

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2024 г. А.П. АФАНАСЬЕВ, д-р физ.-мат. наук (apa@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Российский университет дружбы народов, Москва),
В.Е. КРИВОНОЖКО, д-р физ.-мат. наук (KrivonozhkoVE@mail.ru)
(Национальный исследовательский технологический
университет «МИСИС», Москва;
ФИЦ ИУ РАН, Москва),
А.В. ЛЫЧЕВ, канд. физ.-мат. наук (lychev@misis.ru)
(Национальный исследовательский технологический
университет «МИСИС», Москва)
О.В. СУХОРОСЛОВ, канд. физ.-мат. наук (sukhoroslov@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва)

ВЫПУКЛЫЕ ИЗОКВАНТЫ В МОДЕЛЯХ АНАЛИЗА СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ С ЧАСТИЧНОЙ ВЫПУКЛОСТЬЮ¹

Модели с частичной выпуклостью являются важным классом моделей анализа среды функционирования, поскольку позволяют корректно учитывать в моделях относительные показатели, средние значения, проценты и т.д. В данной работе предложены алгоритмы построения входных и выходных изоквант с использованием выпуклых показателей в моделях с частичной выпуклостью. Эти алгоритмы позволяют исследовать зависимость между любыми выпуклыми показателями в модели. Вычислительные эксперименты подтверждают надежность и эффективность предложенных методов.

Ключевые слова: анализ среды функционирования, множество производственных возможностей, частичная выпуклость, эффективный фронт, изокванта.

DOI: 10.31857/S0005231024010025

1. Введение

Подход анализа среды функционирования (АСФ) возник как обобщение простых показателей поведения объектов на многомерный случай. Математически такой подход приводит к решению большого семейства оптимизационных задач. Основоположниками этого подхода были известные американские ученые А. Чарнес, У. Купер, В. Роудс и Р. Бэнкер [1, 2]. Модели FDH (англ. free disposal hull) появились в конце прошлого века в работах Д. Де-принса, Л. Симара и Г. Тулкенса [3] почти одновременно с одной из основных моделей АСФ, в которой наблюдается переменный эффект масштаба.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01353) <https://rscf.ru/en/project/23-11-00197/>.

Ограничения моделей АСФ являются выпуклыми, поэтому для этих моделей широко используются методы оптимизации. В то же время множество производственных возможностей моделей FDN является невыпуклым. По этой причине разработка методов визуализации для моделей FDN замедлилась.

Понятие частичной выпуклости было предложено в [4]. Это понятие включает ряд новых моделей, где модели АСФ и FDN являются двумя крайними случаями. Такие модели расширяют возможности моделей АСФ и FDN, поскольку проблемы с частичной выпуклостью включают в модели такие показатели, как дробные отношения, проценты, средние значения и т.д.

Модели АСФ и FDN направлены на разработку инструментов для анализа поведения сложных социально-экономических систем. К таким системам относятся регионы, банки, университеты, больницы, промышленные объекты и т.д. Для разработки и применения этих моделей необходимо было разработать новые подходы.

Методы визуализации используются во многих областях человеческой деятельности. При исследовании поведения больших социально-экономических систем визуализация также играет большую роль. Как отмечается в [5], это позволяет менеджерам строить траектории развития подразделений, получать неизвестные зависимости между компонентами модели, находить некорректности в моделях и исправлять их, исследовать проблему разделения и слияния объектов. В целом визуализация повышает интуицию руководителя при принятии стратегических решений.

Однако в научной литературе существует лишь несколько работ [5–7], посвященных визуализации многомерных множеств производственных возможностей и исследованию производственных объектов с помощью этих графиков. В [7] были представлены методы многомерной визуализации выпуклых моделей АСФ. В [5] сделан обзор методов по визуализации моделей АСФ, существующих на тот момент. Визуализация означает построение сечений многомерного многогранного множества производственных возможностей двух- или трехмерными аффинными подпространствами. Такой подход сводится к анализу эффективности производственных объектов с помощью хорошо известных функций в экономике, таких как производственная функция, изокванта, изокоста, изопрофита и т.д. [8, 9].

В [10] были предложены методы визуализации для моделей с частичной выпуклостью, в которых часть показателей является невыпуклой. Для таких моделей были предложены методы решения и визуализации для двух невыпуклых входных или выходных показателей. Новые методы показали свою эффективность в решении реальных задач.

Более того, в [10] было показано, что неучет специфики задачи приводит к значительным искажениям результата. В данной работе рассматриваются алгоритмы построения входных и выходных изоквант в моделях с частичной выпуклостью с использованием выпуклых показателей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим множество производственных объектов (X_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$, где вектор выходных показателей $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{rj}) \geq 0$ получается из вектора входных показателей $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$. Предполагается, что все показатели неотрицательны и по крайней мере одна компонента каждого входного и выходного векторов положительна.

Теперь рассмотрим понятие частичной выпуклости [4]. Пусть входные и выходные показатели I и O разделяются следующим образом:

$$I = I^C \cup I^{NC}, \quad O = O^C \cup O^{NC},$$

где подмножества I^C и I^{NC} , O^C и O^{NC} взаимно исключающие.

Множества I^C и O^C являются подмножествами входных и выходных показателей, соответствующих абсолютным показателям (мерам объема). Взаимодополняющие подмножества $I^{NC} = I \setminus I^C$ и $O^{NC} = O \setminus O^C$ обозначают входные и выходные данные с относительными показателями (меры отношений).

Предположим, что индексное множество I^C содержит входные показатели с номерами от 1 до m' , в то же время индексное множество I^{NC} содержит номера входных показателей с $(m' + 1)$ по m . Тогда очевидно, что любой вектор входных данных может быть записан в виде $X = (X^C, X^{NC})$, вектор X^C содержит первые m' компонент вектора X , а X^{NC} содержит оставшиеся компоненты X .

Точно так же предположим, что индексное множество O^C содержит компоненты выходного вектора от 1 до r' и индексное множество O^{NC} содержит компоненты выходного вектора с $(r' + 1)$ по r . Следовательно, любой вектор выходных данных может быть записан в виде $Y = (Y^C, Y^{NC})$.

Множество производственных возможностей с частичной выпуклостью определяется следующими постулатами [4].

(A1) Допустимость наблюдаемых объектов. Объект $(X_j, Y_j) \in T$ для всех $j = 1, \dots, n$.

(A2) Возможность свободного использования. Если $(X, Y) \in T$ и $Y \geq Y' \geq 0$, $X' \leq X$, тогда $(X', Y') \in T$.

(A3) Частичная выпуклость. Пусть $(X', Y') \in T$ и $(X'', Y'') \in T$. Предположим, что $(X')_i = (X'')_i$ для всех $i \in I^{NC}$ и $(Y')_r = (Y'')_r$ для всех $r \in O^{NC}$. Тогда для любого $\lambda \in [0, 1]$ объект $\lambda(X', Y') + (1 - \lambda)(X'', Y'') \in T$.

Множество производственных возможностей T , которое удовлетворяет постулатам (A1)–(A3) может быть записано в алгебраической форме следующим образом:

$$T = \left\{ (X^C, X^{NC}, Y^C, Y^{NC}) \geq 0 \left| \sum_{j=1}^n X_j^C \lambda_j \leq X^C, \sum_{j=1}^n Y_j^C \lambda_j \geq Y^C, \text{ если } \lambda_j \geq 0, \right. \right. \\ \left. (1) \quad \text{тогда } X_j^{NC} \leq X^{NC} \text{ и } Y_j^{NC} \geq Y^{NC}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Модель с частичной выпуклостью объединяет две хорошо известные в методологии АСФ модели. Так, если $I^{NC} = O^{NC} = \emptyset$ (все показатели являются абсолютными), то множество (1) задает модель ВСС [2]. Если же в модели присутствуют только относительные показатели, $I^C = O^C = \emptyset$, то множество (1) определяет модель FDH [3].

Подиновский [4] использует булевы переменные δ_j для того, чтобы записать ограничения множества T в виде линейных смешанно-целочисленных ограничений. Однако при построении изоквант по показателям из множеств I^C и O^C , показатели, соответствующие множеств I^{NC} и O^{NC} , не изменяются. Поэтому целочисленные ограничения в этом случае могут быть заменены эквивалентными линейными ограничениями $(X_j^{NC} - Y_j^{NC})\lambda_j \leq 0$ и $(Y_j^{NC} - X_j^{NC})\lambda_j \geq 0$; см. [11, 12] и замечание 3 в [4].

3. Алгоритм построения входной изокванты

Определим входное двумерное сечение множества T для объекта $(X_o, Y_o) \in T$ следующим образом:

$$(2) \quad I_1(X_o, Y_o) = \{(X, Y) \mid X = X_o + \alpha d_1 + \beta d_2, Y = Y_o, \alpha, \beta \in E^1\},$$

где $d_1, d_2 \in E^m$, $(X_o, Y_o) \in T$, векторы d_1 и d_2 — направляющие векторы входной изокванты, причем вектор d_1 перпендикулярен d_2 .

Затем определим входную двумерную изокванту как пересечение границы и двумерной плоскости I_1 :

$$(3) \quad \text{Sec}_I(X_o, Y_o) = \{(X, Y) \mid (X, Y) \in \text{WEff}_P T \cap I_1\},$$

где $\text{WEff}_P T$ — множество слабоэффективных по Парето точек множества T .

Выходное двумерное сечение множества T для объекта $(X_o, Y_o) \in T$ записывается как

$$(4) \quad I_2(X_o, Y_o) = \{(X, Y) \mid X = X_o, Y = Y_o + \alpha g_1 + \beta g_2, \alpha, \beta \in E^1\},$$

где $g_1, g_2 \in E^r$ — направляющие векторы выходной изокванты, вектор g_1 перпендикулярен g_2 .

Теперь определим выходную двумерную изокванту как пересечение границы и двумерной плоскости I_2 :

$$(5) \quad \text{Sec}_O(X_o, Y_o) = \{(X, Y) \mid (X, Y) \in \text{WEff}_P T \cap I_2\}.$$

Рассмотрим оптимизационный алгоритм для построения входной изокванты для объекта (X_o, Y_o) . Пусть изокванта определяется направлениями $e_p \in E^{m'}$ и $e_s \in E^{m'}$, где e_p и e_s являются единичными ортами, соответствующие входным координатам p и s соответственно. Кроме того, входы p и s принадлежат множеству I^C .

Алгоритм 1. Построение входной изокванты.

Шаг 1. Найти крайнюю левую точку на входной изокванте, проходящей через объект (X_o, Y_o) и связанную с направлениями $e_p \in E^{m'}$ и $e_s \in E^{m'}$.

Шаг 1,а. Решить следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned}
 & \max \theta_1 \\
 & \sum_{j=1}^n x_{sj}^C \lambda_j + \theta_1 \leq x_{so}, \\
 & \sum_{j=1}^n x_{pj}^C \lambda_j + \tau_1 \leq x_{po}, \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij}^C \lambda_j \leq x_{io}, \quad i \neq p, s, \\
 & \sum_{j=1}^n Y_j^C \lambda_j \geq Y_o, \\
 & (X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где τ_1 и θ_1 — свободные переменные.

Шаг 1,б. Пусть θ_1^* является оптимальным значением целевой функции задачи (6). Решить следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned}
 & \max \tau_1 \\
 & \sum_{j=1}^n x_{sj}^C \lambda_j + \theta_1^* \leq x_{so}, \\
 & \sum_{j=1}^n x_{pj}^C \lambda_j + \tau_1 \leq x_{po}, \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij}^C \lambda_j \leq x_{io}, \quad i \neq p, s, \\
 & \sum_{j=1}^n Y_j^C \lambda_j \geq Y_o, \\
 & (X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

где τ_1 является свободной переменной.

Пусть $\tilde{Z}_1^1 = (X_o^C - \theta_1^* e_s - \tau_1^* e_p, X_o^{NC}, Y_o^C, Y_o^{NC})$, где θ_1^* и τ_1^* — оптимальные значения в задачах (6) и (7) соответственно.

Шаг 2. Найти вторую точку на входной изокванте, проходящей через объект (X_o, Y_o) и связанную с направлениями $e_p \in E^{m'}$ и $e_s \in E^{m'}$.

Шаг 2,а. Решить следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned}
 & \max \tau_2 \\
 & \sum_{j=1}^n x_{sj}^C \lambda_j + \theta_2 \leq x_{so}, \\
 & \sum_{j=1}^n x_{pj}^C \lambda_j + \tau_2 \leq x_{po}, \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij}^C \lambda_j \leq x_{io}, \quad i \neq p, s, \\
 & \sum_{j=1}^n Y_j^C \lambda_j \geq Y_o, \\
 & (X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где τ_2 и θ_2 — свободные переменные.

Шаг 2,б. Пусть τ_2^* является оптимальным значением целевой функции задачи (8). Решить следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned}
 & \max \theta_2 \\
 & \sum_{j=1}^n x_{sj}^C \lambda_j + \theta_2 \leq x_{so}, \\
 & \sum_{j=1}^n x_{pj}^C \lambda_j + \tau_2^* \leq x_{po}, \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij}^C \lambda_j \leq x_{io}, \quad i \neq p, s, \\
 & \sum_{j=1}^n Y_j^C \lambda_j \geq Y_o, \\
 & (X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

где θ_2 — свободная переменная.

Пусть $\tilde{Z}_2^1 = (X_o^C - \theta_2^* e_s - \tau_2^* e_p, X_o^{NC}, Y_o^C, Y_o^{NC})$, где θ_2^* и τ_2^* — оптимальные значения в задачах (8) и (9) соответственно.

Шаг 3. Установить $l:=1$, $k:=1$, $i_1:=1$, $i_2:=2$. Создать поток F_k^l с точками $Z_{i_1}^l = Z_1^1$, $Z_{i_2}^l = Z_2^1$ множества производственных возможностей T . Определить множество $M = \{Z_1^1, Z_2^1\}$.

Шаг 4. Выполнить следующие операции. Выбрать любой необработанный поток F_k^l , решить оптимизационную задачу следующего вида:

$$(10) \quad \begin{aligned} & \max \beta_1 \\ & (Z_{i_1}^l + Z_{i_2}^l)/2 + \beta_1 d_1 + \tau d_2 \in T, \end{aligned}$$

где β_1 и τ — скалярные переменные, вектор d_1 перпендикулярен вектору d_2 , лежит в плоскости сечения и направлен в нижний левый угол изокванты, вектор $d_2 = Z_{i_1}^l - Z_{i_2}^l$.

Если оптимальное значение задачи (10) $\beta_1^* > 0$, тогда запустить новые потоки $F_{k_1}^{l+1}$ и $F_{k_2}^{l+1}$ и решить оптимизационные подзадачи.

Поток $F_{k_1}^{l+1}$ содержит точки

$$Z_{i_1}^{l+1} = Z_{i_1}^l, \quad Z_{i_2}^{l+1} = (Z_{i_1}^l + Z_{i_2}^l)/2 + \beta_1^* d_1 + \tau^* d_2,$$

где β_1^* и τ^* — оптимальные значения переменных в задаче (10).

Поток $F_{k_2}^{l+1}$ содержит точки

$$Z_{i_3}^{l+1} = Z_{i_2}^{l+1}, \quad Z_{i_4}^{l+1} = Z_{i_2}^l, \quad d_2 = Z_{i_4}^{l+1} - Z_{i_3}^{l+1},$$

где d_1 перпендикулярен вектору d_2 .

Если оптимальное значение задачи (10) $\beta_1^* \leq 0$, тогда точки $Z_{i_1}^l$ и $Z_{i_2}^l$ являются угловыми точками отрезка входной изокванты. Включить эти точки во множество угловых точек M . Поток F_k^l удалить из списка задач.

Шаг 5. Установить $l:=l+1$. Если существуют необработанные потоки F_k^l , то перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 6.

Шаг 6. Точки множества M являются угловыми точками входной изокванты. Соединить смежные точки отрезками. Добавить вертикальный луч, выходящий из первой точки, и горизонтальный луч, начинающийся из последней точки. На этом построение входной изокванты завершается.

Рисунок 1 иллюстрирует построение изокванты с помощью алгоритма. Сначала угловые точки Z_1^1 и Z_2^1 находятся путем решения моделей (6)–(9). Затем запускается поток F_1^1 , содержащий эти две точки. На следующих шагах точка Z_2^2 будет найдена с помощью решения задачи (10); а поток F_1^1 будет разделен на два потока F_1^2 и F_2^2 , которые будут содержать вершины Z_1^1 и Z_2^2 для потока F_1^2 и вершины Z_2^2 и Z_2^1 для потока F_2^2 .

После этого вычисления повторяются до тех пор, пока не будут найдены все отрезки изокванты.

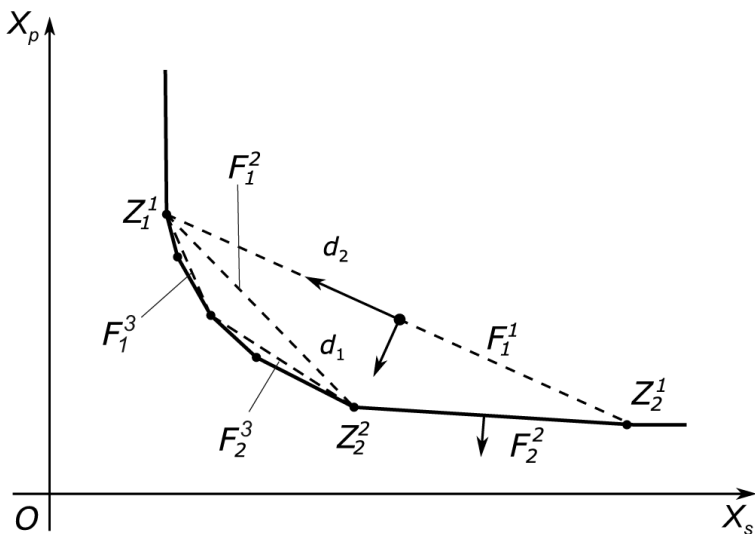


Рис. 1. Построение входной изокванты.

Для алгоритма, представленного выше, справедливо следующее

Утверждение 1. Алгоритм 1 строит входную изокванту для множества производственных возможностей (1) за конечное число шагов.

Доказательство. Входная изокванта двумерного множества (2) огибает это множество, или, другими словами, является границей этого множества. На шагах 1 и 2 алгоритм 1 определяет две точки Z_1^1 и Z_2^1 изокванты и определяет отрезок $[Z_1^1, Z_2^1]$, принадлежащий множеству (2). Таким образом, начальное приближение множества (3) найдено. После этого решаются две оптимизационные задачи типа (10). Если $\beta_1^* > 0$ по крайней мере для одной из этих задач, алгоритм 1 запускает новые потоки. При этом аппроксимация множества (3) расширяется. Если $\beta_1^* \leq 0$, тогда поток F_k^l удаляется из списка задач. Итерации продолжаются, пока существуют необработанные потоки. Причем все аппроксимации множества (3) принадлежат этому множеству, и они расширяются во время итераций. Последнее приближение совпадает со множеством (3), поскольку число отрезков изокванты конечно, а направления целевых функций отличаются друг от друга на каждой итерации. На этом доказательство завершается.

4. Алгоритм построения выходной изокванты

Алгоритм 2 построения выходной изокванты может быть записан аналогичным образом. Далее сосредоточимся только на основных отличиях. Пусть (X_o, Y_o) — производственный объект, для которого строится изокванта, и пусть p и s — два выходных параметра, которые определили эту изокванту. На первом шаге определяется крайняя правая вершина Z_1^1 изокванты с по-

мощью решения следующих задач оптимизации.

$$\begin{aligned}
 & \max \theta_1 \\
 & \sum_{j=1}^n X_j^C \lambda_j \leq X_o, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{sj}^C \lambda_j - \theta_1 \geq y_{so}, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{pj}^C \lambda_j - \tau_1 \geq y_{po}, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{ij}^C \lambda_j \geq y_{io}, \quad i \neq p, s, \\
 & (X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где τ_1 и θ_1 — свободные переменные.

$$\begin{aligned}
 & \max \tau_1 \\
 & \sum_{j=1}^n X_j^C \lambda_j \leq X_o, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{sj}^C \lambda_j - \theta_1^* \geq y_{so}, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{pj}^C \lambda_j - \tau_1 \geq y_{po}, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{ij}^C \lambda_j \geq y_{io}, \quad i \neq p, s, \\
 & (X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где τ_1 является свободной переменной.

Точка Z_1^1 записывается в виде

$$Z_1^1 = (X_o^C, X_o^{NC}, Y_o^C + \theta_1^* e_s + \tau_1^* e_p, Y_o^{NC}),$$

где $e_p \in E^{r'}$ и $e_s \in E^{r'}$ являются направляющими векторами изокванты, θ_1^* и τ_1^* являются оптимальными значениями целевых функций задач (11) и (12) соответственно.

Вторая вершина Z_2^1 выходной изокванты определяется с использованием следующих задач.

$$\begin{aligned}
 & \max \tau_2 \\
 & \sum_{j=1}^n X_j^C \lambda_j \leq X_o, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{sj}^C \lambda_j - \theta_2 \geq y_{so}, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{pj}^C \lambda_j - \tau_2 \geq y_{po}, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{ij}^C \lambda_j \geq y_{io}, \quad i \neq p, s, \\
 & (X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где τ_2 и θ_2 — свободные переменные.

$$\begin{aligned}
 & \max \theta_2 \\
 & \sum_{j=1}^n X_j^C \lambda_j \leq X_o, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{sj}^C \lambda_j - \theta_2 \geq y_{so}, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{pj}^C \lambda_j - \tau_2^* \geq y_{po}, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{ij}^C \lambda_j \geq y_{io}, \quad i \neq p, s, \\
 & (X_j^{NC} - X_o^{NC}) \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & (Y_j^{NC} - Y_o^{NC}) \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где τ_2 является свободной переменной.

Таким образом, получим точку $Z_2^1 = (X_o^C, X_o^{NC}, Y_o^C + \theta_2^* e_s + \tau_2^* e_p, Y_o^{NC})$, где θ_2^* и τ_2^* являются оптимальными значениями целевых функций задач (13) и (14) соответственно.

Шаги 3–6 алгоритма для выходной изокванты совпадают с алгоритмом для входной изокванты. Единственное отличие заключается в том, что вектор d_1 в модели (10) должен иметь положительные координаты p и s , чтобы обеспечить правильную форму выходной изокванты.

Утверждение 2. Алгоритм 2 строит выходную изокванту для множества производственных возможностей (1) за конечное число шагов.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству по входной изокванте.

5. Вычислительные эксперименты

Для выполнения вычислительных экспериментов использовался набор данных с искусственно сгенерированными объектами. Набор содержит 100 производственных объектов с шестью показателями (три входа и три выхода). Показатели были сгенерированы случайным образом в диапазоне от 5 до 95. На рис. 2 показаны три изокванты, построенные для объекта 78 (обозначен точкой Z_0) с использованием трех различных моделей.

Кривая 1 соответствует изокванте модели ВСС, где все показатели взяты из множества $I^C \cup O^C$, т.е. $I^{NC} \cup O^{NC} = \emptyset$. Кривая 2 соответствует модели с частичной выпуклостью, где все показатели являются абсолютными за исключением двух выходных y_2 и y_3 , которые являются относительными. Третья модель отличается от предыдущей только входными показателями x_1 и x_2 . В этой модели они принадлежат множеству I^{NC} . Изокванта для этой модели изображена в виде кривой 3. Входная изокванта для модели FDH выглядит точно так же, как кривая 3; в данном примере получилось так, что две кривые совпали. Из рис. 2 видно, что модели ВСС и FDH являются двумя крайними случаями и кривая 2 лежит между ними. Точки Z_1 , Z_2 и Z_3 являются радиальными проекциями объекта Z_0 на фронт моделей 1, 2 и 3 соответственно.

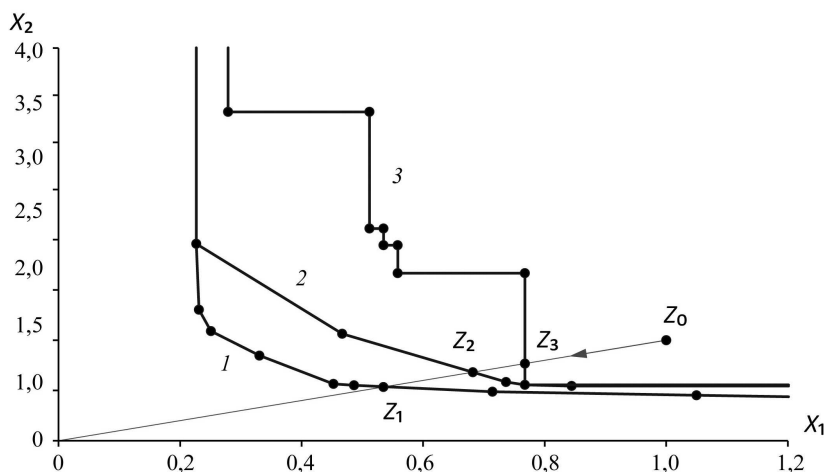


Рис. 2. Входные изокванты для модели ВСС (кривая 1), модели с частичной выпуклостью (кривая 2) и модели FDH (кривая 3) для объекта 78.

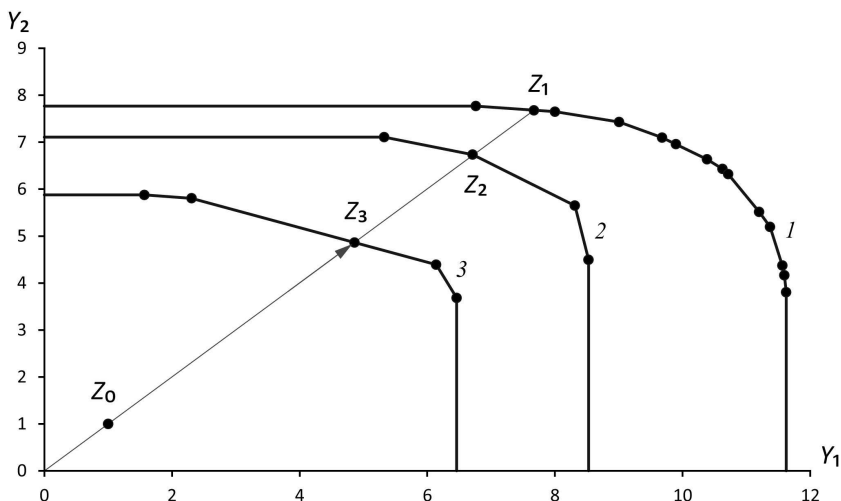


Рис. 3. Выходные изокванты для модели ВСС (кривая 1), модели с одним относительным показателем (кривая 2) и модели с двумя относительными показателями (кривая 3) для объекта 78.

На рис. 3 приведены три выходных изокванты, построенные для объекта 78 (на рисунке точка Z_0) с использованием трех различных моделей. Кривая 1 связана с выходной изоквантой модели ВСС. Кривая 2 соответствует модели, в которой только выходной показатель y_3 является относительным. Кривая 3 получена для модели, где два показателя x_3 и y_3 относительные, а остальные являются абсолютными. Напомним, что расстояния от точки Z_0 до точек Z_1 , Z_2 и Z_3 в относительных единицах являются мерами эффективности в моделях 1, 2 и 3 соответственно. Это подтверждает тот факт, что выбор модели существенно влияет на точность анализа поведения объектов.

6. Заключение

Визуализация играет огромную роль в науке и практике человечества. Действительно, изобретение телескопа Джордано Бруно в начале XVII века позволило Ньютону в конце этого столетия открыть законы движения планет и сформулировать в результате всемирно известные законы, без которых невозможно современное развитие науки и техники. Методы визуализации используются во многих областях человеческой деятельности, ни один капитан не отправится в длительное путешествие без подробных карт, ни один врач не приступит к операции без набора снимков пациента, и ни один инженер не приступит к строительству без подробных чертежей. Однако руководители крупномасштабных социально-экономических систем часто не располагают всеми этими инструментами и полагаются на свою интуицию. Но цена ошибки в таком случае может быть достаточно огромной.

Технологии АСФ и FDN не охватывают все возможные варианты моделей для описания производственных объектов. В [4] была предложена кон-

цепция частичной выпуклости, которая обеспечивает разработку ряда новых моделей АСФ [13–16], где модели ФДН и АСФ являются двумя крайними случаями. Такие модификации позволяют объяснить класс показателей модели и включить средние значения, проценты, относительные коэффициенты и т.д. в модели АСФ.

В [10] были разработаны алгоритмы построения входных изоквант в моделях АСФ с частичной выпуклостью с использованием невыпуклых показателей.

В данной работе разработаны алгоритмы построения двумерных входных и выходных изоквант с использованием выпуклых входных и выходных показателей. Предложенный алгоритм требует значительно меньшего количества вычислений, чем алгоритм [10] для невыпуклых переменных, поскольку он содержит только линейные задачи, тогда как второй использует смешанно-целочисленные задачи с булевыми переменными.

Вычислительные эксперименты подтвердили, что предложенные алгоритмы надежны и эффективны. Предложенный алгоритм допускает реализацию с помощью параллельных и распределенных вычислений, аналогичную подходу, предложенному в [7]. Разработка эффективных параллельных и распределенных реализаций алгоритмов [17–19] для ускорения вычислений и проведения вычислительных экспериментов с большими наборами данных рассматривается в качестве направления будущих исследований авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.* Measuring the efficiency of decision making units // *Eur. J. Oper. Res.* 1978. V. 2. No. 6. P. 429–444.
[https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
2. *Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W.* Some models for estimating technical and scale efficiency in data envelopment analysis // *Management Sci.* 1984. V. 30. No. 9. P. 1078–1092. <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
3. *Deprins D., Simar L., Tulkens H.* Measuring Labor Efficiency in Post Offices / *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements* Marchand M., Pestieau P., Tulkens H. (Eds.). 1984. Chapter 10. P. 243–268.
4. *Podinovski V.V.* Selective convexity in DEA models // *Eur. J. Oper. Res.* 2005. V. 161. No. 2. P. 552–563. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2003.09.008>
5. *Afanasyev A.P., Krivonozhko V.E., Forsund F.R., Lychev A.V.* Multidimensional visualization of Data Envelopment Analysis Models // *Data Envelopment Anal. J.* 2021. V. 5. No. 2. P. 339–361. <https://doi.org/10.1561/103.000000040>
6. *Cesaroni G., Kerstens K., Van de Woestyne I.* Global and local scale characteristics in convex and nonconvex nonparametric technologies: A first empirical exploration // *Eur. J. Oper. Res.* 2017. V. 259. No. 2. P. 576–586.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.10.030>
7. *Afanasiev A.P., Krivonozhko V.E., Lychev A.V., Sukhoroslov O.V.* Multidimensional frontier visualization based on optimization methods using parallel computations // *J. Global. Optim.* 2020. V. 76. P. 563–574.
<https://doi.org/10.1007/s10898-019-00812-y>

8. *Krivorozhko V.E., Utkin O.B., Volodin A.V., Sablin I.A., Patrin M.V.* Constructions of economic functions and calculations of marginal rates in DEA using parametric optimization methods // *J. Oper. Res. Soc.* 2004. V. 55. No. 10. P. 1049–1058. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601759>
9. *Varian H.R.* Intermediate Microeconomics, a Modern Approach, 8th edn. W.W. Norton: New York, 2010. ISBN: 978-0-393-93424-3
10. *Afanasiev A.P., Krivorozhko V.E., Lychev A.V., Sukhoroslov O.V.* Constructions of input and output isoquants in DEA models with selective convexity // *Appl. Comput. Math.* 2022. V. 21. No. 3. P. 317–328. <https://doi.org/10.30546/1683-6154.21.3.2022.317>
11. *Kuosmanen, T.* DEA with efficiency classification preserving conditional convexity // *Eur. J. Oper. Res.* 2001. V. 132. No. 2. P. 326–342. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00155-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00155-7)
12. *Dekker D., Post T.* A quasi-concave DEA model with an application for branch performance evaluation // *Eur. J. Oper. Res.* 2001. V. 132. No. 2. P. 296–311. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00153-3](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00153-3)
13. *Olesen O.B., Petersen N.C., Podinovski V.V.* Efficiency analysis with ratio measures // *Eur. J. Oper. Res.* 2015. V. 245. No. 2. P. 446–462. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.03.013>
14. *Olesen O.B., Petersen N.C., Podinovski V.V.* Efficiency measures and computational approaches for data envelopment analysis models with ratio inputs and outputs // *Eur. J. Oper. Res.* 2017. V. 261. No. 2. P. 640–655. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.02.021>
15. *Olesen O.B., Petersen N.C., Podinovski V.V.* The structure of production technologies with ratio inputs and outputs // *J. Prod. Anal.* 2022. V. 57. P. 255–267. <https://doi.org/10.1007/s11123-022-00631-6>
16. *Olesen O.B., Petersen N.C., Podinovski V.V.* Scale characteristics of variable returns-to-scale production technologies with ratio inputs and outputs // *Annals Oper. Res.* 2022. V. 318. P. 383–423. <https://doi.org/10.1007/s10479-022-04862-6>
17. *Smirnov S., Voloshinov V., Sukhosroslov O.* Distributed Optimization on the Base of AMPL Modeling Language and Everest Platform // *Procedia Comput. Sci.* 2016. V. 101. P. 313–322. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.11.037>
18. *Sukhoroslov O., Volkov S., Afanasiev A.* A web-based platform for publication and distributed execution of computing applications // 14th International Symposium on Parallel and Distributed Computing. 2015. P. 175–184. <https://doi.org/10.1109/ISPDC.2015.27>
19. *Sukhoroslov O., Voloshinov V., Smirnov S.* Running Many-Task Applications Across Multiple Resources with Everest Platform / Supercomputing. RuSCDays 2020. Voevodin V., Sobolev S. (Eds.) // *Commun. Comput. Inform. Sci.* 2020. V. 1331. P. 634–646. https://doi.org/10.1007/978-3-030-64616-5_54

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 31.08.2023

После доработки 22.12.2023

Принята к публикации 30.12.2023