во второй постановке при $n = 0{,}1$, $P_{\text{уд}} = 350$ с, $i_0 = 0{,}9$ рад, $\Delta v^* = 1{,}5$ км/с, $m(0) = 1$ ($M(0) = 22\,500$ кг), сухая масса ДТБ $m^{\text{ДТБ}} = 0{,}052$ (соответствует массе 1170 кг), сухая масса ЦБ $m^{\text{ЦБ}} = 0{,}0635556$ (соответствует массе 1430 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ДТБ, $m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} = 0{,}6488889$ (соответствует массе 14 600 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ЦБ, $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} = 0{,}2266667$ (соответствует массе 5100 кг), $R_{\max} = 280\,000$ км.

5. Заключение

Одним из результатов проведенных ранее в импульсной постановке исследований оказалась возможность сброса ДТБ и ЦБ РБ в атмосферу Земли с малыми накладными расходами. Этот же результат удалось подтвердить и в случае КА с двигателем большой ограниченной тяги.

Оказалось, что решение задачи перелета КА с двигателем большой ограниченной тяги в определенной мере близко к решению в импульсной постановке. Методика перехода от решения задачи в импульсной постановке к решению с двигателем большой тяги [12] в рассматриваемом случае оказалась эффективной — экстремаль Понтрягина построена.

Задачи в первой и второй постановках (с оптимизируемой конструкцией и с фиксированными массовыми характеристиками) удалось включить в параметрическое семейство. Переход от решения первой задачи (с выбранными константами $\alpha = 0{,}08$ и $\beta = 0{,}01$) ко второй (экстремаль приведена в Приложении) эффективно получен методом продолжения решения по параметру.

Отличие экстремали в случае учета второй зональной гармоники от соответствующей экстремали без учета второй зональной гармоники мало в смысле сходимости использованного метода Ньютона (метод Ньютона сходится за 11 итераций).

Технология численно-аналитического дифференцирования показала свою эффективность и технологичность (упрощение программного кода, уменьшение вероятности ошибок программирования).

Методика “лестница задач” позволила решить представленную в работе задачу, выбрать эффективную вычислительную схему и хорошее начальное приближение, справиться с трудностями численного решения, связанными со сложностью и громоздкостью постановки задачи, продемонстрировав таким образом свою эффективность. В качестве другого законченного примера эффективного применения методики “лестница задач” можно рекомендовать, например, диссертацию А.С. Самохина [22]. Отметим, что при увеличении максимально возможного удаления КА от Земли $R_{\max}$ меняется постановка задачи — нужно будет учитывать влияние гравитационного поля Луны [21] и то, что данная задача находится на следующих ступенях методики “лестница задач”.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Экстремаль Понтрягина во второй постановке задачи с учетом второй зональной гармоники

Приводится экстремаль Понтрягина в задаче с учетом второй зональной гармоники во второй постановке при $n = 0{,}1$, $P_{\text{уд}} = 350$ с, $i_0 = 0{,}9$ рад, $\Delta v^* = 1{,}5$ км/с, $m(0) = 1$ ($M(0) = 22\,500$ кг), сухая масса ДТБ $m^{\text{ДТБ}} = 0{,}052$ (соответствует массе 1170 кг), сухая масса ЦБ $m^{\text{ЦБ}} = 0{,}0635556$ (соответствует массе 1430 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ДТБ,

$m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} = 0{,}6488889$ (соответствует массе 14 600 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ЦБ $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} = 0{,}2266667$ (соответствует массе 5100 кг), $R_{\max} = 280\,000$ км.

Числовые множители Лагранжа:

$$\lambda_{R0} = 0{,}000143381, \quad \lambda_{C0} = 0{,}000591830,$$
$$\lambda_{vx0} = 0{,}454024806, \quad \lambda_{vy0} = 0{,}573821987,$$
$$\lambda_{vz0} = 0{,}681608247, \quad \lambda_{m0} = 0{,}003461557,$$
$$\lambda_{x\text{сб1}} = -0{,}000341292, \quad \lambda_{y\text{сб1}} = 7{,}242061031 \cdot 10^{-7},$$
$$\lambda_{z\text{сб1}} = -4{,}016946803 \cdot 10^{-7}, \quad \lambda_{vx\text{сб1}} = -0{,}006462504,$$
$$\lambda_{vy\text{сб1}} = -0{,}749532226, \quad \lambda_{vz\text{сб1}} = -0{,}815268562,$$
$$\lambda_{x\text{без}} = -4{,}192288919 \cdot 10^{-5}, \quad \lambda_{y\text{без}} = 1{,}862663610 \cdot 10^{-6},$$
$$\lambda_{z\text{без}} = 3{,}375542260 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_{vx\text{без}} = 0{,}005756096,$$
$$\lambda_{vy\text{без}} = 0{,}122589304, \quad \lambda_{vz\text{без}} = 0{,}271310189,$$
$$\lambda_{x\text{ц}} = 2{,}712182075 \cdot 10^{-7}, \quad \lambda_{y\text{ц}} = -1{,}138471581 \cdot 10^{-9},$$
$$\lambda_{z\text{ц}} = -6{,}622593433 \cdot 10^{-13}, \quad \lambda_{vx\text{ц}} = 0{,}000524475,$$
$$\lambda_{vy\text{ц}} = 0{,}124996420, \quad \lambda_{vz\text{ц}} = 0{,}154483787,$$
$$\lambda_{\tau\text{сб1}} = 1{,}017515559 \cdot 10^{-10}, \quad \lambda_{\text{сб1}} = 0{,}000457417,$$
$$\lambda_{m\tau 1} = 0{,}005674790, \quad \lambda_{m\tau 2} = 0,$$
$$\lambda_{\tau} = -7{,}385740053 \cdot 10^{-11}, \quad \lambda_{\tau\text{сб2}} = 8{,}771225602 \cdot 10^{-11},$$
$$\lambda_{\tau\text{без}} = 1{,}237010821 \cdot 10^{-11}, \quad \lambda_{\text{без}} = -0{,}000291125,$$
$$\lambda_{\tau\text{ц}} = -1{,}948360860 \cdot 10^{-19}, \quad \lambda_{\text{ц}} = -0{,}020742502,$$
$$\lambda_{\text{дов}} = 1{,}164436713, \quad \lambda_{T} = 4{,}669488715 \cdot 10^{-6},$$
$$\lambda_{mT1} = -0{,}009927899, \quad \lambda_{mT2} = 0{,}000804002,$$
$$\lambda_0 = 0{,}009915863.$$

Включение двигателя КА происходит в начальный момент времени $t = 0$ при угловом положении на опорной орбите $\varphi_0 = -0{,}7817944$ рад:

$$x(0) = 4668{,}258 \text{ км}, \quad y(0) = -2880{,}996 \text{ км}, \quad z(0) = -3630{,}510 \text{ км},$$
$$v_x(0) = 5{,}484390 \text{ км/с}, \quad v_y(0) = 3{,}433812 \text{ км/с}, \quad v_z(0) = 4{,}327147 \text{ км/с},$$
$$p_x(0) = 0{,}000284790, \quad p_y(0) = -0{,}000515932, \quad p_z(0) = -0{,}000601403,$$
$$p_{vx}(0) = 0{,}454024806, \quad p_{vy}(0) = 0{,}573821987, \quad p_{vz}(0) = 0{,}681608247,$$
$$m(0) = 1, \quad p_m(0) = 0{,}003461557.$$

Продолжительность первого активного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{акт}} = 1234{,}190$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{\text{а1}} = 15\,500{,}572$ км, перигеем $r_{\text{п1}} = 6702{,}795$ км и углом наклона $i_1 =$

$= 0{,}8956402$ рад. Координаты, скорости и масса КА в момент $\tau_1^{\text{акт}}$ выключения двигателя:

$$x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5360{,}198 \text{ км}, \quad y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3045{,}731 \text{ км},$$
$$z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3807{,}202 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -4{,}376498 \text{ км/с},$$
$$v_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4{,}635010 \text{ км/с}, \quad v_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5{,}786158 \text{ км/с},$$
$$p_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0{,}000331052, \quad p_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0{,}000386951,$$
$$p_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0{,}000452488, \quad p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -0{,}371919208,$$
$$p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0{,}637424282, \quad p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0{,}754898302,$$
$$m(\tau_1^{\text{акт}}) = 0{,}6473743, \quad p_m(\tau_1^{\text{акт}}) = 0{,}005597245.$$

Продолжительность первого пассивного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{пасс}} = 5219{,}504$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на орбите с апогеем $r_{\text{а}2} = 15\,497{,}241$ км, перигеем $r_{\text{п}2} = 6704{,}141$ км и углом наклона $i_2 = 0{,}8956703$ рад. Координаты и скорости КА в момент $\tau_1^{\text{пасс}}$ включения двигателя:

$$x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -15495{,}958 \text{ км}, \quad y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 133{,}386 \text{ км},$$
$$z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 131{,}434 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -0{,}061410 \text{ км/с},$$
$$v_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2{,}462966 \text{ км/с}, \quad v_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3{,}076413 \text{ км/с},$$
$$p_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0{,}000121015, \quad p_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2{,}300740522 \cdot 10^{-6},$$
$$p_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3{,}527557800 \cdot 10^{-6}, \quad p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0{,}007053866,$$
$$p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0{,}600617145, \quad p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0{,}868167234,$$
$$m(\tau_1^{\text{пасс}}) = 0{,}6473743, \quad p_m(\tau_1^{\text{пасс}}) = 0{,}005597245.$$

Продолжительность второго активного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{сб}1}^{\text{ДТБ}} = 30{,}961$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{\text{а}3} = 15\,497{,}241$ км, перигеем $r_{\text{п}3} = 6478{,}25$ км и углом наклона $i_3 = 0{,}8948234$ рад — на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Координаты, скорости и масса КА в момент $\tau_{\text{сб}1}^{\text{ДТБ}}$ выключения двигателя:

$$x(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = x(\tau_{\text{сб}1+}^{\text{ДТБ}}) = -15\,497{,}060 \text{ км}, \quad y(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = y(\tau_{\text{сб}1+}^{\text{ДТБ}}) = 57{,}540 \text{ км},$$
$$z(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = z(\tau_{\text{сб}1+}^{\text{ДТБ}}) = 36{,}780 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = v_x(\tau_{\text{сб}1+}^{\text{ДТБ}}) = -0{,}009780 \text{ км/с},$$
$$v_y(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = v_y(\tau_{\text{сб}1+}^{\text{ДТБ}}) = -2{,}436415 \text{ км/с},$$
$$v_z(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = v_z(\tau_{\text{сб}1+}^{\text{ДТБ}}) = -3{,}037856 \text{ км/с},$$
$$p_x(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = 0{,}000121065, \quad p_y(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = -3{,}087854169 \cdot 10^{-7},$$
$$p_z(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = -6{,}465598107 \cdot 10^{-7}, \quad p_{vx}(\tau_{\text{сб}1-}^{\text{ДТБ}}) = 0{,}003306216,$$

$$p_{vy}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-}) = 0{,}600657543, \quad p_{vz}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-}) = 0{,}868231852,$$

$$p_x(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}+}) = -0{,}000341292, \quad p_y(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}+}) = 7{,}242061031 \cdot 10^{-7},$$

$$p_z(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}+}) = -4{,}016946803 \cdot 10^{-7}, \quad p_{vx}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}+}) = -0{,}006462504,$$

$$p_{vy}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}+}) = -0{,}749532226, \quad p_{vz}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}+}) = -0{,}815268562,$$

$$m(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-}) = 0{,}6385284, \quad p_m(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб1}-}) = 0{,}005674790.$$

Продолжительность второго пассивного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{пасс}} = 120$ с — на этом участке происходит отстыковка ДТБ от КА. В конце пассивного участка КА оказывается на орбите с апогеем $r_{\text{а}4} = 15\,497{,}245$ км, перигеем $r_{\text{п}4} = 6478{,}246$ км и углом наклона $i_4 = 0{,}8948232$ рад. Координаты и скорости КА в момент $\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}}$ включения двигателя:

$$x(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = x(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -15486{,}279 \text{ км}, \quad y(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = y(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -234{,}799 \text{ км},$$

$$z(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = z(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -327{,}697 \text{ км}, \quad v_x(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = v_x(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = 0{,}189472 \text{ км/с},$$

$$v_y(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = v_y(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -2{,}435275 \text{ км/с},$$

$$v_z(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = v_z(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -3{,}035984 \text{ км/с},$$

$$p_x(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = p_x(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -0{,}000341191,$$

$$p_y(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = p_y(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -8{,}913952605 \cdot 10^{-6},$$

$$p_z(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = p_z(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -1{,}089032490 \cdot 10^{-5},$$

$$p_{vx}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = p_{vx}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = 0{,}034488810,$$

$$p_{vy}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = p_{vy}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -0{,}749040916,$$

$$p_{vz}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}-}) = p_{vz}(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = -0{,}814591115,$$

$$m(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = 0{,}5865284, \quad p_m(\tau^{\text{ДТБ}}_{\text{сб2}+}) = 0{,}006478792.$$

Продолжительность третьего активного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{без}} = 12{,}584$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{\text{а}5} = 15\,497{,}362$ км, перигеем $r_{\text{п}5} = 6578{,}25$ км и углом наклона $i_5 = 0{,}8944602$ рад – “безопасная” орбита. Координаты, скорости и масса КА в момент $\tau_{\text{без}}$ выключения двигателя:

$$x(\tau_{\text{без}-}) = x(\tau_{\text{без}+}) = -15\,483{,}759 \text{ км}, \quad y(\tau_{\text{без}-}) = y(\tau_{\text{без}+}) = -265{,}532 \text{ км},$$

$$z(\tau_{\text{без}-}) = z(\tau_{\text{без}+}) = -365{,}996 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{\text{без}-}) = v_x(\tau_{\text{без}+}) = 0{,}211071 \text{ км/с},$$

$$v_y(\tau_{\text{без}-}) = v_y(\tau_{\text{без}+}) = -2{,}449215 \text{ км/с}, \; v_z(\tau_{\text{без}-}) = v_z(\tau_{\text{без}+}) = -3{,}051042 \text{ км/с},$$

$$p_x(\tau_{\text{без}-}) = -0{,}000341167, \quad p_y(\tau_{\text{без}-}) = -9{,}925271032 \cdot 10^{-6},$$

$$p_z(\tau_{\text{без}-}) = -1{,}199086427 \cdot 10^{-5}, \quad p_{vx}(\tau_{\text{без}-}) = 0{,}038782187,$$
$$p_{vy}(\tau_{\text{без}-}) = -0{,}748922381, \quad p_{vz}(\tau_{\text{без}-}) = -0{,}814447148,$$
$$p_x(\tau_{\text{без}+}) = -4{,}192288919 \cdot 10^{-5}, \quad p_y(\tau_{\text{без}+}) = 1{,}862663610 \cdot 10^{-6},$$
$$p_z(\tau_{\text{без}+}) = 3{,}375542260 \cdot 10^{-6}, \quad p_{vx}(\tau_{\text{без}+}) = 0{,}005756096,$$
$$p_{vy}(\tau_{\text{без}+}) = 0{,}122589304, \quad p_{vz}(\tau_{\text{без}+}) = 0{,}271310189,$$
$$m(\tau_{\text{без}}) = 0{,}5829330, \quad p_m(\tau_{\text{без}}) = 0{,}006518753.$$

Продолжительность третьего пассивного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{пасс}} = 5213{,}308$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на орбите с апогеем $r_{\text{а}6} = 15\,511{,}458$ км, перигеем $r_{\text{п}6} = 6576{,}991$ км и углом наклона $i_6 = 0{,}8945149$ рад. Координаты и скорости КА в момент $\tau_3^{\text{пасс}}$ включения двигателя:

$$x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5800{,}915 \text{ км}, \quad y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2325{,}058 \text{ км},$$
$$z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2873{,}476 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 3{,}552179 \text{ км/с},$$
$$v_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5{,}123342 \text{ км/с}, \quad v_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6{,}398453 \text{ км/с},$$
$$p_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0{,}000705371, \quad p_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -0{,}000362590,$$
$$p_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -0{,}000422128, \quad p_{vx}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0{,}375643830,$$
$$p_{vy}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0{,}672228633, \quad p_{vz}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0{,}795432792,$$
$$m(\tau_3^{\text{пасс}}) = 0{,}5829330, \quad p_m(\tau_3^{\text{пасс}}) = 0{,}006518753.$$

Продолжительность четвертого активного участка составляет $\Delta\tau_4^{\text{акт}} = 780{,}500$ с. КА переходит на целевую орбиту с апогеем $r_{\text{а}7} = 227\,835{,}611$ км, перигеем $r_{\text{п}7} = 6644{,}321$ км и углом наклона $i_7 = 0{,}8906535$ рад. Координаты, скорости и масса КА в момент $\tau_4^{\text{акт}}$ выключения двигателя:

$$x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6084{,}753 \text{ км}, \quad y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2384{,}542 \text{ км},$$
$$z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2973{,}927 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -2{,}938015 \text{ км/с},$$
$$v_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6{,}263591 \text{ км/с}, \quad v_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7{,}730739 \text{ км/с},$$
$$p_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0{,}000708160, \quad p_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0{,}000286427,$$
$$p_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0{,}000340122, \quad p_{vx}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -0{,}318610391,$$
$$p_{vy}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0{,}697696303, \quad p_{vz}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0{,}821832874,$$
$$m(\tau_4^{\text{акт}}) = 0{,}3599331, \quad p_m(\tau_4^{\text{акт}}) = 0{,}010719865.$$

На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. Масса спутника на целевой орбите (полезная масса) $m_{\text{п}} = 0{,}2963061$ (6666,888 кг). В момент $\tau_{\text{ц}}$ происходит последнее включение двигателя для понижения высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до условной границы атмосферы.

Для удобства при расчетах скачок массы (после отстыковки спутника) учитывается в момент последнего включения двигателя. Продолжительность четвертого пассивного участка (пассивного полета ЦБ на целевой орбите) $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{\text{ц}} = 197\,376{,}995$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на орбите с апогеем $r_{\text{а}8} = 226\,259{,}913$ км, перигеем $r_{\text{п}8} = 6643{,}293$ км и углом наклона $i_8 = 0{,}8905128$ рад. Координаты и масса ЦБ в момент $\tau_{\text{ц}}$ включения двигателя:

$$x(\tau_{\text{ц}-}) = x(\tau_{\text{ц}+}) = -226\,257{,}921 \text{ км}, \quad y(\tau_{\text{ц}-}) = y(\tau_{\text{ц}+}) = 949{,}323 \text{ км},$$
$$z(\tau_{\text{ц}-}) = z(\tau_{\text{ц}+}) = 0{,}031 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{\text{ц}-}) = v_x(\tau_{\text{ц}+}) = -0{,}000838 \text{ км/с},$$
$$v_y(\tau_{\text{ц}-}) = v_y(\tau_{\text{ц}+}) = -0{,}199407 \text{ км/с}, \quad v_z(\tau_{\text{ц}-}) = v_z(\tau_{\text{ц}+}) = -0{,}246448 \text{ км/с},$$
$$p_x(\tau_{\text{ц}-}) = -7{,}173006000 \cdot 10^{-7}, \quad p_y(\tau_{\text{ц}-}) = 1{,}993046144 \cdot 10^{-9},$$
$$p_z(\tau_{\text{ц}-}) = -3{,}571982769 \cdot 10^{-8}, \quad p_{vx}(\tau_{\text{ц}-}) = -0{,}003979552,$$
$$p_{vy}(\tau_{\text{ц}-}) = -0{,}672797915, \quad p_{vz}(\tau_{\text{ц}-}) = 0{,}617436221,$$
$$p_x(\tau_{\text{ц}+}) = 2{,}712182075 \cdot 10^{-7}, \quad p_y(\tau_{\text{ц}+}) = -1{,}138471581 \cdot 10^{-9},$$
$$p_z(\tau_{\text{ц}+}) = -6{,}622593433 \cdot 10^{-13}, \quad p_{vx}(\tau_{\text{ц}+}) = 0{,}000524475,$$
$$p_{vy}(\tau_{\text{ц}+}) = 0{,}124996420, \quad p_{vz}(\tau_{\text{ц}+}) = 0{,}154483787,$$
$$m(\tau_{\text{ц}-}) = 0{,}3599331, \quad m(\tau_{\text{ц}+}) = 0{,}0636269,$$
$$p_m(\tau_{\text{ц}-}) = p_m(\tau_{\text{ц}+}) = 0{,}010719865.$$

Продолжительность пятого (последнего) активного участка составляет $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T = 0{,}250$ с – ЦБ переводится на орбиту, касающуюся границы атмосферы с апогеем $r_{\text{а}9} = 226\,259{,}913$ км, перигеем $r_{\text{п}9} = 6478{,}25$ км и углом наклона $i_9 = 0{,}8905128$ рад. Координаты, скорости и масса ЦБ в момент T выключения двигателя:

$$x(T) = -226\,257{,}922 \text{ км}, \quad y(T) = 949{,}274 \text{ км},$$
$$z(T) = -0{,}030 \text{ км}, \quad v_x(T) = -0{,}000826 \text{ км/с},$$
$$v_y(T) = -0{,}196984 \text{ км/с}, \quad v_z(T) = -0{,}243454 \text{ км/с},$$
$$p_x(T) = 2{,}712182120 \cdot 10^{-7}, \quad p_y(T) = -1{,}137397235 \cdot 10^{-9},$$
$$p_z(T) = 6{,}655346255 \cdot 10^{-13}, \quad p_{vx}(T) = 0{,}000524407,$$
$$p_{vy}(T) = 0{,}124996420, \quad p_{vz}(T) = 0{,}154483787,$$
$$m(T) = 0{,}0635556, \quad p_m(T) = 0{,}010731902.$$

Величины импульсов довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО:

$$\Delta v_{\text{дов}1} = 0{,}029677 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов}2} = 0{,}491271 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов}3} = 0{,}979052 \text{ км/с}.$$

Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ДТБ): 199,034 кг (0,0088460). Расход топлива на повышение высоты перигея до 200 км (выход на безопасную орбиту): 80,897 кг (0,0035954). Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ЦБ): 1,606 кг ($7{,}1361228 \cdot 10^{-5}$). Общий расход топлива на сброс ДТБ и ЦБ: 281,536 кг (0,0125127).

Соответствие фазовых и сопряженных переменных в началах и концах пассивных участков можно проверить с помощью численного интегрирования. Условия принципа максимума Понтрягина можно проверить путем подстановки фазовых, сопряженных переменных и числовых множителей Лагранжа в соответствующие формулы, при этом для проверки условий трансверсальности можно использовать технологию численно-аналитического дифференцирования. Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам. Для численного интегрирования использовался метод Дормана–Принса 8 (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев И.С., Проскуряков А.И.* Оптимизация перелета КА со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу Земли // А и Т. 2023. № 3. С. 22–43.
2. *Макаров Ю.Н.* Мониторинг техногенного засорения космического пространства. Проблемы и решения // Наноиндустрия. 2019. № 1(87). С. 6–14.
3. *Ведешин Л.А.* Концепция создания системы мониторинга и управления экологическим состоянием околоземного космического пространства // Тр. ИПА РАН. 2019. № 51. С. 26–31.
4. *Пикалов Р.С., Юдинцев В.В.* Обзор и выбор средств увода крупногабаритного космического мусора // Тр. МАИ. 2018. Выпуск 100.
5. *Shan M., Guo J., Gill E.* Review and comparison of active space debris capturing and removal methods // Progr. Aerospac. Sci. 2015. V. 80. P. 18–32.
6. *Трушляков В.И., Юткин Е.А.* Обзор средств стыковки и захвата объектов крупногабаритного космического мусора // Омский научный вестник. 2013. № 2. С. 56–61.
7. *Pelton J.N.* New solutions for the space debris problem, Springer, 2015, 94 p.
8. *Григорьев И.С., Проскуряков А.И.* Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу // Инжен. журн.: наука и инновации. 2019. № 4(88). https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-4-1869
9. *Григорьев И.С., Проскуряков А.И.* Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I) // Инжен. журн.: наука и инновации. 2019. № 9(93). https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1917
10. *Григорьев И.С., Проскуряков А.И.* Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть II) //

Инжен. журн.: наука и инновации. 2019. № 10(94).
https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1925

11. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
12. *Григорьев И.С., Григорьев К.Г.* Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 4. С. 358–366.
13. *Григорьев И.С.* Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. факультете МГУ, 2005.
14. *Григорьев К.Г., Григорьев И.С., Заплетин М.П.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. факультете МГУ, 2007.
15. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
16. *Исаев В.К., Сонин В.В.* Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1963. № 6(3). С. 1114–1116.
17. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.
18. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
19. Численно-аналитическое дифференцирование ext_value
http://mech.math.msu.su/ iliagri/ext_value.htm
20. *Дубошин Г.Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
21. *Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н.* Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли // Космические исследования. 1971. Т. IX, вып. 2. С. 163–172.
22. *Самохин А.С.* Методика построения экстремалей Понтрягина в задачах сквозной траекторной оптимизации межпланетных перелетов с учетом планетоцентрических участков: дис. канд. физ. матем. наук 01.02.01 / Самохин А.С. М., 2021. 157 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 24.08.2023

После доработки 06.11.2023

Принята к публикации 21.12.2023

Нелинейные системы

© 2024 г. Ба Хю НГУЕН (leningrat206@gmail.com)
(ИПМаш РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ВЫХОДУ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛУРЬЕ В ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

Рассмотрена задача стабилизации выходных переменных нелинейной системы типа Лурье в заданном множестве в любой момент времени. Для решения задачи использовалось специальное преобразование выхода, позволяющее свести исходную задачу с ограничениям по выходу к задаче без ограничений по вспомогательной переменной. Для новой системы получены нелинейные законы управления с использованием техники линейных матричных неравенств (ЛМН). Приведены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода и подтверждающие теоретические выводы.

Ключевые слова: нелинейная система типа Лурье, стабилизация, нелинейное управление, замена координат, устойчивость, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024010049

1. Введение

Гарантия желаемого качества переходных процессов в исследуемых системах представляет собой один из ключевых критериев при синтезе систем автоматического управления. Применение классических методов управления, таких как метод модального управления [1], адаптивно-робастного управления [2, 3] и т.д., позволяет обеспечить качество регулирования только в установившемся режиме. Переходной же режим остается неконтролируемым.

В [4–6] изложены проблемы управления линейными объектами с гарантией нахождения регулируемых сигналов в заданных множествах в любой момент времени, т.е. обеспечивается качество регулирования не только в установившемся режиме, но и в переходном. Такие задачи часто встречаются на практике, например при управлении электроэнергетическими системами для поддержания частоты и напряжения электрогенераторов в заданных диапазонах [7, 8], при управлении процессом стабилизации пластового давления добычи нефти, где давление в устье скважины должно строго принадлежать заданной полосе [9] и т.д. Для решения таких задач в [4, 5] предложен метод

[1] Исследование выполнено в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № 121112500298-6 (ЕГИСУ НИОКТР).

на основе специального преобразования выхода, позволяющий свести исходную задачу управления с ограничениями по выходу к новой задаче управления без ограничений по вспомогательной переменной. Проблемы управления для класса линейных объектов были хорошо изучены и решены в [4], однако для нелинейных систем типа Лурье они остаются еще открытыми.

В статье рассматриваются системы в форме Лурье и ставится задача стабилизации в заданном множестве выходных переменных таких систем с неустойчивой линейной частью и при наличии неизвестных ограниченных возмущений. Статья организована следующим образом. В разделе 2 сформулирована задача стабилизации регулируемых переменных нелинейных систем типа Лурье в заданных множествах. В разделе 3 предложены методы синтеза управления. В разделе 4 рассмотрены численные примеры в Matlab, иллюстрирующие теоретические результаты.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathbb{R}^{n\times m}$ — множество всех $n\times m$ вещественных матриц с евклидовой нормой $\|\cdot\|$; $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A\succ 0$ ($A\prec 0$) означает, что A — положительно определенная матрица (отрицательно определенная матрица); $A\succeq 0$ ($A\preceq 0$) означает, что A — неотрицательно определенная матрица (непопожительно определенная матрица); $I, 0, diag\{\cdot\}$ — единичная, нулевая и диагональная матрица (соответствующей размерности); $\mathbf{1_m}\in\mathbb{R}^m$ — вектор, все m элементов которого равны 1; $col\{\cdot\}\in\mathbb{R}^m$ — вектор-столбец в $\mathbb{R}^m$; символ "$\star$" обозначает симметричный блок в симметричной матрице.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную динамическую систему типа Лурье

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)+G\phi(z(t))+Df(t),\\ y(t) &= Lx(t),\quad z(t)=Cx(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где $t\geqslant 0$; $x(t)\in\mathbb{R}^n$ — вектор измеряемых состояний; $u(t)\in\mathbb{R}^m$ — сигнал управления; $y(t)=col\{y_1(t),\dots,y_m(t)\}\in\mathbb{R}^m$ — регулируемый выходной сигнал; $f(t)\in\mathbb{R}^l$ — неизвестное возмущение такое, что $|f(t)|\leqslant\bar{f}$; $z(t)\in\mathbb{R}^q$ — аргумент нелинейности ϕ; матрицы $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $G\in\mathbb{R}^{n\times q}$, $D\in\mathbb{R}^{n\times l}$, $L\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{q\times n}$ известны. Пара матриц (A,B) управляема, а (A,L) – наблюдаема. Система (1) имеет относительную степень, равную $\mathbf{1_m}$ (т.е. $det(LB)\neq 0$ [10, 11]). Неизвестная нелинейность $\phi(\cdot):\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$ удовлетворяет секторным ограничениям, т.е. для всех z, $\phi(z)=col\{\phi_1(z_1),\dots,\phi_q(z_q)\}\in\mathbb{R}^q$ выполнены условия

$$k_{1i}\leqslant\frac{\phi_i(z_i)}{z_i}\leqslant k_{2i},\quad\forall z_i\neq 0,\ i=1,\dots,q,\tag{2}$$

где k_{1i}, k_{2i} — некоторые известные константы.

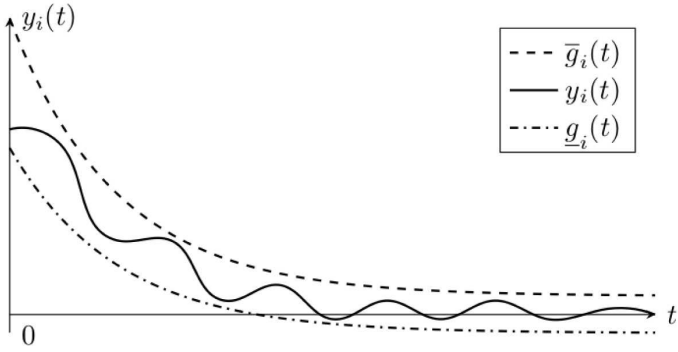


Рис. 1. Частная иллюстрация цели управления.

Цель работы — синтез закона управления, стабилизирующего выходной сигнал $y(t)$ объекта (1) в следующем заданном множестве в любой момент времени:

$$\mathcal{Y} = \left\{ y(t) \in \mathbb{R}^m : \underline{g}_i(t) < y_i(t) < \overline{g}_i(t),\ i = 1, \ldots, m \right\},\quad \forall t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\underline{g}_i(t)$ и $\overline{g}_i(t)$ — ограниченные дифференцируемые функции вместе с ограниченными первыми производными. Данные функции могут выбираться разработчиками по требованиям к работе системы. Для иллюстрации цели поставленной задачи на рис. 1 показана трубка, в которой выходной сигнал должен находиться в любой момент времени.

3. Метод решения

Согласно [4, 5] введем преобразование выхода с помощью функции

$$\varepsilon(t) = \Phi(y(t), t), \tag{4}$$

где $\varepsilon(t) = col\{\varepsilon_i(t), i = 1, \ldots, m\} \in \mathbb{R}^m$; функция $\Phi : \mathcal{Y} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемая функция по всем аргументам, заданная в диагональной форме и удовлетворяющая следующим условиям:

(а) существует обратное отображение

$$y = \Phi^{-1}(\varepsilon, t), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^m,\quad t \geqslant 0; \tag{5}$$

(б) $\Phi^{-1}(\varepsilon, t)$ — дифференцируемая функция по ε и t, $\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} \succ 0, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^m$ и $t \geqslant 0$;

(в) $\underline{g}_i(t) < \Phi_i^{-1}(\varepsilon_i, t) < \overline{g}_i(t),\ i = 1, \ldots, m,\ \forall \varepsilon_i \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant 0$;

(г) $\left| \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial t} \right| < \gamma$ для ε и $t \geqslant 0$, где $\gamma > 0$ — некоторая константа, определенная преобразованием (4).

В данной работе рассмотрены функции $\Phi_i^{-1}(\varepsilon_i, t)$, зависящие от $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ и t, поэтому матрица $\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}$ имеет диагональную форму. Чтобы сформулировать закон управления, требуется знание о динамике переменной $\varepsilon(t)$. Для этого берем полную производную по времени функции $y(t)$ с учетом (5)

$$\dot{y} = \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t}. \tag{6}$$

Принимая во внимание (1) с учетом $det\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right) \neq 0$, перепишем (6) в виде

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \left[LAx + LBu + LG\phi + LDf - \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t}\right]. \tag{7}$$

В выражении (7) $LDf(t)$ и $\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial t}$ являются ограниченными величинами, поэтому сделаем замену $\psi(t) = LDf(t) - \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial t}$. Тогда $|\psi(t)| \leqslant \kappa$, где $\kappa = \|LD\|\bar{f} + \gamma$. С учетом последней замены перепишем выражение (7) в виде

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \Big[LAx + LBu + LG\phi + \psi\Big]. \tag{8}$$

Напомним основной результат из [4] для решения поставленной задачи.

Теорема 1. Пусть условия (а)–(г) *выполнены для преобразования* (4). *Если существует такой закон управления* $u(t)$, *что решения* (8) *и* (1) *ограничены, то* $y(t) \in \mathcal{Y}$.

Замечание 1. Условия (а)–(г) — это лишь условия на выбор вида функции преобразования (4). При выполнении только данных условий не гарантируется выполнение условия (3). Так, если траектории $\varepsilon(t)$ уходят на бесконечность за конечное время, то из этого следует, что $y(t)$ стремится к одной из границ трубки, заданной в условии (3). Поэтому после выбора функции преобразования выхода согласно условиям (а)–(г) требуется получить закон управления, который бы гарантировал ограниченность траекторий $\varepsilon(t)$. Теорема 1 позволяет свести задачу управления (1) с ограничениями (3) по выходу $y(t)$ к задаче управления без ограничения по переменной $\varepsilon(t)$.

Найдем управление $u(t)$, обеспечивающее ограниченность $\varepsilon(t)$. Для этого рассмотрим функцию Ляпунова вида $V = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$. Согласно (8) получим

$$\dot{V} = \varepsilon^{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon} = \varepsilon^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \Big[LAx + LBu + LG\phi + \psi\Big]. \tag{9}$$

Введем множество Ω как открытый Евклидовый шар в $\mathbb{R}^m$, т.е.

$$\Omega = \Big\{\varepsilon \in \mathbb{R}^m : |\varepsilon| < \sqrt{2c},\ c > 0\Big\}, \tag{10}$$

где c — некоторое заданное положительное число. Во множестве Ω планируется стабилизировать траекторию $\varepsilon(t)$. Тогда для того, чтобы $\varepsilon(t)$ осталось в Ω, достаточно обеспечить отрицательность производной функции Ляпунова для всех ε, не принадлежащих множеству Ω, т.е. $\dot{V} < 0,\ \forall \varepsilon \notin \Omega$ (см. устойчивость по вход-состоянию [12]). Производная функции Ляпунова в (9) содержит матрицу $\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}$, которая является положительно определенной. В частности, если объект управления (1) является одномерным, то $\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}$ является положительной скалярной величиной, не влияющей на знак выражения $\dot{V} < 0$. При этом закон управления возможно синтезировать с помощью техники ЛМН, приведенной в [6]. Ниже будут приведены процедуры синтеза управления для данного частного случая и затем расширены на общий случай для многомерных систем.

Замечание 2. Условие секторной нелинейности (2) можно переписать в форме ограничения по норме, т.е. $|\frac{\phi_i(z_i)}{z_i}| \leqslant \overline{k}_i = \max\{|k_{1i}|,\ |k_{2i}|\}$. Отсюда следует, что $|\phi(z)| \leqslant \mu|z|$, где $\mu = \sqrt{q}\max_i\{\overline{k}_i\},\ i = 1, \ldots, q$. При переходе от исходного сектора нелинейности к новому сектору нелинейности будет расширен диапазон нелинейности ($[k_{1i}, k_{2i}] \subset [-\mu, \mu]$). Далее будет синтезирован регулятор при любой нелинейности в новом секторе, значит, данный регулятор может справиться с нелинейностью в исходном секторе, т.е. регулятор более "робастный" к нелинейности.

3.1. Одномерные системы

Зададим кусочно-непрерывный закон управления в виде

$$u = -(LB)^{-1}[K\varepsilon + LAx + \mu \operatorname{sign}(\varepsilon)\|LG\|\|C\||x|], \tag{11}$$

где $K \in \mathbb{R}$ — искомый коэффициент усиления в управлении, функция $\operatorname{sign}(\varepsilon)$ определяется как

$$\operatorname{sign}(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geqslant 0, \\ -1, & \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Сформулируем следующую теорему для одномерной системы.

Теорема 2. Пусть для преобразования (4) *выполнены условия* (а)–(г), $\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} > 0$ *для любых* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *и* $t \geqslant 0$. *Пусть для заданных чисел* c, $\alpha > 0$ *существуют положительное число* K *и положительные коэффициенты* τ_i, $i = 1, 2$ *такие, что выполнены неравенства*

$$\begin{bmatrix} -K + \alpha + 0{,}5\tau_1 & 0{,}5 \\ \star & -\tau_2 \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{12}$$
$$-c\tau_1 + \kappa^2\tau_2 \leqslant 0.$$

Тогда закон управления (11) *обеспечивает целевое условие* (3).

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Утверждение 1. Пусть заданы блок-матрицы

$$M = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ \star & Q \end{bmatrix} \succ 0, \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ \star & N_{22} \end{bmatrix} \prec 0,$$

где $Q, N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— диагональные матрицы. Тогда матрица*

$$MN = \begin{bmatrix} QN_{11} & QN_{12} \\ \star & QN_{22} \end{bmatrix}$$

является отрицательно определенной.

Утверждение 1 применяется для доказательства основного результата данного подраздела, который будет сформулирован далее. Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Зададим кусочно-непрерывный закон управления в виде

$$u = -(LB)^{-1}\left[K\varepsilon + LAx + \bar{\sigma}\mu\mathrm{Sign}(\varepsilon)\left\|\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\right\|\|LG\|\|C\||x|\right], \tag{13}$$

где $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — матрица коэффициентов управления; $\bar{\sigma}$ — константа, определенная преобразованием (4). Функция $\mathrm{Sign}(\varepsilon)$ определяется как $\mathrm{Sign}(\varepsilon) = col\{\mathrm{sign}(\varepsilon_i), i = 1, \ldots, m\}$.

Подставив управление (13) в (8), получим замкнутую систему

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\left[-K\varepsilon - \bar{\sigma}\mu\mathrm{Sign}(\varepsilon)\left\|\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\right\| \times \right. \tag{14}$$
$$\left. \times \|LG\|\|C\||x| + LG\phi + \psi\right].$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть для преобразования (4) *выполнены условия* (а)–(г), $0 \prec \frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon} \preceq \overline{\sigma}I$ *для любых* $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ *и* $t \geqslant 0$. *Пусть для заданного числа* $c > 0$ *существуют диагональная матрица* $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и положительные коэффициенты* τ_i, $i = 1, 2$ *такие, что при любых* $\sigma \in (0, \overline{\sigma}]$ *и* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *разрешимы следующие линейные неравенства:*

$$\begin{bmatrix} -K + [(0{,}5\tau_1 - \alpha)\sigma + \beta]I & 0{,}5I \\ \star & -\tau_2\sigma I \end{bmatrix} \preceq 0,$$
$$-c\tau_1 + \kappa^2\tau_2 \leqslant 0. \tag{15}$$

Тогда закон управления (13) *обеспечивает целевое условие* (3).

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Замечание 3. Техника ЛМН и S-процедура позволяют анализировать устойчивость по вход-состоянию замкнутой системы при воздействии неизвестных ограниченных возмущений. Более того, задача нахождения коэффициента управления по ε в (11), (13) может быть сведена к задаче нахождения допустимого решения (12), (15), что легко решается с помощью популярных решателей для полуопределенного программирования (как SEDUMI [14], SDPT3 [15], CSDP [16] и др.)

Замечание 4. Видно, что параметр c в (12), (15) связан с радиусом открытых шаров Ω, в которых притягиваются траектории системы $\varepsilon(t)$ (радиус шара равен $\sqrt{2c}$). Если уменьшим значение c, то уменьшится радиус шара и, в свою очередь, предельное значение $\varepsilon(t)$. Поэтому при уменьшении предельного значения $\varepsilon(t)$ колебание переменной $y(t)$ во множестве $\mathcal{Y}$, вызванное влиянием внешнего возмущения $f(t)$, также уменьшается.

4. Численные примеры

4.1. Пример 1. Одномерная система

Рассмотрим неустойчивый объект (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$f(t) = 0{,}1 + \sin(3t) + 0{,}5sat(d(t)),\ \phi(z) = \sin(z).$$

где $sat\{\cdot\}$ — функция насыщения, $d(t)$ — белый шум с мощностью шума и времени выборки 0,1. Тогда $\bar{f} = 1{,}6$ и $\mu = 1$.

Зададим функцию $\varepsilon(t)$ в виде

$$\varepsilon(t) = \ln\left(\frac{y(t) - \underline{g}(t)}{\overline{g}(t) - y(t)}\right).$$

Откуда выразим обратную функцию $\Phi^{-1}(\varepsilon(t), t)$ как

$$\Phi^{-1}(\varepsilon, t) = \frac{\overline{g}(t)e^{\varepsilon} + \underline{g}(t)}{e^{\varepsilon} + 1}.$$

Для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant 0$ имеем

$$\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = \frac{e^{\varepsilon}(\overline{g}(t) - \underline{g}(t))}{(e^{\varepsilon} + 1)^2} > 0$$

и

$$\left|\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t}\right| = \left|\frac{\dot{\overline{g}}(t)e^{\varepsilon} + \dot{\underline{g}}(t)}{e^{\varepsilon} + 1}\right| \leqslant \max\left\{\sup_{t \geqslant 0} |\dot{\overline{g}}(t)|, \sup_{t \geqslant 0} |\dot{\underline{g}}(t)|\right\} = \gamma. \tag{16}$$

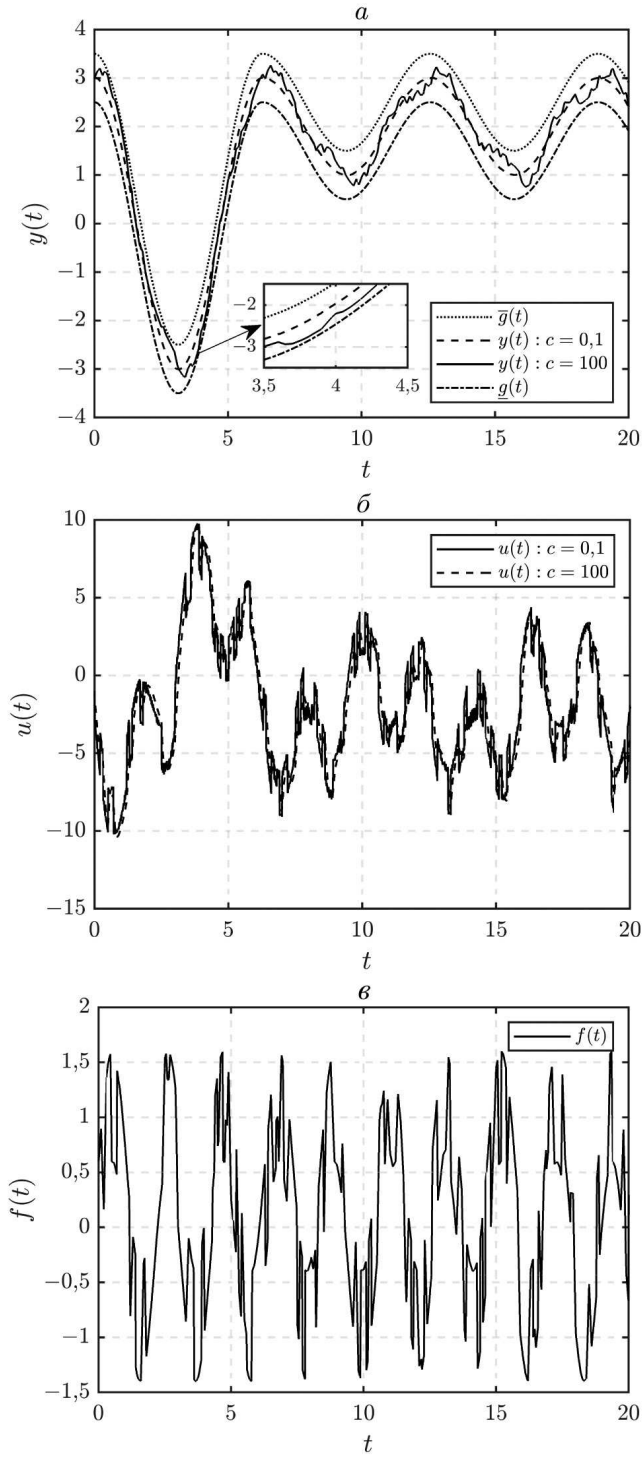


Рис. 2. Переходные процессы выхода $y(t)$ ($а$), управления $u(t)$ ($б$), возмущения $f(t)$ ($в$) в замкнутой системе при $c = 0{,}1$ и $c = 100$.

Функции $\underline{g}(t)$ и $\overline{g}(t)$ зададим как

$$\overline{g}(t) = \begin{cases} -3\cos(t) + 0{,}2, & t < 2\pi, \\ \cos(t) + 2{,}2, & t \geqslant 2\pi, \end{cases}$$

$$\underline{g}(t) = \begin{cases} 3\cos(t) - 0{,}2, & t < 2\pi, \\ \cos(t) + 1{,}8, & t \geqslant 2\pi. \end{cases}$$

Запишем закон управления (11) в виде

$$u = -(LB)^{-1}\left[K\ln\left(\frac{y-\underline{g}}{\overline{g}-y}\right) + LAx + \mu\text{sign}\left(\ln\left(\frac{y-\underline{g}}{\overline{g}-y}\right)\right)\|LG\|\|C\||x|\right].$$

Принимая во внимание (16), найдем $\gamma = 3$ и $\kappa = 8{,}6$. С помощью пакета YALMIP [17] и решателя SEDUMI найдем решение неравенства (12). Для $c = 100$, $\alpha = 2$ найдены $\tau_1 = 3{,}10$, $\tau_2 = 4{,}14$, $K = 6{,}54$. Для $c = 0{,}1$, $\alpha = 2$ найдены $\tau_1 = 45{,}47$, $\tau_2 = 0{,}04$, $K = 35{,}36$.

Переходные процессы в $y(t)$, $u(t)$ и $f(t)$ при $x(0) = col\{1, 1\}$ показаны на рис. 2. Из рис. 2,*а* видно, что выходной сигнал $y(t)$ никогда не достигает границ заданного множества. Заметим также из графика, что чем меньше значение параметра c, тем лучше подавляется влияние возмущений. На рис. 2,*б* колебания управляющего сигнала объясняются наличием возмущения $f(t)$ в системе.

4.2. Пример 2. Многомерная система

Продемонстрируем качество управления на неустойчивом объекте с двумя входами и двумя выходами со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\phi(z) = col\{z_1 + \sin(z_1), \sin(z_2)\},$$

где $f(t)$ определено, как в примере 1. Тогда $\bar{f} = 1{,}6$ и $\mu = 2$.

Пусть $\Phi(y(t), t) = diag\{\Phi_1(y_1(t), t), \Phi_2(y_2(t), t)\}$, где Φ_i определены, как в примере 1, т.е. $\Phi(y_i(t), t) = \ln\left(\frac{y_i(t)-\underline{g}_i(t)}{\overline{g}_i(t)-y_i(t)}\right)$, $i = 1, 2$, следовательно, $\Phi^{-1}(\varepsilon_i, t) = \frac{\overline{g}_i(t)e^{\varepsilon_i} + \underline{g}_i(t)}{e^{\varepsilon_i}+1}$. Легко видеть, что для $\varepsilon \notin \Omega$ имеем $0 \prec \frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon} \preceq \overline{\sigma}I$, где $\overline{\sigma} = \frac{1}{4}\max_i\left[\sup_{t\geqslant 0}(\overline{g}_i(t) - \underline{g}_i(t))\right]$, $i = 1, 2$.

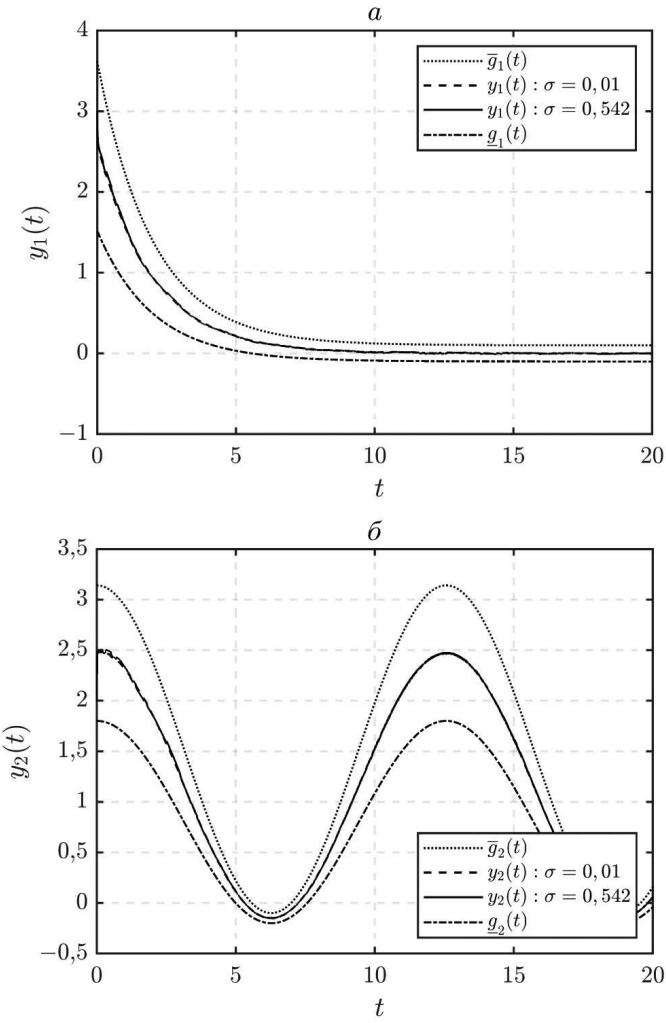


Рис. 3. Сигналы управления $u_1(t)$ ($а$), $u_2(t)$ ($б$) в замкнутой системе $c = 0{,}1$ при $\sigma = 0{,}01$ и $\sigma = 0{,}542$.

Зададим параметры функций ограничения $\underline{g}(t)$ и $\overline{g}(t)$ в виде

$$\overline{g}_1(t) = 3{,}52e^{-0{,}5t} + 0{,}1,$$
$$\underline{g}_1(t) = 1{,}62e^{-0{,}5t} - 0{,}1,$$
$$\overline{g}_2(t) = 1{,}62\cos(0{,}5t) + 1{,}52,$$
$$\underline{g}_2(t) = \cos(0{,}5t) + 0{,}8.$$

Тогда найдем

$$\gamma = \sqrt{2}\max_i \left\{ \sup_{t\geqslant 0} |\dot{\overline{g}}_i(t)|,\ \sup_{t\geqslant 0} |\dot{\underline{g}}_i(t)| \right\} = 2{,}49, \quad i = 1, 2$$

и

$$\kappa = 11{,}54, \quad \overline{\sigma} = 0{,}542.$$

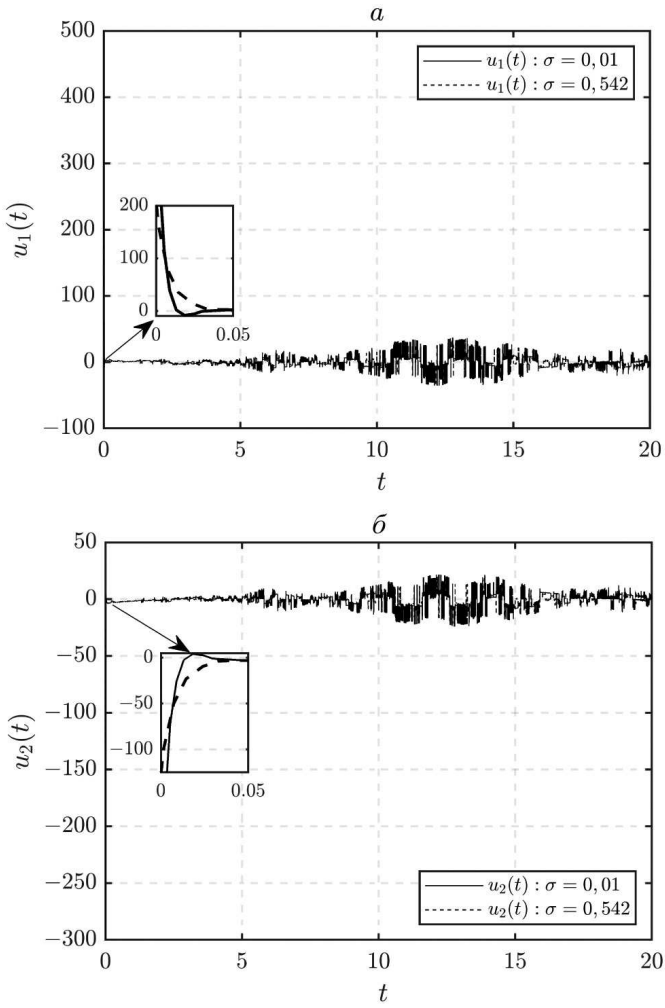


Рис. 4. Сигналы управления $u_1(t)$ ($а$), $u_2(t)$ ($б$) в замкнутой системе $c = 0{,}1$ при $\sigma = 0{,}01$ и $\sigma = 0{,}542$.

Зададим $c = 0{,}1$, найдем решения неравенства (15) при некоторых значениях $\sigma \in (0,\ 0{,}542]$:

$\tau_1 = 527{,}72$, $\tau_2 = 0{,}3$, $K = diag\{108{,}42,\ 108{,}42\}$ (для $\sigma = 0{,}01$) и

$\tau_1 = 92{,}33$, $\tau_2 = 0{,}05$, $K = diag\{39{,}26,\ 39{,}26\}$ (для $\sigma = 0{,}542$).

На рис. 3 показаны переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_2(t)$ при $x(0) = col\left\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\right\}$. На рис. 4 показаны сигналы управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Как показано на рис. 3, выходные сигналы всегда поддержаны в заданных трубках.

Замечание 5. В приведенных выше примерах предполагалось, что начальные значения выходных сигналов принадлежат заданному множеству. Однако если выходные сигналы начинаются вне заданного множества, то раз-

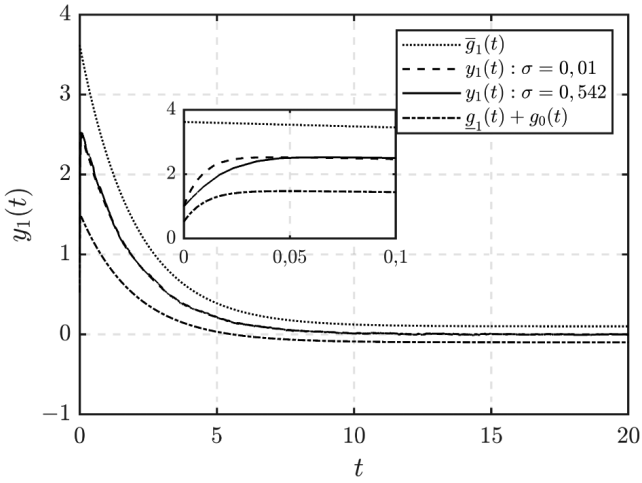


Рис. 5. Переходной процесс $y_1(t)$ при $x(0) = col\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.

работанный метод не работает, так как согласно преобразованию (3) выходные сигналы должны определяться внутри множества. Этот недостаток может быть устранен добавлением к предельным функциям аддитивной быстрой экспоненциально затухающей функции, поэтому новые пределы перекрывают начальные условия. На рис. 5 показаны переходные процессы в $y_1(t)$ при $x(0) = col\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, т.е. $y_1(0) = 1$ не принадлежит исходному множеству $\mathcal{Y}$. К функции $\underline{g}_1(t)$ добавлена функция $g_0(t) = -e^{-100t}$ так, чтобы начальное условие $y_1(0)$ было ограничено снизу новой функцией ограничения.

5. Заключение

В статье предложен новый метод стабилизации выходных переменных нелинейных систем типа Лурье в заданных множествах в любое время. Метод базируется на основе специального преобразования выхода и техники ЛМН. Использование данного преобразования позволяет перевести исходную задачу с ограничением по выходным переменным на задачу без ограничения по вспомогательной переменной. При этом закон управления для новой возмущающей замкнутой системы синтезируется с использованием метода функции Ляпунова на основе техники ЛМН. Результаты моделирования в Matlab/Simulink проиллюстрировали эффективность метода и подтвердили теоретические выводы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Подставив (11) в (8), получим замкнутую систему

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \Big[- K\varepsilon - \mu \operatorname{sign}(\varepsilon) \|LG\| \|C\| |x| + LG\phi + \psi \Big]. \tag{П.1}$$

Выберем функцию Ляпунова вида $V = \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Найдем от нее полную производную по времени вдоль решений (П.1):

$$\text{(П.2)} \quad \dot{V} = \varepsilon\dot{\varepsilon} = \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\Big[-K\varepsilon - \mu\,\mathrm{sign}(\varepsilon)\|LG\|\|C\||x| + LG\phi + \psi\Big].$$

Потребуем при $V \geqslant c$ выполнение условия $\dot{V} \leqslant -2\alpha V$, α — любое известное положительное число, т.е. $\dot{V} < 0$, $\forall\varepsilon \notin \Omega$. Так как $LG\phi \leqslant |LG\phi| \leqslant \leqslant \mu\|LG\|\|C\||x|$ и принимая во внимание ограничения $|\psi| \leqslant \kappa$, перепишем вышеназванные условия как

$$\text{(П.3)} \qquad \begin{aligned} &(-K+\alpha)\varepsilon^2 + \varepsilon\psi \leqslant 0\ \forall\,(\varepsilon,\psi):\\ &0{,}5\varepsilon^2 \geqslant c,\ \psi^2 \leqslant \kappa^2. \end{aligned}$$

Обозначив $z = col\{\varepsilon, \psi\}$, перепишем (П.3) в матричном виде:

$$\text{(П.4)} \qquad \begin{gathered} z^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -K+\alpha & 0{,}5 \\ \star & 0 \end{bmatrix} z \leqslant 0,\\ z^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} z \leqslant -c,\ z^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \star & 1 \end{bmatrix} z \leqslant \kappa^2. \end{gathered}$$

Согласно S-процедуре [13] неравенства (П.4) будут выполнены, если будут выполнены условия (12). Значит система (П.1) устойчива по вход-состоянию и сигнал $\varepsilon(t)$ ограничен. Благодаря преобразованию (4), выход $y(t)$ тоже ограничен и соответственно ограничен вектор состояний $x(t)$ системы (1). Следовательно, будет ограничен сигнал управления $u(t)$ в (11). По теореме 1 целевое условие (3) будет выполнено.

Теорема 2 доказана.

Доказательство утверждения 1. Легко видеть, что матрица MN симметрична. Пусть $\lambda_i, x_i,\ i = 1,\ldots,2n$ — собственные числа и собственные векторы матрицы MN соответственно. Тогда имеем следующее соотношение:

$$x_i^{\mathrm{T}}NMNx_i = \lambda_i x_i^{\mathrm{T}}Nx_i.$$

Откуда можем выразить λ_i как

$$\lambda_i = \frac{x_i^{\mathrm{T}}NMNx_i}{x_i^{\mathrm{T}}Nx_i}.$$

Поскольку $M \succ 0$ и $N = N^{\mathrm{T}} \prec 0$, то $NMN \succ 0$, т.е. $x^{\mathrm{T}}NMNx > 0\ \forall x \neq 0$. С учетом $x^{\mathrm{T}}Nx < 0\ \forall x \neq 0$ получим, что $\lambda_i < 0,\ i = 1,\ldots,2n$. Все собственные числа симметричной матрицы MN отрицательны, значит, матрица MN является отрицательно определенной.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство теоремы 3. Выберем функцию Ляпунова вида $V = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$. Найдем полную производную по времени от функции Ляпунова вдоль решений (14) как

$$\dot{V} = \varepsilon^{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon} = \varepsilon^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\Bigg[-K\varepsilon - \bar{\sigma}\mu\,\mathrm{Sign}(\varepsilon)\left\|\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\right\|\|LG\|\|C\||x| + LG\phi + \psi\Bigg]. \tag{П.5}$$

Перепишем (П.5) в виде

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2, \tag{П.6}$$

где

$$\dot{V}_1 = -\varepsilon^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}K\varepsilon + \varepsilon^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\psi,$$

$$\dot{V}_2 = -\varepsilon^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\mathrm{Sign}(\varepsilon)\bar{\sigma}\mu\left\|\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\right\|\|LG\|\|C\||x| + \varepsilon^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}LG\phi.$$

Принимая во внимание $\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right) \leqslant \bar{\sigma}I$, можем оценить $\dot{V}_2$ как

$$\dot{V}_2 \leqslant -\left(\sum_{i=1}^{v}|\varepsilon_i|\right)\bar{\sigma}^{-1}\bar{\sigma}\mu\left\|\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\right\|\|LG\|\|C\||x| + \mu|\varepsilon|\left\|\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\right\|\|LG\|\|C\||x| \leqslant 0.$$

Из последнего неравенства следует, что условие $\dot{V} \leqslant 0$ эквивалентно $\dot{V}_1 \leqslant 0$. В данном случае $\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}$ — матрица и ею нельзя пренебречь при анализе знакоопределенности $\dot{V}$, как в предыдущем разделе. Потребуем при $V \geqslant c$ выполнение условия $\dot{V} \leqslant -2\alpha V$, α — любое известное положительное число. Принимая во внимание ограничения $|\psi| \leqslant \kappa$, перепишем вышеназванные условия как

$$-\varepsilon^{\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}K + \alpha I\right]\varepsilon + \varepsilon^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\psi \leqslant 0 \quad \forall\,(\varepsilon,\psi) : 0{,}5\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon \geqslant c, \psi^{\mathrm{T}}\psi \leqslant \kappa^2. \tag{П.7}$$

Обозначив $z = col\{\varepsilon, \psi\},\ z \in \mathbb{R}^{2m}$, перепишем (П.7) в матричном виде:

$$
\text{(П.8)} \qquad \begin{gathered} z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} K - \alpha I & 0{,}5\left(\dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \\ \star & 0 \end{bmatrix} z \leqslant 0, \\ z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -0{,}5I & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} z \leqslant -c, \quad z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \star & I \end{bmatrix} z \leqslant \kappa^2. \end{gathered}
$$

Согласно S-процедуре неравенства (П.8) будут выполнены, если будут выполнены следующие неравенства:

$$
\text{(П.9)} \qquad \begin{gathered} \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} K - \alpha I + 0{,}5\tau_1 I & 0{,}5\left(\dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \\ \star & -\tau_2 I \end{bmatrix} \prec 0, \\ -c\tau_1 + \kappa^2 \tau_2 \leqslant 0. \end{gathered}
$$

Первое неравенство из (П.9) эквивалентно как

$$
\text{(П.10)} \qquad \begin{gathered} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} & 0 \\ \star & \left(\dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} -K + (0{,}5\tau_1 - \alpha)\dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} & 0{,}5I \\ \star & -\tau_2 \dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} \prec 0. \end{gathered}
$$

Так как $\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \succ 0$ то в силу утверждения 1 последнее неравенство выполняется, если будет выполнено следующее неравенство при любом значении $\beta > 0$:

$$
\text{(П.11)} \qquad \begin{bmatrix} -K + (0{,}5\tau_1 - \alpha)\dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} & 0{,}5I \\ \star & -\tau_2 \dfrac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} \preceq -\beta I \prec 0.
$$

По условию (П.7) необходимо обеспечить $\dot{V} < 0$ при ε из множества $\{\varepsilon \in \mathbb{R}^m : |\varepsilon| \geqslant \sqrt{2c},\ c > 0\}$. Кроме того, для всех ε из данного множества имеем неопределенность интервального типа в (П.11) с $0 \prec \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} \preceq \overline{\sigma} I$. Тогда условия (П.7) будут выполнены, если (15) будут разрешимы для любых $\sigma \in (0,\ \overline{\sigma}]$. Более того, не трудно заметить, что всегда найдется такая матрица K и τ_1, $\tau_2 > 0$, что (15) разрешимы. Действительно, с помощью леммы

Шура [13] можем переписать (15) в виде

$$
\begin{gathered}
-\tau_2\sigma+\beta<0,\\
-K+[(0{,}5\tau_1-\alpha)\sigma+\beta]I+\frac{1}{\tau_2\sigma-\beta}I\preceq 0,\\
-c\tau_1+\kappa^2\tau_2\leqslant 0,\\
\tau_1>0,\ \tau_2>0,\\
\alpha>0,\ \beta>0,\ 0<\sigma\leqslant\overline{\sigma}.
\end{gathered}
\tag{П.12}
$$

Для заданного числа $c>0$ и при фиксированных значениях σ,α,β неравенства (П.12) всегда имеют конечные решения (K,τ_1,τ_2). Таким образом, согласно теореме 1 закон управления (13) со значением K, удовлетворяющим (15), обеспечивает выполнение целевого условия (3).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев В.В., Журавлева Н.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А.* Синтез систем методом модального управления. СПб.: СПб ГУ ИТМО, 2007.
2. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust Adaptive Control. Courier Corporation, 2012.
3. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
4. *Фуртат И.Б., Гущин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // АиТ. 2021. № 4. С. 121–139.
5. *Furtat I., Gushchin P.* Nonlinear feedback control providing plant output in given set // Int. J. Control. 2022. V. 95. No. 6. P. 1533–1542. https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336
6. *Нгуен Б.Х., Фуртат И.Б., Нгуен К.К.* Управление линейными объектами на базе наблюдателей с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном множестве // Дифференц. уравн. и процессы управления. 2022. № 4. С. 95–104.
7. *Furtat I., Nekhoroshikh A., Gushchin P.* Synchronization of multimachine power systems under disturbances and measurement errors // Int. J. Adaptiv. Control Signal Proc. 2022. in press. https://doi.org/10.1002/acs.3372
8. *Павлов Г.М., Меркурьев Г.В.* Автоматика энергосистем / Центр подготовки кадров РАО "ЕЭС России". СПб.: Папирус, 2001.
9. *Веревкин А.П., Кирюшин О.В.* Управление системой поддержания пластового давления с использованием моделей конечно-автоматного вида // Территория Нефтегаз. 2008. № 10. С. 14–19.
10. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами СПб.: Наука, 2000.
11. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. Springer, 1995.
12. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 3rd edition. Pearson. 2001.

13. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств М.: Ленанд, 2014.
14. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones // Optim. Method. Softwar. 1999. V. 11. No. 1. P. 625–653. https://doi.org/10.1080/10556789908805766
15. *Toh K.C., Todd M.J., Tutuncu R.H.* SDPT3-a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. // Optim. Method. Softwar. 1999. V. 11. P. 545–581. https://doi.org/10.1080/10556789908805762
16. *Borchers B.* A C library for semidefinite programming // Optim. Method. Softwar. 1999. V. 11. P. 613–623.
17. *Lofberg J.* YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB // Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No. 04CH37508). 2004. P. 284–289. https://doi.org/10.1109/CACSD.2004.1393890

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 18.03.2023

После доработки 10.10.2023

Принята к публикации 21.12.2023

Стохастические системы

© 2024 г. В.М. ВИШНЕВСКИЙ, д-р техн. наук (vishn@inbox.ru),
К.А. ВЫТОВТОВ, д-р техн. наук (vytovtov_konstan@mail.ru),
Е.А. БАРАБАНОВА, д-р техн. наук (elizavetaalexb@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА СУММАРНЫЙ РАЗМЕР БУФЕРА[1]

Рассмотрен переходной режим двухфазной системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе и ограничением на суммарный размер буфера двух фаз. Найдены нестационарные вероятности состояний системы с использованием преобразования Лапласа. Проведен численный расчет и анализ характеристик производительности системы в переходном режиме с параметрами, соответствующими оптическим сетям нового поколения.

Ключевые слова: двухфазная СМО, переходной режим, преобразование Лапласа.

DOI: 10.31857/S0005231024010056

1. Введение

Многофазные системы массового обслуживания, или так называемые тандемные сети, широко используются для описания работы телекоммуникационных систем, в которых процесс обработки заявок состоит из нескольких этапов [1]. К ним можно отнести, например, многокаскадные коммутационные системы или сеть базовых станций линейной топологии. При этом стационарный режим работы таких систем является хорошо изученным как для случая пуассоновского, так и коррелированного входного потока. Отметим лишь некоторые последние работы по данной теме [1–7].

В последние годы помимо исследования стационарного режима СМО продолжено исследование и переходного режима их работы. Например, при проектировании оптических телекоммуникационных сетей ввиду характерных для них высоких скоростей передачи информации важной задачей является исследование изменения характеристик производительности системы во времени и оценка времени переходного режима в случае перезагрузки системы или выхода из строя обслуживающих устройств [8]. Аналогичная ситуация складывается и при исследовании сетей нового поколения 5G и 6G [9]. В связи с актуальностью данной проблемы в последние годы увеличилось число

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00795, https://rscf.ru/project/23-29-00795/).

работ, посвященных изучению переходного режима работы СМО и их нестационарных марковских моделей [10–19]. Одной из первых работ, где автор ставит такую задачу для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, бесконечным буфером на первой фазе и нулевым буфером на второй фазе, является статья еще 1967 г. [20]. В дальнейших работах исследуются более сложные системы, такие как системы с временем обслуживания фазового типа [11, 12], тандемные сети различного вида [14, 15]. Следует отметить, что в большинстве данных работ авторы не приводят конечные выражения, позволяющие анализировать характеристики производительности СМО в переходном режиме, а пользуются готовыми численными методами существующих пакетов программ. Анализ устойчивости нестационарных марковских процессов с непрерывным временем, описывающих функционирование главных классов СМО с нестационарными входными потоками, в том числе изменяющихся по синусоидальному закону проведен в [10, 13, 18, 19]. В [21–23] проанализированы основные характеристики производительности однолинейных и многолинейных СМО с пуассоновским и коррелированным потоками в нестационарном режиме.

В настоящей работе исследуются нестационарные характеристики производительности двухфазной СМО с ограничением на суммарный объем буфера двух фаз. Одним из примеров реальной системы, модель которой представляет собой данная СМО, является станция технического обслуживания автомобилей с двумя этапами обслуживания: диагностикой и ремонтом. Автомобили, находящиеся в очереди на обслуживание на каждом этапе, размещаются на общей автомобильной стоянке с некоторым числом парковочных мест, что и определяет ограничение на суммарное количество автомобилей, одновременно находящихся на станции технического обслуживания. Стационарный режим данной СМО исследован в [24]. Исследование нестационарного режима такой системы в мировой литературе отсутствует, что определяет новизну настоящей статьи.

Структура статьи следующая. В разделе 3 приводятся дифференциальные уравнения, описывающие функционирование двухфазной СМО, для удобства записи которых вводятся новые функции. В разделе 4 представлено выражение для нахождения вероятностей состояний двухфазной СМО, содержащее вспомогательную матрицу, элементы которой находятся с использованием аппарата преобразования Лапласа. В разделе 5 приведены выражения для нахождения основных показателей производительности двухфазной СМО в переходном режиме. Численные результаты исследования представлены в разделе 6.

2. Постановка задачи

Рассматривается двухфазная СМО с одним однолинейным обслуживающим устройством на каждой фазе. Входной поток является пуассоновским с интенсивностью λ, время обслуживания заявок устройствами первой и вто-

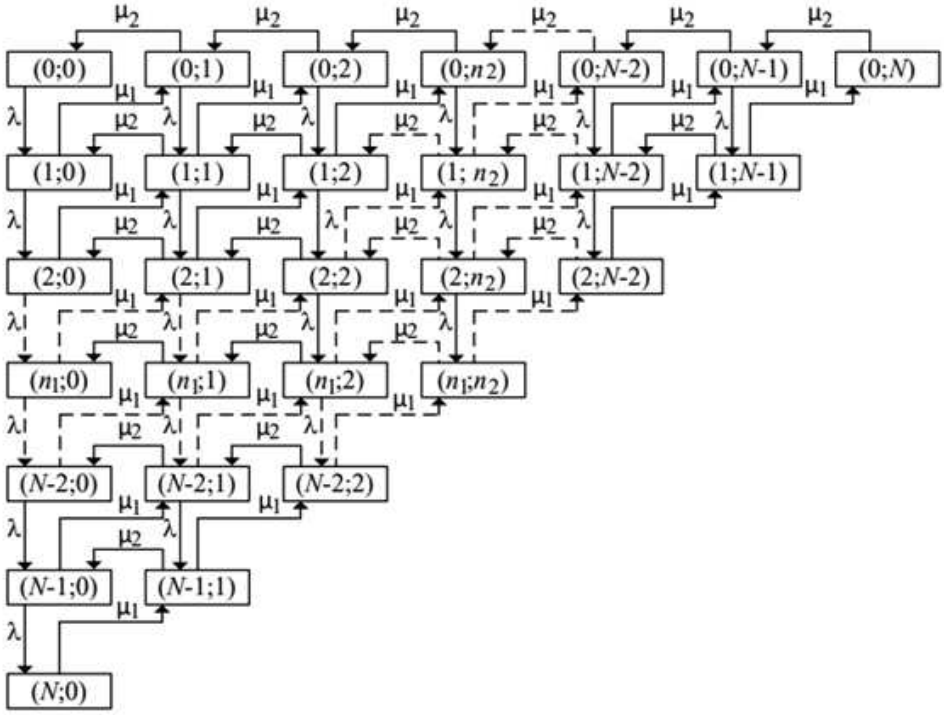


Рис. 1. Граф состояний системы.

рой фазы имеет экспоненциальное распределение с интенсивностями μ_1 и μ_2 соответственно. После завершения обслуживания заявки на первой фазе каждая заявка переходит на вторую фазу. Число заявок на первой и второй фазе может принимать значения $n_1 = \overline{0, N}$, $n_2 = \overline{0, N}$ соответственно, где N – максимальное число заявок в системе. При этом на суммарный размер буфера двух фаз системы накладывается ограничение, такое что $n_1 + n_2 \leqslant N$ в любой момент времени. Новая заявка может поступить в систему только при условии $n_1 + n_2 < N$ (рис. 1).

Целью данной работы является анализ характеристик производительности описанной выше системы в переходном режиме, таких как время переходного режима, вероятность потерь, пропускная способность, среднее число заявок в системе.

3. Построение дифференциальных уравнений, описывающих функционирование двухфазной СМО с ограничением на суммарный размер буфера

Марковский процесс, описывающий работу исследуемой СМО состоит из $R = \frac{1}{2}\left(N^2 + 3N + 2\right)$ состояний системы $S\left(n_1, n_2, t\right)$, когда в момент времени t на первой фазе обслуживается n_1 заявок, на второй фазе – n_2 заявок, при этом $n_1 + n_2 \leqslant N$ (рис. 1). Система дифференциальных уравнений для

такой СМО имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP\,(0,0,t)}{dt} &= -\lambda P\,(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t),\ \ (n_1,n_2=0);\\
\frac{dP\,(0,n_2,t)}{dt} &= -(\lambda+\mu_2)P\,(0,n_2,t) + \mu_2 P(0,n_2+1,t) + \mu_1 P(0,n_2-1,t),\\
&\qquad (n_1=0, n_2=\overline{1,N-1});\\
\frac{dP\,(0,N,t)}{dt} &= -\mu_2 P\,(0,N,t) + \mu_1 P(1,N-1,t),\ \ (n_1=0,n_2=N);\\
\frac{dP\,(n_1,0,t)}{dt} &= -\left(\lambda+\mu_2\right)P\,(n_1,0,t) + \mu_2 P(n_1,1,t) + \lambda P\,(n_1-1,0,t)\,,\\
&\qquad (n_1=\overline{1,N-1}, n_2=0);\\
\frac{dP\,(N,0,t)}{dt} &= -\mu_1 P\,(N,0,t) + \lambda P(N-1,0,t),\ \ (n_1=N,n_2=0);\\
\frac{dP\,(n_1,n_2,t)}{dt} &= -\left(\lambda+\mu_1+\mu_2\right)P\,(n_1,n_2,t) + \mu_2 P(n_1,n_2+1,t) +\\
&+ \mu_1 P(n_1+1,n_2-1,t) + \lambda P(n_1-1,n_2,t),\ \ (n_1,n_2>0, n_1+n_2<N);\\
\frac{dP\,(n_1,n_2,t)}{dt} &= -\left(\mu_1+\mu_2\right)P\,(n_1,n_2,t) + \mu_1 P(n_1+1,n_2-1,t) +\\
&\qquad + \lambda P(n_1-1,n_2,t),\ \ (n_1,n_2>0, n_1+n_2=N).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

При этом следует отметить, что хорошо известный подход к построению системы дифференциальных уравнений, предусматривающий использование различных форм записи уравнений при различных допустимых значениях n_1 и n_2, является очень неудобным для расчета и анализа характеристик СМО в переходном режиме. Для удобства дальнейшего решения и анализа системы (1) введем функции

$$
\upsilon_1\,(x,M) = \frac{|x-M+0{,}5| + x - M + 0{,}5}{2\,|x-M+0{,}5|},
\tag{2}
$$

$$
\upsilon_2\,(x,K) = \frac{|K-x-0{,}5| + K - x - 0{,}5}{2\,|K-x-0{,}5|},
\tag{3}
$$

где $M=\overline{0,N}$, $K=\overline{0,N}$. Тогда система (1) может быть записана в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{dP\,(n_1,n_2,t)}{dt} &= -\left[\lambda\upsilon_2\,(n_1+n_2,N-1) + \mu_1\upsilon_1\,(n_1,1) + \mu_2\upsilon_1\,(n_2,1)\right]\times\\
&\times P\,(n_1,n_2,t) + \mu_1\upsilon_1\,(n_2,1)\,\upsilon_2\,(n_1+n_2,N)\,P\,(n_1+1,n_2-1,t) +\\
&+ \mu_2\upsilon_2\,(n_1+n_2,N-1)\,P\,(n_1,n_2+1,t) +\\
&+ \lambda\upsilon_1\,(n_1,1)\,\upsilon_2\,(n_1+n_2,N)\,P\,(n_1-1,n_2,t)\,,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $n_1=\overline{0,N}$, $n_2=\overline{0,N}$, $n_1+n_2\leqslant N$. Описанная система может быть представлена в матричном виде:

$$
\frac{d\vec{P}\,(t)}{dt} = \mathbf{A}\vec{P}\,(t)\,,
\tag{5}
$$

где $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений (4), $\vec{P}(t) = \{P(n_1, n_2, t)\}^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец вероятностей состояний системы. Для построения матрицы $\mathbf{A}$ дополнительно введем функцию

$$\vartheta(n_k, n_l) = (N+1)\, n_k + n_l - \frac{n_k(n_k-1)}{2} + 1, \tag{6}$$

преобразующую число заявок n_k, n_l в первом и втором буфере соответственно в номер столбца или строки этой матрицы. Краткое описание функций (2), (3) и (6) приведено в Приложении. Тогда элементы матрицы системы (5), расположенные на главной диагонали, записываются в виде

$$A_{\vartheta(n_1,n_2),\vartheta(n_1,n_2)} = -\left[\lambda \upsilon_2(n_1+n_2, N) + \mu_1 \upsilon_1(n_1, 1) + \mu_2 \upsilon_1(n_2, 1)\right]. \tag{7}$$

Остальные ненулевые элементы определяются соотношениями

$$\begin{aligned} A_{\vartheta(n_1,n_2),\vartheta(n_3,n_4)} &= \mu_1 \upsilon_1(n_2, 1)\, \upsilon_2(n_1+n_2, N+1); \\ A_{\vartheta(n_1,n_2),\vartheta(n_1,n_5)} &= \mu_2 \upsilon_2(n_1+n_2, N); \\ A_{\vartheta(n_1,n_2),\vartheta(n_6,n_2)} &= \lambda \upsilon_1(n_2, 1)\, \upsilon_2(n_1+n_2, N+1). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $n_1 = \overline{0, N}$, $n_2 = \overline{0, N}$, $n_3 = n_1 + 1$, $n_4 = n_2 - 1$, $n_5 = n_2 + 1$, $n_6 = n_1 - 1$. Оставшиеся элементы $A_{i,j}$ матрицы $\mathbf{A}$ в (5) равны нулю. Новая функция (6) также необходима для упорядоченного построения вектора-столбца вероятностей состояний системы в момент времени t в уравнении (5). Действительно, в терминах n_k и n_l он имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) = \{&p(0,0,t), \ldots, p(0,N,t), p(1,0,t), \ldots, \\ &p(1,N-1,t), \ldots, p(N-1,0,t), p(N-1,1,t), p(N,0,t)\}^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где T – оператор транспонирования. Однако для корректного решения (5) необходимо использовать не двумерный массив чисел n_k и n_l при указании состояния системы, а порядковый номер от 1 до $R = \frac{1}{2}\left(N^2 + 3N + 2\right)$. Для этого, используя функцию (6), окончательно получим

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) = \{&P(1,t), P(2,t), P(3,t), P(4,t), \ldots, \\ &P(\vartheta(n_k, n_l), t), \ldots, P(\vartheta(N,0), t)\}^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $P(\vartheta(n_k, n_l), t)$ соответствует $p(n_k, n_l, t)$ в (9).

Таким образом, использование функций $\vartheta(n_k, n_l)$, $\upsilon_1(x, M)$, $\upsilon_2(x, K)$ позволяет построить матрицу коэффициентов в (5) в общем виде для любого числа заявок N.

4. Вероятности состояний двухфазной СМО в переходном режиме

Для связи вероятностей состояний системы в момент времени t с вероятностями состояний системы в некоторый начальный момент времени t_0 введем матрицу $\mathbf{L}$, порядок которой на единицу больше порядка фундаментальной матрицы системы уравнений (4) и такую что

$$\vec{P}(t) = \mathbf{L}(t - t_0)\,\vec{P}(t_0), \tag{11}$$

где $\vec{P}(t) = \{P(\vartheta(n_1, n_2), t)\}^{\mathrm{T}}$ – вектор столбец вероятностей состояний системы в момент времени t.

Применим прямое преобразование Лапласа к системе уравнений (5):

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{d\vec{P}(t)}{dt}dt = \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{A}\vec{P}(t)dt. \tag{12}$$

Тогда элемента матрицы $\mathbf{L}(t - t_0)$ определяются следующей теоремой.

Теорема 1. Элементы матрицы $\mathbf{L}(t - t_0)$ двухфазной СМО с ограничением N на суммарный размер буфера двух фаз, описываемой системой уравнений (4), имеют вид

$$L_{l,j}(t - t_0) = \sum_{k=1}^{R}(-1)^{l+j}\,\frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left.\frac{d\Delta(s)}{ds}\right|_{s=s_k}}\exp(s_k(t - t_0)), \tag{13}$$

где $\Delta(s)$ – определитель матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{A} - s\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов в (5), $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица, $s = \alpha + i\beta$ – независимая переменная в комплексной области, $i = \sqrt{-1}$, $\Delta_{li}(s)$ – определитель минора элемента B_{li} матрицы $\mathbf{B}$, s_k – k-й корень многочлена $\Delta(s)$ в случае, когда все его корни простые, $R = (N^2 + 3N + 2)/2$ – количество корней многочлена $\Delta(s)$, равное количеству дифференциальных уравнений в системе (4).

Доказательство. Учитывая, что $\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{d\vec{P}(t)}{dt}\right)dt = s\vec{P}(s) - \vec{P}(0)$, где $\vec{P}(0)$ – вектор столбец начальных условий, а также то, что в данном случае $\mathbf{A}$ – постоянная матрица, проведем преобразования

$$s\vec{P}(s) - \vec{P}(0) = \mathbf{A}\vec{P}(s) \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\vec{P}(s) - s\vec{P}(s) = \tag{14}$$
$$= -\vec{P}(0) \;\Rightarrow\; (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\,\vec{P}(s) = -\vec{P}(0).$$

В результате получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\mathbf{B}\vec{P}(s) = -\vec{P}(0) \tag{15}$$

с постоянными коэффициентами. С учетом (4) система (15) может быть записана в виде

$$
\begin{aligned}
(16)\quad & -\left[\lambda\upsilon_2\left(n_1+n_2,N-1\right)+\mu_1\upsilon_1\left(n_1,1\right)+\mu_2\upsilon_1\left(n_2,1\right)+s\right]P\left(n_1,n_2,s\right)+\\
&+\mu_1\upsilon_1\left(n_2,1\right)\upsilon_2\left(n_1+n_2,N\right)P\left(n_1+1,n_2-1,s\right)+\\
&+\mu_2\upsilon_2\left(n_1+n_2,N-1\right)P\left(n_1,n_2+1,s\right)+\\
&+\lambda\upsilon_1\left(n_1,1\right)\upsilon_2\left(n_1+n_2,N\right)P\left(n_1-1,n_2,s\right)=P\left(n_1,n_2,0\right),
\end{aligned}
$$

где $n_1=\overline{0,N}$, $n_2=\overline{0,N}$, $n_1+n_2\leqslant N$. Тогда в соответствии с (7) и (8) ненулевые элементы матрицы $\mathbf{B}$ записываются как

$$
\begin{aligned}
(17)\quad & B_{\vartheta(n_1,n_2),\vartheta(n_1,n_2)}(s)=-\left[\lambda\upsilon_2\left(n_1+n_2,N\right)+\mu_1\upsilon_1\left(n_1,1\right)+\mu_2\upsilon_1\left(n_2,1\right)+s\right];\\
&B_{\vartheta(n_1,n_2),\vartheta(n_3,n_4)}(s)=\mu_1\upsilon_1\left(n_2,1\right)\upsilon_2\left(n_1+n_2,N+1\right);\\
&B_{\vartheta(n_1,n_2),\vartheta(n_1,n_5)}=\mu_2\upsilon_2\left(n_1+n_2,N\right);\\
&B_{\vartheta(n_1,n_2),\vartheta(n_6,n_2)}(s)=\lambda\upsilon_1\left(n_2,1\right)\upsilon_2\left(n_1+n_2,N+1\right).
\end{aligned}
$$

Для нахождения изображений элементов матрицы $\mathbf{L}$ необходимо использовать линейно независимые начальные условия. Такими условиями являются:

$$
\begin{aligned}
(18)\quad & P\left(N_1,N_2,0\right)=1(N_1=\overline{0,N},N_2=\overline{0,N},N_1+N_2\leqslant N);\\
&P\left(n_1,n_2,0\right)=0(n_1\neq N_1,n_2\neq N_2).
\end{aligned}
$$

Решения системы (16) при $P\left(n_1,n_2,0\right)=1$ $(n_1=n_2=0)$, $P\left(n_1,n_2,0\right)=0$ $(n_1=\overline{1,N},\ n_2=\overline{1,N},n_1+n_2\leqslant N)$ дают первый столбец изображений элементов матрицы преобразования, решения системы (15) при $P\left(0,1,0\right)=1$ и остальных $P\left(n_1,n_2,0\right)=0$ дают второй столбец изображений элементов матрицы преобразования. Аналогично находятся все столбцы изображений элементов матрицы преобразования $\mathbf{L}\left(s-s_0\right)$. Для получения изображения матрицы $\mathbf{L}$ целесообразно использовать метод Крамера. В соответствии с этим методом элементы матрицы, являющиеся линейно независимыми решениями (16), представляют собой дроби вида

$$
(19)\qquad L_{l,j}\left(s-s_0\right)=(-1)^{l+j}\,\frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)},
$$

где $\Delta(s)$ – определитель матрицы $\mathbf{B}$, $\Delta_{jl}(s)$ – минор элемента B_{jl} матрицы $\mathbf{B}$. Теперь рассмотрим обратное преобразование Лапласа. Прежде всего отметим, что изображение элемента матрицы преобразования вероятностей (19) представляет собой правильную дробь

$$
\begin{aligned}
(20)\quad & L_{l,j}\left(s-s_0\right)=(-1)^{l+j}\,\frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)}=\\
&=(-1)^{l+j}\,\frac{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_2s^2+a_1s+a_0}{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_2s^2+b_1s+b_0}.
\end{aligned}
$$

Причем $n < m$, поскольку числитель – это определитель алгебраического дополнения элемента матрицы, определитель которой стоит в знаменателе. Тогда дробь в (20) может быть разложена на простые множители

$$L(s) = \frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)} = A_1 \frac{1}{s - s_1} + A_2 \frac{1}{s - s_2} + \ldots + A_m \frac{1}{s - s_m} = \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{1}{s - s_k}. \tag{21}$$

Для нахождения коэффициентов A_k умножим обе части (21) на $(s - s_1)$ и получим

$$L(s) = \frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)} (s - s_1) = A_1 + (s - s_1) \sum_{k=2}^{m} A_k \frac{1}{s - s_k}. \tag{22}$$

Правая часть (22) при $s \to s_1$ равна A_1, поскольку $s - s_1 \to 0$. Левая часть представляет собой неопределенность $0/0$, так как множитель $s - s_1$ присутствует и в числителе, и в знаменателе. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталя и получим левую часть в виде

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)} (s - s_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{\Delta_{j,l}(s) + (s - s_1) \frac{d\Delta_{j,l}(s)}{ds}}{\frac{d\Delta(s)}{ds}} = \frac{\Delta_{j,l}(s_1)}{\left[\frac{d\Delta(s)}{ds}\right] |_{s=s_1}}. \tag{23}$$

Учитывая (22) и (23), получим

$$A_1 = \frac{\Delta_{j,l}(s_1)}{\left[\frac{d\Delta(s)}{ds}\right] |_{s=s_1}}. \tag{24}$$

Аналогично находим k-й коэффициент в (22) как

$$A_k = \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[\frac{d\Delta(s)}{ds}\right] |_{s=s_k}}. \tag{25}$$

Таким образом, выражение (21) принимает вид

$$L(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[\frac{d\Delta(s)}{ds}\right] |_{s=s_k}} \cdot \frac{1}{s - s_k}. \tag{26}$$

Применив к (26) обратное преобразование Лапласа и проведя математические преобразования

$$L(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[\frac{d\Delta(s)}{ds}\right] |_{s=s_k}} \frac{exp(st)ds}{s - s_k} = \tag{27}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[\frac{d\Delta(s)}{ds}\right] |_{s=s_k}} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{exp(st)ds}{s - s_k} = \sum_{k=2}^{m} \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[\frac{d\Delta(s)}{ds}\right] |_{s=s_k}} exp(s_k t),$$

получим выражение для оригинала от изображения (26) в форме (12). Теорема доказана.

Подставив (27) и выражение (11), можно найти вероятности состояний двухфазной СМО в переходном режиме при заданных начальных условиях. Эти выражения позволяют расчитать и провести анализ показателей производительности рассматриваемой системы в произвольный момент времени t как в переходном, так и в стационарном режимах: время до выхода системы в стационарный режим, вероятность потерь, пропускная способность, число заявок, обслуживаемых в каждой фазе.

5. Показатели производительности двухфазной СМО в переходном режиме

5.1. Время переходного режима

Время переходного режима — это время, за которое СМО переходит в стационарный режим. В соответствии с [22] время переходного режима определяется наименьшим по модулю значением действительной части полюса изображений вероятностей состояний:

$$\tau_{tr} = \frac{k}{\alpha_{\min}}. \tag{28}$$

Здесь $\forall \alpha_j \in \Gamma$: $(\Gamma = \alpha_j, \alpha_j \geqslant \alpha_{\min} \Longrightarrow \alpha_j = \alpha_{\min})$ и $k > 0$, $k \in R$. Значение k выбирается исходя из постановки конкретной задачи. В [22] было показано, что переходной режим можно считать завершенным при $k = (3 \div 5)$.

5.2. Вероятность потерь

Так как максимальное число заявок в системе $n_1 + n_2 = N$, то все заявки в состояниях $(i, N-i)$, $i = \overline{0, N}$ будут потеряны. Учитывая, что нахождение заявок в указанных состояниях являются независимыми событиями, сумма вероятностей этих состояний в момент времени t

$$P_{loss}(t) = \sum_{i=0}^{N} P(i, N-i, t) = \sum_{i=0}^{N} P(\vartheta(i, N-i), t) \tag{29}$$

определяет вероятность потерь заявок.

5.3. Пропускная способность

Поскольку выражение (29) определяет результирующую вероятность потерь заявок в системе, то очевидно, что заявки, поступающие в систему, находящуюся в любых других состояниях, будут обслуживаться. Тогда пропускная способность в момент времени t в переходном режиме равна

$$A(t) = [1 - P_{loss}(t)]\lambda = \left[1 - \sum_{i=0}^{N} P(i, N-i, t)\right]\lambda = \tag{30}$$

$$= \left[1 - \sum_{i=0}^{N} P(\vartheta(i, N-i), t)\right]\lambda.$$

Так как пропускная способность фактически представляет собой интенсивность обслуживания системой поступивших в нее заявок, то тогда за время dt система обслуживает $A(t)dt$ заявок. Следовательно, за время переходного режима число обслуженных заявок равно

$$Z_{service\ tr} = \int_{t_0}^{t_0+\tau_{tr}} \lambda \left[1 - \sum_{i=0}^{N} P\left(\vartheta\left(i, N-i\right), t\right)\right] dt, \tag{31}$$

а число потерянных заявок равно

$$Z_{loss\ tr} = \int_{t_0}^{t_0+\tau_{tr}} \lambda \sum_{i=0}^{N} P\left(\vartheta\left(i, N-i\right), t\right) dt. \tag{32}$$

Таким образом, сумма (31) и (32) дает $\lambda\tau_{tr}$ – число заявок, поступивших за время переходного режима, что подтверждает правильность полученных соотношений.

5.4. Число заявок, обслуживаемых на каждой фазе в переходном режиме

Пусть $P\left(n_1, n_2, t\right)$ – вероятность нахождения n_1 заявок на первой фазе и n_2 – заявок на второй фазе в момент времени t, тогда число заявок на первой фазе при условии, что система находится в состоянии (n_1, n_2), равно $n_1 P\left(n_1, n_2, t\right)$. Суммируя $n_1 P\left(n_1, n_2, t\right)$ по всем возможным состояниям, получим среднее число заявок на первой фазе в момент времени t как

$$Z_{phase1}\left(t\right) = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \left[n_1 P\left(n_1, n_2, t\right)\right] = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \left[n_1 P\left(\vartheta\left(n_1, n_2\right), t\right)\right], \tag{33}$$

где $n_1 + n_2 \leqslant N$. Аналогично, среднее число заявок на второй фазе в момент времени t в переходном режиме равно

$$Z_{phase2}\left(t\right) = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \left[n_2 P\left(n_1, n_2, t\right)\right] = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \left[n_2 P\left(\vartheta\left(n_1, n_2\right), t\right)\right], \tag{34}$$

где $n_1 + n_2 \leqslant N$. Тогда среднее число заявок в системе в переходном режиме будет

$$Z\left(t\right) = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \left[\left(n_1 + n_2\right) P\left(n_1, n_2, t\right)\right] = \tag{35}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \left[\left(n_1 + n_2\right) P\left(\vartheta\left(n_1, n_2\right), t\right)\right],$$

где $n_1 + n_2 \leqslant N$.

6. Численное исследование переходного режима двухфазной СМО

Рассмотрим переходной режим работы двухфазной СМО, адекватно описывающей функционирование коммутатора полностью оптической сети. В представляемом численном эксперименте значения $\lambda = 8 \cdot 10^6$ пакетов/с, $\mu_1 = 15 \cdot 10^6$ пакетов/с, $\mu_2 = 10 \cdot 10^6$ пакетов/с $(\lambda < \mu_2 < \mu_1)$ соответствуют реальным характеристикам современных оптических сетей [25]. Здесь n_1 – число пакетов, находящихся в первой фазе обслуживания, n_2 – число пакетов, находящихся во второй фазе обслуживания, $N = n_1 + n_2 = 4$ – максимальное число пакетов в системе. Малый размер буфера в данном численном примере определяется техническими ограничениями современных оптических устройств.

Для анализа характеристик производительности рассматриваемой СМО прежде всего строится матрица $\mathbf{A}$ в соответствии с (7) и (8), затем матрица $\mathbf{B}$ в соответствии с (17). Далее записываются элементы матрицы $\mathbf{L(t)}$ в соответствии с (13). Для этого находятся полюсы функций, описывающих элементы матрицы $\mathbf{L(s - s_0)}$ в терминах преобразования Лапласа:

$$s_0 = 0, \quad s_1 = -1{,}2 \cdot 10^7, \quad s_2 = -2{,}8 \cdot 10^7,$$
$$s_{3,4} = -3{,}9 \cdot 10^7 \pm i1{,}9 \cdot 10^7, \quad s_{5,6} = -3{,}2 \cdot 10^7 \pm i9{,}9 \cdot 10^7,$$
$$s_{7,8} = -2{,}8 \cdot 10^7 \pm i1{,}2 \cdot 10^7, \quad s_{9,10} = -5{,}1 \cdot 10^7 \pm i1{,}4 \cdot 10^7,$$
$$s_{11,12} = -1{,}5 \cdot 10^7 \pm i6{,}0 \cdot 10^7, \quad s_{13,14} = -2{,}2 \cdot 10^7 \pm i4{,}0 \cdot 10^7.$$

Один из этих полюсов равен нулю, все остальные имеют отрицательную действительную часть. Это свидетельствует о наличии стационарного режима в системе. Более того, 12 из 15 полюсов являются попарно комплексно-сопряженными, что свидетельствует о колебательном характере вероятностей состояний в переходном режиме. Действительно, экспонента от комплексного числа в (12) является комбинацией тригонометрических функций в соответствии с формулой Эйлера.

Исследование полюсов изображений вероятностей состояний также позволяет вычислить постоянную времени по формуле (28) $\tau = 1/\left|\alpha_{\min}\right| = 1/5\,138\,202{,}473908113 = 1{,}9462 \cdot 10^{-7}$ с и время переходного режима $\tau_{tr} = 5\tau = 9{,}731 \cdot 10^{-7}$ с.

На рис. 2 представлена зависимость вероятностей состояний от времени для рассматриваемого случая. На рисунке обозначено: $P_{idle}(t)$ – вероятность того, что система свободна; $P_{phase1}(t)$, $P_{phase2}(t)$ – зависимости вероятностей состояний нахождения заявок только в первой и только во второй фазах обслуживания соответственно; $P_{loss}(t)$ – вероятность потерь, вычисленная в соответствии с (29).

По рис. 2 видно, что время переходного режима, вычисленное по (28), соответствует времени выхода на стационарный режим по графикам вероятностей состояний. Колебательный характер переходного режима наглядно виден по зависимости вероятности нахождения заявок на первой фазе обслу-

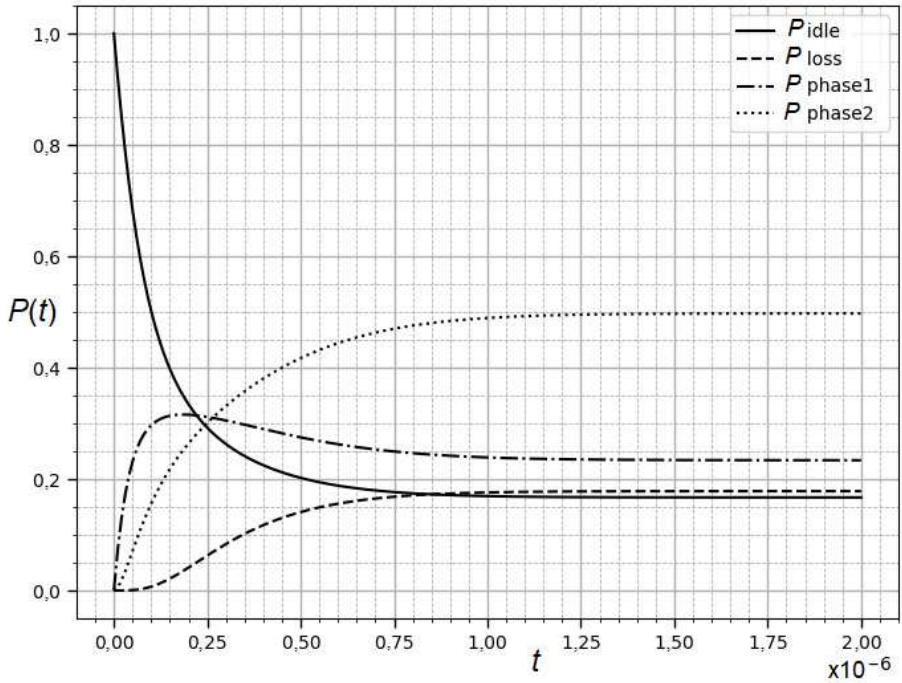


Рис. 2. Зависимость вероятностей состояний системы от времени в переходном режиме.

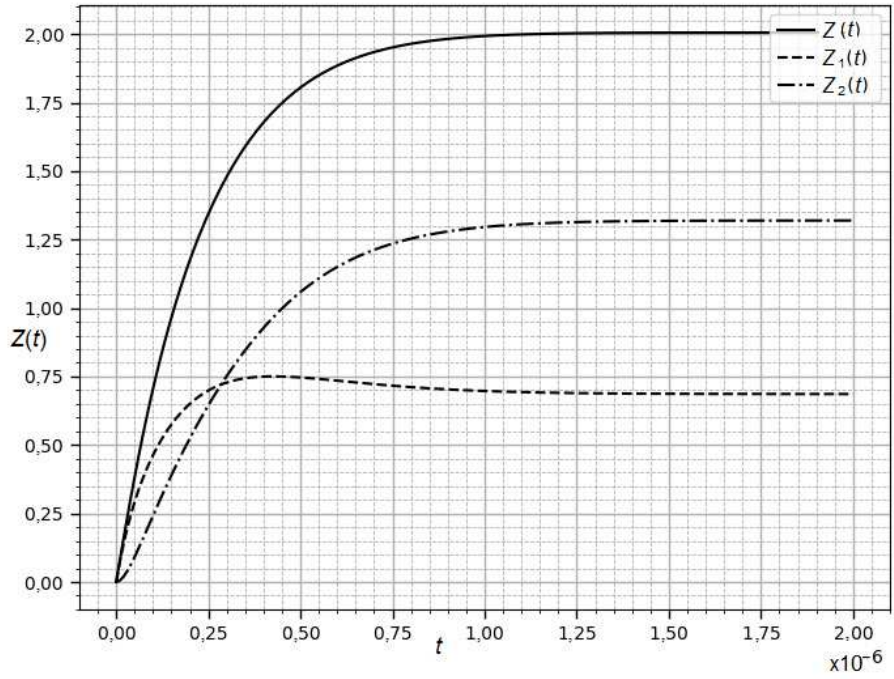


Рис. 3. Зависимость среднего числа заявок на каждой фазе от времени.

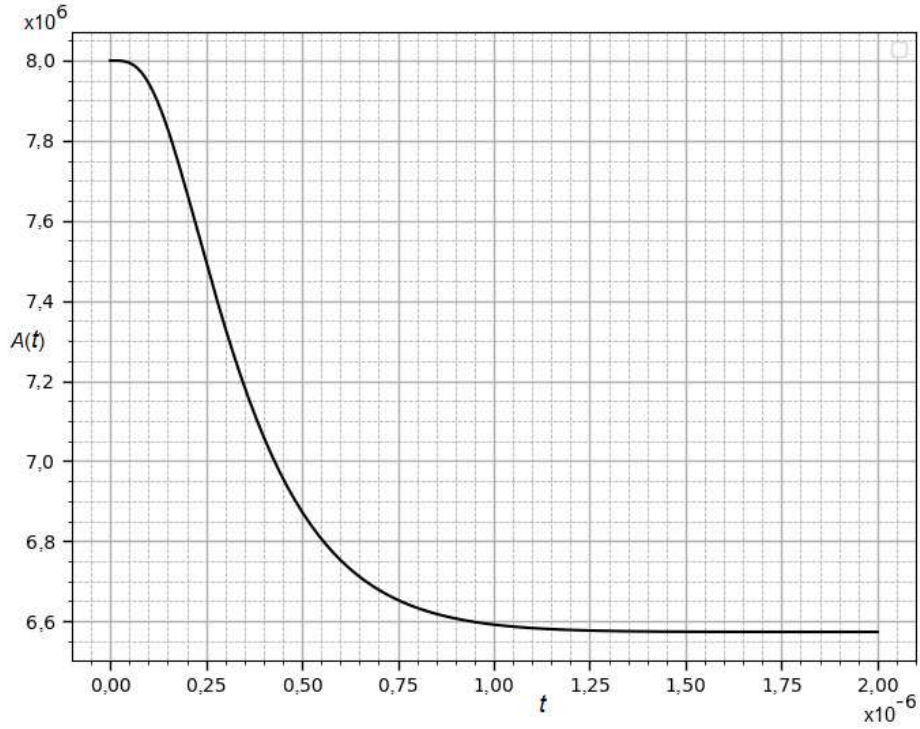


Рис. 4. Зависимость пропускной способности системы от времени в переходном режиме.

живания $P_{phase1}(t)$ (рис. 3). Отметим, что вероятности состояний в стационарном режиме, полученные авторами с использованием предлагаемого подхода, равны стационарным вероятностям, рассчитанным с использованием хорошо известной методики [24]. Действительно, из рис. 2 видно, что $\pi_{idle} = 0{,}167$, $\pi_{loss} = 0{,}172$, $\pi_{phase1} = 0{,}24$, $\pi_{phase2} = 0{,}49$, что соответствует стационарным вероятностям, рассчитанным по формулам (6) и (7), представленным в [24].

Далее показатели производительности рассматриваемой СМО расчитываются в соответствии с разделом 5 данной работы.

На рис. 4 представлена зависимость пропускной способности системы от времени в переходном режиме, вычисленная в соответствии с (30). Пропускная способность системы в начальный момент времени равна $8 \cdot 10^6$ пакетов/с и уменьшается до стационарного значения $6{,}62 \cdot 10^6$ пакетов/с. Исследование изменений пропускной способности полностью оптического коммутатора в переходном режиме позволяет получить более точные оценки его производительности с учетом возможных перезагрузок коммутатора при смене маршрутов передачи информации в полностью оптических сетях.

На рис. 5 представлены зависимости от времени количества пакетов на первой и второй фазах, а также общего количества пакетов в системе в переходном режиме, вычисленных в соответствии с (33)–(35). Видно, что до

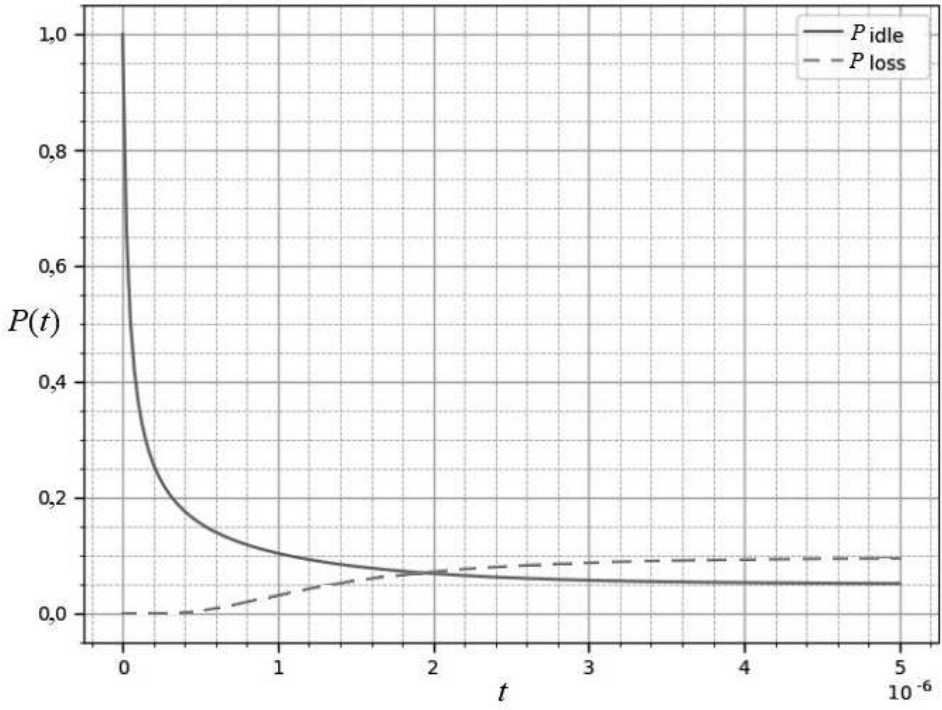


Рис. 5. Зависимость вероятностей состояний системы от времени в переходном режиме.

момента $t = 0{,}28 \cdot 10^{-7}$ с число пакетов на первой фазе превышает число пакетов на второй фазе. В то же время в стационарном режиме среднее число пакетов на первой фазе меньше, чем на второй фазе обслуживания, что очевидно, так как $\mu_1 > \mu_2$. Учитывая, что число заявок на первой и второй фазах исследуемой СМО соответствует числу пакетов, обрабатываемых на первом и втором каскадах полностью оптического коммутатора [8], полученные результаты позволяют оценить степень заполнения буферов коммутатора в течение переходного режима. Следует отметить, что исследование размера буфера полностью оптического коммутатора является необходимым для уменьшения вероятности потерь в связи с небольшим физическим размером оптического буфера и высокой скоростью передачи информации полностью оптических сетей.

При увеличении размерности буфера возрастает размерность матриц в (12), что требует дополнительных затрат вычислительных ресурсов. На рис. 4 представлен расчет двухфазной системы с объемом буфера $N = 15$: вероятности потерь $P_{loss}(t)$ и вероятности того, что система является пустой, $P_{idle}(t)$. Из графика видно, что при увеличении размера буфера вероятность потерь в стационарном режиме уменьшилась – $\pi_{loss} = 0{,}1$, а время переходного режима увеличилось – $\tau_{tr} = 4 \cdot 10^{-7}$ с.

7. Заключение

В данной работе рассмотрен и проанализирован переходной режим двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным законом распределения времени обслуживания на каждой фазе и ограничением на суммарный размер буфера двух фаз. Ранее нестационарный режим такой системы не рассматривался в мировой литературе. Однако он представляет интерес для различных приложений, в частности при проектировании коммутаторов полностью оптической сети. Следует отметить, что исследование нестационарного режима полностью оптического коммутатора позволяет более точно оценить его характеристики производительности, существенно отличающиеся от стационарных значений в связи с высокой скоростью передачи информации полностью оптических сетей [8].

Представлена система дифференциальных уравнений, описывающих функционирование данной СМО, решение которой записано с использованием преобразования Лапласа. Получены характеристики производительности системы в переходном режиме, такие как вероятность потерь, пропускная способность, среднее число обслуживаемых заявок и время переходного режима. Очевидно, что с увеличением размера буфера получение численных решений характеристик двухфазной СМО с ограниченным буфером является трудоемкой в вычислительном отношении задачей и требует использования высокопроизводительных вычислительных систем или применения подходов на основе имитационного моделирования и машинного обучения [26].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формально исключение определенных слагаемых в уравнениях (4) и сохранение оставшихся можно осуществить с помощью функции Хевисайда. Однако эта функция, по сути, является логической, а не аналитической и, следовательно, не позволяет записать выражение для вероятностей состояний системы в общем виде. В частности, при ее использовании в программном коде необходимо организовывать дополнительные циклы. Поэтому для возможности компактного аналитического представления системы уравнений (4) была введена функция

$$\sigma_1(x, x_0) = \frac{|x - x_0| + x - x_0}{2|x - x_0|}, \tag{П.1}$$

которая является аналитической. Таким образом, функция, ограничивающая снизу допустимые состояния системы, имеет вид

$$\upsilon_1(x, M) = \frac{|x - M + 0{,}5| + x - M + 0{,}5}{2|x - M + 0{,}5|}. \tag{П.2}$$

Например, при $M = 0$ функция $\upsilon_1(x, M)$ имеет вид, представленный на рис. 6.

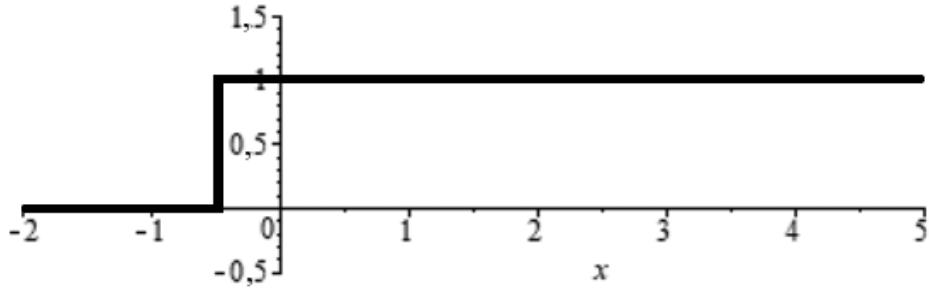


Рис. 6. Функция $\upsilon_1(x, 0)$.

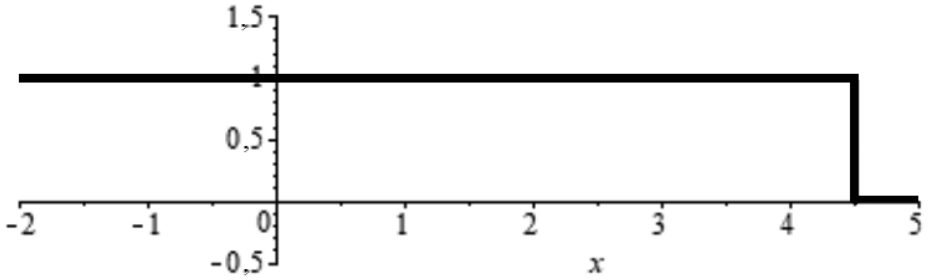


Рис. 7. Функция $\upsilon_2(x, 4)$.

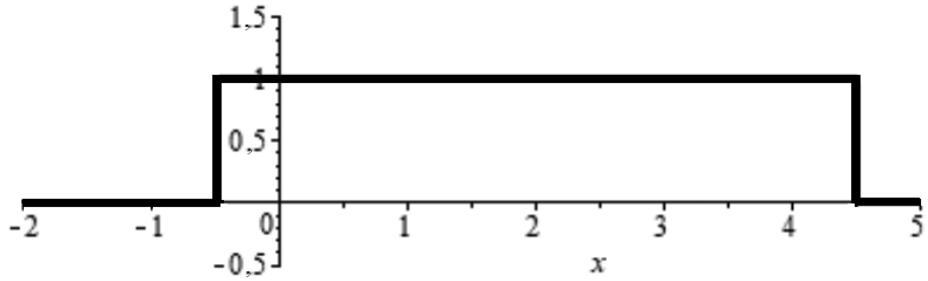


Рис. 8. Функция $\upsilon(x, 0, 4)$.

Смещение на 0,5 по оси времени выбрано в связи с тем, что в противном случае при состоянии $x = M$ системы эта функция была бы неопределенна, а ее производная стремилась бы к бесконечности в этой точке. Аналогично с (П.1) введем функцию

$$\sigma_2(x, x_0) = \frac{|x_0 - x| + x_0 - x}{2|x_0 - x|}. \tag{П.3}$$

Таким образом, функция, ограничивающая сверху допустимые состояния системы, может быть записана в виде

$$\upsilon_2(x, K) = \frac{|K - x - 0{,}5| + K - x - 0{,}5}{2|K - x - 0{,}5|}, \tag{П.4}$$

где $K = \overline{0, N}$ – состояние системы. При $K = 4$ функция $\upsilon_2(x, M)$ имеет вид, представленный на рис. 7.

Очевидно, что функция, ограничивающая допустимый интервал значений от наименьшего M до наибольшего K, принимает вид

$$\text{(П.5)} \quad \upsilon(x, M, N) = \upsilon_1(x, M)\,\upsilon_2(x, N) = \\ = \frac{(|x - M + 0{,}5| + x - M + 0{,}5)\,(|K - x - 0{,}5| + K - x - 0{,}5)}{4\,|x - M + 0{,}5|\,|K - x - 0{,}5|}.$$

Например, при $M = 0$ и $K = 4$ она имеет вид, представленный на рис. 8.

Применительно к решаемой задаче x может принимать значения n_1, n_2, $n_1 + n_2$ и т.д. Преимуществом функций (П.2), (П.4) и (П.5) является отсутствие условий "если". Однако следует отметить, что такие условия все-таки существуют при раскрытии модуля. Тем не менее несмотря на то, что данные функции не ускоряют процесс вычисления, они позволяют проводить аналитическое исследование полученных выражений и упрощают программный код.

Для нахождения функции $\vartheta(n_k, n_l)$ (см. (6)), которая преобразует пару чисел n_k, n_l, характеризующих состояние системы, в номер столбца матрицы $\mathbf{A}$, проанализируем следующую закономерность для $N = 4$: для $n_k = 0$ значения n_l изменяются от 0 до N, а значения $\vartheta(n_k, n_l)$ изменяются от 1 до $N + 1$; для $n_k = 1$ значения n_l изменяются от 0 до $N - 1$, а значения $\vartheta(n_k, n_l)$ изменяются от $N + 2$ до $2N + 1$; для $n_k = 2$ значения n_l изменяются от 0 до $N - 2$, а значения $\vartheta(n_k, n_l)$ изменяются от $2N + 2$ до $3N$; для $n_k = 3$ значения n_l изменяются от 0 до $N - 3$, а значения $\vartheta(n_k, n_l)$ изменяются от $3N + 1$ до $4N - 2$; для $n_k = 4$ имеем $n_l = 0$ и $\vartheta(n_k, n_l) = 4N - 1$. Следовательно, в выражении для $\vartheta(n_k, n_l)$ должно присутствовать слагаемое $n_k(N + 1)$, а также слагаемое n_l. Таким образом, для $n_k = 0$:

$$\text{(П.6)} \qquad \vartheta(0, n_l) = (N + 1)\,n_k + n_l + 1 = (N + 1)\,n_k + n_l + 0 \cdot (-0{,}5) + 1,$$

для $n_k = 1$:

$$\text{(П.7)} \qquad \vartheta(1, n_l) = (N + 1)\,n_k + n_l + 1 = (N + 1)\,n_k + n_l - 1 \cdot 0 + 1,$$

для $n_k = 2$:

$$\text{(П.8)} \qquad \vartheta(2, n_l) = (N + 1)\,n_k + n_l + 0 = (N + 1)\,n_k + n_l - 2 \cdot 0{,}5 + 1,$$

для $n_k = 3$:

$$\text{(П.9)} \qquad \vartheta(3, n_l) = (N + 1)\,n_k + n_l - 2 = (N + 1)\,n_k + n_l - 3 \cdot 1 + 1,$$

для $n_k = 4$:

$$\text{(П.10)} \qquad \vartheta(4, n_l) = (N + 1)\,n_k + n_l - 5 = (N + 1)\,n_k + n_l - 4 \cdot 1{,}5 + 1,$$

для $n_k = m$:

$$(\text{П}.11)\quad \vartheta\,(m, n_l) = (N+1)\,m + n_l - (m+1) = (N+1)\,m + n_l - m\frac{m-1}{2} + 1.$$

Таким образом, выражения (П.6)–(П.11) связывают пару чисел в соответствующий порядковый номер элемента в строке (столбце) матрицы коэффициентов. Легко проверить, что соотношение (6) справедливо для любых N.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dudin A.N., Klimenok V.I., Vishnevsky V.M.* Methods to Study Queuing Systems with Correlated Arrivals. Berlin/Heidelberg: Springer, 2020.
2. *Rohit Singh Tomar, Dr.R.K. Shrivastav.* Three Phases of Service For A Single Server Queueing System Subject To Server Breakdown And Bernoulli Vacation // Int. J. Math. Trend. Techn. (IJMTT). 2020. V. 66 (5). P. 124–136.
3. *Murat Sagir, Vedat Saglam.* Optimization and analysis of a tandem queueing system with parallel channel at second station // Communications in Statistics — Theory and Methods. 2022. V. 51. No. 21. P. 1–14.
4. *Sudhesh R., Vaithiyanathan A.* Stationary analysis of infinite queueing system with two — stage network server // RAIRO-Oper. Res. 55. 2021. P. 2349–2357.
5. *Al-Rawi Z.R., Al Shboul K.M.S.* A Single Server Queue with Coxian-2 Service and One-Phase Vacation (M/C-2/M/1 Queue) // Open J. Appl. Sci. 2021. V. 11. No. 6. P. 766–774.
6. *Serite Ozkar.* Two-commodity queueing-inventory system with phase-type distribution of service times // Annals of Operations Research. 2022. https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-022-04865-3
7. *Anastasia Galileyskaya, Ekaterina Lisovskaya, Michele Pagano, and Svetlana Moiseeva.* Two-Phase Resource Queueing System with Requests Duplication and Renewal Arrival Process // LNCS. 2020. 12563. P. 350–364.
8. *Barabanova E.A., Vytovtov K.A., Vishnevsky V.M., Podlazov V.S.* High-capacity strictly non-blocking optical switches based on new dual principle // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2091. No. 1. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2091/1/012040
9. *Ivanova D., Adou Y., Markova E., Gaidamaka Y., Samouylov K.* Mathematical Framework for Mixed Reservation- and Priority-Based Traffic Coexistence in 5G NR Systems // Mathematics. 2023. V. 11. No. 4. https://doi.org/10.3390/math11041046
10. *Zeifman A.I., Razumchik R.V., Satin Y.A., Kovalev I.A.* Ergodicity bounds for the markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy // Appl. Math. Comput. 2021. V. 395. P. 125846.
11. *Kempa Wojciech M., Paprocka Iwona.* Transient behavior of a queueing model with hyper-exponentially distributed processing times and finite buffer capacity // Sensors. 2022. V. 22. No. 24. https://doi.org/10.3390/s22249909
12. *Rubino G.* Transient analysis of Markovian queueing systems: a survey with focus on closed forms and uniformization / Queueing Theory 2: Advanced Trends; Wiley-ISTE: Hoboken. NJ. USA. 2021. P. 269–307.

13. *Zeifman A., Korolev V., Satin Y.* Review Two Approaches to the Construction of Perturbation Bounds for Continuous-Time Markov Chains // Mathematics. 2020. V. 8. https://doi.org/10.3390/math8020253
14. *Sita Rama Murthy M., Srinivasa Rao K., Ravindranath V., Srinivasa Rao P.* Transient Analysis of K-node Tandem Queuing Model with Load Dependent Service Rates // Int. J. Engin. Techno. 2018. V. 7. No. 3.31. P. 141–149.
15. *Suhasini A.V.S., Rao K. Srinivasa, Reddy P.R.S.* Transient analysis of tandem queueing model with nonhomogenous poisson bulk arrivals having statedependent service rates // Int. J. Advanc. Comput. Math. Sci. 2012. V. 3. No. 3. P. 272–289.
16. *Neelam Singla, Garg P.C.* Transient and Numerical Solution of a Feedback Queueing System with Correlated Departures // Amer. J. Numer. Anal. 2014. V. 2. No. 1. P. 20–28.
17. *Shyam Sundar Sah, Ram Prasad Ghimire.* Transient Analysis of Queueing Model // J. Inst. Engin. 2015. V. 11. No. 1. P. 165–171.
18. *Зейфман А.И.* О нестационарной модели Эрланга // А и Т. 2009. V. 70. No. 12. P. 2003–2012.
19. *Ковалёв И.А., Сатин Я.А., Синицина А.В., Зейфман А.И.* Об одном подходе к оцениванию скорости сходимости нестационарных марковских моделей систем обслуживания// Информ. и ее применение. 2022. Т. 16. Вып. 3. С. 75–82.
20. *Prabhu N.U.* Transient Behaviour of a Tandem Queue // Management Science. 1967. V. 13. No. 9. P. 631–639. https://doi.org/10.1287/mnsc.13.9.631
21. *Vyshnevsky V.M., Vytovtov K.A., Barabanova E.A., Semenova O.V.* Analysis of an $MAP/M/1/N$ queue with periodic and non-periodic piecewise constant input rate // Mathematics. 2022. V. 10. No. 10. https://www.mdpi.com/2227-7390/10/10/1684
22. *Vishnevsky V., Vytovtov K., Barabanova E., Semenova O.* Transient behavior of the $MAP/M/1/N$ queuing system // Mathematics. 2021. V. 9. No. 2559. https://doi.org/10.3390/math9202559
23. *Vytovtov K.A., Barabanova E.A., Vishnevsky V.M.* Modeling and Analysis of Multichannel Queuing System Transient Behavior for Piecewise-Constant Rates // LNCS. Springer. 2023. V. 13766. P. 397–409.
24. *Jackson R.R.P.* Queueing Systems with Phase Type Service // Oper. Res. Soc. 1954. V. 5. No. 4. P. 109–120.
25. *Журавлёв А.П., Рюмшин К.Ю., Атакищев О.И., Титенко Е.А., Титенко М.А.* Параметры модуляции современных систем связи // T-Comm: телекоммуникации и транспорт. 2023. Том 17. No. 7. С. 13–20.
26. *Вишневский В.М., Семёнова О.В.* Методы машинного обучения для исследования стохастических моделей циклического опроса в широкополосных беспроводных сетях. М.: ИПУ, РАН. 2023. 120с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 16.04.2023

После доработки 15.11.2023

Принята к публикации 21.12.2023

Стохастические системы

© 2024 г. А.В. НАУМОВ, д-р физ.-мат. наук (naumovav@mail.ru),
А.Е. СТЕПАНОВ (Rus.fta@yandex.ru),
А.Э. УСТИНОВ (entro1122@gmail.com)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

О ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ УСПЕШНОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО ПО ВРЕМЕНИ ТЕСТА[1]

Рассмотрена задача поиска оптимальной последовательности выполнения набора заданий в ограниченном по времени тесте, т.е. определяется группа заданий для обязательного первоначального выполнения в тесте, задания в другой группе выполняются в оставшееся время до окончания теста. За каждое правильно выполненное задание теста тестируемый получает определенное количество баллов. В качестве критерия предлагается вероятность превышения суммарным числом набранных за тест баллов определенного уровня, являющегося фиксированным параметром задачи, с одновременным выполнением ограничения на время проведения теста. Случайными параметрами задачи являются время ответа пользователя на каждое задание теста. Правильность ответа пользователя на задание моделируется случайной величиной с распределением Бернулли. Полученная задача стохастического билинейного программирования сводится к детерминированной целочисленной задаче математического программирования.

Ключевые слова: ограниченный по времени тест, задача максимизации вероятности, целочисленное математическое программирование.

DOI: 10.31857/S0005231024010061

1. Введение

В парадигме адаптивного компьютерного тестирования [1–6] задача построения оптимальной стратегии прохождения теста связана с формированием индивидуальной траектории обучения. Данная задача представляется актуальной в различных областях образовательного процесса: подготовка к сдаче абитуриентами единого государственного экзамена (ЕГЭ), прохождение регулярных тестирований в системе дистанционного обучения (СДО), проверка остаточных знаний обучающихся и т.д. Как правило, подобные формы тестирования ограниченны по времени, а структура теста заранее известна с точностью до типов заданий, или разделов курса, на проверку знания которых направлены эти задания. При этом имеется значительная статистика

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

выполнения тестируемыми подобных заданий в процессе обучения как по типу заданий, так и по индивидуальному пользователю. Часто, например в условиях использования в образовательном процессе СДО, сбор и хранение этой информации автоматизированы, как это сделано в СДО CLASS.NET Московского авиационного института [7, 8]. Это позволяет обоснованно использовать в рассматриваемой задаче математические модели учитываемых случайных параметров, например времени, затрачиваемого тестируемым на решение задания определенного типа. Модели времени ответа пользователя на задание теста широко представлены в литературе. Ван дер Линденом была предложена логнормальная модель времени [1], а в [9, 10] в качестве моделей использовались гамма-распределение и дискретное распределение. Частота правильного решения тестируемым задач определенного типа (определенной тематики, соответствующей номеру задания в тесте), полученная на основе данных о работе тестируемого в процессе обучения, может служить хорошей оценкой параметра распределения Бернулли, моделирующего верное решение тестируемым соответствующего задания в тесте. Все задания теста, как правило, характеризуются определенным количеством баллов, которые набирает тестируемый, верно решивший их. Суммарное количество набранных в ходе тестирования баллов характеризует качество подготовки тестируемого и является основой для его оценивания. Достижение тестируемым определенного суммарного балла за тест может служить для него определенным целевым показателем. В качестве стратегии тестируемого в условиях наличия в задаче упомянутых выше случайных параметров может служить набор заданий теста, которые следует выполнять в первую очередь.

В литературе достаточно широко представлены задачи построения различных тестов с целью проверки уровня знаний тестируемых, в том числе в вероятностной или квантильной постановке [3, 4, 6, 9, 10]. Однако публикации, в которых рассматривались бы задачи построения оптимальной для тестируемого стратегии прохождения теста, авторам не известны.

В работе формулируется задача поиска оптимальной стратегии тестируемого (в упомянутом выше смысле) по критерию максимизации вероятности набора суммарного балла за тест выше определенного уровня, выбираемого тестируемым. При этом учитывается вероятностное ограничение, связанное с тем, что время, затраченное тестируемым на выполнение теста, не должно превышать общее фиксированное время тестирования.

Данная задача стохастического билинейного программирования на основе доверительного метода [11] согласно методике, предложенной в [12], сводится к целочисленной задаче математического программирования. Исходные данные для оценки параметров используемых в задаче вероятностных моделей взяты из статистики работы пользователей СДО МАИ CLASS.NET. В работе обсуждаются также результаты численного эксперимента и зависимость оптимального значения критерия от суммарного балла, превысить который стремится тестируемый.

2. Распределения используемых в работе случайных параметров

В рассматриваемой задаче используются два векторных случайных параметра. Одним из них является вектор $X = \mathrm{col}\,(X_1, \ldots, X_n)$, координаты которого моделируют правильность решения i-го задания теста, состоящего из n заданий. Предполагается, что X_i являются независимыми случайными величинами, имеющими распределение Бернулли, с параметрами p_i, $i = 1, \ldots, n$, оцениваемыми частотой правильных ответов тестируемого на аналогичные задания i-го типа в ходе подготовки к тестированию или в процессе обучения. Равенство единице случайной величины X_i моделирует правильность решения тестируемым i-го задания, а равенство нулю – противоположное событие. Другим случайным параметром является вектор $T = \mathrm{col}(T_1, \ldots, T_n)$, координаты которого характеризуют время, затрачиваемое тестируемым на решение задания i-го типа. Случайные величины T_i, $i = 1, \ldots, n$ также предполагаются независимыми. Однако предполагать независимость между величинами X и T было бы опрометчиво, поэтому для каждого значения X_i (0 или 1) оценивается свое распределение случайной величины T_i также на базе статистики решения тестируемым заданий аналогичного типа. Непрерывные распределения времени ответа пользователя на задание (Ван дер Линдена [1], Гамма-распределения [9]) не позволяют найти точное решение задачи в вероятностной постановке, поэтому в работе используется дискретизированная модель времени ответа с тремя значениями, моделирующими ситуации быстрого решения, стандартного решения и решения с затруднениями. Методика построения дискретного закона распределения времени ответа тестируемого на задания теста может быть различной: от дискретизации различными способами непрерывных моделей распределения (например, модели Ван дер Линдена [1]), параметры которых определяются на основе статистических данных о времени решения тестируемым задач соответствующего класса, до использования исходной гистограммы распределения, построенной по тем же статистическим данным. В этой работе для каждого задания теста по имеющимся статистическим данным, полученным из системы CLASS.NET [8], строится вариационный ряд времени ответа тестируемого на аналогичные задания, который разбивается на три равные части по расстоянию между максимальным и минимальным элементами. Для каждой части вычисляется выборочное среднее, которое используется в качестве соответствующего возможного значения интересующей нас случайной величины. Вероятности полученных трех возможных значений полагаются равными частотам попадания элементов используемой выборки в соответствующие выбранные диапазоны. Таким образом, общий вектор случайных величин имеет дискретное распределение с числом реализаций $D = 2^n 3^n$. Вероятности каждой реализации могут быть найдены с помощью формулы умножения вероятностей и использования условного распределение времени ответа тестируемого на задания теста при условиях правильного или неправильного его решения.

3. Постановка задачи и метод ее решения

Требуется определить стратегию тестируемого при выполнении им ограниченного по времени теста из n заданий. Стратегия определяется вектором булевых переменных $u \in \{0,1\}^n$, где

$$u_i \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если тестируемый пытается решать } i\text{-е задание теста,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

За каждое i-е задание теста начисляется b_i баллов. Для успешного преодоления теста требуется набрать не менее φ баллов. Время выполнения теста ограничено величиной $\overline{T}$. В качестве критерия оптимизации выбрана вероятность успешного преодоления теста с одновременным выполнением ограничения по времени его прохождения.

Рассмотрим функцию вероятности

$$P_{\varphi,\overline{T}}(u) \triangleq P\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i X_i b_i \geqslant \varphi,\ \sum_{i=1}^{n} u_i T_i \leqslant \overline{T}\right\}.$$

В ней величины φ и $\overline{T}$ играют роль параметров. Для обеспечения разумности постановки задачи наложим ограничения на указанные параметры: $0 < \varphi \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$ и $\sum_{i=1}^{n} T_i^{\min} \leqslant \overline{T}$, где $T_i^{\min}$ – минимальное время решения тестируемым i-й задачи. Тогда задача поиска оптимальной стратегии тестируемым может быть сформулирована следующим образом:

$$P_{\varphi,\overline{T}}(u) \to \max_{u\in\{0,1\}^n}. \tag{1}$$

Данная задача является задачей стохастического программирования с булевыми переменными.

Как уже было сказано выше, число всех возможных реализаций вектора случайных параметров $\mathrm{col}(X^\top, T^\top)$ равно $D = 2^n 3^n$. Рассмотрим вектор $\delta \in \{0,1\}^D$, каждая ν-я координата которого соответствует одной из реализаций $\mathrm{col}((x^\nu)^\top, (t^\nu)^\top)$ вектора $(X^\top, T^\top)^\top$ и может принимать значения 0 или 1. Пусть $\Upsilon \triangleq e^T b$, где $e = \mathrm{col}(1,\ldots,1) \in R^n$, т.е. $\Upsilon = \sum_{i=1}^{n} b_i$ – максимальное количество баллов, которое можно набрать за тест. Пусть $p_\nu = P(\mathrm{col}(X^\top, T^\top) = \mathrm{col}((x^\nu)^\top, (t^\nu)^\top))$, $\nu = \overline{1,D}$. Тогда аналогично методике, предложенной в [12] для решения задачи минимизации функции квантили на основании доверительного метода [11], задача стохастического программирования (1) может быть сведена к детерминированной задаче оптимизации с булевыми переменными:

$$\sum_{\nu=1}^{D} p_\nu \delta_\nu \to \max_{\substack{u\in\{0,1\}^n \\ \delta\in\{0,1\}^D}} \tag{2}$$

при ограничениях

$$\varphi - \Upsilon - \delta_\nu \left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i^\nu \; b_i - \Upsilon \right) \leqslant 0, \quad \nu = \overline{1, D}, \tag{3}$$

$$\delta_\nu u^T t^\nu - \overline{T} \leqslant 0, \quad \nu = \overline{1, D}. \tag{4}$$

В рассмотренной выше задаче оптимальное значение вектора δ определяет вид оптимального доверительного множества (в терминах доверительного метода [11]) в виде тех реализаций вектора случайных параметров, которым соответствуют единицы в оптимальном векторе δ. Суммарная вероятностная мера таких реализаций максимизируется в рассматриваемой задаче, а ограничения на время выполнения теста и набранного за тест количества баллов выполняются, в то время как для оставшихся реализаций, которым соответствуют нулевые значения координат оптимального вектора δ, эти ограничения в исходной задаче могут не выполняться, а ограничения (3) и (4) выполняются по построению.

Задача (2)–(4), построенная строго по методике [12], является задачей билинейного программирования (с билинейной системой ограничений), что в совокупности с булевостью переменных и большой размерностью делает ее трудно разрешимой. Однако структура рассматриваемой задачи позволяет переписать ее в виде задачи линейного программирования (ЗЛП), что возможно позволит использовать специальные методы решения ЗЛП с булевыми переменными, реализованные в современных пакетах прикладных оптимизационных программ. Вид этой ЗЛП следующий:

$$\sum_{\nu=1}^{D} p_\nu \delta_\nu \to \max_{\substack{u \in \{0,1\}^n \\ \delta \in \{0,1\}^D}} \tag{5}$$

при ограничениях

$$\delta_\nu \varphi \leqslant \sum_{i=1}^{n} u_i x_i^\nu \; b_i, \quad \nu = \overline{1, D}, \tag{6}$$

$$u^T t^\nu \leqslant \delta_\nu \overline{T} + (1 - \delta_\nu) T^{MAX}, \quad \nu = \overline{1, D}, \tag{7}$$

где

$$T^{MAX} = \sum_{i=1}^{n} T_i^{\max},$$

а $T_i^{\max}$ – максимальная из всех возможных реализаций случайной величины T_i, $i = \overline{1, n}$.

Если размерности задач (2)–(4), (5)–(7) допускают их решение стандартными процедурами из известных библиотек оптимизационных программ, то решение может быть найдено с их помощью. Однако эти задачи содержат

дополнительный вектор переменных оптимизации $\delta \in \{0,1\}^D$ большой размерности, что с учетом большого числа ограничений делает их трудноразрешимыми полным перебором возможных значений булевых переменных оптимизации и требует разработки специальных методов решения, учитывающих структуру задачи. Далее рассмотрим алгоритм решения исходной задачи. Эффективность его применения по сравнению со стандартными библиотечными процедурами решения задач (2)–(4), (5)–(7) обсудим в разделе, касающимся результатов численного эксперимента.

4. Алгоритм решения исходной задачи

Шаг 0. Из всех 2^n стратегий $u \in \{0,1\}^n$ выбираем N, образующих множество $\underline{U}$, для элементов которого выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{n} u_i b_i \geqslant \varphi, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i T_i^{\min} \leqslant \overline{T}.$$

Смысл в том, что так отсеиваем стратегии, заведомо не подходящие по суммарному времени или количеству баллов даже в самом оптимистичном случае, когда все выбранные для решения задачи решены верно и за минимально возможное время.

Перенумеруем все элементы множества $\underline{U}$. Таким образом, число от 1 до N однозначно определяет элемент множества. Под u^m будем понимать m-й элемент множества $\underline{U}$. Положим $m := 1$, $P^* := 0$, а $u^* := (0,\ldots,0)^\top$.

На этом шаге инициируется внешний цикл перебора всех N выбранных стратегий оптимизации.

Шаг 1. Если $m > N$, то переходим к шагу 5. В противном случае $P_m := 0$.

Вспомогательный параметр P_m используется далее для расчета вероятности выполнения ограничений при $u = u^m$.

Шаг 2. Предположим, что вектор u^m содержит ровно K единиц. Предположим, что ненулевыми компонентами вектора u^m являются компоненты с номерами $i_1,\ldots,i_K$. Рассмотрим подвектор $\mathrm{col}(X_{i_1},\ldots,X_{i_K})$ случайного вектора X. Положим $J := 2^K$, а $j := 1$.

На этом шаге инициализируется цикл перебора всех возможных реализаций $\mathrm{col}(x^j_{i_1},\ldots,x^j_{i_K})$, $j = \overline{1,2^K}$.

Шаг 3. Если $j > J$ и $P_m > P^*$, то полагаем $P^* := P_m$, $u^* := u^m$, $m := m+1$ и переходим к шагу 1.

Если $j > J$ и $P_m \leqslant P^*$, то полагаем $m := m+1$ и переходим к шагу 1.

В противном случае, если для реализации $\mathrm{col}(x^j_{i_1},\ldots,x^j_{i_K})$ выполняется условие

$$\sum_{i\in\{i_1,i_2,\ldots,i_K\}} u^m_i b_i x^j_i \geqslant \varphi,$$

то полагаем $L := 3^K$, $l := 1$ и переходим к шагу 4. Если указанное условие не выполняется, то полагаем $j := j + 1$ и переходим к началу шага 3.

На этом шаге инициализируется цикл перебора всех возможных реализаций $\mathrm{col}(t^l_{i_1}, \ldots, t^l_{i_K})$, $l = \overline{1, L}$ подвектора $\mathrm{col}(T_{i_1}, \ldots, T_{i_K})$ случайного вектора T.

Шаг 4. Если $l > L$, то полагаем $j := j + 1$ и переходим к шагу 3. В противном случае, если для реализации $\mathrm{col}(t^l_{i_1}, \ldots, t^l_{i_K})$ выполняется условие

$$\sum_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_K\}} u^m_i t^l_i \leqslant \overline{T},$$

то полагаем

$$P_m := P_m + \prod_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_K\}} P(T_i = t^l_i | X_i = x^j_i) P(X_i = x^j_i).$$

Полагаем $l := l + 1$ и переходим к началу шага 4.

Шаг 5. Полагаем оптимальное значение критерия равным P^*, а оптимальное значение стратегии равным u^*.

Заметим, что во всех вложенных циклах, рассмотренных в алгоритме, происходит существенное сокращение объема требуемого перебора возможных значений переменных оптимизации. Объем полного перебора может сократиться на порядок в зависимости от выбранных значений параметров задачи φ и $\overline{T}$.

5. Результаты численного эксперимента

Исходные распределения для решения задачи получены на основе анализа функционирования системы дистанционного обучения МАИ CLASS.NET [8]. Будем предполагать число заданий в тесте $n = 10$. Оценки параметров исходных распределений заданы в табл. 1–3.

Рассмотрим величину $b^{\max} = \sum_{i=1}^{n} b_i$. В результате работы предложенного алгоритма были получены зависимости оптимальных решений от значений параметров задачи φ и $\overline{T}$, см. табл. 4, 5.

Расчеты проводились на компьютере ASUS X550LC (Intel Core i5 2.3 GHz, 8Gb RAM). Задача линейного программирования решалась пакетом IBM Cplex из библиотеки программ Python. Как видно, значения параметров задачи существенно влияют на скорость работы авторского алгоритма. Так, увеличение желаемого количества баллов за тест приводит к уменьшению вероятности достижения этого результата и уменьшению времени расчета с использованием предложенного алгоритма за счет снижения объема перебора допустимых стратегий оптимизации u. Сравнительный анализ времени работы алгоритмов показывает существенный его рост при увеличении числа задач в тесте, см. табл. 6. Все алгоритмы при одинаковых параметрах задачи

Таблица 1. Вероятность правильного решения заданий теста

Номер задачи в тесте	Вероятность правильного решения	Число баллов за задачу
1	0,90	1
2	0,91	1
3	0,95	1
4	0,97	1
5	0,90	1
6	0,80	2
7	0,65	3
8	0,75	2
9	0,50	4
10	0,55	3

Таблица 2. Условное распределение времени ответа тестируемого на задание теста в случае его неправильного решения

Номер задачи в тесте	Условное распределение времени ответа			
1	t_1^j	60	100	160
	$P(T_1 = t_1^j \mid X_1 = 0)$	0,3	0,55	0,15
2	t_2^j	70	130	250
	$P(T_2 = t_2^j \mid X_2 = 0)$	0,25	0,6	0,15
3	t_3^j	60	150	270
	$P(T_3 = t_3^j \mid X_3 = 0)$	0,2	0,45	0,35
4	t_4^j	100	200	350
	$P(T_4 = t_4^j \mid X_4 = 0)$	0,15	0,6	0,25
5	t_5^j	75	140	210
	$P(T_5 = t_5^j \mid X_5 = 0)$	0,2	0,45	0,35
6	t_6^j	190	290	400
	$P(T_6 = t_6^j \mid X_6 = 0)$	0,1	0,65	0,25
7	t_7^j	310	380	450
	$P(T_7 = t_7^j \mid X_7 = 0)$	0,2	0,4	0,4
8	t_8^j	180	250	320
	$P(T_8 = t_8^j \mid X_8 = 0)$	0,1	0,3	0,6
9	t_9^j	360	480	600
	$P(T_9 = t_9^j \mid X_9 = 0)$	0,1	0,3	0,6
10	t_{10}^j	320	400	470
	$P(T_{10} = t_{10}^j \mid X_{10} = 0)$	0,3	0,55	0,15

Таблица 3. Условное распределение времени ответа тестируемого на задание теста в случае его правильного решения

Номер задачи в тесте	Условное распределение времени ответа			
1	t_i^j	60	180	300
	$P(T_1 = t_1^j \mid X_1 = 1)$	0,3	0,5	0,2
2	t_i^j	75	190	330
	$P(T_2 = t_2^j \mid X_2 = 1)$	0,15	0,6	0,25
3	t_i^j	60	120	250
	$P(T_3 = t_3^j \mid X_3 = 1)$	0,15	0,35	0,5
4	t_i^j	130	200	350
	$P(T_4 = t_4^j \mid X_4 = 1)$	0,1	0,3	0,6
5	t_i^j	75	140	210
	$P(T_5 = t_5^j \mid X_5 = 1)$	0,2	0,45	0,35
6	t_i^j	200	275	380
	$P(T_6 = t_6^j \mid X_6 = 1)$	0,2	0,35	0,45
7	t_i^j	310	380	450
	$P(T_7 = t_7^j \mid X_7 = 1)$	0,2	0,4	0,4
8	t_i^j	200	290	370
	$P(T_8 = t_8^j \mid X_8 = 1)$	0,25	0,4	0,35
9	t_i^j	380	470	650
	$P(T_9 = t_9^j \mid X_9 = 1)$	0,1	0,25	0,65
10	t_i^j	150	275	500
	$P(T_{10} = t_{10}^j \mid X_{10} = 1)$	0,3	0,55	0,15

Таблица 4. Зависимость оптимального решения от параметра φ при $\overline{T} = 0{,}8\ T^{\max}$

φ	Оптимальная стратегия	Опт. значение критерия	Время расчета (сек)	Число исслед. стратегий
$0{,}4b^{\max}$	1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1.	0,9241	29,9	727
$0{,}5b^{\max}$	1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	0,7874	18,2	511
$0{,}6b^{\max}$	1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	0,5777	8,9	295
$0{,}7b^{\max}$	1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	0,3830	3,2	131
$0{,}8b^{\max}$	1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	0,2028	0,9	39
$0{,}9b^{\max}$	1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	0,0816	0,1	5

получили совпадающие решения для всех значений n. При $n \geqslant 7$ не удалось решить ЗЛП из-за проблем с недостатком памяти для хранения матрицы системы ограничений. Наибольшую эффективность показал алгоритм авторов, превосходя для больших n на порядок время работы других рассматриваемых алгоритмов.

Таблица 5. Зависимость оптимального решения от параметра $\overline{T}$ при $\varphi = 0{,}6\ b^{\max}$

$\overline{T}$	Оптимальная стратегия	Оптим. значение критерия	Время расчета (с)	Число исслед. стратегий
$0{,}4T^{\max}$	0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 0. 1. 1.	0,0633	1,8	273
$0{,}5T^{\max}$	0. 0. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 0. 1.	0,1733	9,5	296
$0{,}6T^{\max}$	1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 0. 1.	0,2786	8,7	296
$0{,}7T^{\max}$	1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1.	0,5049	9,0	296
$0{,}8T^{\max}$	1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	0,5777	8,9	296
$0{,}9T^{\max}$	1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	0,7213	8,3	296

Таблица 6. Время работы алгоритмов (с) для разных значений n

n	ЗЛП	Полный перебор	Алгоритм авторов
1	0,0010	0,0340	0,0010
2	0,0010	0,0400	0,0016
3	0,0102	0,0580	0,0020
4	0,0202	0,0800	0,0029
5	0,0628	0,2000	0,0077
6	0,0991	0,6100	0,0117
7	–	2,1900	0,0636
8	–	9,3800	0,1600
9	–	48,1000	2,1500
10	–	3010,0000	9,1100

6. Заключение

В данной статье рассматривается задача стохастического программирования для поиска оптимальной стратегии прохождения ограниченного по времени теста по критерию максимума вероятности преодоления тестируемым определенного числа набранных за тест баллов с учетом ограничения на время выполнения теста. Для тестируемого считается известной вероятность правильного решения каждого задания теста. Случайным является также время, затрачиваемое тестируемым на решение каждого задания.

Рассмотренная задача стохастического программирования с вероятностным критерием качества сводится к детерминированной задаче большой размерности, для которой можно использовать стандартные оптимизационные процедуры из известных библиотек программ. Кроме этого, предлагается алгоритм направленного перебора возможных значений дискретной стратегии оптимизации, сокращающий временные затраты на решение задачи. Проведенный численный эксперимент подтвердил эффективность применения разработанного алгоритма решения исходной задачи по сравнению с применением стандартных оптимизационных процедур для ее детерминированных эквивалентов. Эта эффективность, определяемая разностью времени вычис-

ления оптимальной стратегии различными способами, растет с увеличением числа заданий в тесте. Численный эксперимент показал также существенную зависимость оптимального решения и времени его вычисления от параметров задачи, что обосновывает актуальность дальнейшего совершенствования алгоритма ее решения.

Полученные в работе результаты могут быть распространены на квантильную постановку рассматриваемой задачи, когда тестируемый стремится максимизировать число набранных за тест баллов с сохранением выбранного уровня вероятности выполнения всех ограничений задачи. Это является отдельным исследованием, результаты которого планируется авторами к публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van der Linden W.J., Scrams D.J., Schnipke D.L., et al.* Using Response-Time Constraints to Control for Differential Speededness in Computerized Adaptive Testing // Appl. Psychol. Measur. 1999. V. 23. No. 3. P. 195–210.
2. *Rasch G.* Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.
3. *Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Алхимов В.И., Юрьев Г.А.* Новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов // Моделирование и анализ данных. 2013. № 1. С. 4–28.
4. *Kuravsky L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., Panfilova A.S., Yuryev G.A., Dumin P.N.* A Probabilistic Model of Adaptive Training // Appl. Math. Sci. 2016. V. 10. No. 48. P. 2369–2380.
5. *Наумов А.В., Мартюшова Я.Г.* Адаптация системы дистанционного обучения на основе статистической обработки результатов работы пользователей // Электр. журн. “Труды МАИ”. № 109. декабрь. 2019 г.
6. *Босов А.В., Мартюшова Я.Г., Наумов А.В., Сапунова А.П.* Байесовский подход к построению индивидуальной траектории пользователя в системе дистанционного обучения // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. № 3. С. 86–93.
7. *Наумов А.В., Джумурат А.С., Иноземцев А.О.* Система дистанционного обучения математическим дисциплинам CLASS.NET // Вест. компьют. и информ. технологий. 2014. № 10. С. 36–40.
8. СДО МАИ CLASS.NET [Электронный ресурс] // URL: `https://distance.kaf804.ru/` (дата обращения: 27.02.2023)
9. *Босов А.В., Мхитарян Г.А., Наумов А.В., Сапунова А.П.* Использование гамма-распределения в задаче формирования ограниченного по времени теста // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13. № 4. С. 12–18.
10. *Наумов А.В., Мхитарян Г.А., Черыгова Е.Е.* Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения // Вест. компьют. и информ. технологий. 2019. № 2. С. 37–46.
11. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.

12. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* Сведение задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного прораммирования // АиТ. 2013. № 6. С. 66–86.

Kibzun A.I., Naumov A.V., Norkin V.I. On reducing a quantile optimization problem with discrete distribution to a mixed integer programming problem // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 951–967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 18.10.2023

После доработки 30.11.2023

Принята к публикации 21.12.2023

Управление в технических системах

**© 2024 г. М.И. ДАНИЛОВ, канд. физ.-мат. наук (mdanilov@ncfu.ru),
И.Г. РОМАНЕНКО, канд. техн. наук (irina_romanenko_@mail.ru)
(Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь)**

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ, ПРЕДШЕСТВУЮЩЕЙ ПРЕДЕЛЬНЫМ УСТАНОВИВШИМСЯ РЕЖИМАМ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, МЕТОДОМ АНАЛИЗА ТРОПИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСОВ МОЩНОСТИ[1]

Проведен анализ известного [8] подхода, в котором для оценки области существования режима электроэнергетической системы применяется тропическая геометрия над комплексными мультиполями балансов активной мощности. Показаны его ограничения и предложен новый подход, а также представлен критерий для определения границы, предшествующей нарушению устойчивости энергосистемы, обусловленной перестройкой тропического множества решений. Разработанный подход позволяет по известным параметрам линий и динамике изменения модулей напряжений узлов и их нагрузки определять приближение режима энергосистемы к предельному.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, статическая устойчивость, подобласти существования режима, тропическая геометрия.

DOI: 10.31857/S0005231024010076

1. Введение

Расчет установившихся режимов (состояний) электроэнергетических систем необходим для проверки фактической возможности передачи требуемой потребителям мощности от имеющихся генераторов [1–3]. Кроме того, важным для задач управления [4–6] является уметь оценить расчетные параметры исследуемого состояния энергосистемы относительно предельно возможного режима [7–9]. Предельный режим определяют путем увеличения энергопотребления узлов (шин) до критических значений, при которых еще выполняется баланс мощностей в системе. В случае дальнейшего повышения нагрузки узлов баланс в энергосистеме не будет выполняться из-за нарушения статической устойчивости, и такой режим является невозможным для фактического осуществления. Процедура поиска предельных режимов, называемая утяжелением, выполняется путем выбора узлов и шага приращения их мощности, которые могут определяться эмпирическими соображения,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Приоритет-2030» (грант № 122060300035-2).

основанными на анализе топологии сети или других необходимых критериев. Существуют различные подходы к поиску предельных режимов и применяемых при этом критериев. К традиционному [3] методу относят подход и критерий Жданова, в этом случае выполняется утяжеление и контролируется равенство нулю якобиана линеаризованных уравнений установившегося состояния энергосистемы [1, 2]. В [3] предложена оптимизационная модель предельных режимов электрических энергосистем и показана важность способа задания балансирующего узла, что также отмечается в [7]. В [8] предлагается использовать подход, основанный на тропической геометрии над комплексными мультиполями уравнений балансов активной мощности. В [9] для оценки запаса устойчивости по напряжению используются данные измерений, выполненных устройствами PMU (Phasor Measurement Unit). В [10] предельные состояния энергосистемы находят, осуществляя приращение нагрузки узлов энергосистемы на каждом шаге итерационного расчета установившегося режима. В [11, 12] предлагается использовать модальный подход для решения задачи обеспечения статической устойчивости, заключающийся в анализе собственных значений матрицы Якоби. В [13, 14] предельные установившиеся состояния энергосистемы находят методом голоморфного вложения нагрузки (The Holomorphic Embedding Load-flow Method (HELM)), который гарантирует, что найденное решение, когда оно существует, всегда соответствует правильному, а в противном случае сигнализирует об отсутствии решения. В [15] предложен подход к аппроксимации границ области существования режима с учетом ограничения реактивной мощности генератора. В [16] рассматривались аварийные режимы и применение групповых коммутаций линий для управления и обеспечения статической устойчивости напряжения. В [17] предложена алгоритмическая процедура корректировки положения известной (найденной ранее) базовой точки предельного режима сети согласно появлению изменений нагрузок узлов. В [18, 19] предложены методы оценки запаса устойчивости по напряжению для систем электроснабжения с распределенными и [20] возобновляемыми источниками энергии. Авторами [21] предложен метод, использующий подход голоморфного вложения нагрузки, а также параметризацию длины дуги и кусочные аппроксимации для определения границы существования режима и отслеживания всей PV кривой узлов энергосистемы. В [22, 23] исследуется форма границы предельных режимов энергосети (в многомерном пространстве параметров), имеющая сложную топологию с непересекающимися изолированными участками. В [24] приведены условия существования режима только для линейных схем четырехполюсников, работающих на переменном токе с нагрузками постоянной мощности. Отметим, что такие схемы соответствуют моделируемым линиям электропередач при расчете критических режимов.

Определение и исследования границы устойчивости энергосистемы и ее линий электропередач и связанные с этим методы расчетов режимов [25, 26] важны также при оптимизации работы как распределительной сети [27–29], так и электростанций [30].

В представленной статье проведен анализ результатов работы [8], отмечены ее недостатки и предложен оригинальный подход и критерий для определения границы области допустимых режимов, предшествующих нарушению устойчивости.

Материал статьи структурирован следующим образом. В разделе 2 выполнена постановка задачи определения границы области, предшествующей предельным установившимся режимам энергосистемы с произвольным количеством шин. В разделе 3 рассматриваются задача питания нагрузки через линию от шины бесконечной мощности и применение к этой системе анализа над комплексным тропическим мультиполем. Отмечаются основные свойства их решений. В разделе 4 демонстрируются полученные результаты на двух примерах расчета энергосистем. Первый пример: энергосистема с четырьмя узлами, в одном из которых увеличивается активная мощность. Второй — стандартная схема IEEE 5-шин. Показана возможность определять границу, предшествующую потере устойчивости режима энергосистемы. В приложении приведен вывод используемых в статье теоретических выражений.

2. Постановка задачи определения границы области, предшествующей предельным установившимся режимам энергосистемы с произвольным количеством шин

Рассмотрим энергосистему с известными топологией электрической сети, номинальными классами напряжений и количеством шин n. Введем переменную v ($v = \overline{0,n}$) для обозначения номеров узлов. Потребление электроэнергии в нагрузочных узлах задается комплексными значениями мощностей $\dot{p}_v^{\text{load}} = p_{\text{load}}{}_v^{\text{Re}} + jp_{\text{load}}{}_v^{\text{Im}}$ ($v \in PQ$), где PQ – множество нагрузочных узлов с активными $p_{\text{load}}{}_v^{\text{Re}}$ и реактивными $p_{\text{load}}{}_v^{\text{Im}}$ мощностями. Поступление электроэнергии в систему происходит через генерирующие узлы. Узлы с заданными комплексными значениями мощностей $\dot{p}_v^{\text{gen}} = p_{\text{gen}}{}_v^{\text{Re}} + jp_{\text{gen}}{}_v^{\text{Im}}$ называют генераторными узлами PQ-типа ($v \in PQ$). Узлы с заданными значениями активных $p_{\text{gen}}{}_v^{\text{Re}}$ мощностей и регулируемыми модулями напряжений U_v называют узлами PV-типа ($v \in PV$). Также при расчетах режимов в энергосистеме один из узлов принимают балансирующим ($v = 0$), он представляет собой шину бесконечной мощности с заданным комплексным напряжением $\dot{U}_0$.

Далее принимаем следующие допущения.

1. Передача электроэнергии осуществляется с помощью линий, которые представляются π-образными схемами замещения с сосредоточенными параметрами.

2. Параметры всех линий электрической сети известны и представлены продольными активными $R_{v,k}^{\text{line}}$ и реактивными $X_{v,k}^{\text{line}}$ сопротивлениями, а также поперечными емкостными $B_{v,k}^{\text{line}}$ проводимостями на землю, где v и k – номера узлов, между которыми включена линия.

Уравнения, необходимые для расчета установившегося состояния энергосистемы, запишем в комплексном виде согласно методу узловых напряжений

с учетом наличия узлов PV-типа:

$$\dot{U}_v^* \dot{\hat{I}}_v = \dot{p}_v^{*\,\mathrm{gen}} - \dot{p}_v^{*\,\mathrm{load}}, \quad v \in PQ, \quad v = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}\left[\dot{U}_v^* \dot{\hat{I}}_v\right] = \dot{p}_v^{\mathrm{Re}}, \quad \left|\dot{U}_v\right| = \mathrm{const}, \quad v \in PV, \quad v = \overline{1,n},$$

в котором

$$\dot{\hat{I}}_v = \dot{U}_v \underline{Y}_{v,v} - \sum_{k \in A_v^g} \dot{U}_k \underline{Y}_{v,k} - \dot{U}_0 \underline{Y}_{0,v},$$

где $\dot{U}_v^*$ – сопряженный комплекс напряжения $\dot{U}_v$; $\underline{Y}_{v,v}$ – собственная проводимость всех ветвей, подключенных к узлу v; A_v^g – узлы, непосредственно соединенные с узлом v; $\dot{U}_k$ – напряжение узла k; $\underline{Y}_{v,k}$ – взаимная проводимость между узлами v и k; $\dot{U}_0$ – известное комплексное напряжение балансирующего ($v = 0$) узла; $\underline{Y}_{0,v}$ – проводимость всех ветвей, непосредственно соединяющих узел v и балансирующий; $\dot{p}_v^{*\,\mathrm{gen}}$, $\dot{p}_v^{*\,\mathrm{load}}$ – сопряженные комплексы $\dot{p}_v^{\mathrm{gen}}$ и $\dot{p}_v^{\mathrm{load}}$.

Проводимости $\underline{Y}_{v,v}$, $\underline{Y}_{v,k}$ и $\underline{Y}_{0,v}$ определяются следующим образом:

$$\underline{Y}_{v,v} = \sum_{m \in A_v^b} \frac{1}{R_m + jX_m} + \sum_{m \in A_v^b} jB_m, \quad v = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\underline{Y}_{v,k} = \sum_{k \in A_v^g} \frac{1}{R_{v,k} + jX_{v,k}}, \quad v \neq k, \quad \underline{Y}_{0,v} = \frac{1}{R_{0,v} + jX_{0,v}},$$

где R_m, X_m – активное и индуктивное сопротивления; B_m – емкостная проводимость одной ветви m из множества узлов A_v^b, соединенных с узлом v; $R_{v,k}$, $X_{v,k}$ – активное и индуктивное сопротивления ветви между узлами v и k; $R_{0,v}$, $X_{0,v}$ – активное и индуктивное сопротивления ветви между балансирующим узлом и узлом v.

Решением системы нелинейных уравнений (1) являются комплексные напряжения всех узлов $\dot{U}_v$ ($v = \overline{1,n}$), которые можно найти разными численными итерационными методами.

Процедура поиска предельных режимов выполняется путем выбора узлов и шага приращения их мощности до критических значений, выход за которые приводит к нарушению баланса мощностей в системе.

Задача, решаемая в представленной статье, заключается в определении внутри области существования установившегося состояния энергосистемы границы, предшествующей возникновению предельного по статической устойчивости режиму.

3. Уравнения потребления нагрузки, питаемой через линию от шины бесконечной мощности, и применение к этой системе анализа тропического мультиполя

Рассмотрим сначала потребление и появление предельного (критического) режима в простейшей схеме (рис. 1). К генератору (шине бесконечной

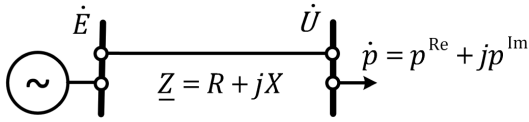


Рис. 1. Схема питания через линию нагрузки от шины бесконечной мощности.

мощности) с известным комплексным напряжением $\dot{E} = Ee^{j\Psi_E}$ через линию электропередач $\underline{Z} = R + jX$ подключена нагрузка $\dot{p} = p^{\mathrm{Re}} + jp^{\mathrm{Im}}$, где R, X – активное и индуктивное сопротивления линии, p^{Re}, p^{Im} – активная и реактивные мощности потребления.

Уравнение для определения установившегося состояния приведенной схемы запишем в следующем виде:

$$\dot{U} + \frac{p^{\mathrm{Re}} - jp^{\mathrm{Im}}}{\dot{U}^*}(R + jX) = \dot{E}, \tag{3}$$

в котором $\dot{U} = Ue^{j\Psi_U}$, $\dot{U}^* = Ue^{-j\Psi_U}$, где U – модуль напряжения узла (шины) с нагрузкой $\dot{p}$, Ψ_U – угол комплексного напряжения $\dot{U}$, отсчитываемый от вектора напряжения генератора $\dot{E}$.

Нелинейное уравнение (3) имеет аналитическое решение, корни (модули $U_{1,2}(p^{\mathrm{Re}}, p^{\mathrm{Im}})$ и углы (аргументы) $\Psi_{U_{1,2}}(p^{\mathrm{Re}}, p^{\mathrm{Im}})$ напряжений) которого определяются согласно выражениям:

$$(U_{1,2})^2 = \frac{E^2}{2} - p^{\mathrm{Re}}R - p^{\mathrm{Im}}X \pm \pm\frac{\sqrt{(2(p^{\mathrm{Re}}R + p^{\mathrm{Im}}X) - E^2)^2 - 4(R^2 + X^2)((p^{\mathrm{Re}})^2 + (p^{\mathrm{Im}})^2)}}{2}, \tag{4}$$

$$\Psi_{U_{1,2}} = -\arg\left[(U_{1,2})^2 + p^{\mathrm{Re}}R + p^{\mathrm{Im}}X + j(p^{\mathrm{Re}}X - p^{\mathrm{Im}}R)\right]. \tag{5}$$

Считая известным и постоянным коэффициент мощности ($\cos\phi$) нагрузки узла при увеличении активной мощности p^{Re}, определим компоненту $p^{\mathrm{Im}} = p^{\mathrm{Re}}\tan\phi$. Построим (рис. 2) зависимости (*2*) и (*3*). Угол $\Psi_{U_{\max}}$ определяется выражением

$$\Psi_{U_{\max}} = -\mathrm{atan}\left[\frac{X - R\tan\phi}{R + X\tan\phi}\right]. \tag{6}$$

При $p^{\mathrm{Re}} > p^{\mathrm{Re}}_{\max}$ модуль U напряжения принимает комплексные значения, и в связи с этим в указанном диапазоне кривые *1* и *2* отсутствуют. Значение $p^{\mathrm{Re}}_{\max}$ соответствует границе существования режима. Зависимости *3* и *4* – это соответственно модуль и вещественная часть напряжения U при $p^{\mathrm{Re}} > p^{\mathrm{Re}}_{\max}$.

Для схемы рис. 1 применим предлагаемый в [8] подход определения близости режима к области его существования. Выражение для параметра S_U, записанное из условия баланса активных мощностей узла, имеет вид

$$\frac{U^2}{2}\left(\frac{1}{R + jX} + \frac{1}{R - jX}\right) + \mathrm{Re}(\dot{p}) = S_U = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{E}\dot{U}^*}{R + jX} + \frac{\dot{E}^*\dot{U}}{R - jX}\right). \tag{7}$$

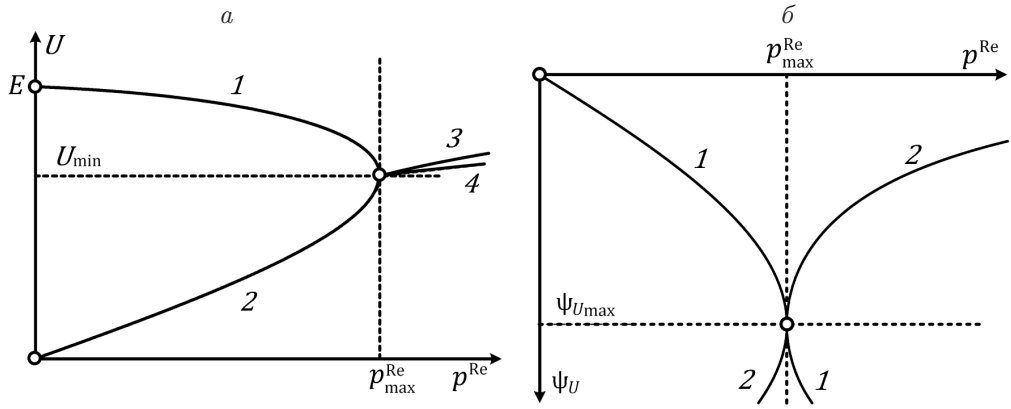


Рис. 2. Зависимости модуля (*а*) и угла (*б*) напряжения узла нагрузки от p^{Re}: *1* и *2* – соответственно первые $U_1(p^{\mathrm{Re}})$, $\Psi_{U_1}(p^{\mathrm{Re}})$ и вторые $U_2(p^{\mathrm{Re}})$, $\Psi_{U_2}(p^{\mathrm{Re}})$ корни (4) и (5); *3* – $\left|U_{1,2}(p^{\mathrm{Re}})\right|$; *4* – $\mathrm{Re}\left[U_{1,2}(p^{\mathrm{Re}})\right]$.

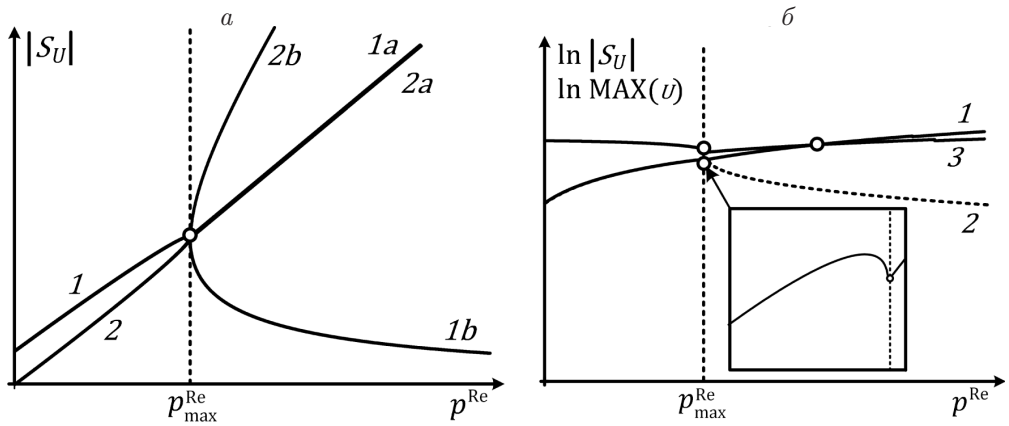


Рис. 3. Зависимости параметров S_U, $\ln|S_U|$ и $\ln \mathrm{MAX}(U)$ от p^{Re}: на (*а*) *1* и *2* – $S_U(p^{\mathrm{Re}})$ для первых и вторых корней соответственно, при этом *1*, *1а* и *2*, *2а* по данным левой части (7), а *1*, *1б* и *2*, *2б* согласно правой части (7); на (*б*) – для первых корней *1* и *2* – $\ln|S_U|$ и $\ln \mathrm{MAX}(U)$ соответственно по данным левой и правой частей (7), *3* – $\ln \mathrm{MAX}(U)$.

Зависимости S_U от нуля до $p^{\mathrm{Re}}_{\max}$ одинаковы для левого и правого выражения (7) и отличаются при $p^{\mathrm{Re}} > p^{\mathrm{Re}}_{\max}$ (см. рис. 3). Из рис. 3 видно, что $\ln|S_U| < \ln\left(\frac{EU}{\sqrt{R^2+X^2}}\right)$ при p^{Re} от нуля до $p^{\mathrm{Re}}_{\max}$. Тропические уравнения, используемые для схемы рис. 1, имеют вид

$$\ln|S_U| \oplus \ln\left(\frac{EU}{\sqrt{R^2+X^2}}\right). \tag{8}$$

Параметром $\mathrm{MAX}(U)$ обозначена компонента $\frac{EU}{\sqrt{R^2+X^2}}$. Отметим, что кривая *1* на рис. 3,*б* (вставка) имеет максимум вблизи значения $p^{\mathrm{Re}}_{\max}$, объясняемый перестройкой тропического множества решений, что может быть до-

полнительным критерием близости предельного режима. При этом во всем диапазоне p^{Re} от нуля до $p^{\mathrm{Re}}_{\max}$ не происходит нарушения условия

$$|S_U| \leqslant \max_U \left(\frac{EU}{\sqrt{R^2 + X^2}} \right), \tag{9}$$

которое используется в [8] для определения близости режима к границе области его существования. Таким образом, применить (9), как предлагается в [8], к схеме рис. 1 для выявления области, предшествующей наступлению предельного режима, не удается.

4. Примеры расчета энергосистем

Рассмотрим пример расчета, представленного авторами [8] для демонстрации предлагаемого ими подхода. Исследуется четырехузловая энергосистема (рис. 4) с двумя генераторами.

Первый задан шиной бесконечной мощности с известным напряжением $\dot{U}_1$, второй — модулем напряжения U_3 и активной мощностью p_3^{Re}. При такой постановке задачи невозможно аналитическое решение нелинейных уравнений [14] состояния энергосистемы:

$$\begin{gathered} \dot{U}_2 \left(\frac{1}{\underline{z}_{12}} + \frac{1}{\underline{z}_{23}} + \frac{1}{\underline{z}_{24}} \right) - \dot{U}_3 \left(\frac{1}{\underline{z}_{23}} \right) - \dot{U}_4 \left(\frac{1}{\underline{z}_{24}} \right) = \dot{U}_1 \left(\frac{1}{\underline{z}_{12}} \right), \\ \mathrm{Re} \left[\dot{U}_3^* \left(\dot{U}_3 \frac{1}{\underline{z}_{23}} - \dot{U}_2 \frac{1}{\underline{z}_{12}} \right) \right] = \dot{p}_3^{\mathrm{Re}}, \quad \left| \dot{U}_3 \right| = \mathrm{const}, \\ \dot{U}_4 \frac{1}{\underline{z}_{24}} - \dot{U}_2 \frac{1}{\underline{z}_{24}} = - \frac{\dot{p}_4^*}{\dot{U}_4^*}, \end{gathered} \tag{10}$$

где

— сопротивления ветвей $\underline{z}_{12} = 8{,}91 + j80{,}91$; $\underline{z}_{23} = 4{,}45 + j40{,}46$; $\underline{z}_{24} = 6{,}68 + j60{,}68$;

— напряжения балансирующего узла $\dot{U}_1 = 500$;

— активная мощность $p_3^{\mathrm{Re}} = 400$ и модуль напряжения $U_3 = 500$ в третьем узле;

— сопряженный комплекс мощности узла четыре $\dot{p}_4^* = p_4^{\mathrm{Re}} - j p_4^{\mathrm{Im}}$ для разных режимов, отметим, что принято условие $p_4^{\mathrm{Im}} = 0$.

Решение системы (10) проводили в пакете Mathcad методом Левенберга–Марквардта при увеличении нагрузки в узле *4* до получения предельного

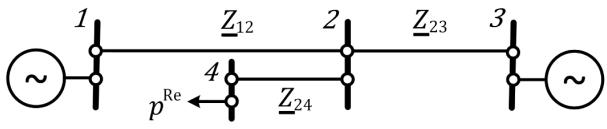


Рис. 4. Расчетная схема четырехузловой электроэнергетической системы.

Таблица 1. Параметры режима четырехузловой энергосистемы

Шаг	p_4^{Re}	U_2	Ψ_2	Ψ_3	U_4	Ψ_4
0	500	492,5637	−2,0083	1,6966	481,5826	−9,3567
1	600	489,8857	−3,9833	−0,2924	475,4331	−12,9766
2	700	486,5099	−6,0115	−2,3386	467,9762	−16,7639
3	800	482,2942	−8,1121	−4,4620	458,9055	−20,7819
4	900	477,0080	−10,313	−6,6920	447,7206	−25,1289
5	1000	470,2383	−12,6602	−9,0775	433,5139	−29,9775
6	1100	461,0926	−15,2455	−11,7162	414,2925	−35,6971
7	1200	446,5674	−18,3529	−14,9131	383,2047	−43,5358
8	1225	440,4618	−19,3571	−15,9566	369,7892	−46,5104
9	1237,5	436,0835	−19,9756	−16,6041	359,9997	−48,5514
10	1243,8	432,9471	−20,3673	−17,0168	352,8867	−49,9711
11	1245	432,1875	−20,4557	−17,1103	351,1503	−50,3099
12	1250	426,5797	−21,0298	−17,7230	338,1517	−52,7538
13	1250,1993	425,2433	−21,1460	−17,8485	335,0037	−53,3220

Таблица 2. Параметры режимов в лагорифмической шкале

Шаг	p_4^{Re}	$\ln \mathrm{MAX}(2)$	$\ln \lvert S_2 \rvert$	$\ln \mathrm{MAX}(3)$	$\ln \lvert S_3 \rvert$	$\ln \mathrm{MAX}(4)$	$\ln \lvert S_4 \rvert$
0	500	8,7079	7,2533	8,7079	5,6038	8,2651	6,8197
1	600	8,7025	7,2424	8,7025	5,6038	8,2468	6,9129
2	700	8,6955	7,2286	8,6955	5,6038	8,2240	6,9963
3	800	8,6868	7,2112	8,6868	5,6038	8,1958	7,0711
4	900	8,6758	7,1891	8,6758	5,6038	8,1601	7,1383
5	1000	8,6615	7,1606	8,6615	5,6038	8,1135	7,1981
6	1100	8,6419	7,1213	8,6419	5,6038	8,0485	7,2497
7	1200	8,6099	7,0573	8,6099	5,6038	7,9385	7,2884
8	1225	8,5961	7,0297	8,5961	5,6038	7,8891	7,2931
9	1237,5	8,5861	7,0097	8,5861	5,6038	7,8523	7,2929
10	1243,8	8,5789	6,9953	8,5789	5,6038	7,8251	7,2910
11	1245	8,5771	6,9918	8,5771	5,6038	7,8184	7,2903
12	1250	8,5641	6,9657	8,5641	5,6038	7,7677	7,2827
13	1250,1993	8,5609	6,9594	8,5609	5,6038	7,7552	7,2803

режима (табл. 1). Небаланс активной мощности энергосистемы во всех существующих режимах отсутствовал, т.е. был равен нулю (с точностью 10^{-307}). При $p_4^{\mathrm{Re}} > p_{4\,\max}^{\mathrm{Re}}$ нарушался баланс мощности в энергосистеме и его можно было просто выявить по расчетному значению модуля напряжения U_3, который в указанных режимах становился отличным от заданного значения $U_3 = 500$. Следует отметить, что в [8] предельный режим соответствовал значению 1243,8, получаемому на шаге 10 табл. 1, хотя представленные результаты расчетов показывают предельный режим при 1250,1993. В случае $p_4^{\mathrm{Re}} = 1250{,}1994$ напряжение U_3 с учетом пятнадцати знаков после запятой равно 500,000000000000170, а небаланс — $454{,}7474 \cdot 10^{-15}$.

Для каждого шага p_4^{Re} приведены результаты расчета (табл. 2) параметров режимов в логарифмической шкале над комплексным мультиполем. Параметры S_2, S_3 и S_4 определяются из балансов активной мощности узлов следующим образом [8]:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2^*\dot{U}_1}{\underline{z}_{12}}+\frac{\dot{U}_2\dot{U}_1^*}{\underline{z}_{12}^*}+\frac{\dot{U}_2^*\dot{U}_3}{\underline{z}_{23}}+\frac{\dot{U}_2\dot{U}_3^*}{\underline{z}_{23}^*}+\frac{\dot{U}_2^*\dot{U}_4}{\underline{z}_{24}}+\frac{\dot{U}_2\dot{U}_4^*}{\underline{z}_{24}^*}+\right)=S_2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_3^*\dot{U}_2}{\underline{z}_{23}}+\frac{\dot{U}_3\dot{U}_2^*}{\underline{z}_{23}^*}\right)=S_3=\frac{(U_3)^2}{2}\left(\frac{1}{\underline{z}_{23}}+\frac{1}{\underline{z}_{23}^*}\right)-p_3^{\mathrm{Re}},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_4^*\dot{U}_2}{\underline{z}_{24}}+\frac{\dot{U}_4\dot{U}_2^*}{\underline{z}_{24}^*}\right)=S_4=\frac{(U_4)^2}{2}\left(\frac{1}{\underline{z}_{24}}+\frac{1}{\underline{z}_{24}^*}\right)-p_4^{\mathrm{Re}},$$

где

$$S_2=\frac{(U_2)^2}{2}\left(\frac{1}{\underline{z}_{12}}+\frac{1}{\underline{z}_{12}^*}+\frac{1}{\underline{z}_{23}}+\frac{1}{\underline{z}_{23}^*}+\frac{1}{\underline{z}_{24}}+\frac{1}{\underline{z}_{24}^*}\right).$$

Параметры $\ln \mathrm{MAX}(2)$, $\ln \mathrm{MAX}(3)$ и $\ln \mathrm{MAX}(4)$ на каждом шаге p_4^{Re} соответствовали одним и тем же ветвям и определялись по формулам:

$$\ln \mathrm{MAX}(2)=\ln \mathrm{MAX}(3)=\left(\frac{U_2U_3}{|\underline{z}_{23}|}\right),$$

$$\ln \mathrm{MAX}(4)=\left(\frac{U_2U_4}{|\underline{z}_{24}|}\right).$$

Отметим, что для всех узлов v энергосистемы (табл. 2) выполняется условие

$$\ln \mathrm{MAX}(v)>\ln|S_v|,$$

а соответственно, и приведенное в [8]

$$|S_U|\leqslant \max_k\left(\frac{U_vU_k}{|\underline{z}_{vk}|}\right). \tag{11}$$

При этом в [8] в диапазоне от $p_4^{\mathrm{Re}}=1200$ и далее до $p_{4\max}^{\mathrm{Re}}$ (1243,8) указывается на нарушение условия (11) и это обстоятельство используется для выделения внутри области существования режима подобласти, выход за границу которой предшествует предельному режиму.

Следует отметить, что соблюдение условия (11) в области существования режима согласуется с качественными результатами, полученными для схемы рис. 1. Кроме того, можно выделить узел 4, в котором зависимость $\ln|S_4|$

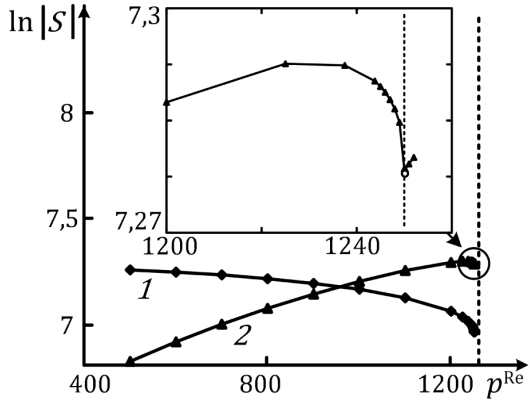


Рис. 5. Зависимости параметров $\ln|S|$ от p^{Re}: *1* – $\ln|S_2|$; *2* – $\ln|S_4|$.

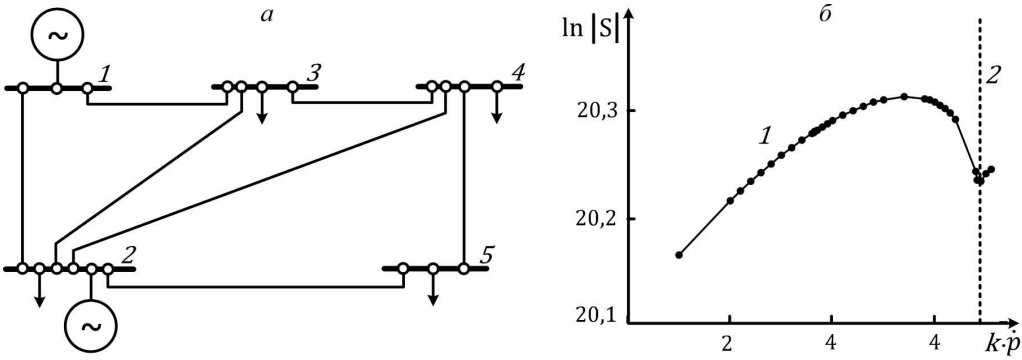


Рис. 6. Схема (*а*) IEEE 5 шин и зависимости (*б*) *1* – $\ln|S_5|$ от $k\sum\dot{p}$; *2* – $\dot{p}_{\max}$.

имеет максимум (рис. 5 и табл. 2, ячейка с заливкой), аналогичный приведенному на рис. 3,*б* (см. вставку). Для проверки выполнения условий (11) и возможности использования зависимостей $\ln|S|$ при выделении области, предшествующей предельному режиму, проводились расчеты на тестовой схеме IEEE 5-шин (рис. 6,*а*) со стандартными исходными данными, представленными в табл. 3 в относительных единицах, полученными из базовых величин 100 МВА и 100 кВ. Отметим, что в схеме учитывается емкостная проводимость B линий сети и к шине *2* подключен генератор PV-типа.

При утяжелении режима энергосистемы нагрузка всех узлов $\sum\dot{p} = \dot{p_3} + \dot{p_4} + \dot{p_5}$ увеличивалась одновременно, путем умножения на коэффициент k. В результате расчетов установлено, что для всех узлов (шин) энергосистемы условия (11) выполняются, а для узла *5* наблюдался максимум зависимости $\ln|S_5|$ от $k\sum\dot{p}$, предшествующий предельному режиму $\dot{p}_{\max}$ (см. рис. 6,*б*). Отметим, что условия (11) выполняются и имеется указанный максимум при произвольных значениях нагрузок узлов и сопротивлений линий.

Таблица 3. Исходные данные тестовой схемы энергосистемы IEEE 5-Шин

Информация по узлам сети					Информация по ветвям сети				
№	Тип узла	V, о.е.	p^{Re}, о.е.	p^{Im}, о.е.	Ветви		Сопротивления и проводимости		
							R, о.е.	X, о.е.	B, о.е.
1	Балансирующий	1,20	–	–	1	2	0,02	0,06	0,06
					1	3	0,08	0,24	0,05
2	Генераторный (PV)	1,20	0,40	–	2	3	0,06	0,18	0,04
					2	4	0,06	0,18	0,04
3	Нагрузочный	–	0,45	0,15	2	5	0,04	0,12	0,03
4	Нагрузочный	–	0,60	0,10	3	4	0,01	0,03	0,02
5	Нагрузочный	–	0,40	0,05	4	5	0,08	0,24	0,05

Проводились исследования масштабируемости предложенного метода и критерия на схемах с большим количеством шин (стандартная схема IEEE 30-шин), в которых были заданы только PQ узлы нагрузок и генераторов, а также при наличии PV генераторов. Для всех рассмотренных случаев только у некоторых (нескольких) узлов, соединенных с генераторами, наблюдаются рост и максимумы зависимостей $\ln|S|$, которые можно использовать для определения приближения к границе области допустимых режимов энергосистемы. Для остальных узлов и ветвей энергосистемы указанные зависимости с ростом нагрузки уменьшаются, как показано на рис. 5, кривая *1*.

Таким образом, исследования показывают, что при утяжелении режима максимум зависимости $\ln|S|$ для узлов энергосистемы может быть использован при определении границы, выход за которую предшествует выходу режима на границу его области существования.

5. Заключение

1. Выявлять отсутствие баланса в энергосистеме, а соответственно, и принадлежность рассматриваемого режима к области неустойчивого состояния можно, контролируя при расчетах значение заданного напряжения генерирующего узла (шины) PV-типа.

2. В области существования режима условия (11) выполняются для каждого узла (шины) энергосистемы, их не удастся использовать для выделения подобласти, выход за которую предшествует предельному режиму.

3. Выделить границу внутри области существования режима, выход за которую предшествует предельному режиму, можно, определяя максимум возрастающих при утяжелении значений $\ln|S|$ узла (шины) энергосистемы. Это позволит при небольших затратах вычислительных ресурсов определять критические по утяжелению узлы и получать дополнительную информацию для ввода режима в более устойчивую область.

Выражение (4) и (5) получаем из (3) следующим образом:

$$U^2 + \left(p^{\mathrm{Re}} - jp^{\mathrm{Im}}\right)(R + jX) = EUe^{-j\Psi_U},$$

$$U^2 + p^{\mathrm{Re}}R + p^{\mathrm{Im}}X + j\left(p^{\mathrm{Re}}X + p^{\mathrm{Im}}R\right) = EUe^{-j\Psi_U}. \tag{П.1}$$

Баланс модулей выражения (П.1) сводится к квадратному уравнению относительно неизвестной $\hat{U} = U^2$:

$$a\hat{U}^2 + b\hat{U} + c = 0, \tag{П.2}$$

где

$$a = 1, \quad b = 2\left(p^{\mathrm{Re}}R + p^{\mathrm{Im}}X\right) - E^2, \quad c = \left(R^2 + X^2\right)\left[\left(p^{\mathrm{Re}}\right)^2 + \left(p^{\mathrm{Im}}\right)^2\right].$$

Решением (П.2) является выражение (4). Угол Ψ_U в выражении (5) определяется путем подстановки найденного выражения (4) для U в уравнение (П.1).

Выражение (6) статьи получено из уравнения мощности шины нагрузки:

$$\dot{p} = p^{\mathrm{Re}} + jp^{\mathrm{Im}} = \dot{U}\left(\frac{\dot{E} - \dot{U}}{R + jX}\right)^*. \tag{П.3}$$

Из (П.3) получим

$$\frac{p^{\mathrm{Im}}}{p^{\mathrm{Re}}} = \tan\phi = \frac{EX\cos\Psi_U - UX + ER\sin\Psi_U}{ER\cos\Psi_U - UR - EX\sin\Psi_U}. \tag{П.4}$$

Выразим из (П.4) модуль напряжения U шины нагрузки:

$$U = E\left(\cos\Psi_U + \sin\Psi_U\left(\frac{R + X\tan\phi}{X - R\tan\phi}\right)\right)$$

и поставим его в полученное из (П.3) выражение активной мощности:

$$p^{\mathrm{Re}} = \frac{U}{\left(R^2 + X^2\right)}\left[R\left(E\cos\Psi_U - U\right) - EX\sin\Psi_U\right]. \tag{П.5}$$

Взяв производную от (П.5) по углу Ψ_U и приравняв ее к нулю, получим выражение

$$\frac{dp^{\mathrm{Re}}}{d\Psi_U} = \frac{\sin\left(2\Psi_U\right)\left(R + X\tan\phi\right) - \cos\left(2\Psi_U\right)\left(R\tan\phi - X\right)}{\left(X - R\tan\phi\right)^2} = 0 \tag{П.6}$$

из которого определим

$$\tan\left(2\Psi_U\right) = \frac{R\tan\phi - X}{R + X\tan\phi}. \tag{П.7}$$

Полученное выражение (П.6) эквивалентно уравнению (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Venikov V.A., Stroev V.A., Idelchik V.I., Tarasov V.I.* Estimation of Electrical Power System Steady State Stability in Load Flow Calculations // IEEE Trans. Power App. Syst. 1975. V. 94. No. 3. P. 1034–1041.
2. *Dobson A., Lu L.* New Methods for Computing a Closest Saddle Node Bifurcation and Worst Case Load Power Margin for Voltage Collapse // IEEE Trans. Power Syst. 1993. V. 8. No. 3. P. 905–911.
3. *Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М.* Оптимизационная модель предельных режимов электрических систем // Электричество. 2010. № 11. С. 2–12.
4. *Voropai N.I., Golub I.I., Efimov D.N., et al.* Spectral and Modal Methods for Studying Stability and Control of Electric Power Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 10. P. 1751–1774.
5. *Wang Y., Lopez J.A., Sznaier M.* Convex Optimization Approaches to Information Structured Decentralized Control // IEEE Trans. Autom. Control. 2018. V. 63. No. 10. P. 3393–3403.
6. *Matveev A.S., MacHado J.E., Ortega R., et al.* Tool for Analysis of Existence of Equilibria and Voltage Stability in Power Systems with Constant Power Loads // IEEE Trans. Autom. Control. 2020. V. 65. No. 11. P. 4726–4740.
7. *Ghiocel S.G., Chow J.H.* A Power Flow Method Using a New Bus Type for Computing Steady-State Voltage Stability Margins // IEEE Trans. Power Syst. 2014. V. 29. No. 2. P. 958–965.
8. *Kirshtein B.K., Litvinov G.L.* Analyzing Stable Regimes of Electrical Power Systems and Tropical Geometry of Power Balance Equations Over Complex Multifields // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 10. P. 1802–1813.
9. *Su H.Y., Liu C.W.* Estimating the Voltage Stability Margin Using PMU Measurements // IEEE Trans. Power Syst. 2016. V. 31. No. 4. P. 3221–3229.
10. *Ayuev B.I., Davydov V.V., Erokhin P.M.* Fast and Reliable Method of Searching Power System Marginal States // IEEE Trans. Power Syst. 2016. V. 31. No. 6. P. 4525–4533. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2016.2538299
11. *Шаров Ю.В.* О развитии методов анализа статической устойчивости электроэнергетических систем // Электричество. 2017. № 1. С. 12–18.
12. *Шаров Ю.В.* Применение модального подхода для решения проблемы обеспечения статической устойчивости электроэнергетических систем // Известия РАН. Энергетика. 2017. № 2. С. 13–29.
13. *Rao S., Tylavsky D., Feng Y.* Estimating the Saddle-Node Bifurcation Point of Static Power Systems Using the Holomorphic Embedding Method // Int. J. Electr. Power Energ. Syst. 2017. V. 84. P. 1–12.
14. *Liu C., Wang B., Hu F., Sun K., Bak C.L.* Online Voltage Stability Assessment for Load Areas Based On the Holomorphic Embedding Method // IEEE Trans. Power Syst. 2018. V. 33. No. 4. P. 3720–3734.
15. *Qiu Y., Wu H., Song Y., Wang J.* Global Approximation of Static Voltage Stability Region Boundaries Considering Generator Reactive Power Limits // IEEE Trans. Power Syst. 2018. V. 33. No. 5. P. 5682–5691.
16. *Wang L., Chiang H.D.* Group-Based Line Switching for Enhancing Contingency-Constrained Static Voltage Stability // IEEE Trans. Power Syst. 2020. V. 35. No. 2. P. 1489–1498.

17. *Ali M., Gryazina E., Khamisov O., Sayfutdinov T.* Online assessment of voltage stability using Newton-Corrector algorithm // IET Generat., Transmiss. Distribut. 2020. V. 14. No. 19. P. 4207–4216.

18. *Булатов Ю.Н., Крюков А.В, Суслов К.В., Черепанов А.В.* Оперативное определение запасов статической устойчивости в системах электроснабжения с установками распределенной генерации // Вестник Иркут. гос. техн. ун-та. 2021. Т. 25. № 1(156). С. 31–43. https://doi.org/10.21285/1814-3520-2021-1-31-43

19. *Bulatov Y., Kryukov A., Suslov K., et al.* A Stochastic Model for Determining Static Stability Margins in Electric Power Systems // Computation. 2022. V. 10. No. 5. https://doi.org/10.3390/computation10050067

20. *Weng Y., Yu S., Dvijotham K., Nguyen H.D.* Fixed-Point Theorem-Based Voltage Stability Margin Estimation Techniques for Distribution Systems with Renewables // IEEE Transact. Industr. Inform. 2022. V. 18. No. 6. P. 3766–3776. https://doi.org/10.1109/TII.2021.3112097

21. *Zhang W., Wang T., Chiang H.D.* A Novel FFHE-Inspired Method for Large Power System Static Stability Computation // IEEE Trans. Power Syst. 2022. V. 37. No. 1. P. 726–737. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2021.3093236

22. *Ali M., Gryazina E., Dymarsky A., Vorobev P.* Calculating voltage feasibility boundaries for power system security assessment // Int. J. Electr. Power Energ. Syst. 2023. V. 146. 108739. https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2022.108915

23. *Ali M., Ali M.H., Gryazina E., Terzija V.* Calculating multiple loadability points in the power flow solution space // Int. J. Electr. Power Energ. Syst. 2023. V. 148. 108915. https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2022.108739

24. *Machado J.E., Grino R., Barabanov N., et al.* On Existence of Equilibria of Multi-Port Linear AC Networks with Constant-Power Loads // IEEE Transact. Circuits and Systems. Part 1: Regular Papers. 2017. V. 64. No. 10. P. 2772–2782. https://doi.org/10.1109/TCSI.2017.2697906

25. *Danilov M.I., Romanenko I.G.* Determination of Power Flows and Temperature of Electrical Network Wires of a Power System Steady State // Power Technol. Engineer. 2023. V. 56. No. 5. P. 739–750. https://doi.org/10.1007/s10749-023-01583-z

26. *Karimi M., Shahriari A., Aghamohammadi M.R., et al.* Application of Newton-Based Load Flow Methods for Determining Steady-State Condition of Well and Ill-Conditioned Power Systems: A Review // Int. J. Electr. Power Energ. Syst. 2019. V. 113. P. 298–309.

27. *Zorin I.A., Gryazina E.N.* An Overview of Semidefinite Relaxations for Optimal Power Flow Problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 5. P. 813–833. https://doi.org/10.1134/S0005231019050027

28. *Danilov M.I., Romanenko I.G.* Identification of Unauthorized Electric-Power Consumption in the Phases of Distribution Networks with Automated Metering Systems // Power Technol. Engineer. 2022. V. 56. No. 3. P. 414–422. https://doi.org/10.1007/s10749-023-01530-y

29. *Данилов М.И., Романенко И.Г.* Оперативная идентификация сопротивлений проводов распределительных сетей 380 В автоматизированными системами учета // Энергетика. Изв. вузов и энерг. объединений СНГ. 2023. Т. 66. № 2. Р. 124–140. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2023-66-2-124-140

30. *Bonchuk I.A., Shaposhnikov A.P., Sozinov M.A., Erokhin P.M.* Optimization of the Operating Modes of Power Plants in Isolated Electrical Power Systems // Power Technol. Engineer. 2021. V. 55. No. 3. P. 445–453.
https://doi.org/10.1007/s10749-021-01380-6

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 28.09.2023

После доработки 30.10.2023

Принята к публикации 21.12.2023

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2024 г. А.П. АФАНАСЬЕВ, д-р физ.-мат. наук (apa@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Российский университет дружбы народов, Москва),
В.Е. КРИВОНОЖКО, д-р физ.-мат. наук (KrivonozhkoVE@mail.ru)
(Национальный исследовательский технологический
университет «МИСИС», Москва;
ФИЦ ИУ РАН, Москва),
А.В. ЛЫЧЕВ, канд. физ.-мат. наук (lychev@misis.ru)
(Национальный исследовательский технологический
университет «МИСИС», Москва)
О.В. СУХОРОСЛОВ, канд. физ.-мат. наук (sukhoroslov@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва)

ВЫПУКЛЫЕ ИЗОКВАНТЫ В МОДЕЛЯХ АНАЛИЗА СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ С ЧАСТИЧНОЙ ВЫПУКЛОСТЬЮ[1]

Модели с частичной выпуклостью являются важным классом моделей анализа среды функционирования, поскольку позволяют корректно учитывать в моделях относительные показатели, средние значения, проценты и т.д. В данной работе предложены алгоритмы построения входных и выходных изоквант с использованием выпуклых показателей в моделях с частичной выпуклостью. Эти алгоритмы позволяют исследовать зависимость между любыми выпуклыми показателями в модели. Вычислительные эксперименты подтверждают надежность и эффективность предложенных методов.

Ключевые слова: анализ среды функционирования, множество производственных возможностей, частичная выпуклость, эффективный фронт, изокванта.

DOI: 10.31857/S0005231024010025

1. Введение

Подход анализа среды функционирования (АСФ) возник как обобщение простых показателей поведения объектов на многомерный случай. Математически такой подход приводит к решению большого семейства оптимизационных задач. Основоположниками этого подхода были известные американские ученые А. Чарнес, У. Купер, В. Роудс и Р. Бэнкер [1, 2]. Модели FDH (англ. free disposal hull) появились в конце прошлого века в работах Д. Депринса, Л. Симара и Г. Тулкенса [3] почти одновременно с одной из основных моделей АСФ, в которой наблюдается переменный эффект масштаба.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01353) https://rscf.ru/en/project/23-11-00197/.

Ограничения моделей АСФ являются выпуклыми, поэтому для этих моделей широко используются методы оптимизации. В то же время множество производственных возможностей моделей FDH является невыпуклым. По этой причине разработка методов визуализации для моделей FDH замедлилась.

Понятие частичной выпуклости было предложено в [4]. Это понятие включает ряд новых моделей, где модели АСФ и FDH являются двумя крайними случаями. Такие модели расширяют возможности моделей АСФ и FDH, поскольку проблемы с частичной выпуклостью включают в модели такие показатели, как дробные отношения, проценты, средние значения и т.д.

Модели АСФ и FDH направлены на разработку инструментов для анализа поведения сложных социально-экономических систем. К таким системам относятся регионы, банки, университеты, больницы, промышленные объекты и т.д. Для разработки и применения этих моделей необходимо было разработать новые подходы.

Методы визуализации используются во многих областях человеческой деятельности. При исследовании поведения больших социально-экономических систем визуализация также играет большую роль. Как отмечается в [5], это позволяет менеджерам строить траектории развития подразделений, получать неизвестные зависимости между компонентами модели, находить некорректности в моделях и исправлять их, исследовать проблему разделения и слияния объектов. В целом визуализация повышает интуицию руководителя при принятии стратегических решений.

Однако в научной литературе существует лишь несколько работ [5–7], посвященных визуализации многомерных множеств производственных возможностей и исследованию производственных объектов с помощью этих графиков. В [7] были представлены методы многомерной визуализации выпуклых моделей АСФ. В [5] сделан обзор методов по визуализации моделей АСФ, существующих на тот момент. Визуализация означает построение сечений многомерного многогранного множества производственных возможностей двух- или трехмерными аффинными подпространствами. Такой подход сводится к анализу эффективности производственных объектов с помощью хорошо известных функций в экономике, таких как производственная функция, изокванта, изокоста, изопрофита и т.д. [8, 9].

В [10] были предложены методы визуализации для моделей с частичной выпуклостью, в которых часть показателей является невыпуклой. Для таких моделей были предложены методы решения и визуализации для двух невыпуклых входных или выходных показателей. Новые методы показали свою эффективность в решении реальных задач.

Более того, в [10] было показано, что неучет специфики задачи приводит к значительным искажениям результата. В данной работе рассматриваются алгоритмы построения входных и выходных изоквант в моделях с частичной выпуклостью с использованием выпуклых показателей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим множество производственных объектов (X_j, Y_j), $j = 1, \ldots, n$, где вектор выходных показателей $Y_j = (y_{1j}, \ldots, y_{rj}) \geqslant 0$ получается из вектора входных показателей $X_j = (x_{1j}, \ldots, x_{mj}) \geqslant 0$. Предполагается, что все показатели неотрицательны и по крайней мере одна компонента каждого входного и выходного векторов положительна.

Теперь рассмотрим понятие частичной выпуклости [4]. Пусть входные и выходные показатели I и O разделяются следующим образом:

$$I = I^C \cup I^{NC}, \quad O = O^C \cup O^{NC},$$

где подмножества I^C и I^{NC}, O^C и O^{NC} взаимно исключающие.

Множества I^C и O^C являются подмножествами входных и выходных показателей, соответствующих абсолютным показателями (мерам объема). Взаимодополняющие подмножества $I^{NC} = I \setminus I^C$ и $O^{NC} = O \setminus O^C$ обозначают входные и выходные данные с относительными показателями (меры отношений).

Предположим, что индексное множество I^C содержит входные показатели с номерами от 1 до m', в то же время индексное множество I^{NC} содержит номера входных показателей с $(m' + 1)$ по m. Тогда очевидно, что любой вектор входных данных может быть записан в виде $X = (X^C, X^{NC})$, вектор X^C содержит первые m' компонент вектора X, а X^{NC} содержит оставшиеся компоненты X.

Точно так же предположим, что индексное множество O^C содержит компоненты выходного вектора от 1 до r' и индексное множество O^{NC} содержит компоненты выходного вектора с $(r' + 1)$ по r. Следовательно, любой вектор выходных данных может быть записан в виде $Y = (Y^C, Y^{NC})$.

Множество производственных возможностей с частичной выпуклостью определяется следующими постулатами [4].

(A1) Допустимость наблюдаемых объектов. Объект $(X_j, Y_j) \in T$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

(A2) Возможность свободного использования. Если $(X, Y) \in T$ и $Y \geqslant Y' \geqslant 0$, $X' \leqslant X$, тогда $(X', Y') \in T$.

(A3) Частичная выпуклость. Пусть $(X', Y') \in T$ и $(X'', Y'') \in T$. Предположим, что $(X')_i = (X'')_i$ для всех $i \in I^{NC}$ и $(Y')_r = (Y'')_r$ для всех $r \in O^{NC}$. Тогда для любого $\lambda \in [0, 1]$ объект $\lambda(X', Y') + (1 - \lambda)(X'', Y'') \in T$.

Множество производственных возможностей T, которое удовлетворяет постулатам (A1)–(A3) может быть записано в алгебраической форме следующим образом:

$$T = \left\{ (X^C, X^{NC}, Y^C, Y^{NC}) \geqslant 0 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} X_j^C \lambda_j \leqslant X^C, \sum_{j=1}^{n} Y_j^C \lambda_j \geqslant Y^C, \text{ если } \lambda_j \geqslant 0, \right.$$

$$\left. \text{тогда } X_j^{NC} \leqslant X^{NC} \text{ и } Y_j^{NC} \geqslant Y^{NC}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n \right\}. \quad (1)$$

Модель с частичной выпуклостью объединяет две хорошо известные в методологии АСФ модели. Так, если $I^{NC} = O^{NC} = \emptyset$ (все показатели являются абсолютными), то множество (1) задает модель BCC [2]. Если же в модели присутствуют только относительные показатели, $I^C = O^C = \emptyset$, то множество (1) определяет модель FDH [3].

Подиновский [4] использует булевы переменные δ_j для того, чтобы записать ограничения множества T в виде линейных смешанно-целочисленных ограничений. Однако при построении изоквант по показателям из множеств I^C и O^C, показатели, соответствующие множества I^{NC} и O^{NC}, не изменяются. Поэтому целочисленные ограничения в этом случае могут быть заменены эквивалентными линейными ограничениями $(X_j^{NC} - X^{NC})\lambda_j \leqslant 0$ и $(Y_j^{NC} - Y^{NC})\lambda_j \geqslant 0$; см. [11, 12] и замечание 3 в [4].

3. Алгоритм построения входной изокванты

Определим входное двумерное сечение множества T для объекта $(X_o, Y_o) \in \in T$ следующим образом:

$$I_1(X_o, Y_o) = \big\{(X, Y) \;\big|\; X = X_o + \alpha d_1 + \beta d_2,\ Y = Y_o,\ \alpha, \beta \in E^1\big\}, \tag{2}$$

где $d_1, d_2 \in E^m$, $(X_o, Y_o) \in T$, векторы d_1 и d_2 — направляющие векторы входной изокванты, причем вектор d_1 перпендикулярен d_2.

Затем определим входную двумерную изокванту как пересечение границы и двумерной плоскости I_1:

$$\mathrm{Sec}_I(X_o, Y_o) = \big\{(X, Y) \;\big|\; (X, Y) \in \mathrm{WEff}_P T \cap I_1\big\}, \tag{3}$$

где $\mathrm{WEff}_P T$ — множество слабоэффективных по Парето точек множества T.

Выходное двумерное сечение множества T для объекта $(X_o, Y_o) \in T$ записывается как

$$I_2(X_o, Y_o) = \big\{(X, Y) \;\big|\; X = X_o,\ Y = Y_o + \alpha g_1 + \beta g_2,\ \alpha, \beta \in E^1\big\}, \tag{4}$$

где $g_1, g_2 \in E^r$ — направляющие векторы выходной изокванты, вектор g_1 перпендикулярен g_2.

Теперь определим выходную двумерную изокванту как пересечение границы и двумерной плоскости I_2:

$$\mathrm{Sec}_O(X_o, Y_o) = \big\{(X, Y) \;\big|\; (X, Y) \in \mathrm{WEff}_P T \cap I_2\big\}. \tag{5}$$

Рассмотрим оптимизационный алгоритм для построения входной изокванты для объекта (X_o, Y_o). Пусть изокванта определяется направлениями $e_p \in E^{m'}$ и $e_s \in E^{m'}$, где e_p и e_s являются единичными ортами, соответствующие входным координатам p и s соответственно. Кроме того, входы p и s принадлежат множеству I^C.

Алгоритм 1. Построение входной изокванты.

Шаг 1. Найти крайнюю левую точку на входной изокванте, проходящей через объект $(X_o Y_o)$ и связанную с направлениями $e_p \in E^{m'}$ и $e_s \in E^{m'}$.

Шаг 1,а. Решить следующую оптимизационную задачу:

$$
\begin{aligned}
&\max \theta_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{sj}^{C}\lambda_j + \theta_1 \leqslant x_{so}, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{pj}^{C}\lambda_j + \tau_1 \leqslant x_{po}, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{C}\lambda_j \leqslant x_{io},\ i \neq p, s, \\
&\sum_{j=1}^{n} Y_j^{C}\lambda_j \geqslant Y_o, \\
&(X_j^{NC} - X_o^{NC})\lambda_j \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
&(Y_j^{NC} - Y_o^{NC})\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где τ_1 и θ_1 — свободные переменные.

Шаг 1,б. Пусть θ_1^* является оптимальным значением целевой функции задачи (6). Решить следующую оптимизационную задачу:

$$
\begin{aligned}
&\max \tau_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{sj}^{C}\lambda_j + \theta_1^* \leqslant x_{so}, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{pj}^{C}\lambda_j + \tau_1 \leqslant x_{po}, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{C}\lambda_j \leqslant x_{io},\ i \neq p, s, \\
&\sum_{j=1}^{n} Y_j^{C}\lambda_j \geqslant Y_o, \\
&(X_j^{NC} - X_o^{NC})\lambda_j \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
&(Y_j^{NC} - Y_o^{NC})\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где τ_1 является свободной переменной.

Пусть $\tilde{Z}_1^1 = (X_o^C - \theta_1^* e_s - \tau_1^* e_p, X_o^{NC}, Y_o^C, Y_o^{NC})$, где θ_1^* и τ_1^* — оптимальные значения в задачах (6) и (7) соответственно.

Шаг 2. Найти вторую точку на входной изокванте, проходящей через объект (X_o, Y_o) и связанную с направлениями $e_p \in E^{m'}$ и $e_s \in E^{m'}$.

Шаг 2,а. Решить следующую оптимизационную задачу:

$$
\begin{aligned}
&\max \tau_2 \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{sj}^{C} \lambda_j + \theta_2 \leqslant x_{so}, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{pj}^{C} \lambda_j + \tau_2 \leqslant x_{po}, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{C} \lambda_j \leqslant x_{io}, \ i \neq p, s, \\
&\sum_{j=1}^{n} Y_j^{C} \lambda_j \geqslant Y_o, \\
&(X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leqslant 0, \ j = 1, \ldots, n, \\
&(Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где τ_2 и θ_2 — свободные переменные.

Шаг 2,б. Пусть τ_2^* является оптимальным значением целевой функции задачи (8). Решить следующую оптимизационную задачу:

$$
\begin{aligned}
&\max \theta_2 \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{sj}^{C} \lambda_j + \theta_2 \leqslant x_{so}, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{pj}^{C} \lambda_j + \tau_2^* \leqslant x_{po}, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{C} \lambda_j \leqslant x_{io}, \ i \neq p, s, \\
&\sum_{j=1}^{n} Y_j^{C} \lambda_j \geqslant Y_o, \\
&(X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leqslant 0, \ j = 1, \ldots, n, \\
&(Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где θ_2 — свободная переменная.

Пусть $\tilde{Z}_2^1 = (X_o^C - \theta_2^* e_s - \tau_2^* e_p, X_o^{NC}, Y_o^C, Y_o^{NC})$, где θ_2^* и τ_2^* — оптимальные значения в задачах (8) и (9) соответственно.

Шаг 3. Установить l:=1, k:=1, i_1:=1, i_2:=2. Создать поток F_k^l с точками $Z_{i_1}^l = Z_1^1$, $Z_{i_2}^l = Z_2^1$ множества производственных возможностей T. Определить множество $M = \{Z_1^1, Z_2^1\}$.

Шаг 4. Выполнить следующие операции. Выбрать любой необработанный поток F_k^l, решить оптимизационную задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} &\max \beta_1 \\ &(Z_{i_1}^l + Z_{i_2}^l)/2 + \beta_1 d_1 + \tau d_2 \in T, \end{aligned} \tag{10}$$

где β_1 и τ — скалярные переменные, вектор d_1 перпендикулярен вектору d_2, лежит в плоскости сечения и направлен в нижний левый угол изокванты, вектор $d_2 = Z_{i_1}^l - Z_{i_2}^l$.

Если оптимальное значение задачи (10) $\beta_1^* > 0$, тогда запустить новые потоки $F_{k_1}^{l+1}$ и $F_{k_2}^{l+1}$ и решить оптимизационные подзадачи.

Поток $F_{k_1}^{l+1}$ содержит точки

$$Z_{i_1}^{l+1} = Z_{i_1}^l, \quad Z_{i_2}^{l+1} = (Z_{i_1}^l + Z_{i_2}^l)/2 + \beta_1^* d_1 + \tau^* d_2,$$

где β_1^* и τ^* — оптимальные значения переменных в задаче (10).

Поток $F_{k_2}^{l+1}$ содержит точки

$$Z_{i_3}^{l+1} = Z_{i_2}^{l+1}, \quad Z_{i_4}^{l+1} = Z_{i_2}^l, \quad d_2 = Z_{i_4}^{l+1} - Z_{i_3}^{l+1},$$

где d_1 перпендикулярен вектору d_2.

Если оптимальное значение задачи (10) $\beta_1^* \leqslant 0$, тогда точки $Z_{i_1}^l$ и $Z_{i_2}^l$ являются угловыми точками отрезка входной изокванты. Включить эти точки во множество угловых точек M. Поток F_k^l удалить из списка задач.

Шаг 5. Установить l:=$l+1$. Если существуют необработанные потоки F_k^l, то перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 6.

Шаг 6. Точки множества M являются угловыми точками входной изокванты. Соединить смежные точки отрезками. Добавить вертикальный луч, выходящий из первой точки, и горизонтальный луч, начинающийся из последней точки. На этом построение входной изокванты завершается.

Рисунок 1 иллюстрирует построение изокванты с помощью алгоритма. Сначала угловые точки Z_1^1 и Z_2^1 находятся путем решения моделей (6)–(9). Затем запускается поток F_1^1, содержащий эти две точки. На следующих шагах точка Z_2^2 будет найдена с помощью решения задачи (10); а поток F_1^1 будет разделен на два потока F_1^2 и F_2^2, которые будут содержать вершины Z_1^1 и Z_2^2 для потока F_1^2 и вершины Z_2^2 и Z_2^1 для потока F_2^2.

После этого вычисления повторяются до тех пор, пока не будут найдены все отрезки изокванты.

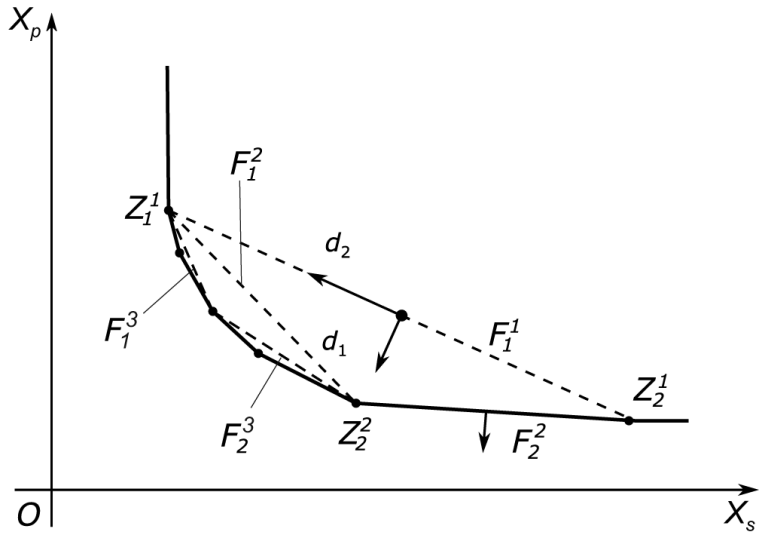


Рис. 1. Построение входной изокванты.

Для алгоритма, представленного выше, справедливо следующее

Утверждение 1. Алгоритм 1 строит входную изокванту для множества производственных возможностей (1) *за конечное число шагов.*

Доказательство. Входная изокванта двумерного множества (2) огибает это множество, или, другими словами, является границей этого множества. На шагах 1 и 2 алгоритм 1 определяет две точки Z_1^1 и Z_2^1 изокванты и определяет отрезок $[Z_1^1, Z_2^1]$, принадлежащий множеству (2). Таким образом, начальное приближение множества (3) найдено. После этого решаются две оптимизационные задачи типа (10). Если $\beta_1^* > 0$ по крайней мере для одной из этих задач, алгоритм 1 запускает новые потоки. При этом аппроксимация множества (3) расширяется. Если $\beta_1^* \leqslant 0$, тогда поток F_k^l удаляется из списка задач. Итерации продолжаются, пока существуют необработанные потоки. Причем все аппроксимации множества (3) принадлежат этому множеству, и они расширяются во время итераций. Последнее приближение совпадает со множеством (3), поскольку число отрезков изокванты конечно, а направления целевых функций отличаются друг от друга на каждой итерации. На этом доказательство завершается.

4. Алгоритм построения выходной изокванты

Алгоритм 2 построения выходной изокванты может быть записан аналогичным образом. Далее сосредоточимся только на основных отличиях. Пусть (X_o, Y_o) — производственный объект, для которого строится изокванта, и пусть p и s — два выходных параметра, которые определили эту изокванту. На первом шаге определяется крайняя правая вершина Z_1^1 изокванты с по-

мощью решения следующих задач оптимизации.

$$
\begin{aligned}
&\max \theta_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} X_j^C \lambda_j \leqslant X_o, \\
&\sum_{j=1}^{n} y_{sj}^C \lambda_j - \theta_1 \geqslant y_{so}, \\
&\sum_{j=1}^{n} y_{pj}^C \lambda_j - \tau_1 \geqslant y_{po}, \\
&\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^C \lambda_j \geqslant y_{io},\ i \neq p, s, \\
&(X_j^{NC} - X_o^{NC})\lambda_j \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
&(Y_j^{NC} - Y_o^{NC})\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где τ_1 и θ_1 — свободные переменные.

$$
\begin{aligned}
&\max \tau_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} X_j^C \lambda_j \leqslant X_o, \\
&\sum_{j=1}^{n} y_{sj}^C \lambda_j - \theta_1^* \geqslant y_{so}, \\
&\sum_{j=1}^{n} y_{pj}^C \lambda_j - \tau_1 \geqslant y_{po}, \\
&\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^C \lambda_j \geqslant y_{io},\ i \neq p, s, \\
&(X_j^{NC} - X_o^{NC})\lambda_j \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
&(Y_j^{NC} - Y_o^{NC})\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где τ_1 является свободной переменной.

Точка Z_1^1 записывается в виде

$$Z_1^1 = (X_o^C, X_o^{NC}, Y_o^C + \theta_1^* e_s + \tau_1^* e_p, Y_o^{NC}),$$

где $e_p \in E^{r'}$ и $e_s \in E^{r'}$ являются направляющими векторами изокванты, θ_1^* и τ_1^* являются оптимальными значениями целевых функций задач (11) и (12) соответственно.

Вторая вершина Z_2^1 выходной изокванты определяется с использованием следующих задач.

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
&\max \tau_2\\
&\sum_{j=1}^{n} X_j^C \lambda_j \leqslant X_o,\\
&\sum_{j=1}^{n} y_{sj}^C \lambda_j - \theta_2 \geqslant y_{so},\\
&\sum_{j=1}^{n} y_{pj}^C \lambda_j - \tau_2 \geqslant y_{po},\\
&\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^C \lambda_j \geqslant y_{io},\ i \neq p, s,\\
&(X_j^{NC} - X_o^{NC})\lambda_j \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,\\
&(Y_j^{NC} - Y_o^{NC})\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

где τ_2 и θ_2 — свободные переменные.

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
&\max \theta_2\\
&\sum_{j=1}^{n} X_j^C \lambda_j \leqslant X_o,\\
&\sum_{j=1}^{n} y_{sj}^C \lambda_j - \theta_2 \geqslant y_{so},\\
&\sum_{j=1}^{n} y_{pj}^C \lambda_j - \tau_2^* \geqslant y_{po},\\
&\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^C \lambda_j \geqslant y_{io},\ i \neq p, s,\\
&(X_j^{NC} - X_o^{NC})\lambda_j \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,\\
&(Y_j^{NC} - Y_o^{NC})\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

где τ_2 является свободной переменной.

Таким образом, получим точку $Z_2^1 = (X_o^C, X_o^{NC}, Y_o^C + \theta_2^* e_s + \tau_2^* e_p, Y_o^{NC})$, где θ_2^* и τ_2^* являются оптимальными значениями целевых функций задач (13) и (14) соответственно.

Шаги 3–6 алгоритма для выходной изокванты совпадают с алгоритмом для входной изокванты. Единственное отличие заключается в том, что вектор d_1 в модели (10) должен иметь положительные координаты p и s, чтобы обеспечить правильную форму выходной изокванты.

Утверждение 2. Алгоритм 2 строит выходную изокванту для множества производственных возможностей (1) *за конечное число шагов.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству по входной изокванте.

5. Вычислительные эксперименты

Для выполнения вычислительных экспериментов использовался набор данных с искусственно сгенерированными объектами. Набор содержит 100 производственных объектов с шестью показателями (три входа и три выхода). Показатели были сгенерированы случайным образом в диапазоне от 5 до 95. На рис. 2 показаны три изокванты, построенные для объекта 78 (обозначен точкой Z_0) с использованием трех различных моделей.

Кривая *1* соответствует изокванте модели BCC, где все показатели взяты из множества $I^C \cup O^C$, т.е. $I^{NC} \cup O^{NC} = \emptyset$. Кривая *2* соответствует модели с частичной выпуклостью, где все показатели являются абсолютными за исключением двух выходных y_2 и y_3, которые являются относительными. Третья модель отличается от предыдущей только входными показателями x_1 и x_2. В этой модели они принадлежат множеству I^{NC}. Изокванта для этой модели изображена в виде кривой *3*. Входная изокванта для модели FDH выглядит точно так же, как кривая *3*; в данном примере получилось так, что две кривые совпали. Из рис. 2 видно, что модели BCC и FDH являются двумя крайними случаями и кривая *2* лежит между ними. Точки Z_1, Z_2 и Z_3 являются радиальными проекциями объекта Z_0 на фронт моделей 1, 2 и 3 соответственно.

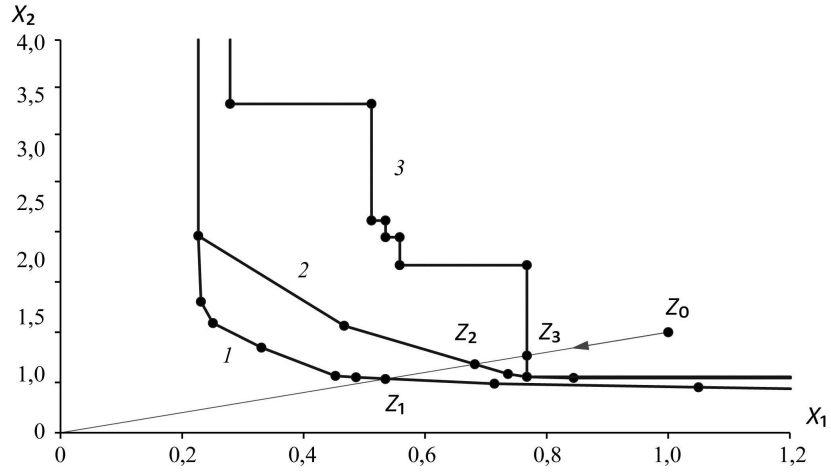


Рис. 2. Входные изокванты для модели BCC (кривая *1*), модели с частичной выпуклостью (кривая *2*) и модели FDH (кривая *3*) для объекта 78.

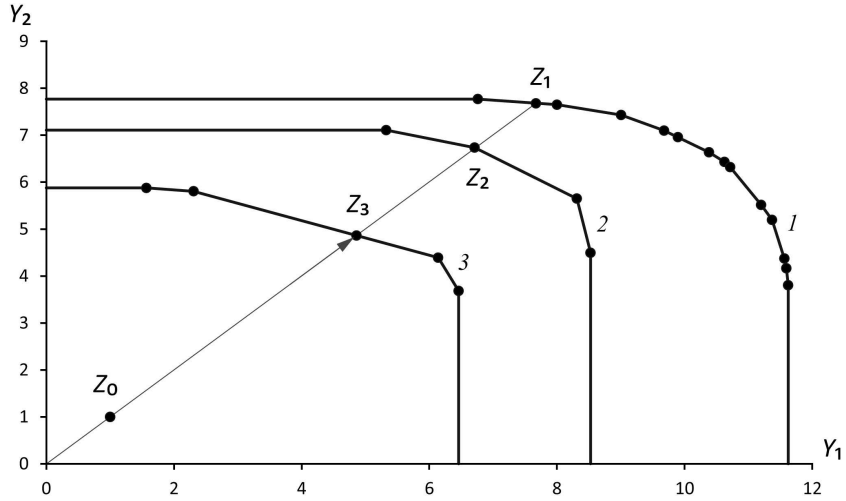


Рис. 3. Выходные изокванты для модели BCC (кривая *1*), модели с одним относительным показателем (кривая *2*) и модели с двумя относительными показателями (кривая *3*) для объекта 78.

На рис. 3 приведены три выходные изокванты, построенные для объекта 78 (на рисунке точка Z_0) с использованием трех различных моделей. Кривая *1* связана с выходной изоквантой модели BCC. Кривая *2* соответствует модели, в которой только выходной показатель y_3 является относительным. Кривая *3* получена для модели, где два показателя x_3 и y_3 относительные, а остальные являются абсолютными. Напомним, что расстояния от точки Z_0 до точек Z_1, Z_2 и Z_3 в относительных единицах являются мерами эффективности в моделях 1, 2 и 3 соответственно. Это подтверждает тот факт, что выбор модели существенно влияет на точность анализа поведения объектов.

6. Заключение

Визуализация играет огромную роль в науке и практике человечества. Действительно, изобретение телескопа Джордано Бруно в начале XVII века позволило Ньютону в конце этого столетия открыть законы движения планет и сформулировать в результате всемирно известные законы, без которых невозможно современное развитие науки и техники. Методы визуализации используются во многих областях человеческой деятельности, ни один капитан не отправится в длительное путешествие без подробных карт, ни один врач не приступит к операции без набора снимков пациента, и ни один инженер не приступит к строительству без подробных чертежей. Однако руководители крупномасштабных социально-экономических систем часто не располагают всеми этими инструментами и полагаются на свою интуицию. Но цена ошибки в таком случае может быть достаточно огромной.

Технологии АСФ и FDH не охватывают все возможные варианты моделей для описания производственных объектов. В [4] была предложена кон-

цепция частичной выпуклости, которая обеспечивает разработку ряда новых моделей АСФ [13–16], где модели FDH и АСФ являются двумя крайними случаями. Такие модификации позволяют объяснить класс показателей модели и включить средние значения, проценты, относительные коэффициенты и т.д. в модели АСФ.

В [10] были разработаны алгоритмы построения входных изоквант в моделях АСФ с частичной выпуклостью с использованием невыпуклых показателей.

В данной работе разработаны алгоритмы построения двумерных входных и выходных изоквант с использованием выпуклых входных и выходных показателей. Предложенный алгоритм требует значительно меньшего количества вычислений, чем алгоритм [10] для невыпуклых переменных, поскольку он содержит только линейные задачи, тогда как второй использует смешанно-целочисленные задачи с булевыми переменными.

Вычислительные эксперименты подтвердили, что предложенные алгоритмы надежны и эффективны. Предложенный алгоритм допускает реализацию с помощью параллельных и распределенных вычислений, аналогичную подходу, предложенному в [7]. Разработка эффективных параллельных и распределенных реализаций алгоритмов [17–19] для ускорения вычислений и проведения вычислительных экспериментов с большими наборами данных рассматривается в качестве направления будущих исследований авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.* Measuring the efficiency of decision making units // Eur. J. Oper. Res. 1978. V. 2. No. 6. P. 429–444. https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8
2. *Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W.* Some models for estimating technical and scale efficiency in data envelopment analysis // Management Sci. 1984. V. 30. No. 9. P. 1078–1092. https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078
3. *Deprins D., Simar L., Tulkens H.* Measuring Labor Efficiency in Post Offices / The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements Marchand M., Pestieau P., Tulkens H. (Eds.). 1984. Chapter 10. P. 243–268.
4. *Podinovski V.V.* Selective convexity in DEA models // Eur. J. Oper. Res. 2005. V. 161. No. 2. P. 552–563. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2003.09.008
5. *Afanasyev A.P., Krivonozhko V.E., Forsund F.R., Lychev A.V.* Multidimensional visualization of Data Envelopment Analysis Models // Data Envelopment Anal. J. 2021. V. 5. No. 2. P. 339–361. https://doi.org/10.1561/103.00000040
6. *Cesaroni G., Kerstens K., Van de Woestyne I.* Global and local scale characteristics in convex and nonconvex nonparametric technologies: A first empirical exploration // Eur. J. Oper. Res. 2017. V. 259. No. 2. P. 576–586. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.10.030
7. *Afanasiev A.P., Krivonozhko V.E., Lychev A.V., Sukhoroslov O.V.* Multidimensional frontier visualization based on optimization methods using parallel computations // J. Global. Optim. 2020. V. 76. P. 563–574. https://doi.org/10.1007/s10898-019-00812-y

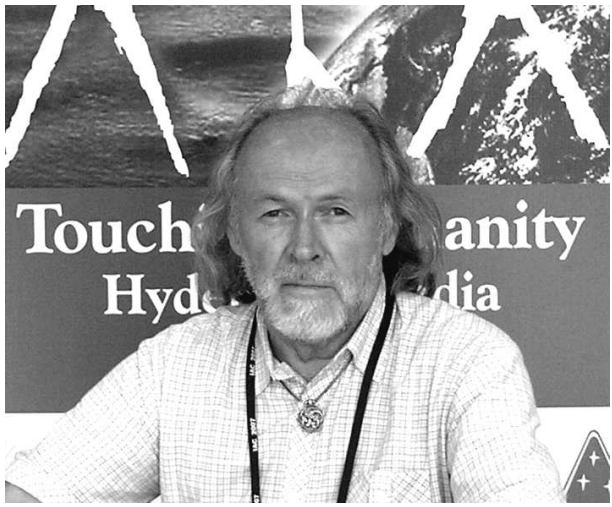
8. *Krivonozhko V.E., Utkin O.B., Volodin A.V., Sablin I.A., Patrin M.V.* Constructions of economic functions and calculations of marginal rates in DEA using parametric optimization methods // J. Oper. Res. Soc. 2004. V. 55. No. 10. P. 1049–1058. https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601759
9. *Varian H.R.* Intermediate Microeconomics, a Modern Approach, 8th edn. W.W. Norton: New York, 2010. ISBN: 978-0-393-93424-3
10. *Afanasyev A.P., Krivonozhko V.E., Lychev A.V., Sukhoroslov O.V.* Constructions of input and output isoquants in DEA models with selective convexity // Appl. Comput. Math. 2022. V. 21. No. 3. P. 317–328. https://doi.org/10.30546/1683-6154.21.3.2022.317
11. *Kuosmanen, T.* DEA with efficiency classification preserving conditional convexity // Eur. J. Oper. Res. 2001. V. 132. No. 2. P. 326–342. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00155-7
12. *Dekker D., Post T.* A quasi-concave DEA model with an application for branch performance evaluation // Eur. J. Oper. Res. 2001. V. 132. No. 2. P. 296–311. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00153-3
13. *Olesen O.B., Petersen N.C., Podinovski V.V.* Efficiency analysis with ratio measures // Eur. J. Oper. Res. 2015. V. 245. No. 2. P. 446–462. https://doi.org/10.1016/j.ejor. 2015.03.013
14. *Olesen O.B., Petersen N.C., Podinovski V.V.* Efficiency measures and computational approaches for data envelopment analysis models with ratio inputs and outputs // Eur. J. Oper. Res. 2017. V. 261. No. 2. P. 640–655. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.02.021
15. *Olesen O.B., Petersen N.C., Podinovski V.V.* The structure of production technologies with ratio inputs and outputs // J. Prod. Anal. 2022. V. 57. P. 255–267. https://doi.org/10.1007/s11123-022-00631-6
16. *Olesen O.B., Petersen N.C., Podinovski V.V.* Scale characteristics of variable returns-to-scale production technologies with ratio inputs and outputs // Annals Oper. Res. 2022. V. 318. P. 383–423. https://doi.org/10.1007/s10479-022-04862-6
17. *Smirnov S., Voloshinov V., Sukhosroslov O.* Distributed Optimization on the Base of AMPL Modeling Language and Everest Platform // Procedia Comput. Sci. 2016. V. 101. P. 313–322. https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.11.037
18. *Sukhoroslov O., Volkov S., Afanasiev A.* A web-based platform for publication and distributed execution of computing applications // 14th International Symposium on Parallel and Distributed Computing. 2015. P. 175–184. https://doi.org/10.1109/ISPDC.2015.27
19. *Sukhoroslov O., Voloshinov V., Smirnov S.* Running Many-Task Applications Across Multiple Resources with Everest Platform / Supercomputing. RuSCDays 2020. Voevodin V., Sobolev S. (Eds.) // Commun. Comput. Inform. Sci. 2020. V. 1331. P. 634–646. https://doi.org/10.1007/978-3-030-64616-5_54

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 31.08.2023

После доработки 22.12.2023

Принята к публикации 30.12.2023



Михаил Михайлович Хрусталев
(1938–2023)

11 августа 2023 г. на 86-м году ушел из жизни доктор физико-математических наук, профессор Михаил Михайлович Хрусталев — выдающийся ученый, мудрый учитель, надежный друг.

М.М. Хрусталев родился 2 мая 1938 г. в Вологде, окончил Казанский авиационный институт в 1963 г. по специальности динамика летательных аппаратов и свою трудовую деятельность начал в отделе баллистики КБ В.Н. Челомея, ныне «НПО машиностроения» в г. Реутов. Защитил кандидатскую диссертацию в МГУ в 1970 г. Защита докторской диссертации состоялась в специализированном совете при МАИ в 1984 г. Спустя три года М.М. Хрусталеву было присвоено звание профессора.

Преподаватель высочайшего уровня, ученый в области оптимального управления М.М. Хрусталев всю свою жизнь обучал студентов Московского авиационного института математическому анализу, дифференциальным уравнениям, теории функций комплексного переменного, читал авторский курс лекций по современной теории оптимального управления. Он умел объяснять самые сложные математические конструкции просто и понятно, что ценилось и студентами, и коллегами, поскольку мыслил категориями известного только ему мира и был способен рассказать о нем всем своим друзьям. Он сам всю жизнь учился чему-то новому и совершенно бескорыстно делился своими знаниями. Много молодых ученых под руководством М.М. Хрусталева стали кандидатами физико-математических наук. Это была хорошая школа отношения к жизни.

Помимо преподавательской деятельности, Михаил Михайлович уделял время научно-организационной и научно-административной работе, будучи в разные годы заместителем директора по науке Московского филиала Института проблем транспорта РАН, а затем Центра исследований устойчивости и нелинейной динамики при Институте машиноведения РАН. В это же время он трудился в Институте прикладной механики и электродинамики при МАИ над созданием математических моделей истечения рабочего тела в плазменных двигателях. Многочисленные коллеги и друзья признавали М.М. Хрусталева как «одного из немногих, кто одинаково хорошо разбирается и в математике, и в том, как движется летательный аппарат».

Научные достижения Михаила Михайловича весьма обширны. Он предложил и строго обосновал достаточные и необходимые условия глобальной оптимальности систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, применимые в том числе к задачам оптимального управления с ограничениями на состояние. В его работах сформулированы условия глобальной оптимальности стохастических систем диффузионного типа, функционирующих в условиях неполноты информации о состоянии, и условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх многих лиц.

Одним из наиболее ярких своих результатов Михаил Михайлович считал необходимые и достаточные условия в задаче терминальной инвариантности. Еще во время своей работы в отделе баллистики он заметил, что эта задача имеет гораздо более высокую прикладную значимость в сравнении с классической задачей инвариантности, так как гораздо чаще допускает решение, причем, как правило, существенно не единственное. М.М. Хрусталев предложил использовать имеющуюся свободу выбора терминально инвариантного управления для параллельного решения дополнительных задач, регулярно встречающихся на практике. В частности, им была введена концепция абсолютной инвариантности — независимости терминального критерия как от текущих возмущений, так и от начального состояния системы. Для этой задачи он сформулировал достаточные условия.

М.М. Хрусталев всегда поддерживал тесные связи с Институтом проблем управления, особенно с лабораторией «Математических методов исследования оптимальных управляемых систем» во главе с В.Ф. Кротовым, по приглашению которого он и пришел в Институт в 2014 г. После ухода В.Ф. Кротова Михаил Михайлович возглавил лабораторию и руководил ею с 2015 по 2019 гг. Под началом М.М. Хрусталева сотрудниками лаборатории получены необходимые условия оптимальности и эффективные численные алгоритмы решения задач оптимизации процессов управления стохастическими системами диффузионного и диффузионно-скачкообразного типов, имеющими нелинейную структуру и функционирующими как на конечном, так и на неограниченном интервалах времени.

В период своей работы в ИПУ РАН М.М. Хрусталев вернулся к задаче терминальной инвариантности и блестяще в ней продвинулся. Здесь он по-

ставил новую задачу терминальной инвариантности стохастических систем диффузионного, а затем и диффузионно-скачкообразного типов, в которых также были получены достаточные условия инвариантности.

Последние научные результаты М.М. Хрусталева связаны с развитием исследований В.Ф. Кротова по теории пространственно-временного континуума, обобщающих и развивающих широко известную Общую теорию относительности Пуанкаре–Эйнштейна. Михаил Михайлович исследовал упругие свойства пространственного континуума и предложил пространственно-временной аналог теории красного смещения Хаббла и гипотезы о распределении темного вещества во Вселенной. В теории, развитой М.М. Хрусталевым, эффекты, приписываемые темной материи и темной энергии, возникают сами собой вследствие деформации времени.

Михаил Михайлович активно практиковал йогу, прекрасно знал восточную философию и религию. Как предначертано в хорошо изученном им буддизме, он остался с нами, перейдя в следующую форму существования просветленного человека. Он всегда был интересным, бесконфликтным, умеющим отстаивать свою точку зрения, упорным, трудолюбивым, ценящим простоту и красоту, понимающим и принимающим всю сложность нашего невообразимого мира. Приятная, теплая, умиротворенная доброта всегда исходила от этого чудесного человека. Он был чист как горный хрусталь. Самые светлые чувства о нем останутся в нашей памяти.

Агапова А.С. (канд. физ.-мат. наук, ИПУ РАН),
Арутюнов А.В. (д-р. физ.-мат. наук, ИПУ РАН),
Васильев С.Н. (академик РАН, ИПУ РАН),
Галяев А.А. (член-корреспондент РАН, ИПУ РАН),
Новиков Д.А. (академик РАН, директор ИПУ РАН),
Онегин Е.Е. (канд. физ.-мат. наук),
Румянцев Д.С. (канд. физ.-мат. наук, ИПУ РАН),
Филимонов Н.Б. (д-р. техн. наук, ИПУ РАН),
Царьков К.А. (канд. физ.-мат. наук, ИПУ РАН).

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

Коган М.М., Степанова А.В. Синтез обобщенного H_∞-субоптимального управления по экспериментальным и априорным данным 3

Нелинейные системы

Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Задача выведения на целевую орбиту космического аппарата максимальной массы с использованием двигателя ограниченной тяги и сбросом отделяемых частей средств выведения в атмосферу земли 21

Нгуен Ба Хю. Стабилизация по выходу нелинейной системы типа Лурье в заданном множестве 47

Стохастические системы

Вишневский В.М., Вытовтов К.А., Барабанова Е.А. Исследование переходного режима двухфазной системы массового обслуживания с ограничением на суммарный размер буфера 64

Наумов А.В., Степанов А.Е., Устинов А.Э. О задаче максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста 83

Управление в технических системах

Данилов М.И., Романенко И.Г. Об определении границы области, предшествующей предельным установившимся режимам электроэнергетических систем, методом анализа тропической геометрии уравнений балансов мощности 95

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Афанасьев А.П., Кривоножко В.Е., Лычев А.В., Сухорослов О.В. Выпуклые изокванты в моделях анализа среды функционирования с частичной выпуклостью 110

Заметки, хроника, информация

Некролог 124

CONTENTS

Linear Systems

Kogan M.M., Stepanov A.V. Design of Generalized H_8-Suboptimal Controllers Based on Experimental and A Priori Data 3

Nonlinear Systems

Grigoriev I.S., Proskuryakov A.I. Inserting a Maximum-Mass Spacecraft into a Target Orbit Using a Limited-Thrust Engine with Releasing the Separable Part of Its Launch Vehicle into the Earth's Atmosphere 21

Ba Huy Nguyen. Output Stabilization of Lurie-Type Nonlinear Systems in a Given Set 47

Stochastic Systems

Vishnevsky V.M., Vytovtov K.A., Barabanova E.A. Transient Behavior of a Two-Phase Queuing System with a Limitation on the Total Queue Size 64

Naumov A.V., Stepanov A.E., Ustinov A.E. On the Problem of Maximizing the Probability of Successful Passing of a Time-Limited Test 83

Control in Technical Systems

Danilov M.I., Romanenko I.G. On the Determination of the Region Border Prior to the Limit Steady Modes of Electric Power Systems by the Analysis Method of the Tropical Geometry of the Power Balance Equations 95

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Afanasiev A.P., Krivonozhko V.E., Lychev A.V., Sukhoroslov O.V. Convex Isoquants in DEA Models with Selective Convexity 110

Notes, Meetings, Information

Obituary 124