



А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

2

ФЕВРАЛЬ

Москва

2024

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартыхина*

Москва

«Издательство «Наука»

© 2024 г. А.В. АРУТЮНОВ, д-р физ.-мат. наук (arutyunov@cs.msu.ru),
С.Е. ЖУКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (s-e-zhuk@yandex.ru),
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ λ -УКОРОЧЕНИЙ¹

Рассматриваются конечномерные и бесконечномерные задачи оптимизации при наличии ограничений общего вида. Получены достаточные условия устойчивости строгого решения и условия устойчивости множества решений, состоящего более чем из одной точки, относительно малых возмущений параметров задачи. В конечномерном случае получены условия устойчивости решений экстремальных задач с ограничениями типа равенств на основе конструкции λ -укорочений отображений.

Ключевые слова: абстрактные задачи оптимизации, экстремальные задачи с ограничениями, устойчивость решения.

DOI: 10.31857/S0005231024020014, EDN: UMNFFU

1. Введение

В теории и практике решения экстремальных задач зачастую приходится иметь дело с неопределенными параметрами, участвующими в формировании оптимизируемого функционала и/или ограничений задачи. В связи с этим значительный объем исследований в последние десятилетия был направлен на изучение зависимости решений экстремальных задач от этих параметров. Ключевым является вопрос о том, насколько сильно изменится решение данной экстремальной задачи (в предположении, что оно существует) при «малом» изменении параметров относительно некоторых заданных значений. В случае таких же «малых» изменений решения говорят о его устойчивости, а относительная величина этих изменений обычно характеризуется как чувствительность решения к малым изменениям параметров [1].

Абстрактные задачи оптимизации с ограничениями при наличии неопределенных параметров и устойчивость их решений рассматривались ранее

¹ Лемма 1 и теорема 1 доказаны С.Е. Жуковским за счет средств проекта Российского научного фонда № 20-11-20131 (<https://rscf.ru/project/20-11-20131>) в ИПУ РАН. Теорема 2 доказана К.А. Царьковым за счет средств проекта Российского научного фонда № 22-11-00042 (<https://rscf.ru/project/22-11-00042>) в ИПУ РАН.

в [2, 3], а также являются предметом изложения в [4]. Основы теории чувствительности для конечномерных задач с ограничениями подробно изложены в [1]. Значительное число результатов об устойчивости решений оптимизационных задач с ограничениями получено при выполнении дополнительных условий регулярности, см., например, последние результаты, касающиеся условия регулярности Робинсона [5, 6]. Анализ устойчивости в отсутствие подобных дополнительных предположений до сих пор остается нетривиальной задачей [7]. В то же время вопрос оценки чувствительности решений является актуальным для широкого класса конечномерных экстремальных задач и задач оптимального управления при наличии неопределенных и случайных параметров [8].

В настоящей работе рассматривается задача минимизации при наличии ограничений общего вида

$$f(x, \sigma) \rightarrow \inf, \quad x \in \Phi(\sigma)$$

с параметром σ , к которой естественным образом сводится и параметризованная задача максимизации. В разделах 2, 3 предполагается, что переменная x принимает значения в произвольном банаховом пространстве, параметр σ — в топологическом пространстве, а функция f и многозначное отображение Φ удовлетворяют лишь естественным требованиям непрерывности. В этих предположениях получены достаточные условия устойчивости строгого решения x_0 рассматриваемой задачи при некотором фиксированном значении параметра $\sigma = \sigma_0$ (лемма 1). В разделе 4 полученный результат обобщается на случай, когда минимум задачи при $\sigma = \sigma_0$ достигается не в единственной точке, а на целом подмножестве множества $\Phi(\sigma_0)$ (лемма 2). В разделе 5 при помощи конструкции λ -укорочений [9] результаты конкретизированы для конечномерной задачи с ограничениями типа равенств.

2. Основные конструкции и предположения

Пусть заданы банахово пространство X и точка $x_0 \in X$. Через $B_r(x_0) \subset X$ будем обозначать замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 .

Пусть $R > 0$ — некоторый фиксированный радиус и даны непустые замкнутые множества $\Phi(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, где Σ — заданное топологическое (в частности метрическое) пространство. При этом $\Phi(\sigma) \subset B_R(x_0) \forall \sigma \in \Sigma$.

Рассмотрим задачу

$$(1) \quad f(x, \sigma) \rightarrow \inf, \quad x \in \Phi(\sigma)$$

при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$, играющем роль параметра. Здесь $f(\cdot, \sigma)$ — заданные непрерывные на $B_R(x_0)$ функции.

Множества $\Phi(\sigma)$ имеют следующий смысл. Как правило, они заданы в виде $\Phi(\sigma) = \{x \in X : F(x, \sigma) \in C(\sigma)\} \cap B_R(x_0)$. Здесь $F : X \times \Sigma \rightarrow Y$ — заданное непрерывное отображение, а $C(\sigma) \subset Y$ — заданные непустые замкнутые

множества, которые определяют ограничения задачи (1), Y – нормированное пространство. Если же рассматривается задача без ограничений, то $\Phi(\sigma) \equiv B_R(x_0)$.

Пусть задана точка $\sigma_0 \in \Sigma$, в которой выполнена первая аксиома счетности, т.е. существует счетная определяющая последовательность окрестностей точки σ_0 (например, σ_0 – произвольная точка в случае метрического пространства Σ). Из совокупности задач (1) отдельно выделим для рассмотрения задачу

$$(2) \quad f(x) := f(x, \sigma_0) \rightarrow \inf, \quad x \in \Phi(\sigma_0).$$

Предположим, что функции $f(\cdot, \sigma)$ сходятся к $f = f(\cdot, \sigma_0)$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ равномерно на $B_R(x_0)$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $O(\sigma_0) \subset \Sigma$ точки σ_0 , что

$$(3) \quad |f(x, \sigma) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in B_R(x_0) \quad \forall \sigma \in O(\sigma_0).$$

Будем предполагать, что при каждом σ инфимум в задаче (1) конечен. Пусть также $x_0 \in \Phi(\sigma_0)$, причем x_0 является строгим решением задачи (2), т.е.

$$(4) \quad f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in \Phi(\sigma_0) : x \neq x_0.$$

Введем два предположения относительно функции $f = f(\cdot, \sigma_0)$. Первое из них заключается в том, что существует неубывающая функция $\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, для которой $\delta(0) = 0$, $\delta(r) > 0$ при $r > 0$ и выполняется

$$(5) \quad f(x) \geq f(x_0) + \delta(\|x - x_0\|) \quad \forall x \in \Phi(\sigma_0).$$

Второе предположение заключается в том, что

$$(6) \quad x \in \Phi(\sigma), \quad \tilde{x} \in \Phi(\sigma_0), \quad \|x - \tilde{x}\| \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(\tilde{x}) - 1(\sigma),$$

где $1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \neq \sigma_0$ и $1(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие окрестность $O(\sigma_0) \subset \Sigma$ точки σ_0 и число $\gamma > 0$, что при всех $\sigma \in O(\sigma_0)$ имеет место

$$x \in \Phi(\sigma), \quad \tilde{x} \in \Phi(\sigma_0), \quad \|x - \tilde{x}\| < \gamma \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(\tilde{x}) - \varepsilon.$$

Следующее предположение касается многозначного отображения $\Phi : \Sigma \rightrightarrows B_R(x_0)$. А именно, будем предполагать, что оно полунепрерывно сверху в точке σ_0 , т.е.

$$(7) \quad \Phi(\sigma) \subset \Phi(\sigma_0) + B_{1(\sigma)}(0) =: B_{1(\sigma)}(\Phi(\sigma_0)) \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \sigma_0.$$

Здесь функция $1(\sigma)$ такая же, как и в условии (6), символ $+$ означает сумму множеств по Минковскому (подробнее о многозначных отображениях см., например, [10, глава 1] или [11, §2.3]).

3. Устойчивость решения экстремальной задачи

Положим $x(\sigma_0) = x_0$. Пусть на Σ задана неотрицательная скалярная функция ψ такая, что $\psi(\sigma) \rightarrow \psi(\sigma_0) = 0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ и при любом $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \neq \sigma_0$, существует $x(\sigma) \in \Phi(\sigma)$, для которого имеет место

$$(8) \quad f(x(\sigma), \sigma) \leq f(x, \sigma) + \psi(\sigma) \quad \forall x \in \Phi(\sigma).$$

Указанная функция ψ существует всегда. В самом деле, если пространство X конечномерно, то решение $x(\sigma)$ задачи (1) минимизации непрерывной функции на компактном множестве $\Phi(\sigma)$ существует и можно положить $\psi = 0$. Пусть теперь банахово пространство X бесконечномерно. Тогда при любом $\psi(\sigma) > 0$, $\sigma \neq \sigma_0$, поскольку инфимум в задаче (1) конечен, то ее решение существует, но уже с точностью до ψ . Поэтому найдется $x(\sigma)$, для которого выполняется условие (8).

Определение 1. Решение x_0 экстремальной задачи (2) называется устойчивым, если для любых точек $x(\sigma) \in \Phi(\sigma)$, $\sigma \neq \sigma_0$, удовлетворяющих условию (8), имеет место

$$x(\sigma) \rightarrow x_0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \sigma_0.$$

Спрашивается, когда решение x_0 задачи (2) является устойчивым? Один из ответов на этот вопрос приведен ниже.

Лемма 1. Пусть $\varphi(\sigma_0) := x_0$ и для любого $\sigma \neq \sigma_0$ существует $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ такое, что

$$(9) \quad \varphi(\sigma) \rightarrow x_0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \sigma_0.$$

Пусть, кроме того, точка x_0 является строгим решением задачи (2), а также выполняются условия (3), (5)–(7). Тогда решение x_0 задачи (2) устойчиво.

Доказательство леммы 1. Не теряя общности, будем считать, что $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Предположим, что утверждение леммы нарушается. В силу первой аксиомы счетности это означает, что существуют такие последовательности $\{\sigma_i\}$ и $\{x_i\}$, что $\sigma_i \rightarrow \sigma_0$, $\forall i$ $x_i = x(\sigma_i) \in \Phi(\sigma_i)$, выполняется (8) и последовательность $\{x_i\}$ к нулю не сходится. Следовательно, существует такое число ε , что $0 < 2\varepsilon < R$ и, после перехода к подпоследовательности, имеем $\|x_i\| \geq 2\varepsilon$ для всех i .

В силу (7) существуют такие точки $\tilde{x}_i \in \Phi(\sigma_0)$, что

$$(10) \quad \|x_i - \tilde{x}_i\| \rightarrow 0.$$

Значит, при всех достаточно больших i имеем $\|\tilde{x}_i\| \geq \varepsilon$. Отсюда в силу предположения (5) имеет место $f(\tilde{x}_i) \geq \delta(\|\tilde{x}_i\|) \geq \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. существует такое $\delta_0 = \delta(\varepsilon)/2 > 0$, что $f(\tilde{x}_i) \geq 2\delta_0$ для всех достаточно больших i . Но тогда в

силу (6) и (10) имеем $f(x_i) \geq f(\tilde{x}_i) - \delta_0/2 \geq \frac{3}{2}\delta_0$ для всех достаточно больших i . Следовательно, поскольку в силу (3) функции $f_i := f(\cdot, \sigma_i)$ сходятся равномерно к функции f на $B_R(0)$, то при всех достаточно больших i имеет место $f_i(x_i) \geq \delta_0$.

Положим $\varphi_i = \varphi(\sigma_i)$ и $\psi_i = \psi(\sigma_i)$. В силу (9) $\varphi_i \rightarrow 0$, а в силу свойств функции ψ имеем $\psi_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. Поэтому в силу (3) существует такое натуральное i_0 , что для всех $i \geq i_0$ выполняется

$$(11) \quad |f_i(x) - f(x)| + \psi_i \leq \frac{\delta_0}{4} \quad \forall x \in B_R(0).$$

Из непрерывности f , увеличивая при необходимости натуральное i_0 , получаем

$$(12) \quad f(\varphi_i) \leq \frac{\delta_0}{4}, \quad i \geq i_0.$$

При $i \geq i_0$ в силу (8) для произвольного $x \in \Phi(\sigma_i)$ имеет место $f_i(x_i) \leq f_i(x) + \psi_i$. В частности, при $x = \varphi_i \in \Phi(\sigma_i)$ получаем, что для всех достаточно больших i выполняется

$$f_i(x_i) \leq f_i(\varphi_i) + \psi_i = (f_i(\varphi_i) - f(\varphi_i) + \psi_i) + f(\varphi_i) \leq \frac{\delta_0}{4} + f(\varphi_i) \leq \frac{\delta_0}{2}.$$

Здесь предпоследнее неравенство вытекает из (11), а последнее – из (12).

Итак, доказано, что $f_i(x_i) \leq \delta_0/2$ при всех больших i . Но по построению имеем $f_i(x_i) \geq \delta_0 > 0$, т.е. получено противоречие. Лемма доказана.

Обсудим условия устойчивости решения x_0 задачи (2), фигурирующие в лемме 1. Начнем с предположения (5). Как показывает следующий пример, в конечномерном пространстве X оно всегда выполняется, если выполняется (4).

Пример 1. Пусть банахово пространство X конечномерно, а x_0 является строгим минимумом функции f на множестве $\Phi(\sigma_0)$, т.е. выполняется условие (4). Тогда функция δ , удовлетворяющая оценке (5), определяется по формуле

$$\delta(r) = \min \left\{ f(x) - f(x_0) : x \in \Phi(\sigma_0), \|x - x_0\| \geq r \right\}, \quad r \geq 0.$$

При этом минимум по пустому множеству считаем равным $+\infty$.

Очевидно, что для конечномерного пространства X в силу компактности каждого из множеств, имеющих вид $\Phi(\sigma_0) \cap \{x \in X : \|x - x_0\| \geq r\}$, так определенная функция δ удовлетворяет всем нужным требованиям. Пример разобран.

Рассмотрим случай, когда пространство X бесконечномерно, функция f является гладкой в окрестности точки x_0 , а допустимое множество $\Phi(\sigma_0)$

определяется конечным числом гладких ограничений типа равенств и неравенств. В этом случае, если выполняется достаточное условие второго порядка в задаче (2) (см., например, [12, § 8] или [13, теорема 7.1]) и радиус $R > 0$ шара $B_R(x_0)$ достаточно мал, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что функция $\delta(r) = \varepsilon r^2$ удовлетворяет оценке (5). Вообще говоря, для существования функции δ , удовлетворяющей оценке (5), достаточно, чтобы выполнялись любые достаточные условия строгого минимума второго или более высоких порядков (см., например, [13, теоремы 7.3, 14.2, 14.3]) и число $R > 0$ было достаточно мало.

В то же время следующий контрпример показывает, что в бесконечномерном гильбертовом (тем более банаховом) пространстве X , если достаточные условия строго минимума второго или более высоких порядков в задаче (2) не выполнены, то подходящей функции δ может не существовать ни при каком значении $R > 0$. При этом утверждение леммы 1 даже в задаче без ограничений нарушается. Таким образом, предположение (5) является существенным.

Пример 2. Пусть $X = \ell_2$ – это, как обычно, пространство вещественных последовательностей с суммируемым квадратом и обычным скалярным произведением. Обозначим через $\{e_i\}$ стандартный базис в ℓ_2 , т.е. последовательности, у которых на i -м месте стоит единица, а на остальных – нули. Через A обозначим положительный самосопряженный компактный линейный оператор $A : X \rightarrow X$, который определен бесконечной диагональной матрицей, содержащей i^{-1} на главной диагонали, $i = 1, 2, \dots$, и нули вне ее (см., например, [14, § 6.9]).

Пусть $\Sigma = \{i^{-1} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ с естественной топологией из $\mathbb{R}$, причем $\sigma_0 = 0$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$. Для $i \in \mathbb{N}$ положим $f_i(x) := f(x, i^{-1}) = \langle A_i x, x \rangle$, где A_i получено из A заменой на i -м месте на диагонали i^{-1} на $-i^{-1}$. Далее, положим $x_0 = 0$ и $\psi(\sigma) \equiv 0$. Зафиксируем произвольное $R > 0$ и для него положим $\Phi(\sigma) = B_R(0) \forall \sigma$ (т.е. ограничение $x \in \Phi(\sigma)$ отсутствует).

Здесь условие (7) выполняется тривиально. Условие (6) выполняется в силу того, что

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\tilde{x})| &= |\langle Ax, x \rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle| \leq \\ &\leq |\langle Ax, x \rangle - \langle A\tilde{x}, x \rangle| + |\langle A\tilde{x}, x \rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle| \leq \|A\| \|x - \tilde{x}\| (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \leq \\ &\leq 2R \|A\| \|x - \tilde{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x - \tilde{x}\| \rightarrow 0, \quad x, \tilde{x} \in B_R(0). \end{aligned}$$

В качестве $\{\varphi(i^{-1})\}$ в условии (9) можно взять любую сходящуюся к нулю последовательность элементов из $B_R(0)$, например $\{i^{-1} R e_1\}$. Условие (3) выполняется, так как по построению $f_i \rightarrow f$ при $i \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in B_R(0)$. Таким образом, в этом примере выполняются условия (3), (6), (7) и (9).

В то же время условие (5) нарушается, поскольку $\forall r > 0 \inf\{f(x) : \|x\| = r\} = 0$, и соответствующей функции δ не существует. Покажем, что утверждение леммы 1 также нарушается. Действительно, значения $f(x)$ положительны при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, однако $\inf\{f_i(x) : x \in B_R(0)\} = -R^2 i^{-1}$

для всех $i \in \mathbb{N}$, и этот инфимум достигается при $x_i := Re_i \in B_R(0)$. Точки $x_i = x(i^{-1})$ удовлетворяют условию (8) при $\psi = 0$, но последовательность $\{x_i\}$ к нулю не сходится, т.е. точка $x_0 = 0$ не является устойчивым решением задачи (2). Пример разобран.

Обратимся к предположению (6). Из теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте вытекает, что предположение (6) автоматически выполняется в конечномерном пространстве X .

Действительно, пусть X конечномерно. Тогда для произвольного фиксированного $R > 0$ замкнутый шар $B_R(x_0)$ компактен. Из условий $x \in \Phi(\sigma)$, $\tilde{x} \in \Phi(\sigma_0)$ и предположения о том, что $\Phi(\sigma) \subset B_R(x_0) \forall \sigma$, вытекает, что $x, \tilde{x} \in B_R(x_0)$. В силу теоремы Кантора, примененной к функции f на компакте $B_R(x_0)$, получаем, что $|f(x) - f(\tilde{x})| \rightarrow 0$ при $\|x - \tilde{x}\| \rightarrow 0$, что доказывает (6).

Если же пространство X бесконечномерно, то предположение (6) уже существенно, даже если это пространство гильбертово. Приведем соответствующий пример.

Пример 3. Пусть $X = \ell_2$ – гильбертово пространство, как в примере 2, $\{e_i\} \subset \ell_2$ – стандартный базис. Положим $x_0 = e_1$, $R = 2$, $B := B_2(e_1)$, $\Sigma = \{i^{-1} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, причем $\sigma_0 = 0$ и $\psi(\sigma) \equiv 0$. Функция $f(x, \sigma)$ не зависит от σ и определяется по формуле

$$(13) \quad f(x, \sigma) = f(x) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \max\{0, 1 - 2i\|x - e_i\|\}, \quad x \in \ell_2, \quad \sigma \in \Sigma.$$

Поскольку носителями непрерывных функций $x \mapsto \max\{0, 1 - 2i\|x - e_i\|\}$ являются попарно непересекающиеся шары $B_{1/(2i)}(e_i)$, то функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ корректно определена и непрерывна (в том числе на B).

Положим

$$\Phi(0) = \{e_1\} \cup \{u_i : i = 2, 3, \dots\}, \quad \text{где} \quad u_i = \left(1 - \frac{1}{2i}\right)e_i;$$

$$\Phi(i^{-1}) = \{a_i, b_i\},$$

$$\text{где} \quad a_i = \left(1 - \frac{1}{2i}\right)e_1, \quad b_i = \left(1 - \frac{1}{2(i+1)i}\right)e_i, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$\delta(r) = r/2, \quad r \geq 0.$$

Для проведения дальнейших построений вычислим значения функции f в некоторых точках. Поскольку $e_1, a_i \in B_{1/2}(e_1)$, то

$$(14) \quad f(e_1) = 1 - \max\{0, 1 - 2\|e_1 - e_1\|\} = 0,$$

$$(15) \quad f(a_i) = 1 - \max\{0, 1 - 2\|a_i - e_1\|\} = \frac{1}{i}.$$

Поскольку $u_i, b_i \in B_{1/(2i)}(e_i)$, то

$$(16) \quad f(u_i) = 1 - \max\{0, 1 - 2i\|u_i - e_i\|\} = 1,$$

$$(17) \quad f(b_i) = 1 - \max\{0, 1 - 2i\|b_i - e_i\|\} = 1 - \max\left\{0, 1 - \frac{1}{i+1}\right\} = \frac{1}{i+1}.$$

Покажем, что для заданных $X, f, \Phi, \Sigma, x_0, \sigma_0$ и R выполняются все предположения леммы 1, кроме предположения (6).

Предположение (3) выполняется, так как f не зависит от σ . Инфимум в задаче (1) конечен при любом $\sigma \neq \sigma_0$, так как множество $\Phi(\sigma)$ конечно, а инфимум в задаче (2) конечен в силу (14) и (16). Более того, $f(x_0) = f(e_1) = 0 < 1 = f(x)$ для любого $x \in \Phi(0)$: $x \neq x_0$, значит, выполняется (4). Соотношение (8) выполняется при $x(i^{-1}) = b_i \in \Phi(i^{-1})$, $i = 1, 2, \dots$, $x(0) = e_1 \in \Phi(0)$ и $\psi = 0$. Неравенство (5) выполняется, поскольку

$$\begin{aligned} f(e_1) + \delta(\|u_i - e_1\|) &\stackrel{(14)}{=} \delta(\|u_i - e_1\|) = \frac{\|u_i - e_1\|}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{2i}\right)^2} < 1 \stackrel{(16)}{=} f(u_i) \end{aligned}$$

для любого $i = 2, 3, \dots$. Отображение Φ полунепрерывно сверху в нуле, т.е. выполняется (7), поскольку $\|a_i - e_1\| \rightarrow 0$ и $\|b_i - u_i\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Наконец, соотношение (9) очевидно выполняется для $\varphi(i^{-1}) = a_i$, $i = 1, 2, \dots$.

Итак, все предположения леммы 1 выполняются за исключением (6). А это предположение (6) нарушается, поскольку $\|b_i - u_i\| \rightarrow 0$, $f(b_i) \rightarrow 0$ и $f(u_i) \rightarrow 1$ при $i \rightarrow \infty$. Утверждение леммы 1 также нарушается, поскольку $x(i^{-1}) = b_i \not\rightarrow e_1 = x_0$ при $i \rightarrow \infty$. Пример разобран.

Обратимся к предположению (7). Следующий пример показывает, что оно также существенно.

Пример 4. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathbb{R}$, $f(x, \sigma) \equiv x$, $x_0 = \sigma_0 = 0$, $R = 1$, $\Phi(\sigma) = [-1; 1]$ при $\sigma \neq 0$, $\Phi(0) = \{0\}$ и $\psi(\sigma) \equiv 0$. Тогда, очевидно, $x_0 = 0$ не является устойчивым решением задачи (2). Непосредственно проверяется, что в этом примере выполнены все предположения леммы 1, кроме предположения (7).

Отметим, что предположение (7) хотя и существенно, но выполняется для широкого класса задач, например, для всех конечномерных задач с ограничением типа включений при естественных предположениях непрерывности. Продемонстрируем это следующим примером.

Пример 5. Пусть X – конечномерное банахово пространство, Y – нормированное пространство, а Σ – метрическое пространство. Пусть $F : X \times \Sigma \rightarrow Y$ – непрерывное отображение и $C \subset Y$ – непустое замкнутое множество.

Для $\sigma \in \Sigma$ положим

$$(18) \quad \Phi(\sigma) = \{x \in X : F(x, \sigma) \in C\} \cap B_R(x_0) \neq \emptyset.$$

Тогда многозначное отображение Φ удовлетворяет предположению (7). В самом деле, для проверки (7) в силу [11, теорема 2.3.2] достаточно показать, что Φ – замкнутое отображение. Напомним, что многозначное отображение $\Phi : \Sigma \rightrightarrows B_R(x_0)$ называется замкнутым, если его график $\text{grh } \Phi := \{(\sigma, x) \in \Sigma \times B_R(x_0) : x \in \Phi(\sigma)\}$ замкнут.

Итак, пусть последовательность точек $(\sigma_i, x_i) \in \text{grh } \Phi$ сходится к точке $(\tilde{\sigma}, \tilde{x}) \in \Sigma \times B_R(x_0)$. Проверим, что $(\tilde{\sigma}, \tilde{x}) \in \text{grh } \Phi \Leftrightarrow \tilde{x} \in \Phi(\tilde{\sigma}) \Leftrightarrow F(\tilde{x}, \tilde{\sigma}) \in C$. По предположению имеем $F(x_i, \sigma_i) \in C$, $\sigma_i \rightarrow \tilde{\sigma}$ и $x_i \rightarrow \tilde{x}$ при $i \rightarrow \infty$. Но тогда в силу непрерывности F имеет место $F(x_i, \sigma_i) \rightarrow F(\tilde{x}, \tilde{\sigma})$, $i \rightarrow \infty$. Поэтому $F(\tilde{x}, \tilde{\sigma})$ – предельная точка для последовательности элементов $F(x_i, \sigma_i) \in C$. В силу замкнутости множества C получаем $F(\tilde{x}, \tilde{\sigma}) \in C$, т.е. $(\tilde{\sigma}, \tilde{x}) \in \text{grh } \Phi$. Значит, отображение Φ замкнуто и выполняется (7). Пример разобран.

Аналогичные рассуждения справедливы и для более общей задачи с ограничением $F(x, \sigma) \in C(\sigma)$, т.е. $\Phi(\sigma) = \{x \in X : F(x, \sigma) \in C(\sigma)\} \cap B_R(x_0)$, в случае, когда $C : \Sigma \rightarrow Y$ – полунепрерывное сверху в точке σ_0 замкнуто-значное многозначное отображение.

Основным предположением, которое необходимо проверять для применения леммы 1, является (9). Понятно, что оно существенно.

Пример 6. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\sigma = [0; 1]$, $f(x, \sigma) \equiv x^2$, $x_0 = \sigma_0 = 0$, $R = 1$, $\Phi(\sigma) = \{1\}$ при $\sigma > 0$, $\Phi(0) = [-1; 1]$ и $\psi(\sigma) \equiv 0$. В этом примере очевидно выполняются все предположения леммы 1, кроме условия (9). При этом точка $x_0 = 0$ естественно не является устойчивым решением задачи (2).

Предположение (9) тесно связано с понятием неявной функции. Ниже, при рассмотрении конечномерных задач в разделе 5, будет сформулировано одно из возможных условий, при котором оно выполняется. Здесь же отметим, что в том случае, когда множество ограничений от параметра σ не зависит, т.е. $\Phi(\sigma) \equiv \Phi(\sigma_0)$, условие (9) выполняется при $\varphi(\sigma) \equiv x_0$.

Примеры, аналогичные разобранным в этом разделе примерам 3, 4, 6 и последующим далее примерам 7, 9, можно построить для произвольного заранее фиксированного $R > 0$.

4. Устойчивость множества решений

Рассмотрим теперь случай, когда в задаче (2) минимум непрерывной функции f достигается не обязательно в единственной точке x_0 , но на заданном непустом множестве $X_0 \subset \Phi(\sigma_0)$, т.е. имеет место

$$f(x) = \min\{f(\xi, \sigma_0) : \xi \in \Phi(\sigma_0)\} \Leftrightarrow x \in X_0.$$

Отметим, что такое множество X_0 замкнуто в силу непрерывности функции f и замкнутости множества $\Phi(\sigma_0)$.

Следующий пример показывает, что даже в одномерном случае в задаче без ограничений $f(x) \rightarrow \min$, $x \in B_R(x_0)$, если выпуклое множество реше-

ний X_0 задачи (2) не единично, то ни одна точка из X_0 может не быть устойчивым решением в смысле определения 1.

Пример 7. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\Sigma = \{i^{-1} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $x_0 = 0$, $R = 1$, $\psi = 0$, функция $f(x)$ равна нулю при $x \in [-1/2; 1/2]$, строго монотонно убывает на отрезке $[-1; -1/2]$, строго монотонно возрастает на отрезке $[1/2; 1]$ и непрерывна на $[-1; 1]$. Ограничения в рассматриваемой задаче (2) отсутствуют и функция f достигает минимума на множестве $X_0 = [-1/2; 1/2]$.

Зададим функции $f_i(x) = f(x, i^{-1})$ непрерывными на отрезке $[-1; 1]$ и достигающими нулевого минимума в единственной точке $x_i \in [-1/2; 1/2]$, причем множество $\{x_i\}$ всюду плотно в отрезке $[-1/2; 1/2]$. Кроме того, будем считать, что $f_i \rightrightarrows f$ при $i \rightarrow \infty$ равномерно на $[-1; 1]$. Тогда для каждой точки $x \in [-1/2; 1/2]$ из последовательности $\{x_i\}$ можно выделить сходящуюся к ней подпоследовательность. Такие функции f_i , как легко видеть, существуют.

Для функций f_i , которые равномерно сходятся к f на отрезке $[-1; 1]$, рассмотрим задачу без ограничений $f_i(x) \rightarrow \min, x \in [-1; 1]$. По построению в ней минимум достигается в единственной точке x_i , и предельными точками множества $\{x_i\}$ является целый отрезок X_0 длины единица. Значит, к любой точке из множества X_0 можно как угодно приблизиться минимумами возмущенных функций f_i , т.е. ни одна из этих точек не является устойчивым решением задачи (2). Пример разобран.

Несмотря на этот пример, можно получить достаточные условия, при которых минимумы $x(\sigma)$ с точностью до ψ возмущенных функций $f(x, \sigma)$ на множествах $\Phi(\sigma)$ сходятся в смысле расстояния dist от точки $x(\sigma)$ до множества X_0 . Напомним, что

$$\text{dist}(\xi, X_0) := \inf\{\|\xi - x\| : x \in X_0\}, \quad \xi \in X.$$

Вначале положим

$$f_0 := \inf\{f(x, \sigma_0) : x \in \Phi(\sigma_0)\}.$$

Будем предполагать, что в дополнение к имеющимся предположениям и условиям (3), (6) и (7) выполняется

$$(19) \quad f(x) \geq f_0 + \delta(\text{dist}(x, X_0)) \quad \forall x \in \Phi(\sigma_0),$$

где функция δ задана выше при формулировке неравенства (5). При этом предположение (4) и тем более усиливающее его предположение (5) могут не выполняться.

Введем также дополнительное предположение относительно функции f о ее равномерной непрерывности на X_0 :

$$(20) \quad f(x) \rightarrow f_0 \quad \text{при} \quad \text{dist}(x, X_0) \rightarrow 0, \quad x \in B_R(x_0).$$

Лемма 2. Пусть для любого $\sigma \in \Sigma$ существует $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ такое, что

$$(21) \quad \text{dist}(\varphi(\sigma), X_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \sigma_0$$

и справедливы предположения (3), (6), (7), (19) и (20). Тогда для любых $x(\sigma) \in \Phi(\sigma)$, $\sigma \neq \sigma_0$, удовлетворяющих условию (8), имеет место

$$\text{dist}(x(\sigma), X_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \sigma_0.$$

Доказательство леммы 2. Не теряя общности, будем считать, что $f_0 = 0$, $x_0 = 0$ и, значит, $B_R(x_0) = B_R(0)$. Пусть утверждение леммы нарушается. Тогда существуют такие последовательности $\{\sigma_i\}$ и $\{x_i\}$, что $\sigma_i \rightarrow \sigma_0$, $\forall i$ $x_i = x(\sigma_i) \in \Phi(\sigma_i)$ и выполнено (8), но последовательность $\{\text{dist}(x_i, X_0)\}$ к нулю уже не стремится. Отсюда существует такое число ε , что $0 < 2\varepsilon < R$ и, после перехода к подпоследовательности, имеет место $\text{dist}(x_i, X_0) \geq 2\varepsilon$ для всех i .

Положим $\psi_i = \psi(\sigma_i)$, т.е. определим ψ_i так же, как при доказательстве леммы 1. В силу (7) существуют такие точки $\tilde{x}_i \in \Phi(\sigma_0)$, что $\|x_i - \tilde{x}_i\| \rightarrow 0$. Значит, при всех достаточно больших i имеет место $\text{dist}(\tilde{x}_i, X_0) \geq \varepsilon$. Отсюда в силу предположения (19) $f(\tilde{x}_i) \geq \delta(\text{dist}(\tilde{x}_i, X_0)) \geq \delta(\varepsilon) > 0$. Значит, существует такое $\delta_0 > 0$, что $f(\tilde{x}_i) \geq 2\delta_0$ для всех больших i . Отсюда в силу (6) имеем $f(x_i) \geq \frac{3}{2}\delta_0$ для всех достаточно больших i . Следовательно, поскольку в силу (3) функции $f_i = f(\cdot, \sigma_i)$ сходятся равномерно к функции f на $B_R(0)$, то $f_i(x_i) \geq \delta_0$ при всех больших i .

В силу свойств функции ψ имеем $\psi_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Поэтому в силу (3) существует такое натуральное i_0 , что для всех $i \geq i_0$ имеет место

$$|f_i(x) - f(x)| + \psi_i \leq \frac{\delta_0}{4} \quad \forall x \in B_R(0).$$

В силу (21) существует последовательность $\varphi_i \in \Phi(\sigma_i)$, для которой имеет место $\text{dist}(\varphi_i, X_0) \rightarrow 0$. Поэтому, увеличивая натуральное i_0 , из (20) при $x = \varphi_i$ получаем, что $f(\varphi_i) \leq \frac{\delta_0}{4}$. Из полученных неравенств при $i \geq i_0$, так же, как в лемме 1, находим, что $f_i(x_i) \leq \delta_0/2$. Но по проведенному построению $f_i(x_i) \geq \delta_0 > 0$, т.е. получено противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, из примера 7 и леммы 2 вытекает, что при естественных требованиях, хотя решение с точностью до ψ возмущенной задачи $x(\sigma)$ ни в одной точке из множества X_0 может не сходиться, тем не менее оно сходится в смысле расстояния dist ко всему множеству X_0 .

Замечание 1. Если $X_0 = \{x_0\}$, то леммы 1 и 2 эквивалентны. Действительно, в этом случае предположение (5) совпадает с (19), поскольку $\text{dist}(x, X_0) = \|x - x_0\|$; предположение (9) совпадает с (21), поскольку $\varphi(\sigma) \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \text{dist}(\varphi(\sigma), X_0) \rightarrow 0$; а предположение (20) равносильно непрерывности f в точке x_0 . Остальные предположения лемм 1 и 2 совпадают дословно.

Предположение (19) по своему смыслу полностью совпадает с предположением (5). В частности, для конечномерного пространства X имеет место следующий аналог примера 1.

Пример 8. Пусть банахово пространство X конечномерно и выполняется условие

$$(22) \quad f(x) = f_0 \quad \forall x \in X_0, \quad f(x) > f_0 \quad \forall x \in \Phi(\sigma_0) \setminus X_0.$$

Тогда функция δ , удовлетворяющая оценке (19), определяется по формуле

$$\delta(r) = \min \left\{ f(x) - f_0 : x \in \Phi(\sigma_0), \text{dist}(x, X_0) \geq r \right\}, \quad r \geq 0.$$

Обсудим предположение (20). Если X_0 состоит из единственной точки x_0 , то (20) выполняется автоматически, что является следствием непрерывности функции f .

Если X конечномерно, то X_0 компактно, поскольку замкнуто и лежит в $B_R(x_0)$. Тогда (20) выполняется также автоматически, так как является следствием теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте.

Пусть теперь X бесконечномерно, а множество X_0 замкнуто и ограничено (так как оно принадлежит $B_R(x_0)$), но не компактно. Тогда предположение (20) существенно. Это демонстрирует следующий пример.

Пример 9. Предположим, что X , Σ , σ_0 , ψ и $f(x, \sigma)$ те же, что и в примере 3. Пусть $x_0 = 0$, $R = 1$ и $B := B_1(0)$. Положим

$$a = \frac{3}{4}e_1; \quad \Phi(i^{-1}) = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2i}\right)e_i, a \right\}, \quad i \in \mathbb{N}; \quad \Phi(0) = B.$$

Здесь a выбрано так, что $f(a) = \frac{1}{2}$.

Из определения (13) функции f очевидно, что $X_0 = \{e_1, e_2, \dots\}$ и $f_0 = 0$. Покажем, что выполняется (6).

Возьмем произвольные последовательности $\{x_i \in \Phi(i^{-1})\}$ и $\{\tilde{x}_i \in \Phi(0)\}$, для которых $\|x_i - \tilde{x}_i\| \rightarrow 0$. При каждом i , при котором $\|x_i - \tilde{x}_i\| < 1/4$, рассмотрим два случая: $x_i = a$ и $x_i \neq a$. Пусть сначала $x_i = a$. Тогда, поскольку $\|a - \tilde{x}_i\| < 1/4$, имеем $\tilde{x}_i \in B_{1/2}(e_1)$. Следовательно,

$$f(\tilde{x}_i) = 1 - \max\{0, 1 - 2\|\tilde{x}_i - e_1\|\} = 2\|\tilde{x}_i - e_1\| \leq 2\|\tilde{x}_i - x_i\| + 2\|x_i - e_1\|.$$

Кроме того, поскольку $f(x_i) = f(a) = 2\|a - e_1\| = 2\|x_i - e_1\|$, то

$$f(x_i) = 2\|x_i - e_1\| \geq f(\tilde{x}_i) - 2\|\tilde{x}_i - x_i\|.$$

Пусть теперь $x_i \neq a$. Тогда $x_i = (1 - (2i)^{-1})e_i$ и непосредственным вычислением (16) проверяется, что $f(x_i) = 1$. Поскольку наибольшее значение

функции f равно единице, то и в этом случае имеем $f(x_i) \geq f(\tilde{x}_i) \geq f(\tilde{x}_i) - 2\|\tilde{x}_i - x_i\|$. Таким образом, при каждом достаточно большом i имеем

$$f(x_i) \geq f(\tilde{x}_i) - 2\|\tilde{x}_i - x_i\| = f(\tilde{x}_i) - 1(i^{-1}).$$

Значит, (6) выполняется.

Условие (19) выполняется при $\delta(r) = r$, $r \geq 0$. В самом деле, пусть $x \in B = \Phi(0)$. Возможно одно из двух: либо для некоторого $i \geq 1$ имеет место $x \in B_{1/(2i)}(e_i)$, либо $x \notin B_{1/(2i)}(e_i)$ для всех i . В первом случае $\text{dist}(x, X_0) = \|x - e_i\| \leq 2i\|x - e_i\| = f(x)$, а во втором случае $\text{dist}(x, X_0) \leq 1 = f(x)$ в силу $X_0 \subset B$.

Очевидно, что выполняются и остальные предположения леммы 2, кроме предположения (20), которое нарушается. Покажем это.

Действительно, для последовательности точек $x_i = (1 - \frac{1}{2i})e_i$ имеет место $\text{dist}(x_i, X_0) = \|x_i - e_i\| = (2i)^{-1} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, однако $f(x_i) = 1$ при всех i . Но по построению $f_0 = 0$ и, значит, $f(x_i) \not\rightarrow f_0$. Следовательно, (20) нарушается.

Покажем, что утверждение леммы 2 также нарушается. Действительно, для всех i имеем $f((1 - \frac{1}{2i})e_i) = 1$, а по построению $f(a) = \frac{1}{2}$. Следовательно, минимум функции f на множестве $\Phi(i^{-1})$ при всех i достигается в единственной точке a . Поскольку при этом $a \notin X_0$, то утверждение леммы 2 нарушается. Пример разобран.

Относительно предположения (21) справедливо замечание, вполне аналогичное приведенному в конце раздела 3. А именно, если множество ограничений в задаче (1) от параметра σ не зависит, то условие (21) выполняется при $\varphi(\sigma) \equiv x \in X_0$, где x — произвольная точка из множества X_0 .

5. Конечномерные задачи и λ -укорочения

Обратимся к теории конечномерных экстремальных задач с параметром $\sigma \in \Sigma$, где $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$. В ней пространство X имеет вид $X = \mathbb{R}^n$, а множества $\Phi(\sigma)$ определяются как

$$(23) \quad \Phi(\sigma) = \{x \in X : F(x, \sigma) = 0\} \cap B_R(x_0), \quad \sigma \in \Sigma.$$

Здесь $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — заданное непрерывное отображение, n, m — натуральные числа, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Будем считать, что все множества $\Phi(\sigma)$ непусты, $\sigma \in \Sigma$.

Рассмотрим задачу

$$(24) \quad f(x, \sigma) \rightarrow \min, \quad F(x, \sigma) = 0, \quad x \in B_R(x_0), \quad \sigma \in \Sigma.$$

Как и ранее, выделим отдельно задачу

$$(25) \quad f(x) = f(x, \sigma_0) \rightarrow \inf, \quad F(x, \sigma_0) = 0, \quad x \in B_R(x_0)$$

и будем считать, что x_0 является ее строгим решением. Получим для задачи (25) условия устойчивости решения x_0 в предположении, что $F(x, \sigma)$ представимо в виде $F(x, \sigma) = F(x) - \sigma$. В этом частном случае F – заданное непрерывное отображение $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, а Σ – это некоторая окрестность точки $\sigma_0 \in \mathbb{R}^m$ с заданной на Σ естественной метрикой из $\mathbb{R}^m$.

Перед тем как сформулировать соответствующее утверждение, приведем некоторые конструкции из [9]. В этом разделе координаты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать нижними индексами, т.е. положим $x = (x_1, \dots, x_n)$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Через D обозначим множество ненулевых n -мерных векторов d , у которых все координаты d_i неотрицательны, а через $\hat{D} \subset D$ – множество всех ненулевых целочисленных векторов $z = (z_1, \dots, z_n) \in D$. Для $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \hat{D}$ и $d \in D$ положим

$$x^z := \prod_{k=1}^n x_k^{z_k}, \quad |x|^d := \prod_{k=1}^n |x_k|^{d_k}.$$

При этом будем считать, что $x_k^l = |x_k|^l = 1$ при $l = 0$. Вектор $z = (z_1, \dots, z_n)$ – это мультииндекс монома x^z , а $z_1 + \dots + z_n$ – его степень.

Начнем со случая $m = 1$. Пусть заданы непрерывная функция $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$, причем $\lambda > 0$ (здесь и далее имеется ввиду покоординатное неравенство $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$).

Определение 2. Функция $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется λ -укорочением функции g в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует $\alpha > 0$, для которого выполнено:

1) существует непустое конечное множество $\hat{Z} \subset \hat{D}$ такое, что

$$p(x) = \sum_{z \in \hat{Z}} p_z x^z, \quad p_z \in \mathbb{R}, \quad p_z \neq 0, \quad \langle \lambda, z \rangle = \alpha \quad \forall z \in \hat{Z};$$

2) существуют число $K > 0$, конечное множество $Z \subset D$ и непрерывная функция $\Delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что функция g в некоторой окрестности точки x_0 представима в виде

$$g(x) = g(x_0) + p(x - x_0) + \Delta(x - x_0),$$

причем

$$|\Delta(x - x_0)| \leq K \sum_{d \in Z} |x - x_0|^d, \quad \langle \lambda, d \rangle > \alpha \quad \forall d \in Z.$$

Приведем пример, иллюстрирующий определение 2.

Пример 10. Пусть $n = 2$, $x_0 = 0$ и

$$g(x) = \sin x_1^3 + 2x_1 \sin x_2 + x_2^3 + 3x_1 x_2^2 + 4x_1^2 x_2.$$

Имеем следующие λ -укорочения (единственные для каждого λ):

$$\begin{aligned}\lambda = (1, 1) &\Rightarrow p(x) = 2x_1x_2, & \alpha = 2; \\ \lambda = (1, 2) &\Rightarrow p(x) = x_1^3 + 2x_1x_2, & \alpha = 3; \\ \lambda = (2, 1) &\Rightarrow p(x) = 2x_1x_2 + x_2^3, & \alpha = 3; \\ \lambda = (1, 3) &\Rightarrow p(x) = x_1^3, & \alpha = 3; \\ \lambda = (3, 1) &\Rightarrow p(x) = x_2^3, & \alpha = 3.\end{aligned}$$

Других λ -укорочений у данной функции g нет.

Определение 3. *Отображение $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется λ -укорочением отображения $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в окрестности точки x_0 , если компонента P_i является λ -укорочением компоненты F_i в окрестности этой же точки, $i = \overline{1, m}$.*

Пусть задан вектор $h \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что λ -укорочение P регулярно по направлению h , если

$$P(h) = 0, \quad \text{im } P'(h) = \mathbb{R}^m.$$

Построенные в условиях примера 10 λ -укорочения при $\lambda = (1, 1)$ и $\lambda = (1, 2)$ регулярны по направлениям $h = (0, \pm 1)$, при $\lambda = (1, 1)$ и $\lambda = (2, 1)$ регулярны по направлениям $h = (\pm 1, 0)$, а λ -укорочения, построенные при $\lambda = (1, 3)$ и $\lambda = (3, 1)$, не имеют регулярных направлений.

Из [9, теорема 1], вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть P для $\lambda > 0$ является λ -укорочением отображения F в окрестности точки x_0 , которое регулярно по некоторому направлению $h \in \mathbb{R}^n$ и $F(x_0) = \sigma_0$. Тогда существуют такие окрестность $O(\sigma_0)$ точки σ_0 и положительные числа c и β , что для любого $\sigma \in O(\sigma_0)$ существует решение $\varphi = \varphi(\sigma)$ уравнения $F(x) = \sigma$, для которого справедлива оценка*

$$\|\varphi(\sigma) - x_0\| \leq c \|\sigma - \sigma_0\|^\beta.$$

Теорема 1. *Пусть заданы $R > 0$ и непрерывное отображение $F : B_R(x_0) \rightarrow \Sigma$. Рассмотрим зависящую от параметра σ задачу минимизации непрерывных функций $f(x, \sigma)$ с конечным числом непрерывных ограничений типа равенств*

$$(26) \quad f(x, \sigma) \rightarrow \min, \quad F(x) = \sigma, \quad x \in B_R(x_0), \quad \sigma \in \Sigma.$$

Пусть существуют $h \in \mathbb{R}^n$, вектор $\lambda > 0$ и отображение $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что P является λ -укорочением отображения F в окрестности точки x_0 , регулярным по направлению h . Тогда для любой функции f , удовлетворяющей только условиям (3) и (4), точка x_0 является устойчивым решением задачи (26) при $\sigma = \sigma_0$.

Доказательство теоремы 1. Положим $\Phi(\sigma) = \{x : F(x) = \sigma\}$. Тогда для рассматриваемой задачи выполнены все предположения леммы 1. Действительно, справедливость (5) вытекает из конечномерности пространства X , условия (4) и примера 1. Справедливость (6) вытекает из конечномерности X и теоремы Кантора. Наконец, справедливость (7) вытекает из конечномерности X и того, что рассматривается задача с ограничениями только типа равенств, т.е. выполнены условия примера 5. При этом в (18) полагаем $C = \{0\}$.

Докажем условие (9). В силу предположения теоремы относительно λ -укорочения отображения F в окрестности точки x_0 выполняются все условия предложения 1 относительно решений уравнения $F(x) = \sigma$. Из него вытекает, что это уравнение в некоторой окрестности точки σ_0 имеет такое решение $\varphi(\sigma)$, что $\varphi(\sigma_0) = x_0$ и функция φ непрерывна в точке σ_0 . Используя непрерывность функции φ и уменьшая при необходимости указанную окрестность, добьемся того, чтобы иметь $\varphi(\sigma) \in B_R(x_0)$ для всех σ из этой окрестности. Для остальных $\sigma \in \Sigma$ выберем $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ произвольно. Тогда по построению $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma) \forall \sigma \in \Sigma$ и, кроме того, $\varphi(\sigma) \rightarrow x_0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$. Поэтому условие (9) выполняется. Для завершения доказательства остается применить лемму 1. Теорема доказана.

Приведем пример использования теоремы 1.

Пример 11. Пусть $n = 3$, $m = 2$, $x_0 = 0$, Σ – окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$ и $\sigma_0 = 0$. Непосредственно проверяется, что при $\lambda = (9, 6, 4)$ отображение

$$F(x) = (x_1^2 + x_2^3, x_2^2 + x_3^3), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

является в окрестности нуля λ -укорочением самого себя, регулярным по направлению $h = (1, -1, -1)$.

Рассмотрим задачу (26), в которой функции $f(x, \sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, могут быть произвольными непрерывными в некотором шаре радиуса $R > 0$ с центром в нуле в $\mathbb{R}^3$ и сходящимися при $\sigma \rightarrow 0$ равномерно на этом шаре к некоторой функции f , имеющей в нуле строгий минимум. Тогда в силу теоремы 1 решение $x_0 = 0$ задачи (26) при $\sigma = \sigma_0$ является устойчивым. Пример разобран.

В заключение приведем результат, использующий конструкции из раздела 4 и, в частности, лемму 2. Для этого предположим, что в задаче (25) минимум достигается не в точке x_0 , а на заданном непустом множестве $X_0 \subset \Phi(\sigma_0)$, где $\Phi(\sigma)$ имеет вид (23). При этом $F(x, \sigma) = F(x) - \sigma$. Иными словами, выполняется

$$f(x) = f_0 = \min\{f(\xi, \sigma_0) : F(\xi) = \sigma_0, \xi \in B_R(x_0)\} \Leftrightarrow x \in X_0.$$

Последнее эквивалентно тому, что имеет место (22).

Теорема 2. Пусть заданы $R > 0$ и непрерывное отображение $F : B_R(x_0) \rightarrow \Sigma$. Рассмотрим зависящую от параметра σ задачу минимизации

непрерывных функций $f(x, \sigma)$ с конечным числом непрерывных ограничений типа равенств

$$f(x, \sigma) \rightarrow \min, \quad F(x) = \sigma, \quad x \in B_R(x_0), \quad \sigma \in \Sigma$$

и множество $X_0 \subset B_R(x_0)$ такое, что $F(x) = \sigma_0$ и $f(x, \sigma_0) = f_0 \quad \forall x \in X_0$.

Пусть существуют $h \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \in X_0$, вектор $\lambda > 0$ и отображение $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что P является λ -укорочением отображения F в окрестности точки $\tilde{x}$, регулярным по направлению h , причем $\tilde{x} \in \text{int } B_R(x_0)$, т.е. $\tilde{x}$ не лежит на границе шара $B_R(x_0)$. Тогда для любой функции f , удовлетворяющей только условиям (3) и (22), справедлив результат леммы 2. А именно, для любых точек $x(\sigma) \in \Phi(\sigma)$, $\sigma \neq \sigma_0$, удовлетворяющих условию (8), имеет место

$$\text{dist}(x(\sigma), X_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \sigma_0.$$

Доказательство теоремы 2. Для рассматриваемой задачи выполнены все предположения леммы 2. В самом деле, справедливость (6) и (7) установлена при доказательстве теоремы 1. Справедливость (19) вытекает из конечномерности пространства X , условия (22) и примера 8. Справедливость (20) вытекает из конечномерности X и теоремы Кантора. Доказательство условия (21) проведем аналогично доказательству условия (9) из предыдущей теоремы. А именно, в силу предположения относительно λ -укорочения получим для уравнения $F(x) = \sigma$ такое решение $\varphi(\sigma)$ в некоторой окрестности σ_0 , что $\varphi(\sigma_0) = \tilde{x}$ и функция φ непрерывна в точке σ_0 . Вновь используя непрерывность функции φ и уменьшая при необходимости указанную окрестность, добьемся того, чтобы иметь $\varphi(\sigma) \in B_R(x_0)$ для всех σ из этой окрестности. Последнее возможно в силу предположения $\tilde{x} \in \text{int } B_R(x_0)$. Для остальных $\sigma \in \Sigma$ выберем $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ произвольно. Тогда по построению имеем $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma$ и, кроме того, $\varphi(\sigma) \rightarrow \tilde{x} \in X_0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$. Поэтому условие (21) выполняется. Для завершения доказательства остается применить лемму 2. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 1 непосредственно вытекает из теоремы 2 в том случае, когда $X_0 = \{x_0\}$. При этом в условиях теоремы 2 полагаем $\tilde{x} = x_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Измаилов А.Ф. Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006.
2. Арутюнов А.В., Измаилов А.Ф. Теория чувствительности для аномальных задач оптимизации с ограничениями типа равенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2003. Т. 43. № 2. С. 186–202.
3. Измаилов А.Ф. Чувствительность решений систем условий оптимальности при нарушении условий регулярности ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 555–577.
4. Bonnans J.F., Shapiro A. Perturbation analysis of optimization problems. New York: Springer, 2000.

5. *Gfrerer H., Mordukhovich B.* Robinson Stability of Parametric Constraint Systems via Variational Analysis // SIAM J. Optim. 2017. V. 27. I. 1. P. 438–465.
6. *Guo S., Qi H., Zhang L.* Perturbation analysis of the euclidean distance matrix optimization problem and its numerical implications // Comput. Optim. Appl. 2023. V. 86. P. 1193–1227.
7. *Royset J.O.* Stability and Error Analysis for Optimization and Generalized Equations // SIAM J. Optim. 2020. V. 30. I. 1. P. 752–780.
8. *Backhoff J., Silva F.J.* Sensitivity results in stochastic optimal control: A Lagrangian perspective // ESAIM: Control, Optim. Calcul. Variat. 2017. V. 23. I. 1. P. 39–70.
9. *Арутюнов А.В.* Существование вещественных решений нелинейных уравнений без априорных предположений нормальности // Мат. заметки. 2021. Т. 109. Вып. 1. С. 3–18.
10. *Мышкис А.Д., Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: УРСС, 2016.
11. *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит, 2014.
12. *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33. Вып. 6. С. 85–148.
13. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
14. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.–Ижевск: НИЦ «Рег. и хаот. дин.», Ин-т комп. исслед., 2020.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 22.06.2023

После доработки 15.01.2024

Принята к публикации 20.01.2024

Нелинейные системы

© 2024 г. Ж.Т. ЖУСУБАЛИЕВ, д-р техн. наук (zhanybai@gmail.com),
 Д.В. ТИТОВ, д-р техн. наук (amazing2004@inbox.ru),
 О.О. ЯНОЧКИНА, канд. техн. наук (yanooolga@gmail.com)
 (Юго-Западный государственный университет, Курск),
 У.А. СОПУЕВ, канд. физ. мат. наук (ulansopuev@mail.ru)
 (Ошский государственный университет, Ош)

О БИФУРКАЦИЯХ ГРАНИЧНОГО СТОЛКНОВЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЕ¹

Исследуются бифуркации граничного столкновения («border-collision bifurcations») в кусочно-гладком отображении, описывающем поведение импульсной системы автоматического управления. Показано, что в области колебательных движений такое отображение является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например бифуркация удвоения периода, касательная и виллообразная бифуркации, становятся вырожденными («degenerate bifurcations»), сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения. Выявлены необычные свойства рассматриваемого класса динамических систем, проявляющиеся в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переклечения. Численно и аналитически изучены бифуркации «слияния» («merging»), «расширения» («expansion»), связанные с гомоклиническими бифуркациями неустойчивых периодических орбит.

Ключевые слова: импульсная система, дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, бимодальное кусочно-линейное отображение, бифуркации граничного столкновения, вырожденные бифуркации, бифуркации «слияния» и «расширения», хаотические колебания.

DOI: 10.31857/S0005231024020027, EDN: UMFZYH

1. Введение

Рассмотрим импульсную систему, поведение которой описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью [1–8]

$$(1) \quad \frac{T}{T_0} \dot{x} + x = f(t, \varphi) - \mu, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f(t, \varphi) \equiv f(t + 1, \varphi), \quad 0 \leq \mu < 1, \quad \varphi = q - x(t).$$

¹ Жусубалиев Ж.Т. поддержан Минобрнауки РФ программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (1.7.21/S – 2, 1.71.23П). Работа Сопуева У.А. поддержана грантом № 14-22 Ошского государственного университета.

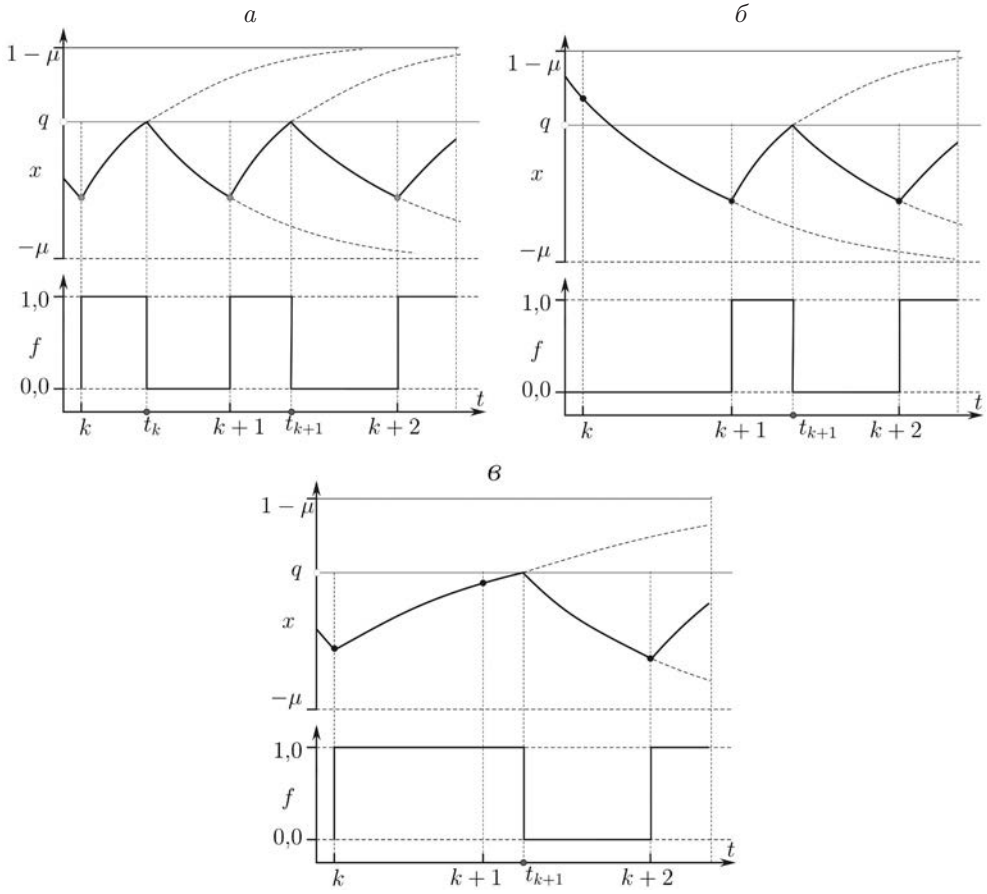


Рис. 1. Формирование импульсов управления.

Здесь, как и в [8], x – выход системы; $\dot{x}$ – производная x по безразмерному времени t ; T_0 – период модуляции [8]; T – постоянная времени; q, μ – параметры; φ, f – сигналы на входе и выходе модулятора.

В пределах каждого из временных интервалов $k < t < k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ выходной сигнал f модулятора определяется как [8, 9]:

$$(2) \quad f = \begin{cases} 1, & k \leq t \leq t_k; \\ 0, & t_k < t < k + 1. \end{cases}$$

В (2) t_k – моменты переключения модулятора $f = 1 \rightarrow f = 0$ (рис. 1),

$$(3) \quad t_k = \begin{cases} k, & \varphi_k^+ \leq 0; \\ t_{k*}, & \varphi_k^+ > 0 \text{ и } \varphi_{k+1}^- < 0; \\ k + 1, & \varphi_{k+1}^- \geq 0, \end{cases}$$

$$\varphi_k^\pm = \lim_{t \rightarrow k \pm 0} \varphi(t), \quad k \leq t_k \leq k + 1.$$

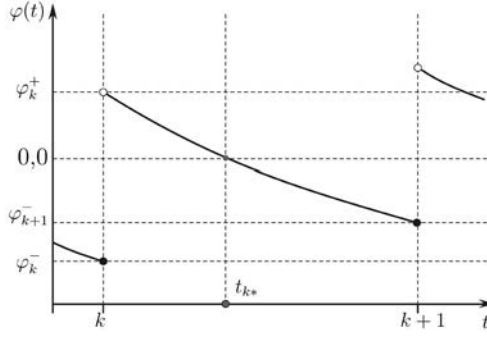


Рис. 2. График функции $\varphi(t)$ для случая когда $\varphi_k^+ > 0$ и $\varphi_{k+1}^- < 0$.

Здесь

$$\varphi(t) = q - x(t),$$

где

$$x(t) = 1 - \mu + e^{\lambda(t-k)} (x_k - 1 + \mu), \quad \lambda = -T_0/T$$

есть решение уравнения (1) при $f = 1$ с начальным условием $x(t)|_{t=k} = x_k$, а t_{k*} – корень уравнения

$$(4) \quad \varphi(t) = q - x(t) = q - 1 + \mu - e^{\lambda(t-k)} = 0.$$

Легко заметить, что функция $\varphi(t)$ монотонно убывает на промежутке $t \in [k, k+1]$, принимая на концах $[k+0, k+1-0]$ значения φ_k^+ и φ_{k+1}^- такие, что $\varphi_k^+ > \varphi_{k+1}^-$, где $-\mu < x_k < 1 - \mu$.

Если $\varphi_k^+ > 0$ и $\varphi_{k+1}^- < 0$, то в силу монотонности $\varphi(t)$ уравнение (4) имеет единственное решение

$$(5) \quad t_{k*} = k + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{q - 1 + \mu}{x_k - 1 + \mu}, \quad k < t_{k*} < k + 1.$$

График функции $\varphi(t)$ изображен на рис. 2.

Если $\varphi_k^+ < 0$ или $\varphi_{k+1}^- > 0$, то уравнение (4) не имеет корня. Тогда $t_k = k$, если $\varphi_k^+ < 0$, и $t_k = k + 1$, если $\varphi_{k+1}^- > 0$. В этих случаях говорят, что модулятор насыщается.

Период периодического решения уравнения (1) в общем случае является кратным периоду внешнего воздействия. Решение с таким периодом будем называть циклом периода m или m -циклом, $m = 1, \dots$

Параметры: $q = 0,356$; $\lambda = -0,6$, $0 < \mu < 1$. Здесь μ – варьируемый параметр. На рис. 3 приведены результаты численных расчетов, иллюстрирующие периодические и хаотические решения (1) при разных значениях параметра μ . На рис. 3,а изображены $x(t)$ и выходной сигнал f модулятора, отвечающие периодическим колебаниям с периодом внешнего воздействия (1-циклу)

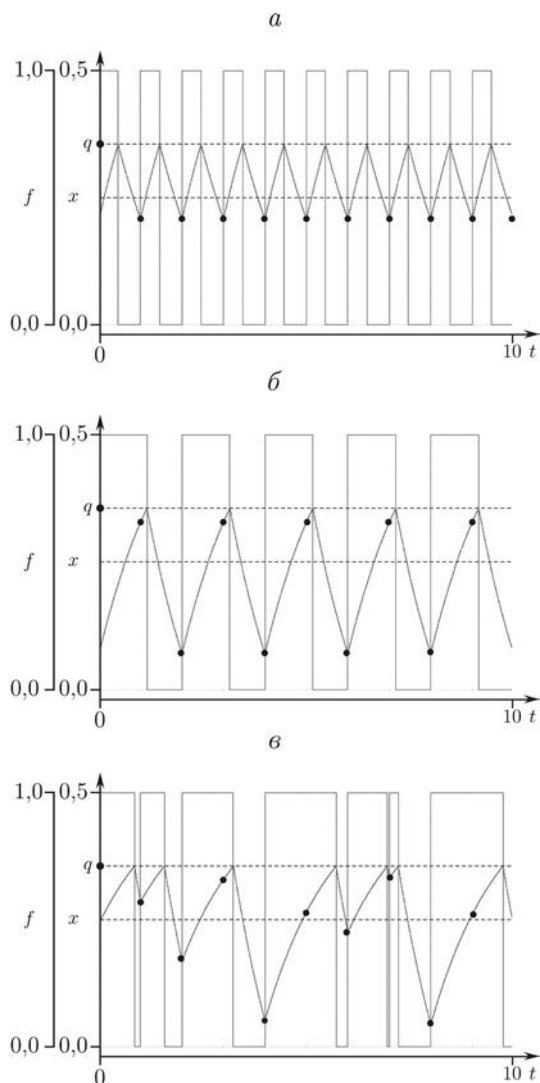


Рис. 3. *a*– Периодические колебания с $m = 1$: $x(t) = x(t+1)$, $\mu = 0,18$. *б* – Колебания с удвоенным периодом $m = 2$: $x(t) = x(t+2)$, $\mu = 0,36$. *в* – Хаотический режим, $\mu = 0,4754$.

$x(t) = x(t+1)$ при $\mu = 0,18$. Рисунок 3,б демонстрирует периодическое решение (1) с удвоенным периодом (2-цикл) $x(t) = x(t+2)$ ($\mu = 0,36$). На рис. 3,в показан пример хаотических колебаний ($\mu = 0,4754$).

Рисунок 3 иллюстрирует типичное свойство нелинейных импульсных систем [7, 9]. Исследование механизмов перехода от одного колебательного движения к другому при вариации параметров в целях прогнозирования, обнаружения и подавления нерегулярных колебаний, управления колебательной системой представляет одну из актуальных задач современной нелинейной динамики и теории управления [10, 11].

Дифференциальные уравнения вида (1) обычно сводятся к кусочно-гладким отображениям $F : I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$

$$(6) \quad F : x \mapsto F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1; \\ F_2(x), & x \in S_2; \\ \dots\dots\dots \\ F_p(x), & x \in S_p, \quad p \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Каждая из F_i , $i = 1, \dots, p$ в (6) есть C^r – гладкая функция ($r \geq 1$) по x в своей области определения S_i ; $\mathbb{N}^+$ – множество положительных целых чисел (без нуля). Границы S_i называются многообразиями переключения («switching manifolds»), в которых F является недифференцируемой. Неподвижные точки отображения (6) отвечают периодическим решениям уравнения (1) с периодом внешнего воздействия.

При вариации параметров неподвижная точка, попадает на одну из границ, разделяющих области определения функций F_i , $i = 1, \dots, p$. Это приводит к изменениям топологической структуры фазового пространства из-за нарушения условия существования неподвижной точки или цикла. Подобные перестройки фазового пространства кусочно-гладких отображений называются бифуркациями граничного столкновения («border collision bifurcations») [12] или «*C-бифуркациями*» [13–15].

Бифуркации граничного столкновения не имеют аналогов в гладких динамических системах и индуцируют чрезвычайно большое многообразие нелинейных явлений, например удвоение или «умножение» периода колебаний, одновременное возникновение нескольких сосуществующих аттракторов [16, 17] или рождение из неподвижной точки хаотического аттрактора в результате единственной бифуркации [12, 18–25].

Обратим внимание на то, что такие бифуркации не связаны с нарушением условия гиперболичности неподвижных точек или циклов, поэтому они не поддаются описанию и интерпретации методами классической теории бифуркаций [26, 27].

В представленной работе численно и аналитически изучаются бифуркации граничного столкновения в кусочно-гладком отображении, полученном из уравнения (1). Показано, что в области колебательных движений такое отображение является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например, бифуркация удвоения периода, касательная и виллообразная бифуркации, становятся вырожденными («degenerate bifurcations») [25, 28], сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения.

Главная особенность рассматриваемой динамической системы состоит в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения.

Исследуются так называемые бифуркации «слияния» («merging»), «расширения» («expansion») [25, 28–31], связанные с гомоклиническими бифуркациями неустойчивых периодических орбит. Бифуркации «слияния» и «расширения» известны еще как «кризисы хаотических аттракторов» («merging crisis», «interior crisis», см., например, [32–34]).

Особый интерес представляют механизмы, при которых хаотический аттрактор претерпевает внезапные изменения. Различают два вида таких переходов. Хаотический аттрактор может внезапно исчезнуть из-за «граничного кризиса» («final bifurcation», «boundary crisis») или внезапно измениться в размерах из-за «внутреннего кризиса» («expansion», «interior crisis»). В представленной работе исследуется «внутренний кризис».

2. Кусочно-гладкое отображение

Во временном интервале $k < t \leq t_k$ сигнал на выходе модулятора $f = 1$ и (1) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda(x + \mu - 1), \quad x_k = x(t)|_{t=k},$$

решение которого

$$x(t) = e^{\lambda(t-k)} (x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu.$$

Отсюда для $t = t_k$ имеем

$$x(t_k) = e^{\lambda(t_k-k)} (x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu.$$

В промежутке $t_k < t < k + 1$ сигнал $f = 0$. Подставив $f = 0$ в (1), получим линейное уравнение с постоянным коэффициентом

$$\dot{x} = \lambda(x + \mu) - \mu,$$

решение которого с начальным условием

$$x(t_k) = e^{\lambda(t_k-k)} (x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu$$

будет иметь вид

$$x(t) = e^{\lambda(t-k)} (x_k - 1 + \mu) - \mu + e^{\lambda(t-t_k)}.$$

Отсюда для $t = k + 1$ следует, что

$$(7) \quad x_{k+1} = e^{\lambda} (x_k - 1 + \mu) - \mu + e^{\lambda(k+1-t_k)}.$$

Обозначив $z_k = t_k - k$, перепишем выражение (7) в виде

$$(8) \quad x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^{\lambda} (x - 1 + \mu) - \mu + e^{\lambda(1-z)},$$

где z ($0 \leq z \leq 1$) на основании (3) и формулы (5) находится как:

$$(9) \quad z = \begin{cases} 0, & q - x \leq 0; \\ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{q - 1 + \mu}{x - 1 + \mu}, & q - x > 0 \quad \text{и} \quad q - 1 + \mu - e^\lambda(x - 1 + \mu) < 0; \\ 1, & q - 1 + \mu - e^\lambda(x - 1 + \mu) \geq 0. \end{cases}$$

Переменная z называется коэффициентом заполнения импульса (относительная ширина импульса) [8].

Утверждение 1. Функция $F(x)$ (8) является кусочно-линейной. Более того, если $\mu < 1 - q$, то $F(x)$ непрерывна и разрывна, если $\mu > 1 - q$.

Доказательство. Покажем сначала, что в интервалах $x \in (-\infty; 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^\lambda)$ и $x \in (q + \infty)$ функция $F(x)$ линейно возрастающая. Обозначим $F(x)$ в указанных интервалах через $F_{\mathcal{L}}(x)$ и $F_{\mathcal{R}}(x)$ соответственно. Найдем $F_{\mathcal{L}}(x)$ и $F_{\mathcal{R}}(x)$, подставив соответствующие значения z из (9) в разностное уравнение (8).

Запишем $F(x)$, подставив в (8) значение $z = 1$,

$$F_{\mathcal{L}}(x) = F(x)|_{z=1} = e^\lambda(x - 1 + \mu) - \mu.$$

Функция $F_{\mathcal{L}}(x)$ линейно возрастающая во всей своей области определения $(-\infty; 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^\lambda)$, так как производная $F'_{\mathcal{L}}(x)$ положительная: $F'_{\mathcal{L}}(x) = e^\lambda > 0$.

Аналогичным образом находим

$$F_{\mathcal{R}}(x) = F(x)|_{z=0} = e^\lambda(x + \mu) - \mu,$$

которая также линейно возрастающая на промежутке $(q; +\infty)$, где она определена.

Остается показать, что на интервале $[1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^\lambda; q]$ функция $F(x)$ линейно убывающая. Обозначим ее через $F_{\mathcal{M}}(x)$:

$$(10) \quad F_{\mathcal{M}}(x) = e^\lambda(x - 1 + \mu) - \mu + e^\lambda/e^{\lambda z}.$$

Разрешим уравнение (4)

$$q - x(t) = 0, \quad x(t) = q - 1 + \mu - e^{\lambda z}(x_k - 1 + \mu), \quad z = t - k$$

относительно $e^{\lambda z}$:

$$(11) \quad e^{\lambda z} = \frac{q - 1 + \mu}{x_k - 1 + \mu}.$$

Подставив полученное выражение (11) для $e^{\lambda z}$ в (10) и опуская индекс k в x_k (см. (11)), получим

$$F_{\mathcal{M}}(x) = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^\lambda(x - 1 + \mu) - \mu.$$

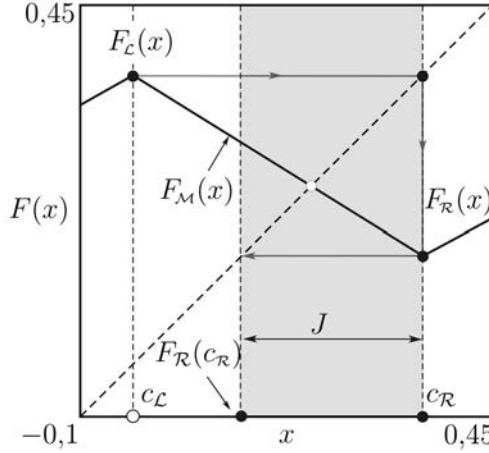


Рис. 4. Бимодальное кусочно-линейное отображение.

Область определения $F_M(x)$ есть промежуток $[1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^\lambda; q]$. Так как $\frac{q+\mu}{q-1+\mu} e^\lambda < 0$, то $F_M(x)$ убывающая.

Докажем теперь непрерывность $F(x)$ на границах, разделяющих $F_L(x)$, $F_M(x)$ и $F_R(x)$. Введем следующие обозначения для границ:

$$c_L = 1 - \mu + \frac{q - 1 + \mu}{e^\lambda}, \quad c_R = q.$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{x=c_L-0} F(x) &= F_L(c_L); & \lim_{x=c_L+0} F(x) &= F_M(c_L), \\ F_M(c_L) &= F_L(c_L) = e^\lambda(c_L - 1 + \mu) + 1 - \mu, \end{aligned}$$

то $F(x)$ непрерывна в точке $x = c_L$. Аналогично доказывается непрерывность $F(x)$ в точке $x = c_R$.

Легко проверить, что если $\mu = 1 - q$, то $c_L = c_R = q$. Поэтому в области $\mu \geq 1 - q$ функция $F(x)$ становится разрывной:

$$(12) \quad F(x) = \begin{cases} F_L(x) = e^\lambda(x - 1 + \mu) + 1 - \mu, & x < q; \\ F_R(x) = e^\lambda(x + \mu) - \mu, & x \geq q, \\ F_L(q) \neq F_R(q). \end{cases}$$

Итак, если $\mu < 1 - q$, то $F(x)$ необратимая и непрерывная, а при $\mu \geq 1 - q$ — обратимая и разрывная. Утверждение 1 доказано.

Окончательно отображение (8) $F : I \rightarrow R$, $I \subseteq \mathbb{R}$ можно записать в виде

$$(13) \quad F : x \mapsto F(x), \quad F(x) = \begin{cases} F_L(x) = a x + b_L, & x < c_L; \\ F_M(x) = a_M x + b_M, & c_L \leq x \leq c_R; \\ F_R(x) = a x + b_R, & x > c_L, \end{cases}$$

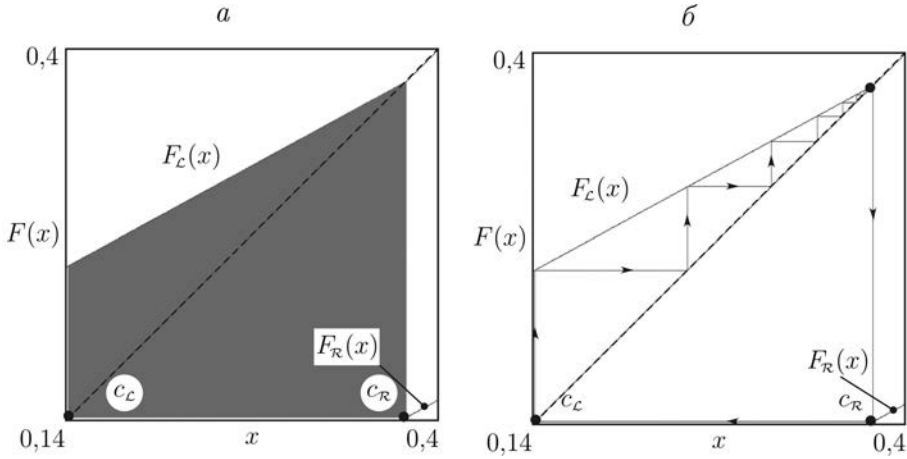


Рис. 5. Разрывное отображение.

где

$$a = e^\lambda, \quad b_L = (1 - \mu)(1 - e^\lambda), \quad b_R = \mu(e^\lambda - 1), \quad a_M = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^\lambda, \\ b_M = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^\lambda (\mu - 1) - \mu, \quad c_L = 1 - \mu + \frac{q - 1 + \mu}{e^\lambda}, \quad c_R = q.$$

График функции $F(x)$ показан на рис. 4. Здесь точки c_L и c_R являются границами, разделяющими области определения функций $F_L(x)$, $F_M(x)$ и $F_R(x)$, и называются многообразиями переключения [21].

Заметим, что разрывное отображение (12) при $\mu > 1 - q$ имеет единственную устойчивую неподвижную точку

$$F_L(x) - x = 0, \quad F_L = a(x - 1 + \mu) + 1 - \mu,$$

отвечающую состоянию равновесия уравнения (1): $x - 1 + \mu = 0$ (рис. 5,а). При $\mu = 1 - q$ существует полуустойчивая неподвижная точка: слева она притягивающая, а справа – отталкивающая (рис. 5,б). Следовательно, область колебательных движений рассматриваемой системы есть $0 < \mu < 1 - q$.

Прежде чем продолжить, напомним основные понятия [25, 35] и отметим некоторые свойства отображения (13), которые понадобятся в дальнейшем. Для этого перепишем (13) в эквивалентной форме: $x_{k+1} = F(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

- Точка $x_1 = F(x_0)$, в которую отображается за одну итерацию F точка $x_0 \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, называется образом ранга один x_0 .
- Любая точка x_0 , такая что $F(x_0) = x_1$, называется прообразом ранга один точки x_1 , или $x_1 = F^{-1}(x_0)$, где $F^{-1}(x)$ – обратная функция. Образы и прообразы ранга k точки x_0 определяются как $F^k(x_0) = F \circ F \circ \dots \circ F(x_0)$ и $F^{-k}(x_0) = F^{-1} \circ F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}(x_0)$, $k = 1, 2, \dots$ (см. [35]).

- Для каждого $x_0 \in I$ отображение $x_{k+1} = F(x_k)$ определяет некоторую последовательность точек:

$$x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^k(x_0), \dots$$

Эта последовательность называется положительной полутраекторией точки x_0 и обозначается как $\mathcal{O}^+(x_0)$:

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0 \in I : x_0, F^k(x_0), \quad k = 1, 2, \dots\}.$$

- При определении отрицательной $\mathcal{O}^-(x_0)$ полутраектории могут возникнуть сложности из-за необратимости отображения. Но если взять все прообразы x_0 , то

$$\mathcal{O}^-(x_0) = \{x \in I : F^k(x) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

- Если

$$F^m(x_0) - x_0 = 0$$

в $\mathcal{O}^+(x_0)$ при некотором $m > 0$, то x_0 – периодическая точка. Заметим, что если x_0 есть m -периодическая точка, то она является k m -периодической для любого положительного целого k . Поэтому под m понимается наименьший период [26]. Таким образом, если m – наименьшее положительное целое число, обладающее таким свойством, то m называют периодом цикла.

- Пусть x_0 – периодическая точка. Тогда конечная последовательность различных точек

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m(x_0) &= \{x_0 \in I : x_0, F^k(x_0), \quad k = 1, 2, \dots, m-1\}, \\ F^m(x_0) &= x_0, \quad F^k(x_0) \neq x_0 \end{aligned}$$

называется периодической орбитой периода m или m -циклом. В случае $m = 1$ имеем

$$F(x_0) - x_0 = 0.$$

Тогда говорят, что x_0 есть неподвижная точка или 1-цикл отображения. Очевидно, что орбита неподвижной точки состоит из одной точки $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$ [26].

- Если x_0 – периодическая точка периода m , то она является неподвижной точкой функции $F^m(x)$ [26].
- Множество $E \subseteq I$ является инвариантным F , если $F(E) = E$. Это означает, что если $x \in E$, то $F(x) \in E$. Примерами простейших инвариантных множеств являются неподвижная точка и периодическая орбита.

- Цикл периода m называется устойчивым, если

$$\rho(\mathcal{O}_m) = \left| \prod_{k=0}^{m-1} F'(x_k) \right| < 1, \quad x_k = F^k(x_0),$$

где x_k – периодические точки. Величина $\rho(\mathcal{O}_m)$ называется мультипликатором m -цикла [26].

- Если $\rho(\mathcal{O}_m) \neq 1$, то m -цикл называется гиперболическим, в противном случае – негиперболическим.
- Как можно видеть из рис. 4, функция $F(x)$ имеет два локальных экстремума в точках недифференцируемости (рис. 4,б): максимум в $x = c_{\mathcal{L}} = 1 - \mu + \frac{q-1+\mu}{e^\lambda}$ и минимум в $x = c_{\mathcal{R}} = q$. Точки локальных экстремумов $F(x)$ отображаются в так называемые критические точки [25, 35] $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})$, $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}})$, являющиеся образами ранга один точек $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ соответственно.
- Множество J называется поглощающим, если [25]:
 - (а) $F(J) \subseteq J$ (т.е. либо J инвариантно $F(J) = J$, либо оно строго отображается само в себя $F(J) \subseteq J$);
 - (б) существует окрестность $\mathcal{U}$ множества J такая, что для любого $x \in \mathcal{U}$ имеется конечное число $k > 1$ такое, что $F^k(x) \in J$;
 - (в) J ограничено двумя различными критическими точками или критической точкой и ее образами.
- Как было показано ранее (см. (13) и рис. 4), рассматривается бимодальное кусочно-линейное непрерывное отображение. Для описания орбиты такой системы, следуя [25], можно использовать три символа $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{R}$ («left», «middle», «right»). Тогда орбита $\{x_i = F^i(x_0)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ описывается последовательностью:

$$\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots,$$

где символ σ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ в этой последовательности для каждого $i \geq 0$ определяется как

$$\sigma_i = \begin{cases} \mathcal{L}, & x_i < c_{\mathcal{L}}; \\ \mathcal{M}, & c_{\mathcal{L}} < x_i < c_{\mathcal{R}}; \\ \mathcal{R}, & x_i > c_{\mathcal{R}}. \end{cases}$$

Для непрерывных отображений не имеет значения, какой символ использовать для граничных точек (т.е. для точек локальных экстремумов, см. рис. 4) $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ или $\mathcal{R}$, поскольку образы таких точек определяются однозначно.

- Как известно, в кусочно-гладких системах возможны разные типы периодических движений с одинаковым периодом. Поэтому для описания m -периодического движения конкретного типа будем использовать обозначение $O_{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m-1}}$.

Лемма 1. Пусть $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ – точки локальных экстремумов функции $F(x)$ (13) (многообразия переключения). Тогда для критической точки $c_0 = F(c_{\mathcal{L}})$ и ее прообраза ранга один справедливы равенства

$$(14) \quad F(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{R}}, \quad F^{-1}(c_{\mathcal{R}}) = c_{\mathcal{L}},$$

где $F(\cdot) = F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}(\cdot)$.

Доказательство. Доказательство леммы 1 состоит в проверке равенств (14). Найдем сначала $F_{\mathcal{L}}^{-1}(x)$ и $F_{\mathcal{M}}^{-1}(x)$:

$$(15) \quad \begin{aligned} F_{\mathcal{L}}^{-1}(x) &= e^{-\lambda} (x - 1 + \mu) + 1 - \mu, \\ F_{\mathcal{M}}^{-1}(x) &= \frac{q - 1 + \mu}{(q + \mu) e^{\lambda}} (x + \mu) + 1 - \mu. \end{aligned}$$

Так как $c_{\mathcal{L}} = 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^{\lambda}$ и $c_{\mathcal{R}} = q$, то, подставив выражение для $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ в левую часть равенств (14), получим

$$F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}}) = q; \quad F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}^{-1}(c_{\mathcal{R}}) = 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^{\lambda}.$$

Лемма 1 доказана.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $\mathcal{O}_m$ – цикл периода m . Если при вариации параметров хотя бы одна из точек m -периодической орбиты $\mathcal{O}_m$ оказывается на одной из границ $c_{\mathcal{L}}$ или $c_{\mathcal{R}}$ (т.е. m -цикл $\mathcal{O}_m$ претерпевает бифуркацию граничного столкновения), то существует другая точка, лежащая на второй границе, так что для этой пары справедливо (14).

Это означает, что в рассматриваемой системе бифуркации граничного столкновения происходят, когда пара точек периодической орбиты $\mathcal{O}_m$ одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения. Таким образом, в точке бифуркации имеем периодическую орбиту $\mathcal{O}_m = \{x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^{m-1}(x_0)\}$, $F^m(x_0) - x_0 = 0$, $x_0 = c_{\mathcal{L}}$, $F(x_0) = c_{\mathcal{R}}$, которая может быть гиперболической или негиперболической (в случае вырожденной бифуркации).

3. Бифуркационный анализ и численные эксперименты

В области колебательных движений отображение (13) имеет единственную неподвижную точку $\mathcal{O}_{\mathcal{M}} = \{x_*\}$ (1-цикл), принадлежащую промежутку $[c_{\mathcal{L}}, q]$ (рис. 6, а, б):

$$(16) \quad x_* = \frac{(q + \mu) e^{\lambda}}{(q + \mu) e^{\lambda} - q + 1 - \mu} - \mu.$$

Устойчивость $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ определяется неравенством

$$|\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{M}})| < 1, \quad \rho(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^{\lambda}.$$

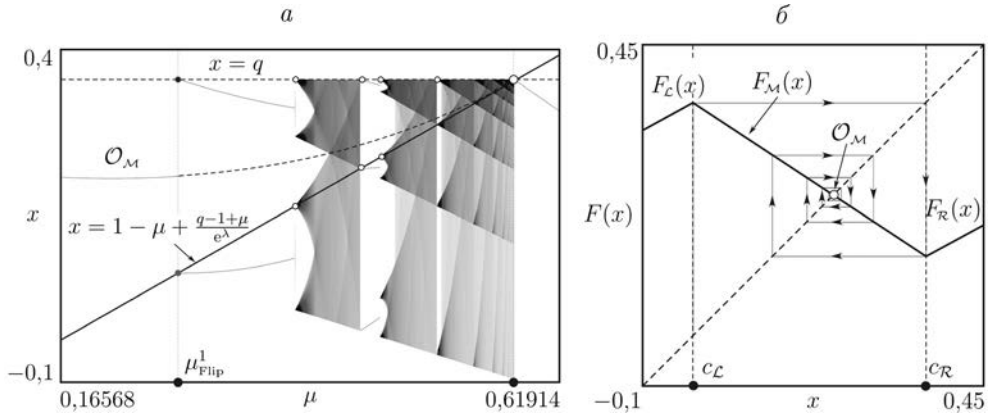


Рис. 6. *а* – Бифуркационная диаграмма. *б* – Устойчивая неподвижная точка при $0 < \mu < \frac{1}{1 + e^\lambda} - q$.

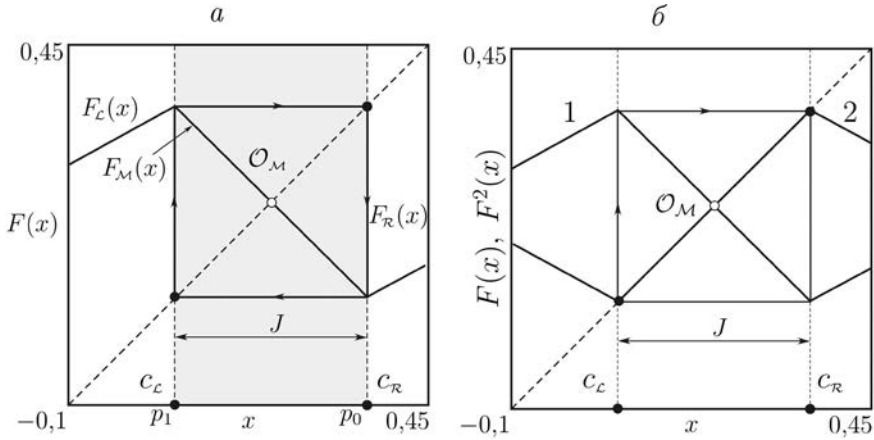


Рис. 7. *а* – Вырожденная бифуркация удвоения периода в точке μ_{Flip}^1 . *б* – Графики функций $F(x)$ и $F^2(x)$ в точке бифуркации.

При $\mu = \mu_{\text{Flip}}$ неподвижная точка O_M претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода (рис. 6, *а* и рис. 7, *а*), когда

$$\rho(O_M) = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^\lambda = -1.$$

Решив это уравнение относительно μ , получим бифуркационное значение параметра (точку вырожденной бифуркации удвоения периода):

$$\mu_{\text{Flip}}^1 = \frac{1}{1 + e^\lambda} - q.$$

В результате такой бифуркации возникает негиперболический цикл $O_2 = \{p_0, p_1\}$ периода 2 с мультипликатором $+1$ (рис. 7, *а, б*), для которого

$$F_R \circ F_L(c_L) = c_L, \quad F_L \circ F_R(c_R) = q.$$

Периодические точки p_0, p_1 цикла $\mathcal{O}_2$ в силу леммы 1 (см. рис. 7) равны критическим точкам ранга один $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{R}}$ и $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = c_{\mathcal{L}}$:

$$p_0 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = q - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 + e^{2\lambda}}, \quad p_1 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = q.$$

Причем любая точка $x \in J$, $J = [c_{\mathcal{L}}; c_{\mathcal{R}}] = \left[q - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 + e^{\lambda}}; q \right]$, за исключением $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, периодическая с периодом 2.

Действительно (см. рис. 7,б), в промежутке $J = \left[q - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 + e^{\lambda}}; q \right]$ имеем:

$$F(x) = -(x - 1 + \mu) + \mu = -x + 1 \quad \text{и} \quad F^2(x) = x.$$

Отсюда в точке $\mu = \mu_{\text{Flip}}^1$

$$F([F_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}}); q]) = [F_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}}); q],$$

где

$$c_{\mathcal{L}} = q - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 + e^{\lambda}}.$$

При переходе параметра μ через μ_{Flip}^1 неподвижная точка $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ теряет устойчивость, а негиперболический 2-цикл $\mathcal{O}_2$ становится устойчивым $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}} = \{x_0^{\mathcal{LM}}, x_1^{\mathcal{LM}}\}$ (см. рис. 8,а), где периодические точки есть

$$\begin{aligned} x_0^{\mathcal{LM}} &= -\mu + 1 - \frac{e^{\lambda}(q - 1 + \mu)}{q - 1 + \mu - (q + \mu)e^{2\lambda}}, \\ x_1^{\mathcal{LM}} &= -\mu - \frac{e^{2\lambda}(q + \mu)}{q - 1 + \mu - (q + \mu)e^{2\lambda}}. \end{aligned}$$

Цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ устойчив в диапазоне

$$\frac{1}{1 + e^{\lambda}} - q < \mu < \frac{1}{1 + e^{2\lambda}} - q.$$

При дальнейшем увеличении параметра 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ (рис. 8,б) претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода. Бифуркационное значение параметра найдем из условия

$$\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}) = \frac{e^{2\lambda}(q + \mu)}{q - 1 + \mu} = -1.$$

Отсюда получим

$$\mu_{\text{Flip}}^2 = \frac{1}{1 + e^{2\lambda}} - q.$$

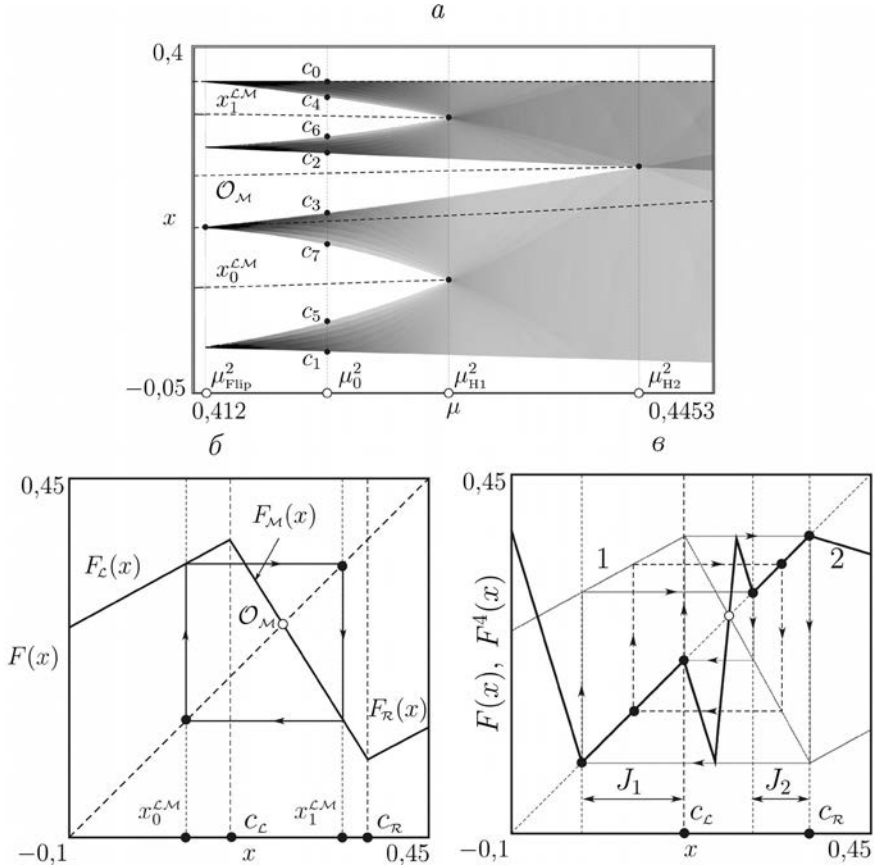


Рис. 8. *а* – Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая вырожденную бифуркацию удвоения периода 2-цикла $\mathcal{O}_{LM}$. *б* – Устойчивый 2-цикл $\mathcal{O}_{LM} = \{x_0^{LM}, x_1^{LM}\}$ в области $\mu_{\text{Flip}}^1 < \mu < \mu_{\text{Flip}}^2$. *в* – Графики функций $F(x)$ и $F^4(x)$ в точке бифуркации.

Такая бифуркация приводит к возникновению 4-цикла $\mathcal{O}_4$, для которого в точке $\mu = \mu_{\text{Flip}}^2$ справедливо условие

$$F_M \circ F_L \circ F_R \circ F_L(c_L) = c_L.$$

Как можно видеть из рис. 8,б, в, если $\mu = \mu_{\text{Flip}}^2$, то периодические точки p_3, p_4 4-цикла $\mathcal{O}_4 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, согласно лемме 1, лежат на многообразиях переклечения c_L, c_R :

$$p_2 = c_L = \frac{e^{2\lambda} - e^\lambda}{1 + e^{2\lambda}} + q, \quad p_4 = c_R = q.$$

Как и в предыдущем случае, все точки $x \in J$, $J = J_1 \cup J_2$, за исключением периодических точек 2-цикла $\mathcal{O}_{LM}$, являются периодическими с периодом 4 (см. рис. 8,б). Здесь $J_1 = [F_R(q), q]$, $J_2 = [F_L \circ F_R(q), q]$.

При $\mu > \mu_{\text{Flip}}^2$ из негиперболического 4-цикла $\mathcal{O}_4$ возникает четырехполосный хаотический аттрактор (рис. 9,а), который существует в промежутке

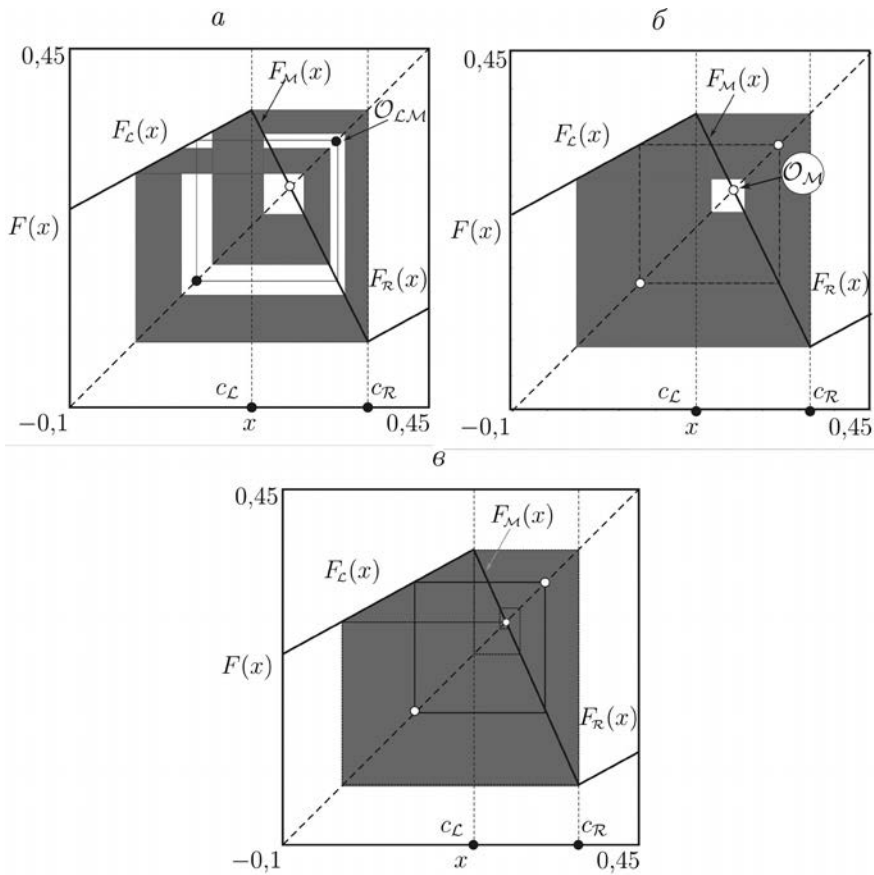


Рис. 9. *а* – Четырехполосный (4-band) хаотический аттрактор. *б* – Переход от четырехполосного хаотического аттрактора в двухполосный в точке μ_{H1}^2 через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 2-цикла $\mathcal{O}_{LM}$. *в* – Переход от двухполосного хаотического аттрактора в однополосный в точке μ_{H2}^2 через гомоклиническую бифуркацию неустойчивой неподвижной точки $\mathcal{O}_M$.

$\mu_{\text{Flip}}^2 < \mu < \mu_{H1}^2$ (рис. 8,а). В точке $\mu = \mu_{H1}^2$ четырехполосный хаотический аттрактор переходит в двухполосный через так называемую бифуркацию «слияния» («merging»), связанную с гомоклинической бифуркацией неустойчивого 2-цикла $\mathcal{Q}_{LM} = \{x_0^{LM}, x_1^{LM}\}$ (рис. 8,а).

Определение 1. Предположим, что хаотический аттрактор A_k состоит из k полос, $k > 2$, и существует неустойчивый m -цикл $\mathcal{O}_m$, $m < k$ с отрицательным мультипликатором, расположенный на границе непосредственного бассейна притяжения A_k . Бифуркация «слияния» возникает, если при некотором значении параметра аттрактор A_k сталкивается с m -циклом $\mathcal{O}_m$ и полосы хаотического аттрактора, контактирующие с циклом $\mathcal{O}_m$, попарно сливаются [25].

Поскольку границы хаотического аттрактора образованы критическими точками и их образами, то в момент бифуркации цикл $\mathcal{O}_m$ сталкивается

с некоторыми из них. Это приводит к появлению гомоклинической орбиты $\mathcal{O}_m$, которая является критической в момент бифуркации. Соответственно, цикл $\mathcal{O}_m$ претерпевает гомоклиническую бифуркацию. Поскольку $\mathcal{O}_m$ является негомоклиническим до бифуркации, то он обязательно становится двусторонним гомоклиническим после, так как цикл с отрицательным мультипликатором не может быть односторонним гомоклиническим [25, 29].

Известно, что в кусочно-гладких непрерывных отображениях, когда хаотический аттрактор $\mathcal{A}_k$, имеющий $k = 2m$ полос перед бифуркацией, сталкивается с m -циклом $\mathcal{O}_m$, то все полосы сливаются попарно и их количество после бифуркации уменьшается вдвое [25, 29].

На рис. 8,а и 9,а, б показан переход от четырехполосного хаотического аттрактора к двухполосному. В данном переходе участвует неустойчивый 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}} = \{x_0^{\mathcal{LM}}, x_1^{\mathcal{LM}}\}$ (см. рис. 8,а) с отрицательным мультипликатором

$$\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}) = \frac{(q + \mu)}{q - 1 + \mu} e^{2\lambda} < -1.$$

До бифуркации цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ не является гомоклиническим. При увеличении μ от значения $\mu_{\text{Flip}}^2 = \frac{1}{1+e^{2\lambda}} - q$ полосы аттрактора $\mathcal{A}_4$ растут (см. рис. 8,а), а затем в точке μ_{H1}^2 сливаются попарно, сталкиваясь с периодическими точками $x_0^{\mathcal{LM}}$ и $x_1^{\mathcal{LM}}$ (см. рис. 8,а).

Как показано на рис. 8,а (см. также 9,б), верхняя граница аттрактора $\mathcal{A}_4$ равна $c_0 = q = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})$, нижняя — $c_1 = F_{\mathcal{R}}(q)$. Следующие границы есть $c_2 = F_{\mathcal{L}}(c_1)$, $c_3 = F_{\mathcal{L}}(c_2)$, $c_4 = F_{\mathcal{M}}(c_3)$, $c_5 = F_{\mathcal{M}}(c_4)$, $c_6 = F_{\mathcal{L}}(c_7)$ и $c_7 = F_{\mathcal{M}}(c_6)$.

Бифуркационное значение параметра можно найти из условия, когда периодические точки $x_0^{\mathcal{LM}}$, $x_1^{\mathcal{LM}}$ цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ совпадают с критическими точками, определяющими соответствующие границы аттрактора. Таким образом, бифуркационное значение параметра можно найти, решив любое из уравнений

$$x_1^{\mathcal{LM}} = c_4, \quad x_1^{\mathcal{LM}} = c_6, \quad x_0^{\mathcal{LM}} = c_5, \quad x_0^{\mathcal{LM}} = c_7.$$

Первое уравнение содержит критическую точку самого низкого ранга. Поэтому оно и было использовано для нахождения бифуркационного значения параметра. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{a^4(q + \mu)^3}{(q - 1 + \mu)^2} - \frac{a^8(q + \mu)^5}{(q - 1 + \mu)^4} - \frac{a^3(q + \mu)^2}{(q - 1 + \mu)^2} - \frac{a^6(q + \mu)^4}{(q - 1 + \mu)^4} - \\ & - \frac{a(q + \mu)}{q - 1 + \mu} - \frac{a^4(q + \mu)^3}{(q - 1 + \mu)^3} + \frac{a^2(q + \mu)^3}{q - 1 + \mu} - 1 + a = 0, \quad a = e^{\lambda}. \end{aligned}$$

и, решив его численно относительно μ , получим μ_{H1}^2 .

При дальнейшем увеличении параметра двухполосный хаотический $\mathcal{A}_2$ аттрактор переходит в однополосный $\mathcal{A}_1$, когда в точке μ_{H2}^2 (рис. 8,а и рис. 9,б)

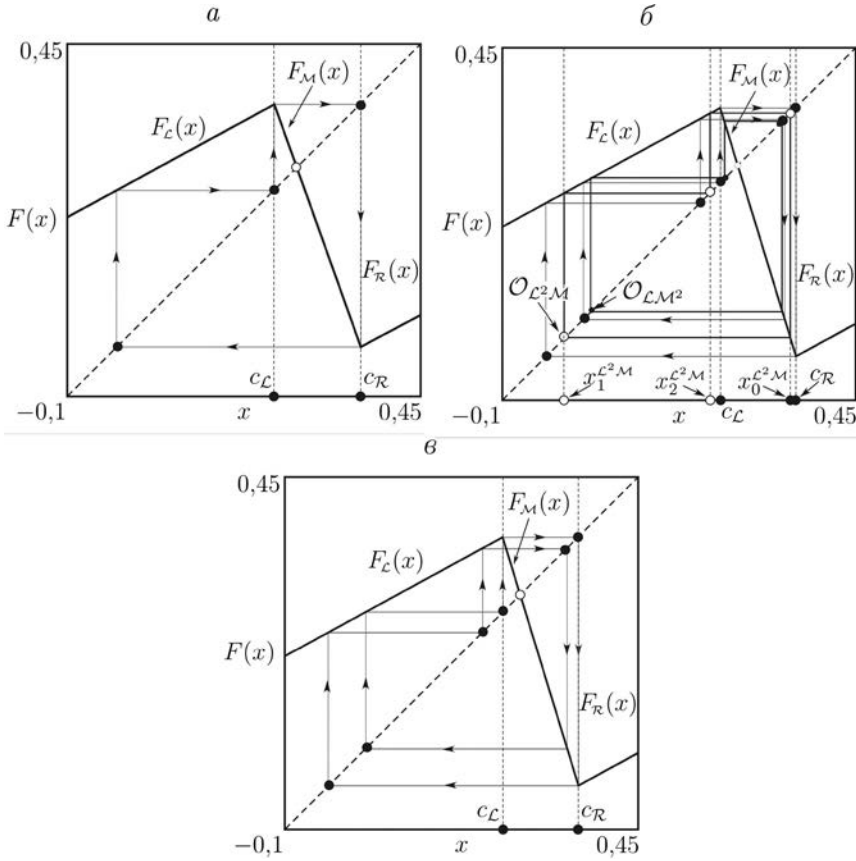


Рис. 10. *а* – Негиперболический 3-цикл с мультипликатором $+1$, возникающий через бифуркацию граничного столкновения («border-collision fold»). *б* – Вырожденная бифуркация удвоения периода 3-цикла $O_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$. *в* – Негиперболический 6-цикл, возникающий через вырожденную бифуркацию удвоения периода.

полосы хаотического аттрактора сливаются попарно, сталкиваясь с неподвижной точкой $O_{\mathcal{M}}$. Бифуркационное значение параметра можно найти, решив любое из двух уравнений

$$O_{\mathcal{M}} = c_3, \quad O_{\mathcal{M}} = c_7.$$

Из первого уравнения находим:

$$e^{2\lambda} (q + \mu)^2 + q + \mu - 1 = 0,$$

положительный корень которого соответствует второй точке бифуркации слияния

$$\mu_{H2}^2 = -\frac{1}{2e^\lambda} \left(1 - \sqrt{1 + 4e^{2\lambda}} \right).$$

В точке $\mu_{\text{ВСВ}}^3$ возникают устойчивый и неустойчивый 3-циклы через бифуркацию граничного столкновения (рис. 10,а):

$$\mu_{\text{ВСВ}}^3 = \frac{1 - e^{2\lambda}}{1 - e^{3\lambda}} - q.$$

При $\mu > \mu_{\text{ВСВ}}^3$ существуют два 3-цикла – устойчивый $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ с отрицательным мультипликатором и неустойчивый $\mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathcal{M}^2}$ с положительным мультипликатором, периодические точки которых удовлетворяют уравнениям

$$F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}}(x) - x = 0, \quad F_L \circ F_M \circ F_M(x) - x = 0.$$

Решив эти уравнения, находим $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ и $\mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathcal{M}^2}$.

Область устойчивости 3-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$:

$$\frac{1 - e^{2\lambda}}{1 - e^{3\lambda}} - q < \mu < \frac{1}{1 + e^{3\lambda}} - q.$$

В точке

$$\mu = \mu_{\text{Flip}}^3 = \frac{1}{1 + e^{3\lambda}} - q$$

цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода. Как и в предыдущих случаях, две периодические точки 6-цикла одновременно сталкиваются с двумя многообразиями переключения (рис. 10,б,в):

$$F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{L}}.$$

При переходе через μ_{Flip}^3 возникает шестиполосный хаотический аттрактор, который переходит в трехполосный через гомоклиническую бифуркацию (рис. 11,а,б), когда полосы хаотического аттрактора (см. рис. 8,а), сливаются попарно при $\mu = \mu_{\text{H1}}^3$, сталкиваясь с периодическими точками $\{x_0^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}, x_1^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ и $x_2^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}\}$ неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ с отрицательным мультипликатором

$$\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}) = \frac{(q + \mu)^3}{(q - 1 + \mu)^3} e^{3\lambda} < -1.$$

При дальнейшем увеличении параметра в точке μ_{H2}^3 происходит так называемая бифуркация «расширения» («expansion bifurcation» [25, 29]) (см. рис. 11,а и в).

Определение 2. Предположим, что хаотический аттрактор A_k состоит из k полос, $k > 1$, и существует неустойчивый m -цикл $\mathcal{O}_m$, $m > 1$ с положительным мультипликатором, расположенный на границе непосредственного бассейна A_k . Бифуркация «расширения» («expansion») возникает, если при некотором значении параметра аттрактор A_k сталкивается с циклом $\mathcal{O}_m$ и резко увеличивается в размерах [25, 29].

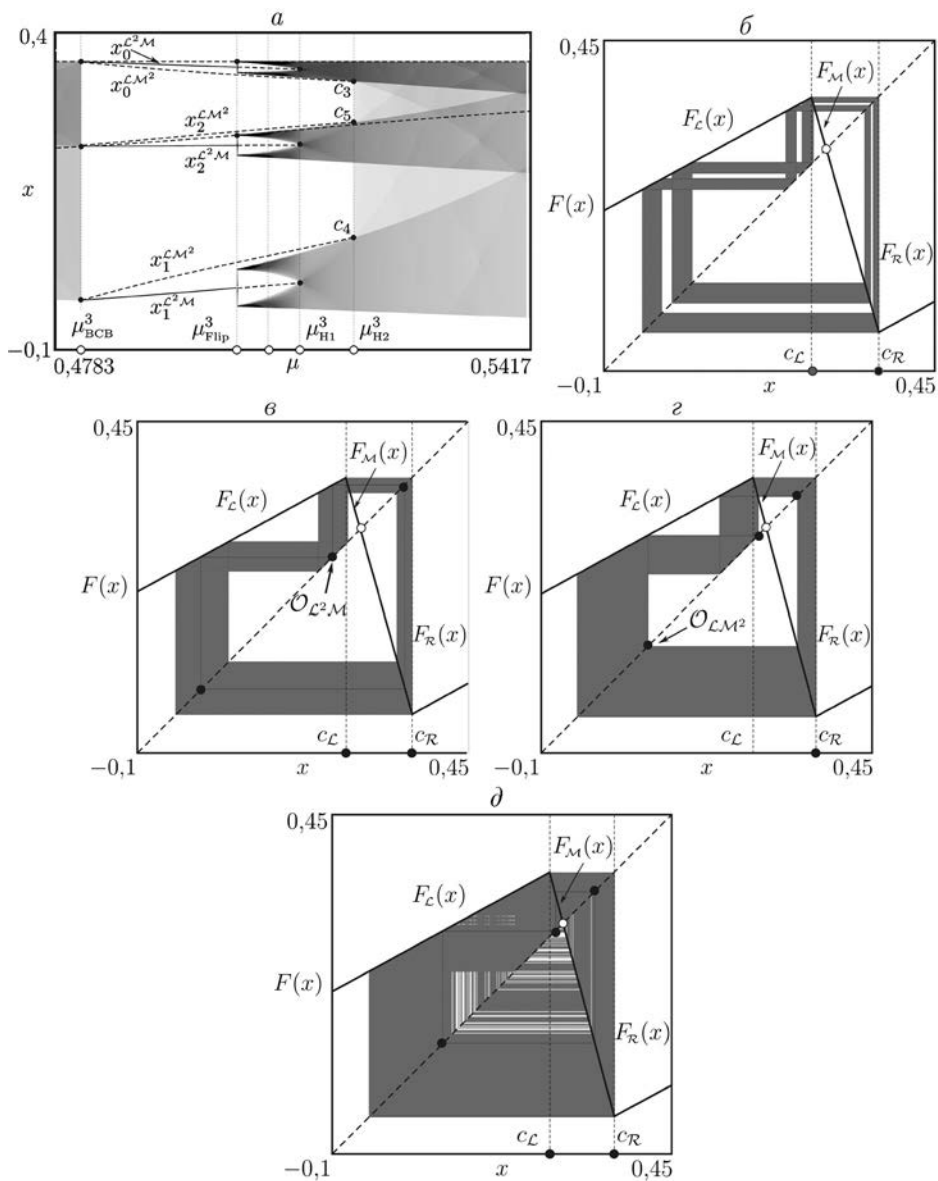


Рис. 11. *а* – Диаграмма, иллюстрирующая бифуркации «слияния» и «расширения». *б* – Шестиполосный (6-band) хаотический аттрактор. *в* – Переход от шестиполосного хаотического аттрактора в трехполосный в точке μ^3_{H1} через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{L^2M}$. *г, д* – Переход от трехполосного хаотического аттрактора в однополосный в точке μ^3_{H2} через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{LM^2}$.

Как и в предыдущем случае, такая бифуркация приводит к появлению гомоклинической орбиты для $\mathcal{O}_m$, которая является критической в момент бифуркации. Отличие состоит в том, что до бифуркации цикл $\mathcal{O}_m$ может быть либо односторонним гомоклиническим, либо негомоклиническим. После бифуркации $\mathcal{O}_m$ становится двусторонним гомоклиническим [25].

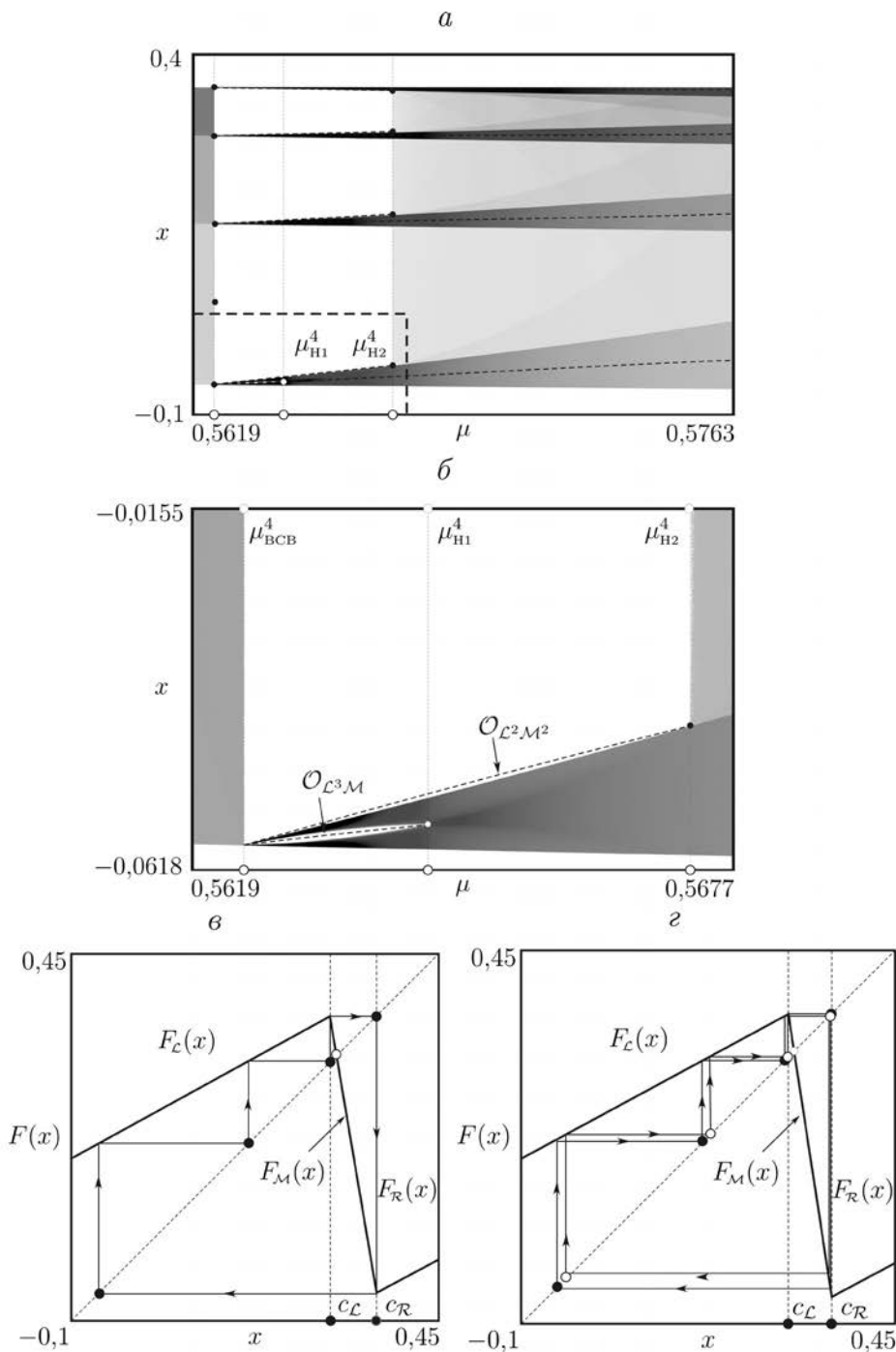


Рис. 12. a – Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая бифуркации «слияния» и «расширения». b – Увеличенный фрагмент диаграммы, выделенный пунктирным прямоугольником. $в, г$ – Рождение неустойчивых 4-циклов через бифуркацию граничного столкновения.

При увеличении μ трехполосный хаотический аттрактор сталкивается в точке μ_{H2}^3 с неустойчивым 3-циклом $O_{\mathcal{LM}^2}$ с положительным мультипликатором

$$\rho(O_{\mathcal{LM}^2}) = \frac{(q + \mu)^2}{(q - 1 + \mu)^2} e^{3\lambda} > 1.$$

Как отмечалось выше, после бифуркации 3-цикл $O_{\mathcal{LM}^2}$ является двусторонним гомоклиническим и хаотический A_3 аттрактор состоит только из одной полосы (рис. 11, ∂).

Как можно видеть из рис. 11, a , для вычисления бифуркационного значения параметра можно решить любое из следующих уравнений:

$$x_0^{\mathcal{LM}^2} = c_1, \quad x_1^{\mathcal{LM}^2} = c_2, \quad x_2^{\mathcal{LM}^2} = c_4.$$

Первое уравнение содержит образ критической точки самого низкого ранга и, следовательно, является самым простым для решения. Точка бифуркации «расширения» μ_{H2}^3 находилась численно из уравнения

$$\frac{a^3(q + \mu)^2 + a^2(q + \mu)(q - 1 + \mu)}{(q - 1 + \mu)^2 - a^3(q + \mu)^2} = a^3(q + \mu) - a^2 + 1.$$

На рис. 12 показан еще один переход. В точке μ_{BCB}^4 возникают два неустойчивых 4-цикла – с положительным и отрицательным мультипликатором (рис. 12, a) через бифуркацию граничного столкновения («border-collision fold»), когда две точки 4-цикла сталкиваются одновременно с двумя многообразиями переключения.

$$\mu_{\text{BCB}}^4 = \frac{1 - e^{3\lambda}}{1 - e^{4\lambda}} - q.$$

При увеличении μ цикл периода 4 с отрицательным мультипликатором претерпевает бифуркацию «слияния» в точке μ_{H1}^4 , а 4-цикл с положительным мультипликатором – бифуркацию «расширения» в точке μ_{H2}^4 (рис. 12, b).

4. Выводы

В данной статье представлены результаты исследований бифуркаций граничного столкновения («border-collision bifurcations») в кусочно-гладком отображении, описывающем поведение импульсной системы автоматического управления.

Показано, что такое отображение в области колебательных движений является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например бифуркация удвоения периода, касательная и вилообразная бифуркации, становятся вырожденными

(«degenerate bifurcations»), сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения.

Выявлено необычное свойство рассматриваемого класса импульсных систем, состоящее в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения. Насколько известно авторам, этот случай не изучался ранее в общей теории бифуркаций негладких систем. Вопрос, связан ли описанный феномен со свойством конкретной системы, остается открытым.

Вторая часть работы посвящена исследованию бифуркаций «слияния» («merging») и «расширения» («expansion») [25, 29] хаотических аттракторов в импульсных системах. Этот важный класс нелокальных бифуркаций, известный еще как кризисы хаотических аттракторов («merging crisis», «interior crisis», «boundary crisis» [32–34]) в импульсных системах, остается практически неизученным.

Особый интерес представляют механизмы, при которых хаотический аттрактор претерпевает внезапные изменения. Хаотический аттрактор может внезапно исчезнуть из-за «граничного кризиса» («boundary crisis») или внезапно измениться в размерах из-за «внутреннего кризиса» («interior crisis») [32–34]. В представленной работе изучен «внутренний кризис».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенвассер Е.Н. Периодически нестационарные системы управления. М.: Наука, 1973.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Периодические режимы в широтно-импульсных системах // АиТ. 1986. № 11. С. 37–44.
4. Каретный О.Я., Кипнис М.М. Периодические режимы работы широтно-импульсных систем управления. I // АиТ. 1987. № 11. С. 46–54.
5. Каретный О.Я., Кипнис М.М. Периодические режимы работы широтно-импульсных систем управления. II // АиТ. 1987. № 12. С. 42–48.
6. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Исследование Ω -периодических режимов в широтно-импульсных системах // АиТ. 1989. № 2. С. 30–39.
7. Кипнис М.М. Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной системе управления // Техническая кибернетика. 1992. № 1. С. 108–112.
8. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПб. ун-та., 1993.
9. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1992. № 8. С. 47–53.
10. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // АиТ. 2003. № 5. С. 3–45.

11. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения // АиТ. 2004. № 4. С. 3–34.
12. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-Collision Bifurcations Including “Period Two to Period Three” for Piecewise Smooth Systems // Physica D. 1992. V. 57. No. 1–2. P. 39–57.
13. Фейгин М.И. Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 861–869.
14. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
15. Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. Local Analysis of C-bifurcations in n -Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems // Chaos, Solitons and Fractals, 1999. V. 19. No. 11. P. 1881–1908.
16. Kapitaniak T., Maistrenko Yu. Multiple Choice Bifurcations as a Source of Unpredictability in Dynamical Systems // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 5161–5163.
17. Dutta M., Nusse H., Ott R., Yorke J., Yuan G. Multiple Attractor Bifurcations: A Source of Unpredictability in Piecewise Smooth Systems // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4281–4284.
18. Nordmark A.B. Non-Periodic Motion Caused by Grazing Incidence in An Impact Oscillator // J. Sound Vib. 1991. V. 145. P. 279–297.
19. Banerjee S., Verghese C.C. (Eds.) Nonlinear Phenomena in Power Electronis. New York: IEEE Press, 2001.
20. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.
21. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2008.
22. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B., Tost G.O., Piironen P.T. Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems // SIAM Review. 2008. V. 50. P. 629–701.
23. Avrutin V., Mosekilde E., Zhusubaliyev Zh. T., Gardini L. Onset of Chaos in a Single-Phase Power Electronic Inverter // Chaos. 2015. No. 25. P. 043114-1–043114-14.
24. Simpson D.J.W. Border-Collision Bifurcations in R^N // SIAM Review. 2016. V. 58. P. 177–226.
25. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. Singapore: World Scientific, 2019.
26. Kuznetsov Yu.A. Elements of Applied Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 2004.
27. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва–Ижевск: Инс-т компьютер. исслед., 2003.
28. Sushko I., Gardini L. Degenerate Bifurcations and Border Collisions in Piecewise smooth 1D and 2D Maps // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2010. V. 20. No. 7. P. 2045–2070.
29. Avrutin V., Gardini L., Schanz M., Sushko I. Bifurcations of Chaotic Attractors in One-Dimensional Maps // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2014. V. 24. P. 1440012.

30. *Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Bastian F.* Transformations of Closed Invariant Curves and Closed-Invariant-Curve-Like Chaotic Attractors in Piecewise Smooth Systems // *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 2021. V. 31. No. 3. P. 2130009.
31. *Avrutin V., Panchuk A., Sushko I.* Border Collision Bifurcations of Chaotic Attractors in One-Dimensional Maps with Multiple Discontinuities // *Proc. Roy. Soc. A.* 2021, V. 477. P. 20210432.
32. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Chaotic Attractors in Crisis // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1507–1510.
33. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.* Crisis: Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos // *Physica D.* 1983. V. 7. P. 181.
34. *Grebogi C., Ott E., Romeiras F., Yorke J.A.* Critical Exponents for Crisis-Induced Intermittency // *Phys. Rev. A* . 1987. V. 36. No. 11. P. 5365–5380.
35. *Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J.C.* Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps. Singapore: World Scientific, 1996.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фраджовым.

Поступила в редакцию 26.09.2022

После доработки 07.12.2023

Принята к публикации 30.12.2023

© 2024 г. Т.А. ТОРМАГОВ (tormagov@phystech.edu)
(Московский физико-технический институт)

МЕТОД ДЕФОРМАЦИИ ПУТЕЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ ДЛЯ КОЛЕСНЫХ РОБОТОВ В ТОЧНОМ ЗЕМЛЕДЕЛИИ НА ОСНОВЕ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В точном земледелии является актуальной задача построения путей сельскохозяйственных роботов, покрывающих трехмерный участок ландшафта. Если для их реализации используются колесные роботы с рулением поворотом передних колес, то нормальная кривизна траекторий должна быть ограничена некоторой величиной, определяемой характеристиками этих машин. В работе рассмотрен метод деформации представленных однородными кубическими В-сплайнами путей для учета препятствий. Предложена оптимизационная задача, позволяющая производить расчет путей с минимизацией пропусков в покрытии. Данная задача является выпуклой и принадлежит к классу конического программирования второго порядка, что обуславливает возможность ее вычислительно эффективного решения. Приведены примеры вычислений.

Ключевые слова: точное земледелие, объезд препятствий, планирование путей, коническое программирование второго порядка, SOCP.

DOI: 10.31857/S0005231024020037, **EDN:** UKOYGH

1. Введение

В точном земледелии навигационные измерения и мониторинг с помощью различных сенсоров используются для совершенствования технологий выращивания сельскохозяйственных культур. Эффективное использование собранных данных позволяет, например, сократить время выполнения работ, площадь задействованных участков земли, количество необходимых ресурсов. Одной из задач планирования работ на поле в точном земледелии является построение путей сельскохозяйственных роботов, полностью покрывающих заданный участок трехмерного ландшафта.

Спланированные траектории движения должны быть реализуемы. Для роботов с механизмом руления поворотом передних колес для реализуемых траекторий должно выполняться условие на нормальную кривизну траектории u

$$(1) \quad \|u\| < u_{\max},$$

где $u_{\max}$ – максимальная реализуемая нормальная кривизна траектории. Значение $u_{\max}$ определяется по формуле

$$(2) \quad u_{\max} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{\max}}{L},$$

где L – расстояние между передней и задней осями робота, $\alpha_{\max}$ – максимальный эффективный угол поворота передних колес [1]. Для машины с двумя передними колесами углы поворота передних колес могут быть различны. По этой причине в формуле (2) используется эффективный угол поворота. Для сельскохозяйственной машины с дифференциальным приводом, допускающей разворот на месте, условие (1) не является необходимым для реализации траектории. В данной работе рассматривается планирование путей для машин с механизмом руления поворотом передних колес, для которых нормальная кривизна реализуемой траектории движения ограничена. Предполагается, что в процессе обработки поля движение производится передним ходом, а задний ход может использоваться только для разворотов на границе поля.

Построение путей, покрывающих заданный ландшафт, используется, например, при посеве и посадке растений, обработке их от вредителей, уборке урожая и стрижке газонов. Часто для покрытия поля используются параллельные или почти параллельные пути. Когда рельефом поля можно пренебречь, планирование путей производится для плоской поверхности. В [2] рассмотрены особенности построения плоских параллельных путей в пахотном земледелии, задача выбора направления построения путей с учетом формы и длины разворотов, задача декомпозиции поля сложной формы на участки, для каждого из которых планирование параллельных путей может быть проведено отдельно. Планирование путей по трехмерному ландшафту заметно отличается от плоского случая. В [3–5] построение трехмерного покрытия предлагается проводить относительно некоторого начального пути, пересекающего поле. В общем случае начальный путь является криволинейным. В [4] предложен поиск соседних путей с помощью решения задачи о пересечении цилиндра с поверхностью. В [6] предлагается подход к построению строго параллельных путей без ограничений на кривизну на криволинейной поверхности, заданной параметрически. Как показано в работе [3] по планированию трехмерных путей в пахотном земледелии, целевые функции, позволяющие оценивать покрытие поля, могут учитывать водную эрозию почвы, длины разворотов между рядами, пропуски в покрытии их-за ограничений на кривизну. В [5] предложен алгоритм построения путей по пологой поверхности с ограничениями на нормальную кривизну и на ширину перекрытия соседних полос.

Препятствия, находящиеся на поле, могут быть как подвижные (динамические), так и неподвижные (стационарные). Динамические препятствия меняют свое положение с течением времени. Примерами являются животные и другие сельскохозяйственные машины. Для автономных роботов траектории объезда таких препятствий планируются в процессе движения робота.

Информация о подвижных препятствиях в режиме реального времени собирается с помощью стереокамер, лидаров и других сенсоров [7]. Динамический учет препятствий требует перепланирования траектории [8]. Решение задач перепланирования траектории в реальном времени требует вычислительных ресурсов. По этой причине наличие на поле стационарных препятствий требует их учета при построении покрытия, до начала выполнения работ роботом. Отметим, что в любом из двух случаев при объезде препятствий машинами с рулением поворотом передних колес также должно выполняться условие (1).

В [2, 9–11] рассматриваются методы декомпозиции поля, позволяющие для различных конфигураций препятствий разделить его на отдельные участки, каждый из которых можно покрыть параллельными путями. Такое разделение, как правило, требует выделения достаточно широкой области для разворотов вблизи препятствия. В литературе рассмотрено множество задач, в которых траектории обхода препятствий строятся с минимизацией длины пути. Здесь можно выделить подходы, основанные на применении алгоритмов поиска на графе [12, 13], и алгоритмы деформации пути с применением штрафных функций (искусственных потенциальных полей) [14–16]. Однако в точном земледелии решение задачи деформации пути с минимизацией его длины может привести к значительным пропускам в покрытии. В связи с этим требуется подход, позволяющий сокращать площадь необрабатываемой области.

В данной работе приведен метод, позволяющий для учета препятствий проводить перепланирование покрытия поля путями с помощью решения задачи конического программирования второго порядка для машин с механизмом руления поворотов передних колес. Задачи конического программирования второго порядка (англ. second-order cone programming, SOCP) в общем виде можно сформулировать следующим образом [17, 18].

Задача 1. Найти

$$(3) \quad \min_x f^T x$$

при ограничениях

$$(4) \quad \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $x \in R^l$ (l – размерность переменной), $f \in R^l$, $A_i \in R^{(l_i-1) \times l}$, $b_i \in R^{l_i-1}$, $c_i \in R^l$, $d_i \in R$, N – число ограничений, l_i – натуральные числа.

Здесь и далее обозначение $\|\cdot\|$ будем использовать для евклидовых норм векторов. Задачи SOCP являются выпуклыми и допускают вычислительно эффективные методы решения, см. [19, 20].

Отметим, что после построения покрытия поля путями нужно определить маршрут движения одной или нескольких машин по полученным рядам, позволяющий провести обработку за минимальное время либо с минимальной длиной маршрута. В общем виде маршрутизация является вычислительно трудоемкой задачей. Ее точное решение часто не может быть получено за

приемлемое время. Поэтому на практике часто используются эвристические алгоритмы маршрутизации. Примеры таких алгоритмов, основанных на методе имитации отжига, приведены в [5, 21, 22].

2. Предлагаемый метод

Предположим, что покрытие поля путями построено без учета препятствий. Требуется изменить пути, пересекающие границы препятствий, так, чтобы каждый путь был реализуем, а площадь необработанных участков была как можно меньшей. Для реализуемости нужно, чтобы путь не пересекал препятствия и выполнялось условие на кривизну (1).

Для задания координат точек пространства для данного метода удобно использовать локальную правую декартову систему координат ENU (x, y, z) (англ. *East, North and Up*). Для ее определения фиксируется некоторая точка на поле, которая далее используется как начало координат системы. Ось x направляют на восток, ось y – на север, а ось z дополняет набор координатных осей до правой тройки. При этом оси x и y лежат в касательной плоскости к используемому эллипсоиду модели Земли. Для описания поверхности, по которой движутся роботы, используется цифровая модель высот (англ. *Digital Elevation Model, DEM*). Она задается функцией $z = (x, y)$, позволяющей определить для известных координат x и y высоту z . При этом на практике в большинстве случаев точное определение высоты для каждой точки поля невозможно и используется интерполяция высот. Для этого предварительно собираются данные о высотах в некоторых (опорных) точках на поле. Затем по полученным данным строится функция определения высоты $z = (x, y)$. Примерами методов построения таких функций для данных на равномерной сетке являются билинейная и бикубическая интерполяции [4], а по неравномерной сетке – двумерная В-сплайновая интерполяция [23] и кригинг [24].

Для описания траектории движения колесных роботов удобно использовать гладкие функции. Примером являются однородные кубические В-сплайны [25]. Сплайновая кривая определяется набором контрольных точек $r_1, r_2, \dots, r_n$. Набор дополняется точками

$$(5) \quad r_0 = 2r_1 - r_2, \quad r_{n+1} = 2r_n - r_{n-1}.$$

Каждые четыре соседние контрольные точки $r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2}$ задают элементарный В-сплайн $r^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, n-1$, параметрической формулой (рис. 1)

$$(6) \quad r^{(i)}(t) = \frac{(1-t)^3}{6}r_{i-1} + \frac{4-6t^2+3t^3}{6}r_i + \frac{1+3t+3t^2-3t^3}{6}r_{i+1} + \frac{t^3}{6}r_{i+2},$$

где параметр сплайна t принимает значения из отрезка $[0, 1]$. Кривая $r(t)$, $t \in [0, n]$ состоит из набора элементарных сплайнов $r^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, n$, и может быть определена как

$$(7) \quad r(t) = r^{(i)}(t - (i-1)), \quad i = \lfloor t + 1 \rfloor, \quad t \in [0; n),$$

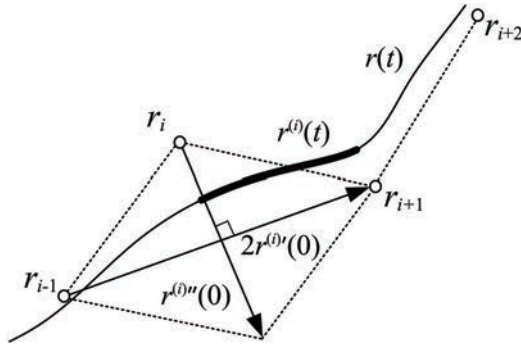


Рис. 1. Сплайновая кривая $r(t)$, элементарный сплайн $r^{(i)}(t)$ (выделен на сплайновой кривой), определяемый по четырем эквидистантным контрольным точкам r_{i-1} , r_i , r_{i+1} , r_{i+2} , векторы $r^{(i)'}(0)$ и $r^{(i)''}(0)$.

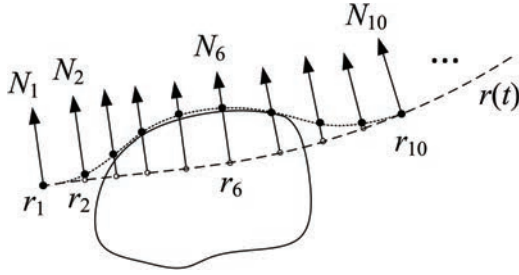


Рис. 2. Контур препятствия (сплошная линия), сплайновая кривая $r(t)$ до (штриховая линия) и после (пунктирная линия) деформации пути, направления поиска N_i и контрольные точки r_i .

$r(n) = r^{(n-1)}(1)$, где $\lfloor t \rfloor$ означает целую часть (округление вниз) для параметра t . Как видно из формул (6) и (7), $r(t)$ является непрерывной с непрерывной первой и второй производной по параметру, в том числе в местах стыка элементарных сплайнов. Отметим, что и сплайновая траектория, и контрольные точки могут не лежать на поверхности $z = (x, y)$, определяемой цифровой моделью высот. Однако они будут находиться вблизи этой поверхности, что пригодно для практического применения такого описания путей.

Метод построения покрытия поля без препятствий путями ограниченной кривизны при описании траекторий однородными кубическими В-сплайнами изложен в [5, 7]. Наличие на поле препятствий не позволяет использовать эти построения напрямую. Для этого случая в данной работе предлагается модифицировать покрытие поля путями, построенное без учета препятствий, с помощью решения набора задач деформации пути. Поскольку сплайновая кривая задается набором контрольных точек, то определение деформированного пути сводится к заданию его контрольных точек.

Для координат контрольных точек воспользуемся обозначениями x_i, y_i, z_i , такими, что $r_i = (x_i, y_i, z_i)$. Определим набор векторов единичной длины $N_i = (N_i^x, N_i^y, N_i^z) \in R^3$, $i = 1, \dots, n$, так, что эти векторы параллельны кас-

тельными плоскостями к поверхности в точках $(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$ (либо лежат в этих плоскостях); при этом направление нормали проекции сплайна на касательную плоскость для $(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$ совпадает с N_i . Вдоль этих направлений N_i будем искать новые позиции контрольных точек сплайна $r_i + N_i d_i$, $i = 1, \dots, n$, где диапазоны изменения значений d_i определяются геометрическими ограничениями задачи (рис. 2).

Рассмотрим отдельно учет ограничений на нормальную кривизну траектории (1).

Утверждение 1 (достаточные условия). Если для плоского однородного кубического B-сплайна с контрольными точками $r_i + N_i d_i$, $i = 1, \dots, n$, и дополнением (5) выполнены условия

$$(8) \quad \left\| \begin{array}{l} x_{i-1} + N_{i-1}^x d_{i-1} - 2(x_i + N_i^x d_i) + x_{i+1} + N_{i+1}^x d_{i+1} \\ y_{i-1} + N_{i-1}^y d_{i-1} - 2(y_i + N_i^y d_i) + y_{i+1} + N_{i+1}^y d_{i+1} \end{array} \right\| \leq u_{\max} \hat{l}_i(d_{i-1}, d_{i+1}),$$

$$(9) \quad 4\hat{l}_i(d_{i-1}, d_{i+1}) = (x_{i+1} - x_{i-1})^2 + 2(x_{i+1} - x_{i-1})(N_{i+1}^x d_{i+1} - N_{i-1}^x d_{i-1}) + \\ + (y_{i+1} - y_{i-1})^2 + 2(y_{i+1} - y_{i-1})(N_{i+1}^y d_{i+1} - N_{i-1}^y d_{i-1}),$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, то (1) выполняется для точек стыка элементарных сплайнов.

Отметим, что из (8) следует выполнение условия (1) лишь для точек стыка элементарных сплайнов. Пригодность этого условия для практических применений обусловлена двумя факторами. Первый заключается в том, что максимальное значение $\|r^{(i)''}(t)\|$ для каждого элементарного сплайна достигается при $t = 0$ или $t = 1$ (доказательство приведено в [5]). Второй заключается в том, что $\|r^{(i)'}(t)\|$ отражает соответствие между малыми изменениями длины траектории и соответствующими изменениями параметра сплайна и для элементарного сплайна с эквидистантными контрольными точками является примерно постоянной величиной.

В случае, когда поверхность плоская, но не параллельна и не совпадает с плоскостью (x, y) , условия на нормальную кривизну могут быть получены из (8) поворотом системы координат. В случае криволинейной поверхности вектор кривизны $k(t)$ может не совпадать с вектором нормальной кривизны $u(t)$. Рассмотрим случай достаточно пологих поверхностей, для которых движение на расстояние $2D_s$, где D_s – максимальная длина вектора между соседними контрольными точками сплайнов, можно с хорошей точностью считать движением в наклонной плоскости. В точном земледелии для большого числа приложений такое предположение допустимо. Значение модуля вектора $u(t)$ в таком случае можно аппроксимировать значением кривизны траектории в касательной плоскости. Определим вектор r'_i как

$$(10) \quad r'_i = \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{\|r_{i+1} - r_{i-1}\|}.$$

Для каждой контрольной точки r_i введем плоскую систему координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ с началом в точке r_i с координатными осями, сонаправленными векторам r'_i и N_i соответственно. В новых системах координат для контрольной точки r_i условия (8) принимают вид

$$(11) \quad \left\| \begin{array}{l} \tilde{x}_{i-1} + \tilde{N}_{i-1}^x d_{i-1} + \tilde{x}_{i+1} + \tilde{N}_{i+1}^x d_{i+1} \\ \tilde{y}_{i-1} + \tilde{N}_{i-1}^y d_{i-1} - 2d_i + \tilde{y}_{i+1} + \tilde{N}_{i+1}^y d_{i+1} \end{array} \right\| \leq u_{\max} \tilde{l}_i(d_{i-1}, d_{i+1}),$$

где

$$(12) \quad 4\tilde{l}_i(d_{i-1}, d_{i+1}) = (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1})^2 + 2(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1})(\tilde{N}_{i+1}^x d_{i+1} - \tilde{N}_{i-1}^x d_{i-1}) + \\ + (\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_{i-1})^2 + 2(\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_{i-1})(\tilde{N}_{i+1}^y d_{i+1} - \tilde{N}_{i-1}^y d_{i-1}).$$

Здесь $(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{y}_{i-1})$ и $(\tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$ – координаты проекций соседних контрольных точек в системе $(\tilde{x}, \tilde{y})$, а $(\tilde{N}_{i-1}^x, \tilde{N}_{i-1}^y)$ и $(\tilde{N}_{i+1}^x, \tilde{N}_{i+1}^y)$ – координаты векторов их нормалей в системе $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Отметим, что система координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ в общем виде различна для каждого r_i , а значит, результаты вычислений $(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{y}_{i-1})$, $(\tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, $(\tilde{N}_{i-1}^x, \tilde{N}_{i-1}^y)$, $(\tilde{N}_{i+1}^x, \tilde{N}_{i+1}^y)$ для r_i нельзя использовать при записи условий на кривизну для смещения точек r_{i-2} и r_{i+2} (если они существуют). Для этих точек требуется отдельное вычисление проекций в системах координат с началами в r_{i-2} и в r_{i+2} соответственно.

Условия на кривизну (11) имеют вид конусов второго порядка (4). Правая часть этих условий линейно зависит от значений переменных d_i , $i = 1, \dots, n$. Это позволяет сформулировать задачу деформации пути с ограничением на кривизну в виде следующей задачи конического программирования второго порядка.

Задача 2. Найти

$$(13) \quad \min_q q_{n+1}$$

при ограничении (11) для $i = 1, \dots, n$,

$$(14) \quad \|w^T q\| \leq q_{n+1},$$

$$(15) \quad \overline{d}_i \leq q_i \leq \overline{\overline{d}}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $q \in R^{n+1}$, q_i – i -я компонента вектора q .

Для оптимального решения задачи первые n компонент вектора q равны смещениям контрольных точек, которые требуется провести: $d_i = q_i$, $i = 1, \dots, n$. Значения $\overline{d}_i$ и $\overline{\overline{d}}_i$, $i = 1, \dots, n$ определяют геометрические ограничения на отклонения контрольных точек вдоль направления N_i , обусловленные препятствиями и границами поля. При этом для каждого препятствия выбирается направление обхода. Первые n компонент вектора $w \in R^{n+1}$ являются фиксированными значениями весовой функции, которые могут быть

выбраны как одинаковыми, так и зависящими от расположения контрольных точек относительно препятствий. Последняя компонента вектора w равна нулю: $w_{n+1} = 0$. Критерий оптимизации (13) в сочетании с условием (14) позволяет минимизировать смещение контрольных точек и сократить пропуски в покрытии, образующиеся при объезде препятствий из-за ограничения на нормальную кривизну пути.

На практике для определения значений $\overline{d}_i$ и $\overline{\overline{d}}_i$, $i = 1, \dots, n$ можно использовать представление границ препятствий и контура поля замкнутыми ломаными линиями, проекции которых на плоскость локального горизонта будут представлять собой многоугольники. В плоскости локального горизонта поиск $\overline{d}_i$ и $\overline{\overline{d}}_i$ сводится к выбору направления обхода каждого препятствия и решению задачи о пересечении прямой и многоугольника.

Приведенная задача оптимизации является выпуклой и допускает вычислительно эффективные методы решения. Другой вычислительной особенностью таких задач является то, что вывод о совместности или несовместности ограничений может быть сделан в процессе решения. Отметим, что предлагаемый подход не нацелен на поиск направлений обхода препятствий, а служит инструментом построения путей в заданной выпуклой области, определенной ограничениями (15). Если задача деформации пути оказалась несовместной, а допустимый путь в заданных границах существует, то это может быть обусловлено невозможностью выполнения условий на кривизну при смещении точек вдоль выбранных направлений. Невозможность выполнения ограничений на кривизну может быть обусловлена тем, что при больших смещениях нарушается равномерность расположения контрольных точек. Кроме того, проекции на плоскость (x, y) направлений поиска N_i могут пересекаться, что приводит к решениям с самопересекающимися траекториями, для которых, как правило, нарушается условие на кривизну. Перечисленные проблемы можно устранить применением следующего алгоритма деформации пути, основанного на ослаблении ограничений задачи с последующим представлением пути равномерно расположенными контрольными точками.

Алгоритм 1 (деформации пути).

1. Решается задача 2 при исходном ограничении $u_{\max}$. Если решение найдено, то производится перепараметризация траектории равномерно расположенными контрольными точками. Задача 2 решается повторно для текущего расположения контрольных точек. Если решение найдено, то оно возвращается в качестве ответа.

2. Решается задача 2 для текущего расположения контрольных точек для максимального значения нормальной кривизны $u_{\max} + \Delta$, $\Delta > 0$. Если оптимальное решение найдено, то производится перепараметризация траектории равномерно расположенными контрольными точками и выполняется возврат на шаг 1. Если не найдено, то значение Δ увеличивается, после чего повторяются действия шага 2.

Алгоритм на каждом этапе его работы предполагает выбор изменения кривизны Δ . От того, как этот выбор произведен, зависит, сколько итераций алгоритма потребуется выполнить, прежде чем решение задачи будет найдено.

3. Примеры вычислений

На рис. 3 показан пример решения задачи деформации путей для трех препятствий, $u_{\max} = 0,4 \text{ м}^{-1}$, ширина рядов 1 м. Покрытие поля путями сначала построено без учета препятствий с помощью метода, приведенного в [5], а затем произведена деформация пути с единичными весами ($w_i = 1$) для всех контрольных точек. Параметр Δ выбирался равным

$$(16) \quad \Delta = (u_{\max}^{-1} - 0,09m)^{-1} - u_{\max},$$

где m – номер итерации алгоритма деформации пути на шаге 2. Такая релаксация условия на кривизну соответствует уменьшению допустимого мгновенного радиуса кривизны траектории на 0,09 м за каждую итерацию. Очевидно, что число итераций при этом ограничено: необходимо обеспечить неотрицательное значение выражения $u_{\max}^{-1} - 0,09m$.

На рис. 4 приведен пример деформации путей с применением метода штрафных функций (искусственных потенциальных полей [15, 16]), а на рис. 5 — результат применения рассматриваемого в данной работе метода деформации путей на основе решения задачи 2 (SOCP). Видно, что крите-

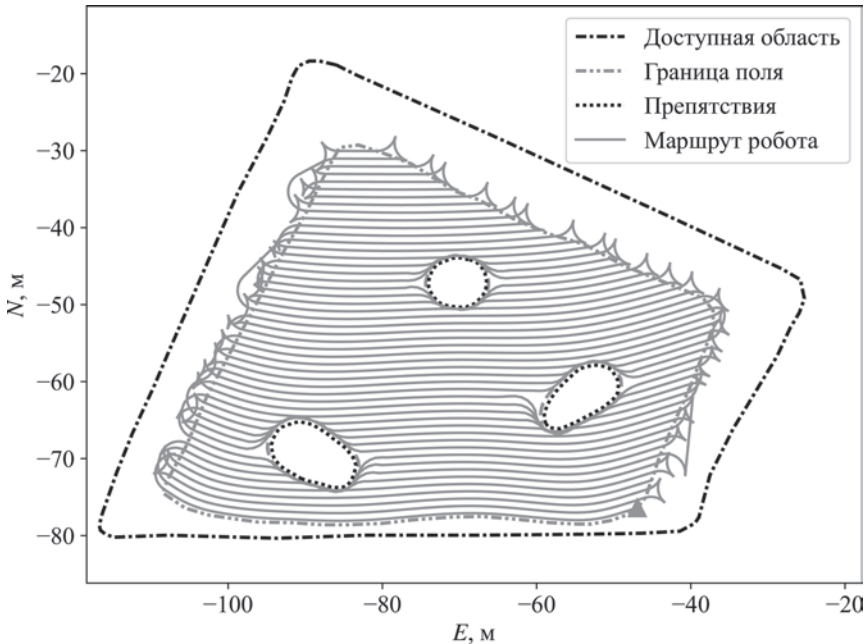


Рис. 3. Пример деформации путей с тремя препятствиями на поле.

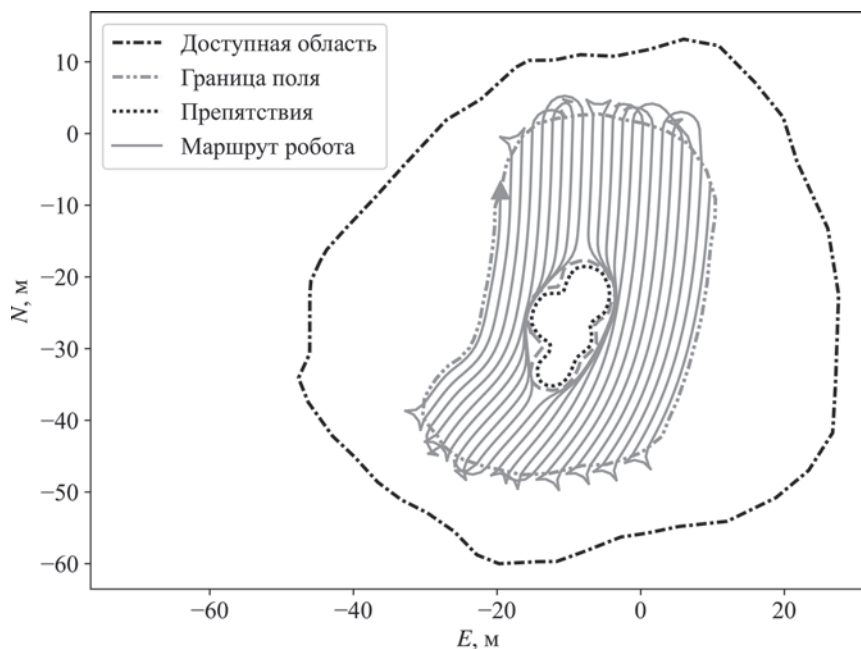


Рис. 4. Пример деформации путей с применением метода штрафных функций.

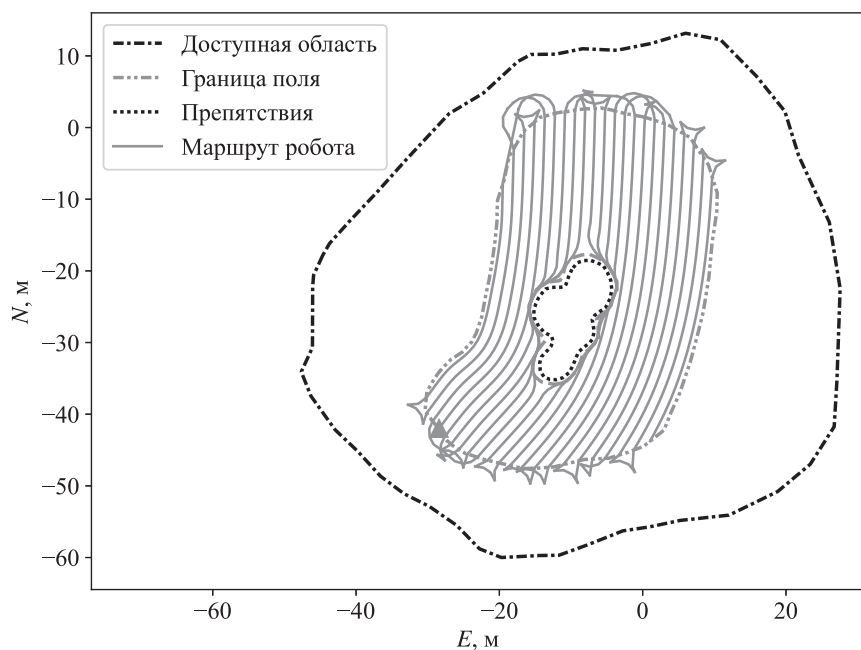


Рис. 5. Пример деформации путей на основе решения задачи SOCP.

рий оптимизации (13) задачи 2 с условием (14) позволил сократить необработанную область вокруг невыпуклого препятствия, образующуюся из-за учета ограничений на нормальную кривизну.

Для всех примеров для задач конического программирования второго порядка использован алгоритм решения, описанный в [19], расчет производился с использованием CVXPY [26, 27]. Маршруты обхода рядов построены для одного робота с разворотами передним и задним ходом. Для оптимизации длины маршрута использован алгоритм муравьиных колоний (англ. ant colony optimization, ACO), особенности применения которого к задачам маршрутизации рассмотрены в [28]. Отметим, что минимизация длины маршрута для данного примера не эквивалентна минимизации времени работ, по крайней мере из-за необходимости остановок при переключении между передним и задним ходом на разворотах.

4. Заключение

В работе предложен метод деформации траекторий для учета препятствий, применимый в точном земледелии при планировании покрытия поля путями. Результаты получены для случая описания траектории движения однородными кубическими В-сплайнами. Данный метод позволяет получить пути для колесных роботов с механизмом руления поворотом передних колес, максимальная реализуемая нормальная кривизна пути для которых ограничена. При этом построение траекторий производится с минимизацией евклидовой нормы взвешенного вектора отклонений контрольных точек сплайнов начальных путей, построенных без учета препятствий, что позволяет сократить площадь необработанной области. Научная новизна данного подхода заключается в формулировке деформации пути с ограничением на кривизну в виде задачи конического программирования второго порядка, которая является выпуклой и допускает вычислительно эффективные методы решения. Ограничением рассматриваемого подхода является требование достаточной пологости рельефа поля, которое при практических применениях в точном земледелии часто выполняется.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. В случае движения в плоскости (x, y) модуль вектора кривизны $k(t)$ сплайновой кривой в точке $r^{(i)}(t)$ описывается формулой

$$(П.1) \quad \|k(t)\| = \frac{\|r^{(i)''}(t)\| \sin \varphi(t)}{\|r^{(i)'}(t)\|^2},$$

где $r^{(i)'}(t)$ и $r^{(i)''}(t)$ – векторы первой и второй производной сплайна по параметру, $\varphi(t)$ – угол между векторами $r^{(i)'}(t)$ и $r^{(i)''}(t)$. Вектор кривизны кривой $k(t)$ в таком случае совпадает с вектором нормальной кривизны $u(t)$. Векторы первой и второй производных в точке стыка элементарных сплайнов

ИМЕЮТ ВИД

$$(П.2) \quad r^{(i)'}(0) = \frac{1}{2} (r_{i+1} + N_{i+1} d_{i+1} - r_{i-1} - N_{i-1} d_{i-1}),$$

$$(П.3) \quad r^{(i)''}(0) = r_{i-1} + N_{i-1}^T d_{i-1} - 2(r_i + N_i^T d_i) + r_{i+1} + N_{i+1}^T d_{i+1}.$$

Заметим, что функция $\hat{l}_i(d_{i-1}, d_{i+1})$, определяемая формулой (9), является оценкой снизу для $\|r^{(i)'}(0)\|^2$, не учитывающей квадратичные слагаемые по смещению:

$$(П.4) \quad \begin{aligned} \|r^{(i)'}(0)\|^2 &= \hat{l}_i(d_{i-1}, d_{i+1}) + \frac{1}{4}(N_{i+1}^x d_{i+1} - N_{i-1}^x d_{i-1})^2 + \\ &+ \frac{1}{4}(N_{i+1}^y d_{i+1} - N_{i-1}^y d_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Тогда из (8) следует, что

$$(П.5) \quad \|r^{(i)''}(0)\| \sin \varphi(0) \leq u_{\max} \|r^{(i)'}(0)\|^2,$$

а значит, в точках стыка элементарных сплайнов условие (1) выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gilimyanov R.F., Pesterev A.V., Rapoport L.B.* Smoothing curvature of trajectories constructed by noisy measurements in path planning problems for wheeled robots // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2008. V. 47. No. 5. P. 812–819.
2. *Jin J., Tang L.* Optimal Coverage Path Planning for Arable Farming on 2D Surfaces // Trans. ASABE. St. Joseph, MI: ASABE, 2010. V. 53. No. 1. P. 283–295.
3. *Jin J., Tang L.* Coverage path planning on three-dimensional terrain for arable farming // J. F. Robot. 2011. V. 28. No. 3. P. 424–440.
4. *Hameed I.A., La Cour-Harbo A., Osen O.L.* Side-to-side 3D coverage path planning approach for agricultural robots to minimize skip/overlap areas between swaths // Rob. Auton. Syst. Elsevier. 2016. Vol. 76. P. 36–45.
5. *Tormagov T., Rapoport L.* Coverage Path Planning for 3D Terrain with Constraints on Trajectory Curvature Based on Second-Order Cone Programming / Advances in Optimization and Applications Ed. Olenov N.N. et al. Cham: Springer International Publishing, 2021. P. 258–272.
6. *Galvez A., Iglesias A., Puig-Pey J.* Computing parallel curves on parametric surfaces // Appl. Math. Model. 2014. V. 38. No. 9–10. P. 2398–2413.
7. *Тормагов Т.А., Генералов А.А., Шавин М.Ю., Рапопорт Л.Б.* Задачи управления движением автономных колесных роботов в точном земледелии // Гироскопия и навигация. 2022. Т. 30, 1 (116). С. 39–60.
- Tormagov T.A., Generalov A.A., Shavin M.Y., Rapoport L.B.* Motion Control of Autonomous Wheeled Robots in Precision Agriculture // Gyroscopy Navig. 2022. V. 13. No. 1. P. 23–35.

8. *Chichkanov I., Shawin M.* Algorithm for Finding the Optimal Obstacle Avoidance Maneuver for Wheeled Robot Moving Along Trajectory // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Moscow: IEEE, 2022. P. 1–3.
9. *Latombe J.-C.* Robot Motion Planning. Boston, MA: Springer US, 1991.
10. *Choset H., Pignon P.* Coverage Path Planning: The Boustrophedon Cellular Decomposition / Field and Service Robotics Ed. Zelinsky A. London: Springer London, 1998. P. 203–209.
11. *Acar E.U., Choset H., Rizzi A.A. et al.* Morse Decompositions for Coverage Tasks // Int. J. Rob. Res. 2002. V. 21. No. 4. P. 331–344.
12. *Hart P., Nilsson N., Raphael B.* A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths // IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern. 1968. V. 4. No. 2. P. 100–107.
13. *Stentz A.* Optimal and efficient path planning for unknown and dynamic environments // Int. J. Robot. Autom. Int Association of Science and Technology for Development, 1995. V. 10. No. 3. P. 89–100.
14. *Chuang J.-H.* Potential-based modeling of three-dimensional workspace for obstacle avoidance // Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE Comput. Soc. Press. 1993. P. 19–24.
15. *Гилимьянов Р.Ф., Рапопорт Л.Б.* Метод деформации пути в задачах планирования движения роботов при наличии препятствий // Проблемы управления. 2012. № 1. С. 70–76.
16. *Gilimyanov R.F., Rapoport L.B.* Path Deformation Method for Robot Motion Planning Problems in the Presence of Obstacles // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 12. P. 70–76.
17. *Lobo M.S., Vandenberghe L., Boyd S. et al.* Applications of second-order cone programming // Linear Algebra Appl. North-Holland, 1998. V. 284. No. 1–3. P. 193–228.
18. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
19. *O'Donoghue B., Chu E., Parikh N. et al.* Conic Optimization via Operator Splitting and Homogeneous Self-Dual Embedding // J. Optim. Theory Appl. 2016. V. 169. No. 3. P. 1042–1068.
20. *Domahidi A., Chu E., Boyd S.* ECOS: An SOCP solver for embedded systems // 2013 European Control Conference. 2013. P. 3071–3076.
21. *Vahdanjoo M., Zhou K., Sorensen C.A.G.* Route Planning for Agricultural Machines with Multiple Depots: Manure Application Case Study // Agronomy. 2020. V. 10, No. 10. P. 1608.
22. *Conesa-Munoz J., Bengochea-Guevara J., Andujar D., et al.* Route planning for agricultural tasks: A general approach for fleets of autonomous vehicles in site-specific herbicide applications // Comput. Electron. Agric. Elsevier B.V., 2016. V. 127. P. 204–220.
23. *Dierckx P.* An Algorithm for Surface-Fitting with Spline Functions // IMA J. Numer. Anal. 1981. V. 1, No. 3. P. 267–283.
24. *Cressie N.* The origins of kriging // Math. Geol. Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, 1990. V. 22, No. 3. P. 239–252.

25. *Пестерев А.В., Гилимьянов Р.Ф.* Планирование пути для колесного робота // Тр. ИСА РАН. 2006. № 25. С. 205–212.
26. *Diamond S., Boyd S.* CVXPY: A Python-embedded modeling language for convex optimization // J. Mach. Learn. Res. 2016. V. 17, No. 83. P. 1–5.
27. *Agrawal A., Verschueren R., Diamond S. et al.* A rewriting system for convex optimization problems // J. Control Decis. 2018. V. 5, No. 1. P. 42–60.
28. *Junjie P., Dingwei W.* An Ant Colony Optimization Algorithm for Multiple Travelling Salesman Problem // First International Conference on Innovative Computing, Information and Control — Volume I (ICICIC'06). IEEE. 2006. V. 1. P. 210–213.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 26.06.2023

После доработки 30.12.2023

Принята к публикации 20.01.2024

© 2024 г. П.А. ТОЧИЛИН, канд. физ.-мат. наук (tochilin@cs.msu.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
М.В. ПАРШИКОВ (miron232734@gmail.com)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДОВ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ В АЛГОРИТМЕ ПОИСКА СУБОПТИМАЛЬНЫХ ПУТЕЙ RRT*¹

Статья посвящена разработке алгоритма приближенного решения задачи быстрогодействия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений при условии огибания неподвижных препятствий и при выполнении заданных поточечных ограничений на возможные значения управляющих параметров. Основная идея состоит в использовании модификации алгоритма поиска субоптимальных путей при помощи быстрорастущих случайных деревьев (RRT*). Наиболее сложная часть этого алгоритма состоит в поиске оптимальных траекторий для задач перевода системы из одной фиксированной позиции в другую, близкую к ней, без учета фазовых ограничений. Эту подзадачу предлагается решать при помощи методов эллипсоидального исчисления. Такой подход позволяет достаточно эффективно искать субоптимальные траектории как для линейных систем с большой размерностью фазового пространства, так и для систем с нелинейной динамикой. Последовательно разобраны алгоритмы как для линейного, так и для нелинейного случая. Приведены соответствующие примеры вычислений.

Ключевые слова: системы управления, задача быстрогодействия, планирование движения, эллипсоидальное оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231024020041, **EDN:** UHSVVV

1. Введение

В данной работе рассматривается задача перевода управляемого объекта из начальной позиции в заданное целевое множество за наименьшее возможное время, с огибанием препятствий. Такого рода задачи возникают при управлении автономным (беспилотным) движением на плоскости или в пространстве, при разработке алгоритмов управления роботами или манипуляторами. Как правило, точное решение такой задачи является очень трудоем-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00042).

ким с точки зрения вычислений из-за большой размерности вектора фазовых переменных, нелинейной динамики и сложной структуры препятствий. Поэтому в последние десятилетия активно развиваются разнообразные приближенные методы [1, 2], позволяющие строить субоптимальные траектории за малое время (в идеале — в режиме реального времени, что необходимо во многих приложениях).

Один из классов упомянутых методов основывается на использовании «быстрорастущих» случайных графов или, в частном случае, деревьев. Такого рода алгоритмы в англоязычной литературы получили общее обозначение PRM — Probabilistic Roadmap (в случае графов с возможными циклами) и RRT — Rapidly Exploring Random Tree (в случае деревьев). Основная идея здесь состоит в построении последовательности случайных точек фазового пространства и соединении их в граф. Количество таких точек N предполагается очень большим. Среди них содержится начальная позиция. Ребра искомого графа должны быть построены в соответствии с требованием обигания препятствий. На текущий момент накоплен достаточно большой опыт построения таких графов с различными свойствами. Как правило, эти методы различаются эвристиками, используемыми при случайном добавлении каждой новой вершины в граф, а также при соединении новой вершины с ранее добавленными при помощи ребер. Так, в [3] рассмотрены различные модификации методов случайных графов и случайных деревьев. В частности, проанализировано свойство полноты, под которой понимается тот факт, что вероятность попадания некоторого пути на графе из начальной точки в целевое множество стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$.

Следующим шагом является добавление в алгоритмы построения случайных графов критерия качества путей (например, длины пути или времени движения по нему). Соответствующие семейства алгоритмов обозначают через PRM* и RRT*. В [3] для определенных разновидностей метода RRT* доказано свойство асимптотической оптимальности: если существует оптимальная траектория, то вероятность того, что значение функционала качества для построенного субоптимального пути на графе стремится к своему минимальному значению при $N \rightarrow \infty$, равна 1. Таким образом, если задача перевода объекта из начальной позиции в целевое множество разрешима, то метод RRT* даст ее субоптимальное решение, сколь угодно близкое к оптимальному, если число N достаточно велико.

В [3] рассмотрены лишь случаи простейших движений по ломаным в фазовом пространстве, где не учитываются ограничения, связанные с движением по траекториям конкретных дифференциальных уравнений. В многочисленных более поздних работах были предприняты попытки учитывать такого рода ограничения. Получившиеся методы обычно носят название Kinodynamic RRT* (далее будем использовать обозначение KRRT*). Ключевой подзадачей здесь является проблема построения оптимальной (или хотя бы субоптимальной) траектории дифференциального уравнения для перевода объекта из точки в точку на малом отрезке времени (локально).

От метода решения этой подзадачи существенно зависит качество полученных в итоге субоптимальных траекторий уже на большом отрезке времени (глобально).

Один из возможных подходов к решению указанной подзадачи оптимального управления на малом отрезке времени состоит в использовании принципа максимума Л.С. Понтрягина в задаче с фазовыми ограничениями [4, 5].

В [6] предпринята попытка построения при помощи модификации метода RRT* траекторий, являющихся решением системы линейных дифференциальных уравнений. Части таких траекторий получаются в результате решения вспомогательных линейно-квадратичных подзадач оптимального управления с функционалом специального, упрощенного вида. Серьезным недостатком данного подхода является невозможность учитывать поточечные ограничения на управляющие параметры, а также корректно обобщить предложенный подход на случай нелинейной динамики.

В [7] предложена модификация метода RRT*, в которой части искомого пути составлены из «простейших» траекторий исследуемой нелинейной системы дифференциальных уравнений. При этом наиболее сложная часть алгоритма, состоящая в построении оптимальных траекторий при поточечных ограничениях на управления, рассмотрена лишь для трех конкретных примеров.

В [8] предложен способ построения субоптимальных траекторий методом RRT* при помощи перебора по конечному набору постоянных управлений или за счет случайного выбора таких управлений. Предложенный подход может быть эффективен лишь в частных случаях, при малых размерностях вектора управляющих параметров.

Многочисленные работы посвящены также ускорению работы методов типа RRT* за счет изменений алгоритмов добавления новых вершин в графы. Например, в [9] предложен подход, связанный с построением оценок множеств достижимости для исследуемой системы дифференциальных уравнений в малых окрестностях вершин случайного графа. Эти оценки могут быть использованы для отсекаания новых вершин, которые будут заведомо лишними, т.е. не позволят случайному графу значительно продвигаться в сторону целевого множества. К сожалению, авторами работы так и не был предложен конкретный общий метод построения таких оценок, рассмотрены лишь простейшие примеры. При этом задача синтеза управлений на ребрах графа, как и в упомянутой выше работе [8], решена примитивным образом, за счет перебора конечного набора управляющих параметров.

Таким образом, можно утверждать, что разработка модификаций алгоритма RRT*, учитывающих одновременно нелинейную динамику и поточечные ограничения на управления, является актуальной и нерешенной проблемой. В данной работе предложен один возможный подход к решению этой задачи для широкого класса систем. Для этого модифицирован метод RRT* с дополнительным использованием алгоритмов эллипсоидального оценива-

ния [10, 11], которые позволяют эффективно решать локальные подзадачи о переводе системы из точки в точку. Решение такой подзадачи включает: 1) построение совокупности внутренних эллипсоидальных оценок множества разрешимости рассматриваемой управляемой системы; 2) вычисление позиционного управления, решающего подзадачу и полученного за счет «прицеливания» на эллипсоидальные оценки; 3) получение искомого программного управления из построенной позиционной стратегии.

2. Задача управления для линейной системы

В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассмотрим некоторое компактное множество Ω . Рассмотрим движение управляемого объекта, описываемое системой линейных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + f, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, +\infty).$$

Предположим, что начальное состояние $x(0) = x_0 \in \Omega$ фиксировано. Матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а также вектор $f \in \mathbb{R}^n$ предполагаются независимыми от t . Система содержит управляющие параметры $u \in \mathbb{R}^m$, на допустимые значения которых наложены жесткие, поточечные ограничения: $u \in \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P)$. Здесь $\mathcal{E}(p, P)$ – эллипсоид с центром $p \in \mathbb{R}^m$ и матрицей конфигурации $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $P = P^T \geq 0$:

$$\mathcal{E}(p, P) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \langle y, l \rangle \leq \langle l, p \rangle + \sqrt{\langle l, Pl \rangle}, \quad \forall l \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Если $P > 0$, то можно использовать эквивалентное определение

$$\mathcal{E}(p, P) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \langle (y - p, P^{-1}(y - p)) \rangle \leq 1 \right\}.$$

Через $\mathcal{U}$ обозначим класс *допустимых программных управлений*, который содержит все возможные кусочно-непрерывные функции $u = u(t) \in \mathcal{P}$, $t \geq 0$. Через $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}$ обозначим траекторию (1), порожденную некоторым допустимым управлением $u(\cdot)$, выпущенную в начальный момент времени $t_0 = 0$ из начальной позиции x_0 . Будем далее рассматривать только части траекторий $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}$, которые содержатся в области Ω .

Также в области Ω выделим некоторый набор множеств $\mathcal{M}_i$, $i = 1, \dots, M$, – препятствий, которые необходимо учитывать при движении объекта. Предположим, что каждое из этих множеств задается совокупностью неравенств

$$(2) \quad \mathcal{M}_i = \{x \in \Omega : \varphi_{i,j}(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, s_i\},$$

где непрерывные функции $\varphi_{i,j}(x)$, а также натуральные числа s_i заданы. Предполагается, что положение препятствий $\mathcal{M}_i$ не меняется со временем, т.е. функции $\varphi_{i,j}$ не зависят от t . Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{X}_{free} = \overline{\Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^M \mathcal{M}_i \right)}.$$

Предположим, что $x_0 \in \mathcal{X}_{free}$. Зафиксируем также некоторое компактное множество $\mathcal{X}_{goal} \subset \mathcal{X}_{free}$, причем $x_0 \notin \mathcal{X}_{goal}$ и $\mu(\mathcal{X}_{goal}) > 0$, где $\mu(\mathcal{X}_{goal})$ – лебегова мера множества $\mathcal{X}_{free}$.

Теперь можно сформулировать **основные задачи управления**, решаемые в данной работе:

1) Необходимо найти такое $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, для которого найдется $t_1 > 0$ и такая траектория $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}$ дифференциального уравнения (1), для которой

$$x(t_1) \in \mathcal{X}_{goal}, \quad x(\tau) \in \mathcal{X}_{free}, \quad \forall \tau \in [0, t_1].$$

2) Среди управлений и соответствующих траекторий, найденных в предыдущем пункте, необходимо найти такие, для которых величина t_1 будет наименьшей.

Заметим, что множество $\mathcal{X}_{free}$ замкнуто, а значит, в данной постановке задач допускается движение вдоль границ препятствий.

3. Алгоритм построения случайного дерева

Описанные выше задачи управления будем решать приближенно, при помощи модификации алгоритма KRRТ*. Ниже приведена его общая схема. Основной целью алгоритма является построение ориентированного дерева $\Gamma = (V, E)$, где V – множество вершин, E – множество дуг. Каждой вершине $v \in V$ будет сопоставлено минимальное найденное время ее достижения $C(v)$ из начальной точки x_0 , являющейся корнем дерева. Для каждой вершины $v \neq x_0$ через $parent(v)$ обозначим ту вершину, для которой $(parent(v), v) \in E$.

Алгоритм является итерационным, где i – номер итерации, а фиксированное число N – максимальное количество итераций. На каждом шаге алгоритма должны быть построены вспомогательные эллипсоидальные оценки множества разрешимости $\mathcal{E}(w(t), W_k(t))$, $k = 1, \dots, K$. Количество оценок K считается фиксированным. Каждая оценка зависит от вектора параметров $l_k \in \mathbb{R}^n$ и определена при $t \in [T, 0]$, где число $T < 0$ фиксировано. Выбор параметра $T < 0$ здесь обусловлен стационарностью системы (1) и удобством фиксации нулевого конечного момента времени. Для итогового управления и траектории далее будет сделана замена переменной, и в результате эти функции будут определены уже при $t \geq 0$. Формулы для вычисления оценок будут приведены ниже. В приведенном далее алгоритме используются два вспомогательных множества вершин графа $\mathcal{V}_0$ и $\mathcal{V}_1$.

Algorithm 1 Ellipsoidal KRRT*

```
1:  $V := \{x_0\}$ ,  $C(x_0) := 0$ ,  $E := \emptyset$ 
2: формируется совокупность векторов  $l_k$ ,  $l_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|l_k\| = 1$ ,  $k = 1, \dots, K$ 
3: for  $i = 1, \dots, N$  do
4:   генерируется случайная точка  $x^{(i)} \in \mathcal{X}_{free}$ 
5:   строятся эллипсоидальные оценки  $\mathcal{E}(w(t), W_k(t))$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $t \in [T, 0]$ 
6:   формируется множество вершин  $\mathcal{V}_0 = V \cap (\cup_k \cup_t \mathcal{E}(w(t), W_k(t)) \cap \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)}))$ 
7:    $\mathcal{V}_1 := \emptyset$ 
8:   for  $v_j \in \mathcal{V}_0$  do
9:      $t_{\min,j} := \max_k \max\{t \in [T, 0] : v_j \in \mathcal{E}(w(t), W_k(t))\}$ 
10:     $k^* :=$  соответствующий номер эллипсоидальной оценки (максимизатор)
11:    определяется оптимальное управление  $u^*(j, k^*, t)$ ,  $t \in [t_{\min,j}, 0]$ 
12:    строится траектория  $x^*(j, k^*, t)$ ,  $t \in [t_{\min,j}, 0]$ ,  $x^*(j, k^*, t_{\min,j}) = v_j$ 
13:    if  $x^*(j, k^*, t) \in \mathcal{X}_{free}$ ,  $\forall t \in [t_{\min,j}, 0]$  then
14:       $\mathcal{V}_1 := \mathcal{V}_1 \cup \{v_j\}$ 
15:    if  $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$  then
16:       $j^* := \arg \min\{C(v_j) - t_{\min,j} : v_j \in \mathcal{V}_1\}$ 
17:       $V := V \cup \{x^{(i)}\}$ ,  $E := E \cup \{(v_{j^*}, x^{(i)})\}$ 
18:       $C(x^{(i)}) := C(v_{j^*}) - t_{\min,j^*}$ 
19:      for  $v_j \in \mathcal{V}_1$  do
20:        if  $\Delta_j = C(x^{(i)}) - t_{\min,j} - C(v_j) < 0$  then
21:          для каждой вершины  $v'$  поддерева с корнем  $v_j$   $C(v') := C(v') + \Delta_j$ 
22:           $E := E \setminus \{(parent(v_j), v_j)\}$ 
23:           $E := E \cup \{(x^{(i)}, v_j)\}$ 
```

В строке 4 координаты каждой новой точки $x^{(i)}$ являются случайными, соответствующими равномерному распределению на множестве Ω . В строке 6 алгоритма производится отбор вершин v_j , удовлетворяющих следующему условию:

$$(3) \quad v_j \in \left(\bigcup_{k=1}^K \bigcup_{t \in [T, 0]} \mathcal{E}(w(t), W_k(t)) \right) \cap \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)}).$$

Здесь $r_i > 0$ – параметр, ограничивающий перебор вершин графа и отвечающий за уменьшение итоговой сложности вычислений. Подробнее о нем будет сказано далее.

При построении управления и траектории в строках 11–12 используется алгоритм «прицеливания» на конкретную эллипсоидальную трубку, который будет описан ниже. Именно из-за этого итоговые функции $x^*(\cdot)$ и $u^*(\cdot)$ зависят от номера используемой эллипсоидальной оценки. Функция $x^*(j, k^*, t)$, $t \in [t_{\min,j}, 0]$, является решением задачи Коши для системы (1), после подстановки управления $u^*(j, k^*, t)$, с краевым условием $x^*(j, k^*, t_{\min,j}) = v_j$.

Инструкции основного алгоритма в строках 19–23 соответствуют известному (см. [3]) из описания алгоритма RRT* правилу «пересвязывания» вершин дерева. Благодаря этим действиям в алгоритме RRT* достигается свойство асимптотической оптимальности.

В указанный выше алгоритм может быть добавлено дополнительное условие выхода из внешнего цикла при первом достижении целевого множества, т.е. если на очередной итерации с номером i выполнено условие $x^{(i)} \in \mathcal{X}_{goal}$. Это условие необходимо при решении первой из двух описанных выше основных задач управления.

Замечание 1. Условие $\mu(\mathcal{X}_{goal}) > 0$ существенно для предлагаемого алгоритма. В случае, когда целевое множество является одноточечным ($\mathcal{X}_{goal} = \{x_{goal}\}$), алгоритм может быть модифицирован за счет добавления инструкций для построения эллипсоидальных оценок множества разрешимости, выпущенных из целевой точки, и для последующих действий, аналогичных строкам 6–18 с заменой $x^{(i)}$ на x_{goal} .

Для простоты изложения в приведенной выше схеме алгоритма для ребер графа не указана сопоставленная с ними дополнительная информация. Однако для решения основных задач управления понадобится дополнительно запоминать для каждого ребра программное управление и соответствующую часть траектории, которые были подсчитаны в строках 11–12 алгоритма для соответствующих значений индексов i, j . Более того, в процедуре пересвязывания графа необходимо делать дополнительную замену переменной t для того, чтобы проходить ранее построенную траекторию в обратном направлении. При этом существенно, что исходная система (1) является стационарной.

После построения дерева Γ можно решить сформулированные выше основные задачи управления:

— Если $\exists v_j \in V, v_j \in \mathcal{X}_{goal}$, то задача 1 разрешима.

— Если выполнено условие из предыдущего пункта, то оценка времени бысродействия может быть найдена следующим образом:

$$(4) \quad t_1^* = \min \{C(v_j) : v_j \in V, v_j \in \mathcal{X}_{goal}\}.$$

Пусть v^* – минимизатор в (4).

— Оптимальное управление $u^*(t)$ теперь может быть составлено из частей, сопоставленных отдельным ребрам графа. При этом нужно двигаться из вершины v^* к корню дерева, по дугам

$$(parent(v^*), v^*), (parent(parent(v^*)), parent(v^*)), \dots, (x_0, \dots),$$

учитывая обратный ход времени при объединении частей функции $u^*(t)$.

4. Эллипсоидальные оценки и закон управления

Основное отличие алгоритма, применяемого в данной работе, от известных вариантов алгоритма KRRT* состоит в использовании внутренних оценок

множеств разрешимости [12] системы (1), выпущенных из каждой очередной случайно подобранной точки $x^* \in \mathcal{X}_{free}$ (в схеме алгоритма это точки $x^{(i)}$).

Для фиксированного множества $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$, для некоторых $t \leq t_1$ множество разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ системы (1) состоит из всех возможных точек $x_0 \in \Omega$, для каждой из которых существует управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, для которого $x(t_1, t, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1$. В данной работе представляют интерес множества разрешимости из одноточечного целевого множества с нулевым конечным моментом времени: $\mathcal{W}(t, 0, x^*)$, $x^* \in \mathbb{R}^n$. Задача построения подобных множеств даже для линейной стационарной системы является нетривиальной. Одним из наиболее эффективных подходов является использование эллипсоидальных оценок множеств разрешимости: внешних или внутренних, в зависимости от конкретной решаемой задачи. Здесь основной целью является поиск управления, а для его построения удобно использовать внутренние оценки.

При заданном $x^* \in \mathbb{R}^n$, используя результаты из [10], определим семейство эллипсоидальных оценок $\mathcal{E}(w(t), W(t))$, $t \leq 0$, задаваемых следующими дифференциальными уравнениями:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{w}(t) = Aw + Bp + f \\ w(0) = x^*, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{W}(t) = AW(t) + W(t)A^T - W^{1/2}(t)S(t)\mathbf{P}^{1/2} - \mathbf{P}^{1/2}S^T(t)W^{1/2}(t) \\ W(0) = \mathbb{O}_{n \times n}. \end{cases}$$

Здесь $\mathbb{O}_{n \times n}$ – нулевая матрица размера $n \times n$, $\mathbf{P} = BPB^T$, а $S(t)$ – ортогональная матрица, непрерывно зависящая от t , для которой

$$(7) \quad S(t)\mathbf{P}^{1/2}l(t) = \lambda(t)\mathbf{P}^{1/2}l(0), \quad S(0) = \mathbb{I}_{n \times n}, \quad \lambda(t) = \sqrt{\frac{\langle l(t), \mathbf{P}l(t) \rangle}{\langle l(0), \mathbf{P}l(0) \rangle}}.$$

Здесь $\mathbb{I}_{n \times n}$ – единичная матрица размера $n \times n$. Выбор параметров $S(t)$ и $\lambda(t)$ обусловлен требованием касания эллипсоидальной оценки и множества разрешимости в направлении, заданном вектором $l(t)$.

Каждая эллипсоидальная оценка зависит от некоторой кривой $l(t)$, являющейся решением следующей вспомогательной задачи Коши:

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{l} = -A^T l \\ l(0) = l^* \end{cases}$$

для произвольного вектора $l^* \in \mathbb{R}^n$: $\|l^*\| = 1$. Для того, чтобы подчеркнуть такую зависимость, будем использовать обозначение $\mathcal{E}(w(t), W(t, l^*))$. Перебором различных значений l^* могут быть получены разные оценки (в основном алгоритме такие векторы $l^* = l_k$ для построения разных оценок формируются в строке 2; при этом $W_k(t) = W(t, l_k)$). Будем далее считать, что векторы l^* выбираются таким образом, что $\langle l^*, \mathbf{P}l^* \rangle \neq 0$, что необходимо для корректности формул (7). Справедливо следующее утверждение, в общем случае обоснованное в [10]:

Теорема 1. Для любого $t \leq 0$

$$\mathcal{W}(t, 0, x^*) = \bigcup \{ \mathcal{E}(w(t), W(t, l^*)) : l^* \in \mathbb{R}^n, \|l^*\| = 1 \}.$$

В строке 6 основного алгоритма необходимо отбирать те вершины графа, которые удовлетворяют условию

$$v_j \in \bigcup_{k=1, \dots, K} \bigcup_{t \in [T, 0]} \mathcal{E}(w(t), W_k(t)).$$

Используя определение эллипсоида, это условие можно переписать в виде вспомогательной оптимизационной задачи:

$$\min_{k=1, \dots, K} \min_{t \in [T, 0]} \max \left\{ \langle v_j - w(t), l \rangle - \sqrt{\langle l, W_k(t) l \rangle} : l \in \mathbb{R}^n, \|l\| = 1 \right\} \leq 0.$$

Теперь можно построить *позиционное управление*, переводящее траекторию системы (1) из позиции (t, x) , $t < 0$, в позицию $(0, x^*)$. Оно может быть найдено за счет «прицеливания» [12] на один из построенных эллипсоидов $\mathcal{E}(w(t), W(t))$:

$$(9) \quad u^*(t, x) = \begin{cases} p - \frac{PB^T l^0(t)}{\sqrt{\langle l^0(t), P l^0(t) \rangle}}, & B^T l^0(t) \neq 0 \\ \mathcal{E}(p, P) & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $l^0(t)$ – максимизатор в выражении для полурасстояния

$$h_+(t, x) = \max \left\{ \langle l, e^{-tA}(x - w(t)) \rangle - \sqrt{\langle l, e^{-tA}W(t)e^{-tA^T}l \rangle} : \|l\| \leq 1 \right\}.$$

При $x \notin \text{int } \mathcal{E}(w(t), W(t))$ вектор $l^0(t)$ может быть найден так же, как

$$l^0(t) = 2\lambda(W(t) + \lambda E)^{-1}(x - w(t)), \quad E = e^{A^T t} e^{At},$$

где λ – единственный неотрицательный корень уравнения

$$\langle (W(t) + \lambda E)^{-1}(x - w(t)), W(t)(W(t) + \lambda E)^{-1}(x - w(t)) \rangle = 1.$$

Если же $x \in \text{int } \mathcal{E}(w(t), W(t))$, то $l^0(t) = 0$.

Заметим, что в основном алгоритме (строки 9–11) если очередная точка $x^{(i)}$ не совпадает ни с одной из ранее построенных вершин графа v_j (вероятность этого события равна 1), то значение $t_{\min, j} < 0$ для каждого соответствующего значения j выбирается таким образом, что $v_j \in \partial \mathcal{E}(w(t_{\min, j}), W_{k^*}(t_{\min, j}))$. То есть в начальный момент времени точка лежит на границе эллипсоида. Используемый метод экстремального прицеливания на эллипсоид обладает тем свойством (см. подробнее [12]), что траектория замкнутой системы, начинающаяся на границе эллипсоида, останется на ней

до конечного момента времени. Таким образом, особенно важным в данной работе является тот случай, когда точка x лежит на границе эллипсоида $\mathcal{E}(w(t), W(t))$ при любых $t \leq 0$. При этом

$$x = w(t) + \frac{W(t)s}{\sqrt{\langle s, W(t)s \rangle}}, \quad s = W^{-1}(t)(x - w(t)) \|W^{-1}(t)(x - w(t))\|^{-1}.$$

Можно найти соответствующее значение вектора $l^0(t) = e^{tA^T} s$, не решая указанную выше вспомогательную задачу оптимизации или уравнение относительно λ .

Подытожим свойства построенного позиционного управления в следующем утверждении

Теорема 2. Пусть для некоторых значений j, k имеется вершина $v_j \in \mathcal{E}(w(t_{\min,j}), W_k(t_{\min,j}))$. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения $\dot{x} \in Ax + Bu^(t, x) + f$, $x(t_{\min,j}) = v_j$, $t \in [t_{\min,j}, 0]$. Эта задача имеет решения, причем для любого такого решения $x(t) = x(t, t_{\min,j}, v_j)|_{u^*(\cdot)}$ выполнено условие $x(0) = x^*$.*

В основном алгоритме для каждой новой случайной точки $x^* = x^{(i)}$ необходимо построить внутренние эллипсоидальные оценки множеств разрешимости и при помощи их определить те ранее построенные вершины графа Γ , которые можно соединить с новой вершиной (строка 6 алгоритма). Пусть для x^* построены эллипсоидальные оценки $\mathcal{E}(w(t), W_k(t))$, $k = 1, \dots, K$, $t \in [T, 0]$. На данной итерации работы алгоритма должны быть обработаны только те вершины $v_j \in V$, для которых выполнено условие (3). В этой формуле используется вспомогательный параметр (см. [7])

$$(10) \quad r_i = \min \left\{ \gamma \left(\frac{\ln(\kappa)}{\kappa} \right)^{1/n}, \eta \right\}, \quad \gamma > (2(1 + 1/n))^{1/n} \left(\frac{\mu(\mathcal{X}_{free})}{\zeta_n} \right)^{1/n},$$

где ζ_n – объем единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\mu(\mathcal{X}_{free})$ – лебегова мера множества $\mathcal{X}_{free}$, $\kappa = |V|$ – общее количество ранее добавленных (до i -й итерации) вершин графа. Постоянная $\eta > 0$ может быть взята произвольным образом; эта величина отвечает за уменьшение сложности вычислений на первых шагах работы алгоритма (при малых κ). Если дополнительно предположить, что выполнено условие

$$\exists \delta > 0 : \quad \mathbb{B}_\delta(x^*) \subseteq \bigcup_{t \in [T, 0]} \bigcup_{k=1}^K \mathcal{E}(w(t), W_k(t)),$$

то согласно [3] при указанном выше выборе r_i представленный алгоритм обладает свойством асимптотической оптимальности.

Для каждой отобранной согласно (3) вершины v_j можно определить наименьшее по абсолютной величине время $t_{\min,j}$ перехода из v_j в точку $x^{(i)}$, а также соответствующий номер эллипсоидальной оценки k^* : $v_j \in$

$\in \mathcal{E}(w(t_{\min,j}), W_{k^*}(t_{\min,j}))$. Далее необходимо построить управление. Формулу (9) нельзя непосредственно использовать в основном алгоритме, так как там речь идет о программном управлении (строка 11 алгоритма), а не о позиционном. Переход от позиционного управления к программному всегда можно выполнить за счет решения вспомогательной задачи Коши

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in Ax(t) + Bu^*(t, x) + f \\ x(t_{\min,j}) = v_j, \end{cases}$$

$$u^*(t, x) = \begin{cases} p - \frac{PB^T l^0(t)}{\sqrt{\langle l^0(t), \mathbf{P} l^0(t) \rangle}}, & B^T l^0(t) \neq 0 \\ \mathcal{E}(p, P) & \text{иначе,} \end{cases}$$

и последующего выделения однозначного селектора из многозначного отображения $u^*(t, x^*(t))$. Здесь $x^*(t)$ – решение задачи (11).

Для каждой построенной траектории $x^*(t)$, $t \in [t_{\min,j}, 0]$ далее должна быть произведена проверка выполнения следующего условия (строка 13 алгоритма): $x^*(t) \in \mathcal{X}_{free}$, $\forall t \in [t_{\min,j}, 0]$. Согласно (2) достаточно проверить выполнение неравенства

$$\min_{t \in [t_{\min,j}, 0]} \min_{i=1, \dots, M} \max_{r=1, \dots, s_i} \varphi_{i,r}(x(t)) \geq 0.$$

Если это условие не выполнено, то траектория отбраковывается алгоритмом. В противном случае она может быть использована для построения ребра, соединяющего новую вершину $x^* = x^{(i)}$ графа Γ со старой вершиной v_j . Если найдено несколько подходящих вершин v_j при разных j , то выбирается та из них (с номером j^*), для которой величина $t_{\min,j}$ максимальна.

Замечание 2. Согласно (6) матрицы конфигурации эллипсоидов $W(t)$ не зависят от конкретной точки x^* , из которой необходимо строить множества разрешимости на каждой итерации работы алгоритма. Таким образом, матрицы $W(t)$, $t \in [T, 0]$, для разных l^* могут быть подсчитаны заранее, до начала вычислений в основном цикле алгоритма. Аналогично, из (5) видно, что для центров эллипсоидов справедливо соотношение

$$w(t) = \tilde{w}(t) + w^*(t), \quad \tilde{w}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} (Bp + f) d\tau, \quad w^*(t) = e^{At} x^*,$$

а значит, функция $\tilde{w}(t)$ может быть подсчитана заранее. Внутри основного цикла работы алгоритма нужно лишь рассчитывать функции $w^*(t)$ и суммировать их с $\tilde{w}(t)$. Это позволяет упростить вычисления.

Замечание 3. При реализации алгоритма Ellipsoidal KRRT* для конкретной системы (1) важно подобрать наиболее подходящее значение параметра $T < 0$. Если окажется, что абсолютная величина T слишком мала, то

это приведет к созданию искусственного ограничения при формировании новых ветвей случайного дерева, а потому найденная в итоге траектория может быть далеко не оптимальной. Если же абсолютная величина T слишком велика, то это может привести к дополнительным, лишним вычислениям эллипсоидальных оценок, что отрицательно скажется на скорости работы алгоритма. Для выбора наиболее адекватного значения параметра T можно поставить серию экспериментов и проанализировать статистику по реализовавшимся в них значениям величин $t_{\min,j}$.

5. Пример (линейная динамика)

Рассмотрим пример построения субоптимальной траектории в задаче быстрого перевода траектории из начальной позиции в целевое множество, а также сравним полученные результаты с алгоритмом, рассмотренным в [6].

Пусть $x \in \mathbb{R}^2$ и динамика системы (1) задается следующими параметрами:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На управляющие параметры наложены ограничения: $u \in \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P)$, где

$$p = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что эти ограничения учитываются в обоих алгоритмах. В (10) положим $\eta = 4$. Зададим вспомогательную матрицу $R = \mathbb{I}_{2 \times 2}$, необходимую для расчета функционала в алгоритме из [6]. Зафиксируем $T = -2$. Такой выбор обусловлен значениями $t_{\min,j}$, полученными Ellipsoidal KRRT* при разных T в серии экспериментов:

	Номер теста									
	1		2		3		4		5	
T	t_{avg}	$t_{\min}$	t_{avg}	$t_{\min}$	t_{avg}	$t_{\min}$	t_{avg}	$t_{\min}$	t_{avg}	$t_{\min}$
-0,1	-0,05	-0,1	-0,06	-0,1	-0,05	-0,1	-0,05	-0,1	-0,05	-0,1
-0,5	-0,11	-0,46	-0,13	-0,49	-0,13	-0,47	-0,12	-0,49	-0,13	-0,46
-1	-0,11	-0,46	-0,14	-0,65	-0,15	-0,81	-0,14	-0,95	-0,13	-0,71
-2	-0,11	-0,46	-0,14	-0,65	-0,15	-1,17	-0,15	-0,97	-0,14	-0,71
-5	-0,14	-0,46	-0,16	-0,66	-0,22	-1,18	-0,18	-1,01	-0,16	-0,71

Здесь $t_{avg} = \sum_{j=1}^{|V|} t_{\min,j}/|V|$, $t_{\min} = \min_j t_{\min,j}$. Видно, что значения $t_{\min} < -2$

в экспериментах не встречаются, а потому брать величину $T < -2$ нет смысла. Значение -2 взято с небольшим запасом относительно наименьшего из $t_{\min}$.

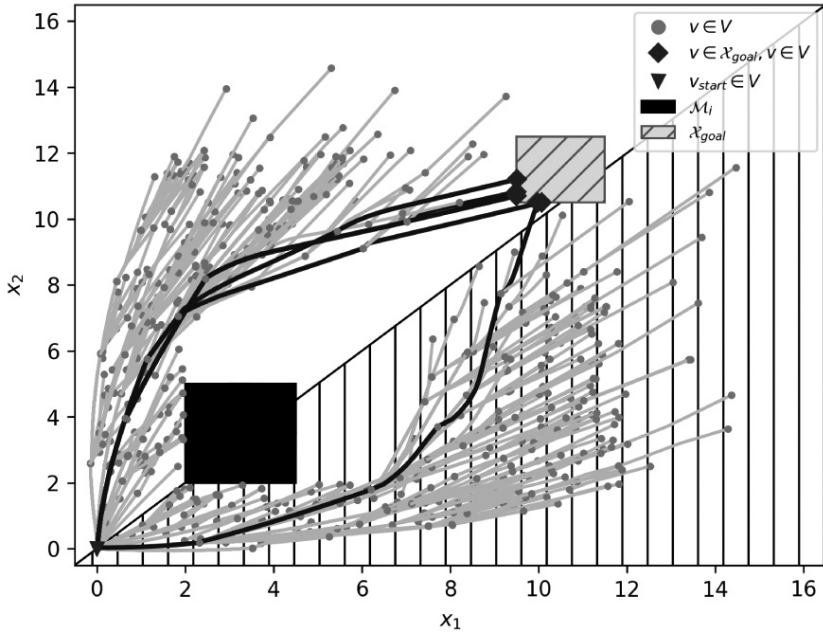


Рис. 1. Ellipsoidal KRRT*.

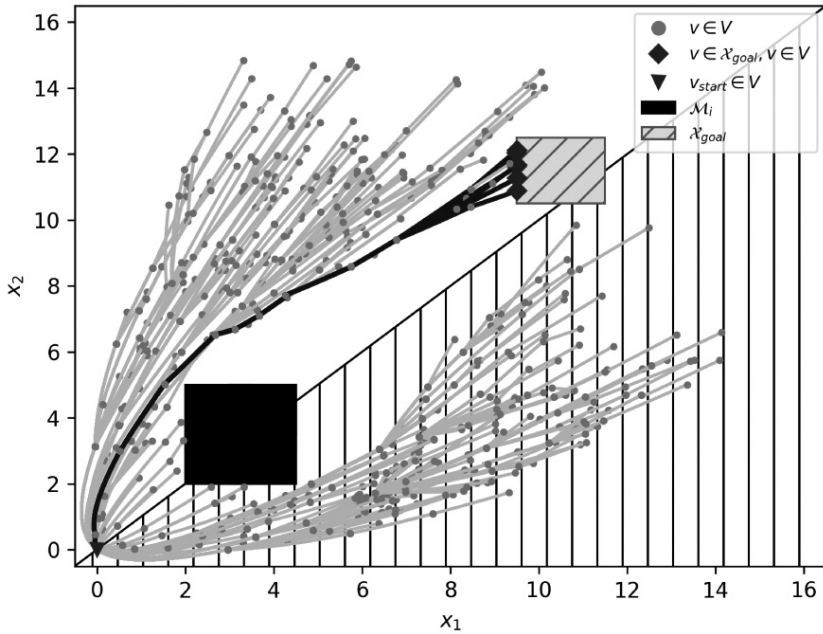


Рис. 2. KRRT*.

На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты работы алгоритмов Ellipsoidal KRRT* и KRRT* соответственно, которые были получены следующим образом: алгоритм KRRT* (из [6]) в качестве случайных точек использо-

вал ту же последовательность точек $Samples = \{x^{(i)}\}_{i=1}^N$, $N = 2728$, которая потребовалась алгоритму Ellipsoidal KRRT* для построения дерева $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$: $|V_1| = 500$.

Заметим, что алгоритм KRRT* в этом случае построил дерево $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$: $|V_2| = 469$. Уменьшение количества вершин связано с тем, что часть пробных ребер была отбракована из-за нарушений ограничений на управления или из-за фазовых ограничений. Также отметим, что на рис. 1 через заштрихованную область проходит субоптимальная траектория, которую не смог найти алгоритм KRRT*.

При заданном целевом множестве

$$X_{goal} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 9,5 < x_1 < 11,5, 10,5 < x_2 < 12,5\}$$

получились следующие значения функционалов:

$$\begin{aligned} t_1^* &= \min\{C(v) : v \in V_1, v \in X_{goal}\} = 0,26, \\ t_2^* &= \min\{C(v) : v \in V_2, v \in X_{goal}\} = 0,47. \end{aligned}$$

6. Нелинейная динамика

Применим теперь описанный выше метод построения субоптимальной траектории линейной системы для решения аналогичных задач в случае нелинейной динамики. Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(12) \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, +\infty).$$

Как и ранее, полагаем, что начальное состояние $x(0) = x_0 \in \Omega$ фиксировано, $u \in \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P) \subset \mathbb{R}^m$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми при $x \in \Omega$.

Алгоритм Ellipsoidal KRRT*, решающий сформулированные выше задачи управления, остается схожим по форме. Отметим лишь отличия, связанные с нелинейной динамикой.

Для построения оценок множеств разрешимости нелинейной системы в окрестности каждой очередной новой вершины $x^{(i)}$ графа Γ воспользуемся линеаризацией уравнений (12). Пусть $f_s(x)$ – s -я компонента вектора $f(x)$, $g_s(x)$ – s -я строка матрицы $g(x)$, $s = 1, \dots, n$, p_r – r -я компонента вектора p , $r = 1, \dots, m$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f_s(x) + g_s(x)u = f_s(x^{(i)}) + \left\langle \frac{\partial f_s}{\partial x}(x^{(i)}), x - x^{(i)} \right\rangle + g_s(x^{(i)})u + \\ &+ \sum_{r=1}^m \left\langle \frac{\partial g_{sr}}{\partial x}(x^{(i)}), (x - x^{(i)}) \right\rangle p_r + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \left\langle x - x^{(i)}, Q^{g, (sr)}(\zeta_{sr})(x - x^{(i)}) \right\rangle p_r + \\ &+ \sum_{r=1}^m \left\langle \frac{\partial g_{sr}}{\partial x}(\eta_{sr}), (x - x^{(i)}) \right\rangle (u_r - p_r) + \frac{1}{2} \left\langle x - x^{(i)}, Q^{f, (s)}(\xi_s)(x - x^{(i)}) \right\rangle, \end{aligned}$$

где $Q^{g,(sr)}(\zeta_{sr})$ – матрица из вторых производных функции $g_{sr}(x)$, подсчитанная в некоторой точке $\zeta_{sr} \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)})$, $Q^{f,(s)}(\xi_s)$ – матрица из вторых производных функции $f_s(x)$, подсчитанная в точке $\xi_s \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)})$. Радиус шара $\mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)})$ по-прежнему определяется из формул (10). Также здесь использованы некоторые точки $\eta_{sr} \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)})$. Заметим, что шар $\mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)})$ (см. (3)) здесь используется в качестве допустимой области изменения переменной x . Это позволяет оценить погрешность линеаризации:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \left\langle x - x^{(i)}, Q^{g,(sr)}(\zeta_{sr})(x - x^{(i)}) \right\rangle p_r + \right. \\ & \quad + \sum_{r=1}^m \left\langle \frac{\partial g_{sr}}{\partial x}(\eta_{sr}), (x - x^{(i)}) \right\rangle (u_r - p_r) + \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left\langle x - x^{(i)}, Q^{f,(s)}(\xi_s)(x - x^{(i)}) \right\rangle \right| \leq R_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13) \quad R_s = R_s(x^{(i)}) = & \frac{r_i^2}{2} \sum_{r=1}^m \max \left\{ \lambda_{\max}(Q^{g,(sr)}(\zeta)) : \zeta \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)}) \right\} |p_r| + \\ & + \frac{r_i^2}{2} \max \left\{ \lambda_{\max}(Q^{f,(s)}(\xi)) : \xi \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)}) \right\} + \\ & + r_i \sum_{r=1}^m \max \left\{ \left\| \frac{\partial g_{sr}}{\partial x}(\eta) \right\| : \eta \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)}) \right\} \max \{|u_r - p_r| : u \in \mathcal{P}\}. \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_{\max}(Q)$ – максимальное по модулю собственное значение симметричной матрицы Q . В итоге линеаризованную систему можно записать в следующем виде:

$$(14) \quad \dot{x} = A(x^{(i)})x + B(x^{(i)})u + h(x^{(i)}) + v, \quad x \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)}),$$

где

$$\begin{aligned} A(x^{(i)}) = & \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x^{(i)}) + \sum_{r=1}^m \frac{\partial g_{1r}}{\partial x}(x^{(i)})p_r \right)^T \\ \dots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x}(x^{(i)}) + \sum_{r=1}^m \frac{\partial g_{nr}}{\partial x}(x^{(i)})p_r \right)^T \end{pmatrix}, \quad B(x^{(i)}) = \begin{pmatrix} g_1(x^{(i)}) \\ \dots \\ g_n(x^{(i)}) \end{pmatrix}, \\ h(x^{(i)}) = & \begin{pmatrix} f_1(x^{(i)}) - \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^{(i)}), x^{(i)} \right\rangle - \sum_{r=1}^m \left\langle \frac{\partial g_{1r}}{\partial x}(x^{(i)}), x^{(i)} \right\rangle p_r \\ \dots \\ f_n(x^{(i)}) - \left\langle \frac{\partial f_n}{\partial x}(x^{(i)}), x^{(i)} \right\rangle - \sum_{r=1}^m \left\langle \frac{\partial g_{nr}}{\partial x}(x^{(i)}), x^{(i)} \right\rangle p_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Погрешность линеаризации v будем далее интерпретировать как неопределенность $v(t)$, на возможные значения которой наложены поточечные ограничения:

$$(15) \quad v(t) \in \mathbb{B}_{\rho(x^{(i)})}(0), \quad \rho(x^{(i)}) = \sqrt{R_1^2(x^{(i)}) + \dots + R_n^2(x^{(i)})}.$$

Для любого управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и любой измеримой ограниченной функции $v(t)$, удовлетворяющей указанному выше ограничению, через $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot), v(\cdot)}$ обозначим соответствующую траекторию системы (14), выпущенную из начальной позиции x_0 в момент времени 0. Заметим, что любая траектория $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}$ системы (12) является также траекторией (14) при некоторой допустимой помехе $v(\cdot)$, если только $x(\tau, 0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)})$, $\forall \tau \in [t, 0]$. Обратное утверждение неверно.

Замечание 4. Поскольку в ходе выполнения алгоритма Ellipsoidal KRRT* необходимо многократно производить линеаризацию системы (12) в окрестности каждой очередной точки $x^{(i)}$, то для ускорения вычислений имеет смысл оценить погрешность линеаризации более грубо, а именно в формуле (13) заменить максимумы по $\mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)})$ на максимумы по множеству Ω . Тогда достаточно будет подсчитать их единожды.

Из-за появления в уравнениях погрешности линеаризации необходимо модифицировать формулы для вычисления эллипсоидальных оценок множеств разрешимости, использованные выше для случая линейной динамики. Для этого можно воспользоваться результатами из [11]. А именно, теперь эллипсоиды $\mathcal{E}(w(t), W(t))$, $t \leq 0$, задаются следующими уравнениями:

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{w}(t) = A(x^{(i)})w + B(x^{(i)})p + h(x^{(i)}) \\ w(0) = x^{(i)}, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{W} = AW + WA^T - W^{1/2}SP^{1/2} - P^{1/2}S^TW^{1/2} + \pi(t)W + \frac{\rho^2(x^{(i)})}{\pi(t)}\mathbb{I}_{n \times n} \\ W(0) = \varepsilon_i^2\mathbb{I}_{n \times n}. \end{cases}$$

Здесь $W = W(t)$, $A = A(x^{(i)})$, $B = B(x^{(i)})$, $P = BPB^T$, $S = S(t)$ – ортогональная матрица, для которой

$$SP^{1/2}l(t) = \lambda(t)P^{1/2}l(0), \quad S(0) = \mathbb{I}_{n \times n},$$

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{\langle l(t), Pl(t) \rangle}{\langle l(0), Pl(0) \rangle}}, \quad \pi(t) = \frac{\rho(x^{(i)})\|l(t)\|}{\sqrt{\langle l(t), W(t)l(t) \rangle}}.$$

Как и в случае с линейной динамикой, каждая эллипсоидальная оценка зависит от некоторой кривой $l(t)$, являющейся решением задачи Коши (8) для произвольного $l^* \in \mathbb{R}^n$: $\|l^*\| = 1$. Функции $S(t)$ и $\pi(t)$ непрерывно зависят от t .

Заметим, что из-за неопределенности $v(t)$ теперь уже нельзя говорить о задаче перевода траектории системы (14) точно в точку $x^{(i)}$. Можно рассмотреть лишь некоторую малую окрестность этой точки радиуса $\varepsilon_i > 0$, в

которую и нужно перевести траекторию системы, несмотря на неопределенность $v(\cdot)$. Конечно, должно быть выполнено неравенство $\varepsilon_i < r_i$.

Некоторые (или даже все) из эллипсоидальных оценок, вычисляемых по формулам (16), (17), могут в какой-то момент времени $t = \tilde{t} < 0$ вырождаться. То есть может оказаться, что $W(\tilde{t}) \not\geq 0$. В этом случае процесс вычисления такой оценки следует прекратить, а в основном алгоритме нужно учесть, что эта оценка построена лишь при $t \in [\tilde{t}, 0]$, а не на всем отрезке $[T, 0]$.

Соответствующее позиционное управление, переводящее траектории системы (14) из позиции (t, x) , $t < 0$, в ε_i -окрестность точки $x^{(i)}$ в момент времени $t = 0$, может быть найдено за счет «прицеливания» на один из построенных эллипсоидов $\mathcal{E}(w(t), W(t))$ аналогично (9). Основные свойства такого позиционного управления указаны в следующем утверждении

Теорема 3. Пусть для некоторых значений индексов j, k имеется вершина $v_j \in \mathcal{E}(w(t_{\min,j}), W_k(t_{\min,j}))$, причем $W_k(t) > 0$, $\forall t \in [t_{\min,j}, 0]$. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения $\dot{x} \in A(x^{(i)})x + B(x^{(i)})u^(t, x) + h(x^{(i)}) + v(t)$, $x(t_{\min,j}) = v_j$, $t \in [t_{\min,j}, 0]$. Для любой допустимой помехи $v(\cdot)$ (т.е. любой измеримой функции, удовлетворяющей ограничениям (15)), существует решение указанной задачи Коши $x(t) = x(t, t_{\min,j}, v_j)|_{u^*(\cdot), v(\cdot)}$, причем для него выполнено условие $x(0) \in \mathbb{B}_{\varepsilon_i}(x^{(i)})$. В частности, среди построенных таким образом траекторий содержится и функция $x^*(t)$, являющаяся решением задачи Коши для дифференциального включения $\dot{x} \in f(x) + g(x)u^*(t, x)$, $x(t_{\min,j}) = v_j$, $t \in [t_{\min,j}, 0]$.*

Поскольку в случае нелинейной динамики линеаризованная система (14) адекватно приближает нелинейную систему (12) лишь при $x \in \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)})$, то в алгоритме следует изменить (по сравнению со случаем с линейной динамикой) условия для отсеивания лишних траекторий (строка 13 основного алгоритма):

$$x^*(j, k^*, t) \in \mathcal{X}_{free} \cap \mathbb{B}_{r_i}(x^{(i)}), \quad \forall t \in [t_{\min,j}, 0].$$

Для получения оптимальной пары $(x(t), u(t))$, для которой $x(t_{\min,j}) = v_j$, $x(0) \in \mathbb{B}_{\varepsilon_i}(x^{(i)})$, необходимо модифицировать соотношения (11), использованные для случая линейной динамики:

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in f(x(t)) + g(x(t))u^*(t, x) \\ u^*(t, x) = \begin{cases} p - \frac{PB^T l^0(t)}{\sqrt{\langle l^0(t), \mathbf{P} l^0(t) \rangle}}, & B^T l^0(t) \neq 0 \\ \mathcal{E}(p, P) & \text{иначе,} \end{cases} & l^0(t) = e^{tA^T} s(t), \\ x(t_{\min,j}) = v_j, \end{cases}$$

$$s(t) = \begin{cases} \operatorname{argmax} \{ \langle x(t) - w(t), s \rangle - \sqrt{\langle s, W_{j^*}(t)s \rangle} : \|s\| \leq 1 \}, & x(t) \notin \operatorname{int} \mathcal{E}(w(t), W_{j^*}(t)) \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

То есть построенное позиционное управление должно быть поставлено в исходную нелинейную систему, а не в ее линеаризованный аналог, для последующего получения программного управления.

Заметим, что траектория $x(t)$, стартуя с границы эллипсоида $\mathcal{E}(w(t_{\min,j}), W_{k^*}(t_{\min,j}))$, при $t > t_{\min,j}$ может попасть внутрь соответствующего эллипсоида из-за «неоптимальности» неопределенности $v(\cdot)$. Более того, может оказаться, что итоговая траектория попадет в точку $x^{(i)}$ при некотором $t^* < 0$. В этом случае следует завершить вычисление траектории $x(t)$, а в качестве оценки времени быстрогодействия для ребра дерева использовать величину $(t^* - t_{\min,j^*})$, а не $-t_{\min,j^*}$. Как уже было сказано выше, возможна и другая ситуация, когда траектория системы в момент времени $t = 0$ попадет в точку $\tilde{x} \in \mathbb{B}_{\varepsilon_i}(x^{(i)})$, $\tilde{x} \neq x^{(i)}$. Это также следует учесть в основном алгоритме: во множество вершин графа V должна быть добавлена не точка $x^{(i)}$, а $\tilde{x}$ (см. строки 17–23 основного алгоритма). Здесь, однако, возникает сложность с той частью базового алгоритма RRT*, в которой производится «пересвязывание» ранее построенной части графа (см. строки 19–23). Поскольку теперь найденное управление не гарантирует попадание траектории в точку $x^{(i)}$, то либо нужно считать $\varepsilon_i > 0$ достаточно малым и за счет этого отождествлять все точки из ε_i -окрестности $x^{(i)}$, либо нужно в принципе отказаться от «пересвязывания». В последнем случае, однако, качество работы алгоритма может ухудшиться.

7. Пример (нелинейная динамика)

Рассмотрим математическую модель плоского движения автономного аппарата (робота), приводимого в движение двумя роторами. Уравнения движения имеют следующий вид:

$$(19) \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\xi_1\dot{x}_1 + (u_1 + u_2)\cos(\varphi) \\ m\ddot{x}_2 = -\xi_1\dot{x}_2 + (u_1 + u_2)\sin(\varphi) \\ J\ddot{\varphi} = -\xi_2\dot{\varphi} + (u_1 - u_2)r. \end{cases}$$

Здесь (x_1, x_2) – положение центра масс аппарата, φ – угол, задающий его ориентацию на плоскости, m – масса, J – момент инерции, ξ_1 и ξ_2 – коэффициенты вязкого трения, r – радиус аппарата. Через u_1 и u_2 здесь обозначены силы тяги от двух роторов. На управляющие параметры наложены следующие ограничения: $u_i \in [0, u_{\max}]$, $i = 1, 2$, где величина $u_{\max}$ задана.

Приведем систему (19) к следующему виду:

$$(20) \quad \dot{x} = Ax + g(x)u.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^6$, $x_3 = \varphi$, $x_4 = \dot{x}_1$, $x_5 = \dot{x}_2$, $x_6 = \dot{\varphi}$, $u \in \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{3 \times 3} & \mathbb{I}_{3 \times 3} \\ \mathbb{O}_{3 \times 3} & -\tilde{A} \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \tilde{g} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \text{diag} \left(\frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_2}{J} \right), \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(x_3)}{m} & \frac{\cos(x_3)}{m} \\ \frac{\sin(x_3)}{m} & \frac{\sin(x_3)}{m} \\ \frac{r}{J} & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}.$$

Множество допустимых значений управлений оценим при помощи эллипсоида:

$$u \in \mathcal{E}(p, P), \quad p = \left(\frac{u_{\max}}{2}, \frac{u_{\max}}{2} \right), \quad P = \text{diag} \left(\frac{u_{\max}^2}{4}, \frac{u_{\max}^2}{4} \right).$$

При линеаризации уравнений (20) в окрестности очередной вершины графа $x^{(i)}$ (см. (14)) получим следующие параметры: $B(x^{(i)}) = g(x^{(i)})$,

$$A(x^{(i)}) = A + \frac{u_{\max}}{m} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{3 \times 6} \\ 0 & 0 & -\sin(x_3^{(i)}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(x_3^{(i)}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h(x^{(i)}) = \frac{u_{\max} x_3^{(i)}}{m} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{3 \times 1} \\ \sin(x_3^{(i)}) \\ -\cos(x_3^{(i)}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_6 = 0,$$

$$R_4 = \frac{r_i^2 u_{\max}}{2m} \max \left\{ |\cos(\zeta)| : |\zeta - x_3^{(i)}| \leq r_i \right\} + \frac{r_i u_{\max}}{m} \max \left\{ |\sin(\zeta)| : |\zeta - x_3^{(i)}| \leq r_i \right\},$$

$$R_5 = \frac{r_i^2 u_{\max}}{2m} \max \left\{ |\sin(\zeta)| : |\zeta - x_3^{(i)}| \leq r_i \right\} + \frac{r_i u_{\max}}{m} \max \left\{ |\cos(\zeta)| : |\zeta - x_3^{(i)}| \leq r_i \right\}.$$

Препятствия $\mathcal{M}_i$ определим так, что ограничения будут наложены лишь на координаты x_1 и x_2 .

Ниже приведены результаты работы алгоритма Ellipsoidal KRRT* в этом случае. На рис. 3 изображены проекции ребер построенного в итоге графа Γ , а также препятствий на плоскость переменных (x_1, x_2) на момент, когда $|V| = 369$.

Параметры, использованные при численном моделировании: $T = -15$, $m = 5 \text{ кг}$, $J = 0,05 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$, $r = 0,24 \text{ м}$, $\xi_1 = 8,5 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$, $\xi_2 = 0,08 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{рад}}$, $u_{\max} = 1,5 \text{ Н}$, $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$.

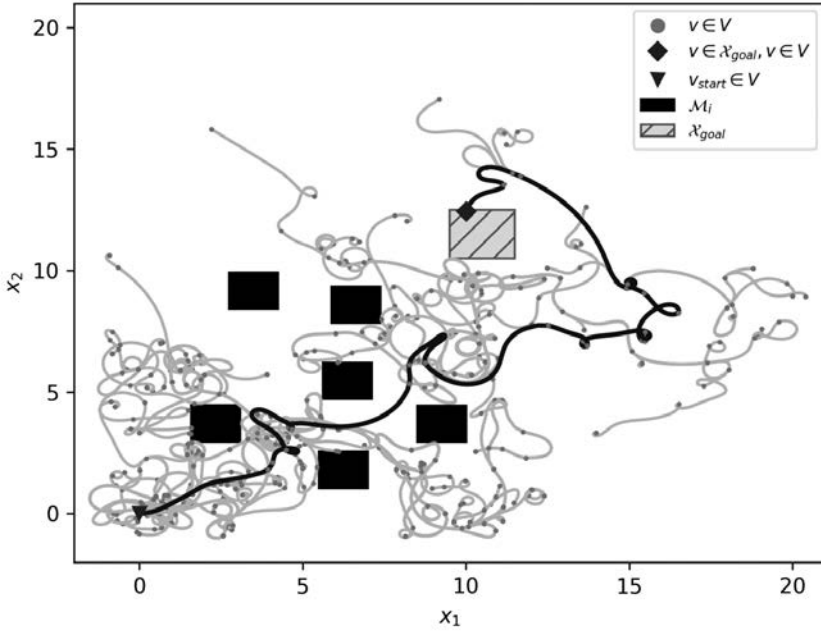


Рис. 3. Проекция дерева $\Gamma = (V, E)$ на плоскость (x_1, x_2) .

При заданном целевом множестве

$$X_{goal} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 9,5 < x_1 < 11,5, 10,5 < x_2 < 12,5\}$$

значение функционала в этом примере следующее:

$$t^* = \min\{C(v) : v \in V, v \in X_{goal}\} = 134,42.$$

В отличие от линейного варианта предложенного в данной работе алгоритма сравнить его работу в случае нелинейной динамики с существующими алгоритмами типа KRRT* не представляется возможным из-за того, что последние либо вовсе не рассчитаны на системы с нелинейной динамикой, либо могут быть использованы только для расчета конкретных, специально подобранных примеров.

8. Заключение

Рассмотренная в работе модификация алгоритма RRT* позволяет строить субоптимальные траектории для объектов как с линейной, так и с нелинейной динамикой. Программная реализация предлагаемого метода может быть использована для решения различных прикладных задач. В отдельных ситуациях представленный алгоритм можно улучшить (сделать более эффективным) за счет использования различных эвристик. Исследованию этих вопросов будет посвящена дальнейшая работа авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаков К.А., Семенов В.А.* Обзор современных методов планирования движения // Тр. ИСП РАН. 2016. Т. 28. № 4. С. 241–294.
2. *Paden B., Cap M., Yong S.Z., Yershov D., Frazzoli E.* A Survey of Motion Planning and Control Techniques for Self-Driving Urban Vehicles // IEEE Transactions on Intelligent Vehicles. 2016. V. 1. No. 1. P. 33–55.
3. *Karaman S., Frazzoli E.* Sampling-based algorithms for optimal motion planning // Int. J. Robot. Res. 2011. V. 30. No. 7. P. 846–894.
4. *Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. М.: Факториал, 2006.
5. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 395–453.
6. *Webb D.J., van der Berg J.* Kinodynamic RRT*: Asymptotically optimal motion planning for robots with linear dynamics // Proc. of the IEEE Conf. on Robotics and Automation. 2013. P. 5054–5061.
7. *Karaman S., Frazzoli E.* Optimal kinodynamic motion planning using incremental sampling-based methods // Proc. of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. 2010. P. 7681–7687.
8. *LaValle S.M., Kuffner J.J.* Randomized kinodynamic planning // Int. J. Robot. Res. 2001. V. 20. No. 5. P. 378–400.
9. *Shkolnik A., Walter M., Tedrake R.* Reachability-guided sampling for planning under differential constraints // Proc. of the IEEE Conf. on Robotics and Automation. 2009. P. 2859–2865.
10. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II: internal approximations, box-valued constraints // Optimization Methods and Software. 2002. V. 17. P. 207–237.
11. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Reachability analysis for uncertain systems — the ellipsoidal technique // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B. 2002. V. 9. No. 3. P. 347–367.
12. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Birkhäuser, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 28.02.2023

После доработки 30.10.2023

Принята к публикации 21.12.2023

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2024 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychhev@yandex.ru)
(АО «Концерн Радиоэлектронные технологии», Москва)

РАСПОЗНАВАНИЕ СИГНАЛОВ БЕЗ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СИНГУЛЯРНУЮ ПОМЕХУ, С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Предлагается новый метод распознавания совокупности сигналов (из заданного ансамбля, с линейно и нелинейно входящими в них параметрами) в условиях существенной априорной неопределенности, не позволяющей воспользоваться известными статистическими методами. Сигналы могут присутствовать в аддитивной смеси, содержащей шум наблюдений и сингулярную помеху, при этом закон распределения шума полагается неизвестным, а считается заданной лишь его корреляционная матрица. Метод инвариантен к данной помехе, не требует традиционного расширения пространства состояний и обеспечивает декомпозицию и распараллеливание вычислительной процедуры. Для представления сигналов и помехи используются традиционные линейные спектральные разложения с неизвестными коэффициентами и заданными базисными функциями. Анализируются случайные и методические погрешности, а также достигаемый вычислительный эффект. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: существенная априорная неопределенность, сингулярная помеха, базисные функции с нелинейными параметрами, спектральные коэффициенты, расширение пространства состояний, оптимальное оценивание, несмещенность оценивания, инвариантность к помехе, алгоритм распознавания, декомпозиция, параллельные вычисления.

DOI: 10.31857/S0005231024020052, EDN: UFQHBW

1. Введение

В [1–3] развит метод решения ряда прикладных задач в условиях существенной априорной неопределенности (например, маскирования и оценивания информационных процессов применительно к стационарным и динамическим объектам) по результатам наблюдений, содержащих полезный сигнал, шум с неизвестным законом распределения (но заданной корреляционной матрицей) и параметрическую сингулярную помеху. Предполагается, что как сигнал, так и помеха могут быть представлены в виде некоторой конечномерной линейной комбинации заданных базисных функций с неизвестны-

ми спектральными коэффициентами. Предложенные в [1–3] алгоритмы основаны на идее обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания (ОИНО) без расширения пространства состояний, позволяющей формировать оценки любых линейных функционалов (над сигналом), не прибегая к нахождению спектральных коэффициентов в линейных комбинациях как сигнала, так и помехи.

В настоящей статье идея ОИНО использована для решения более сложной задачи, а именно, распознавания совокупности сигналов из заданного ансамбля с помощью различных информационно-измерительных систем. Под распознаванием понимается решение задач, связанных с оцениванием, обнаружением, различением и разрешением сигналов (как с линейными, так и нелинейными параметрами) при различных уровнях априорной неопределенности (см., например, [4–11]). Такие задачи возникают в локации, навигации, связи, радиотехнической разведке, радиоастрономии, телеметрии, технической и медицинской диагностике, информационной безопасности и многих других. В условиях правомерности применения вероятностных моделей их решение возможно в рамках известных статистических методов (минимаксного, байесова, максимального правдоподобия и др.).

Существует широкий круг задач распознавания сигналов, для которых традиционный вероятностный подход [4–11] трудно реализуем, особенно в классе информационно-измерительных систем, функционирующих в реальном времени и условиях существенной априорной неопределенности, при минимуме заданных статистических данных. Для задач оценивания с указанными ограничениями широко применяется метод наименьших квадратов (МНК), оперирующий лишь с известной корреляционной матрицей ошибок наблюдений и обеспечивающий, в соответствии с известной теоремой Гаусса–Маркова, построение наилучшей линейной оценки [12, 13]. Одним из классических подходов к решению задачи распознавания для указанных систем может служить расширенный МНК (РМНК), который основан на расширении пространства состояний и предполагает совместное оценивание всех параметров сигналов и сингулярной помехи, присутствующих во входном наблюдении. Известно [12–15], что применение РМНК для задач с нелинейностью и расширением пространства состояний приводит на практике к итерационным процедурам (т. е. требует задания достаточно хороших начальных условий) и известному эффекту «размазывания точности», который наиболее выражен в многомерных задачах распознавания, оперирующих с плохо обусловленными матрицами. Кроме того, такое расширение приводит к существенному росту вычислительных затрат и, как следствие, к снижению оперативности вычислений.

В [1–3] развита автокомпенсационная параллельная процедура ОИНО значений линейных функционалов, которая является альтернативой РМНК и позволяет строить алгоритмы оптимального оценивания параметров одного сигнала в условиях существенной априорной неопределенности. Данная процедура, основанная на декомпозиции, не требует расширения и обеспе-

чивает автокомпенсацию сингулярной помехи, не прибегая к оцениванию ее спектральных коэффициентов, а также позволяет организовать параллельные вычисления. Показан существенный вычислительный эффект.

В настоящей статье идея ОИНО получила дальнейшее развитие, направленное на решение гораздо более сложных задач, связанных с распознаванием совокупности сигналов, при минимуме статистических данных о шуме наблюдения. При этом термин автокомпенсация рассматривается в более широком смысле, поскольку каждый сигнал в уравнении наблюдения по отношению к другому сигналу этого же уравнения рассматривается как помеховый. Развивается новый метод распознавания сигналов для нелинейного случая, который сохраняет все достоинства идеи ОИНО, не требует применения итерационных процедур и реализует принцип параллельных вычислений с многоканальной обработкой данных [16–19]. В статистическом смысле, метод не требует привлечения законов распределения, а ограничивается лишь информацией о математическом ожидании и корреляционной матрице шума наблюдения, что характерно для алгоритмов, разрабатываемых на базе МНК и РМНК.

В статье не используются стохастические сигналы, например, марковские, которые характерны для теории линейной и нелинейной фильтрации, оперирующей с большим объемом достоверной статистической информации и приводящей во многих случаях к построению алгоритмов текущего оценивания с плохой сходимостью и(или) длительными переходными процессами, что не соответствует классу рассматриваемых ниже информационно-измерительных систем.

2. Модели, ограничения и критерии. Постановка задачи распознавания для случая существенной априорной неопределенности

Рассмотрим задачу распознавания сигналов (из заданного ансамбля), наблюдаемых в виде аддитивной смеси

$$(1) \quad h(t) = \sum_{i=1}^K q_i s_i(t, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i) + \theta(t, \mathbf{B}) + \xi(t),$$

$$K \geq 1, \quad \mathbf{A}_i \in \wp_i \subset \mathbb{R}^{M_i}, \quad \boldsymbol{\zeta}_i \in \mathcal{J}_i \subset \mathbb{R}^{L_i},$$

где $t \in [0, T]$ — непрерывное время, K — число возможных сигналов ансамбля, $\theta(t, \mathbf{B})$ — сингулярная помеха, $\xi(t)$ — шум наблюдений, q_i — параметр, характеризующий отсутствие ($q_i = 0$) или присутствие ($q_i = 1$) сигнала $s_i(t, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i)$ в смеси, $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}$ — векторные спектральные коэффициенты линейного разложения сигнала и помехи по своим (заранее заданным) системам базисных функций, $\boldsymbol{\zeta}_i$ — векторный параметр сигнала (в общем случае неизвестный, который будем называть базисным), нелинейно входящий в базисные функции сигнала.

При $K = 1$ имеем задачу обнаружения одного сигнала, если в (1) при $K > 1$ присутствует только один сигнал, то речь идет о задаче различения, а при наличии в (1) любого числа сигналов — о задаче разрешения. Сюда входят частные случаи: $q_i = 0 \ \forall i = \overline{1, K}$ (когда все сигналы ансамбля отсутствуют) и $q_i = 1 \ \forall i = \overline{1, K}$ (когда все сигналы ансамбля присутствуют). В модель (1) укладываются и другие задачи распознавания сигналов (см., например, [7, с. 10–12]).

Далее полагаем, что множества $\wp_i$ и $\mathcal{J}_i$ являются ограниченными и выпуклыми. В качестве координат базисного вектора ζ_i могут рассматриваться такие физические величины, как длительность импульса, период сигнала, временная задержка, несущая частота или частота Доплера, некоторые параметры модулирующей функции и т.д.

Уравнению (1) можно дать, например, следующую физическую интерпретацию. Пусть в секторе обзора радиолокационной станции может находиться K целей. Тогда излученному зондирующему сигналу $s(t)$ в точке приема будет соответствовать сумма отраженных сигналов $q_1 a_1 s(t - \tau_1) + q_2 a_2 s(t - \tau_2) + \dots + q_K a_K s(t - \tau_K)$, где $\tau_i = 2R_i/c$ — задержка принятого сигнала по отношению к зондирующему (где $i \in \{1, \dots, K\}$, R_i — дальность до i -й цели, c — скорость света). Следовательно, для данного примера имеем $\mathbf{A}_i = [a_i]$ — амплитуда сигнала (линейный параметр) и $\zeta_i = [\tau_i]$ — задержка сигнала (нелинейный параметр). В качестве $\theta(t, \mathbf{B})$ может рассматриваться результирующая помеха, например, обусловленная наличием боковых лепестков диаграммы направленности приемной антенны, влиянием подстилающей поверхности и наличием распределенных в пространстве источников помех естественного и искусственного происхождения.

Полагаем, что на множестве $\mathcal{J}_i$ можно задать числовую сетку многомерных (векторных) узлов $\zeta_{(d_i)}$ (где $d_i \in \{1, \dots, D_i\}$ — номер узла, D_i — объем сетки для параметра ζ_i , $\zeta_{(d_i)}$ — значение параметра ζ_i в узле с номером d_i), достаточную для дискретного представления ζ_i с требуемой точностью на всем $\mathcal{J}_i$ (речь идет о разрешающей способности). Для дальнейшего упрощения математических выкладок и записей введем векторы $\mathbf{q} = [q_i, i = \overline{1, K}]^T$, $\mathbf{d} = [d_i, i = \overline{1, K}]^T$ и $\zeta = [\zeta_i^T, i = \overline{1, K}]^T$, а также единый многомерный узел $\zeta_{(d)} = [\zeta_{(d_i)}^T, i = \overline{1, K}]^T$.

Для произвольных значений $\mathbf{A}_i$, ζ_i и $\mathbf{B}$ используем следующие линейные конечномерные комбинации (модели сигнала и помехи соответственно)

$$(2) \quad s_i(t, \mathbf{A}_i, \zeta_i) = \mathbf{A}_i^T \Psi_i(t, \zeta_i),$$

$$(3) \quad \theta(t, \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \Omega(t),$$

где $\mathbf{A}_i = [a_{im}, m = \overline{1, M_i}]^T$ и $\mathbf{B} = [b_j, j = \overline{1, J}]^T$ — неизвестные векторные спектральные коэффициенты линейных разложений сигнала и помехи, $\Psi_i(t, \zeta_i) = [\psi_{im}(t, \zeta_i), m = \overline{1, M_i}]^T$ и $\Omega(t) = [\omega_j(t), j = \overline{1, J}]^T$ — заданные базисные функции сигнала и помехи.

В дальнейшем будем использовать наиболее распространенное на практике векторное уравнение наблюдения для дискретного времени (на сетке узлов $\{t_1, \dots, t_N\}$)

$$(4) \quad \mathbf{H} = \sum_{i=1}^K q_i \mathbf{S}_i + \mathbf{\Theta} + \mathbf{\Xi},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= [h_n, n = \overline{1, N}]^T, \quad \mathbf{S}_i = [s_{in}(\mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i), n = \overline{1, N}]^T, \\ \mathbf{\Theta} &= [\theta_n(\mathbf{B}), n = \overline{1, N}]^T, \quad \mathbf{\Xi} = [\xi_n, n = \overline{1, N}]^T, \\ h_n &= h(t_n), \quad s_{in}(\mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i) = s_i(t_n, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i), \quad \theta_n(\mathbf{B}) = \theta(t_n, \mathbf{B}), \quad \xi_n = \xi(t_n). \end{aligned}$$

Полагаем, что шум $\mathbf{\Xi}$ характеризуется нулевым математическим ожиданием и соответствующей корреляционной матрицей $\mathbf{K}^\Xi$. Никаких других вероятностных характеристик относительно $\mathbf{\Xi}$ не требуется.

Для произвольных значений $\mathbf{A}_i$, $\boldsymbol{\zeta}_i$ и $\mathbf{B}$ имеем

$$(5) \quad \mathbf{S}_i = \boldsymbol{\Psi}_i \mathbf{A}_i,$$

$$(6) \quad \mathbf{\Theta} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{B},$$

где $\boldsymbol{\Psi}_i = [\psi_{imn}(\boldsymbol{\zeta}_i), n = \overline{1, N}, m = \overline{1, M_i}]$ и $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_{jn}, n = \overline{1, N}, j = \overline{1, J}]$ — базисные матрицы сигнала $\mathbf{S}_i$ и помехи $\mathbf{\Theta}$ соответственно, $\psi_{imn}(\boldsymbol{\zeta}_i) = \psi_{im}(t_n, \boldsymbol{\zeta}_i)$, $\omega_{jn} = \omega_j(t_n)$.

Также полагаем, что расширенный функциональный базис $\{\boldsymbol{\Psi}_1(t, \boldsymbol{\zeta}_1), \dots, \boldsymbol{\Psi}_K(t, \boldsymbol{\zeta}_K), \boldsymbol{\Omega}(t)\}$ линейно независим на сетке $\{t_1, \dots, t_N\}$ для любых значений $\boldsymbol{\zeta}_1 \in \mathcal{J}_1, \boldsymbol{\zeta}_2 \in \mathcal{J}_2, \dots, \boldsymbol{\zeta}_K \in \mathcal{J}_K$ (по аналогии с [1–3]).

В самом общем случае задача распознавания сигналов предполагает оптимальное обнаружение каждого сигнала $s_i(t, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i)$ из заданного ансамбля (т.е. вынесение оценки q_i^* для параметра q_i), а также нахождение оценок $\mathbf{A}_i^*$ для $\mathbf{A}_i$ и $\boldsymbol{\zeta}_i^*$ для $\boldsymbol{\zeta}_i$. В таких условиях (многоальтернативных решений) вводится семейство гипотез $\Gamma_l, l \in \{1, \dots, L\}$ (где $L = 2^K, L \geq 2$), характеризующих все возможные варианты присутствия и отсутствия сигналов ансамбля в наблюдении (1). Под $\Gamma^0 \in \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_L\}$ далее понимается истинная гипотеза.

Будем полагать, что случай $q_i = 0 \forall i = \overline{1, K}$ отвечает гипотезе Γ_1 , а случай $q_i = 1 \forall i = \overline{1, K}$ — гипотезе Γ_L .

Каждой гипотезе Γ_l можно поставить в соответствие модельное наблюдение

$$(7) \quad \mathbf{H}_l = \sum_{i=1}^{K_l} \mathbf{S}_{il} + \mathbf{\Theta} + \mathbf{\Xi}, \quad l \in \{1, \dots, L\}, \quad \mathbf{S}_{il} \in \{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_K\},$$

где $\mathbf{S}_{il} = \boldsymbol{\Psi}_{il} \mathbf{A}_{il}$ (см. (5)), K_l — количество сигналов ансамбля, присутствующих в смеси согласно Γ_l .

С учетом (7) задача распознавания в рамках РМНК решается с использованием расширенного вектора спектральных коэффициентов $\mathbf{W}_l = [\mathbf{A}_{1l}^T, \mathbf{A}_{2l}^T, \dots, \mathbf{A}_{K_l l}^T, \mathbf{B}^T]^T$ и критерия минимума квадратичной формы $\chi^{\text{РМНК}}(\zeta_l, \mathbf{W}_l)$:

$$(8) \quad (l^*, \zeta_{l^*}, \mathbf{W}_{l^*}) = \arg \min_{l, \zeta_l, \mathbf{W}_l} \chi^{\text{РМНК}}(\zeta_l, \mathbf{W}_l) = \\ = \arg \min_{l, \zeta_l, \mathbf{W}_l} [\Delta^{\text{РМНК}}(\zeta_l, \mathbf{W}_l)]^T (\mathbf{K}^\Xi)^{-1} \Delta^{\text{РМНК}}(\zeta_l, \mathbf{W}_l),$$

где $\Delta^{\text{РМНК}}(\zeta_l, \mathbf{W}_l) = \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{РМНК}}(\zeta_l, \mathbf{W}_l)$, а минимизация по нелинейному параметру ζ_l выполняется на узлах $\zeta_{(d)}$ числовой сетки.

Критерий (8) позволяет обеспечить минимизацию с учетом невязок $\Delta^{\text{РМНК}}(\zeta_l, \mathbf{W}_l)$ и весовой матрицы $(\mathbf{K}^\Xi)^{-1}$, при этом под ζ_{l^*} и $\mathbf{W}_{l^*}$ понимаются оценки для ζ_l и $\mathbf{W}_l$ соответственно, применительно к оптимальной гипотезе Γ_{l^*} , $l^* \in \{1, \dots, L\}$.

Очевидно, что размерность такой задачи достаточно высока и при работе с плохо обусловленными матрицами погрешности оценивания могут существенно превосходить методическую погрешность и обесценивать результаты оптимальной обработки наблюдений (это наглядно продемонстрировано в иллюстративном примере (раздел 6)). Кроме того, критерий (8) не предусматривает возможности распараллеливания вычислительной процедуры.

Преодолеть недостатки РМНК во многом удастся, если использовать модифицированную процедуру ОИНО, ориентированную на задачу распознавания сигналов. Для этого, применительно к фиксированному значению k , запишем наблюдение (7) в двух формах:

$$(9) \quad \mathbf{H}_l = \begin{cases} \mathbf{S}_{kl} + \mathbf{X}_{kl} + \Xi, & k \in \{1, \dots, K_l\}, \\ \Theta + \mathbf{X}_l + \Xi, \end{cases}$$

$$\text{где } \mathbf{S}_{kl} = \mathbf{S}_{kl}(\mathbf{A}_{kl}, \zeta_{kl}), \quad \mathbf{X}_l = \mathbf{X}_l(\mathbf{A}_l, \zeta_l), \quad \mathbf{A}_l = [\mathbf{A}_{1l}^T, \mathbf{A}_{2l}^T, \dots, \mathbf{A}_{K_l l}^T]^T, \quad \zeta_l = \\ = [\zeta_{il}^T, i = \overline{1, K_l}]^T, \quad \mathbf{X}_{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{K_l} \mathbf{S}_{il} + \Theta, \quad \mathbf{X}_l = \sum_{i=1}^{K_l} \mathbf{S}_{il}.$$

Первая форма позволяет рассматривать $\mathbf{X}_{kl}$ как составляющую, мешающую оцениванию полезного сигнала $\mathbf{S}_{kl}$, а вторая форма позволяет рассматривать $\mathbf{X}_l$ — как составляющую, мешающую оцениванию помехи Θ .

Далее потребуются матрицы оптимального линейного оценивания $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}} = [p_{krnl}^{\mathbf{S}}, r = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}]$, $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}} = [p_{kmnl}^{\mathbf{A}}, m = \overline{1, M_{kl}}, n = \overline{1, N}]$ и $\mathbf{P}_l^{\Theta} = [p_{rnl}^{\Theta}, r = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}]$, $\mathbf{P}_l^{\mathbf{B}} = [p_{jnl}^{\mathbf{B}}, j = \overline{1, J}, n = \overline{1, N}]$ для формирования оптимальных оценок (на основе ОИНО для фиксированных значений l и ζ_k) применительно к сигналу $\mathbf{S}_{kl}$ и вектору $\mathbf{A}_{kl}$ его спектральных коэффициентов, а также к помехе Θ и вектору $\mathbf{B}$ ее спектральных коэффициентов:

$$\mathbf{S}_{kl}^* = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}} \mathbf{H}_l, \quad \mathbf{A}_{kl}^* = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}} \mathbf{H}_l, \quad k = \overline{1, K_l}, \quad \Theta_l^* = \mathbf{P}_l^{\Theta} \mathbf{H}_l, \quad \mathbf{B}_l^* = \mathbf{P}_l^{\mathbf{B}} \mathbf{H}_l.$$

Матрицы $\mathbf{P}_{kl}^S$, $\mathbf{P}_{kl}^A$ и $\mathbf{P}_l^\Theta$, $\mathbf{P}_l^B$ для гипотезы Γ_l должны обеспечивать выполнение следующих равенств:

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_{kl}^S = \mathbf{P}_{kl}^S \mathbf{H}_l = \mathbf{P}_{kl}^S \mathbf{S}_{kl} + \mathbf{P}_{kl}^S \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{P}_{kl}^S \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{S}_{kl} + \boldsymbol{\Xi}_{kl}^S, & k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{H}_{kl}^A = \mathbf{P}_{kl}^A \mathbf{H}_l = \mathbf{P}_{kl}^A \mathbf{S}_{kl} + \mathbf{P}_{kl}^A \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{P}_{kl}^A \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{A}_{kl} + \boldsymbol{\Xi}_{kl}^A, & k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{H}_l^\Theta = \mathbf{P}_l^\Theta \mathbf{H}_l = \mathbf{P}_l^\Theta \boldsymbol{\Theta} + \mathbf{P}_l^\Theta \mathbf{X}_l + \mathbf{P}_l^\Theta \boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}_l^\Theta, \\ \mathbf{H}_l^B = \mathbf{P}_l^B \mathbf{H}_l = \mathbf{P}_l^B \boldsymbol{\Theta} + \mathbf{P}_l^B \mathbf{X}_l + \mathbf{P}_l^B \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{B} + \boldsymbol{\Xi}_l^B, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\Xi}_{kl}^S = \mathbf{P}_{kl}^S \boldsymbol{\Xi}$ и $\boldsymbol{\Xi}_l^\Theta = \mathbf{P}_l^\Theta \boldsymbol{\Xi}$ — шумы с нулевыми математическими ожиданиями $M\{\boldsymbol{\Xi}_{kl}^S\} = M\{\mathbf{P}_{kl}^S \boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{P}_{kl}^S M\{\boldsymbol{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{N \times 1}$, $M\{\boldsymbol{\Xi}_{kl}^A\} = M\{\mathbf{P}_{kl}^A \boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{P}_{kl}^A M\{\boldsymbol{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{M_{kl} \times 1}$, $M\{\boldsymbol{\Xi}_l^\Theta\} = M\{\mathbf{P}_l^\Theta \boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{P}_l^\Theta M\{\boldsymbol{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{N \times 1}$, $M\{\boldsymbol{\Xi}_l^B\} = M\{\mathbf{P}_l^B \boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{P}_l^B M\{\boldsymbol{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{J \times 1}$ (здесь $M\{\cdot\}$ — символ математического ожидания, $\mathbf{0}$ — нулевой вектор-столбец соответствующей размерности, которая указывается квадратными скобками с нижними индексами).

Кроме того, для корреляционных матриц $\mathbf{K}_{kl}^{\Xi S}$, $\mathbf{K}_{kl}^{\Xi A}$ и $\mathbf{K}_l^{\Xi \Theta}$, $\mathbf{K}_l^{\Xi B}$ случайных векторов $\boldsymbol{\Xi}_{kl}^S$, $\boldsymbol{\Xi}_{kl}^A$ и $\boldsymbol{\Xi}_l^\Theta$, $\boldsymbol{\Xi}_l^B$ должны обеспечиваться соответствующие условия минимума

$$(11) \quad \begin{cases} Sp \mathbf{K}_{kl}^{\Xi S} \longrightarrow \min_{\mathbf{P}_{kl}^S}, & k = \overline{1, K_l}, \\ Sp \mathbf{K}_{kl}^{\Xi A} \longrightarrow \min_{\mathbf{P}_{kl}^A}, & k = \overline{1, K_l}, \\ Sp \mathbf{K}_l^{\Xi \Theta} \longrightarrow \min_{\mathbf{P}_l^\Theta}, \\ Sp \mathbf{K}_l^{\Xi B} \longrightarrow \min_{\mathbf{P}_l^B}, \end{cases}$$

где под Sp понимается оператор нахождения следа матрицы.

Формула (10) отражает свойства несмещенности (по отношению к параметрам полезных сигналов и сингулярной помехи)

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbf{P}_{kl}^S \mathbf{S}_{kl} = \mathbf{S}_{kl}, & k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{P}_{kl}^A \mathbf{S}_{kl} = \mathbf{A}_{kl}, & k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{P}_l^\Theta \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}, \\ \mathbf{P}_l^B \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{B}, \end{cases}$$

а также инвариантности (по отношению к мешающим составляющим $\mathbf{X}_{kl}$ и $\mathbf{X}_l$)

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{P}_{kl}^S \mathbf{X}_{kl} = [\mathbf{0}]_{N \times 1}, & k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{P}_{kl}^A \mathbf{X}_{kl} = [\mathbf{0}]_{M_{kl} \times 1}, & k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{P}_l^\Theta \mathbf{X}_l = [\mathbf{0}]_{N \times 1}, \\ \mathbf{P}_l^B \mathbf{X}_l = [\mathbf{0}]_{J \times 1}. \end{cases}$$

Если матрицы $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}$, $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{P}_{kl}^{\Theta}$, $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{B}}$ применять непосредственно к наблюдению (1), то получаем набор оптимальных оценок всех параметров задачи распознавания сигналов для фиксированных значений l и ζ_l

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{kl}^* = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}} \mathbf{H} = \sum_{i=1}^{K_l} q_i \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}} \mathbf{S}_i + \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}} \Theta + \Xi_{kl}^{\mathbf{S}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{A}_{kl}^* = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}} \mathbf{H} = \sum_{i=1}^{K_l} q_i \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}} \mathbf{S}_i + \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}} \Theta + \Xi_{kl}^{\mathbf{A}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ \Theta_l^* = \mathbf{P}_l^{\Theta} \mathbf{H} = \sum_{i=1}^{K_l} q_i \mathbf{P}_l^{\Theta} \mathbf{S}_i + \mathbf{P}_l^{\Theta} \Theta + \Xi_l^{\Theta}, \\ \mathbf{B}_l^* = \mathbf{P}_l^{\mathbf{B}} \mathbf{H} = \sum_{i=1}^{K_l} q_i \mathbf{P}_l^{\mathbf{B}} \mathbf{S}_i + \mathbf{P}_l^{\mathbf{B}} \Theta + \Xi_l^{\mathbf{B}}. \end{array} \right.$$

В отличие от РМНК оценки параметров сигналов и помехи (14), формируемые в рамках ОИНО, осуществляются отдельно, что позволяет организовать параллельные вычисления, кроме того, выполнение условий инвариантности позволяет существенно снизить размерность обрабатываемых матриц (по аналогии с [1–3]). Это хорошо продемонстрировано далее в иллюстративном примере.

Для истинной гипотезы Γ^0 с номером $l^0 \in \{1, \dots, L\}$, учитывая (12)–(14), получим

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{kl^0}^* = \mathbf{P}_{kl^0}^{\mathbf{S}} \mathbf{H} = q_k \mathbf{S}_k + \Xi_{kl^0}^{\mathbf{S}}, \quad k = \overline{1, K_{l^0}}, \\ \mathbf{A}_{kl^0}^* = \mathbf{P}_{kl^0}^{\mathbf{A}} \mathbf{H} = q_k \mathbf{A}_k + \Xi_{kl^0}^{\mathbf{A}}, \quad k = \overline{1, K_{l^0}}, \\ \Theta_{l^0}^* = \mathbf{P}_{l^0}^{\Theta} \mathbf{H} = \Theta + \Xi_{l^0}^{\Theta}, \\ \mathbf{B}_{l^0}^* = \mathbf{P}_{l^0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} = \mathbf{B} + \Xi_{l^0}^{\mathbf{B}}. \end{array} \right.$$

Если Γ_l не соответствует истинной гипотезе Γ^0 , то условия (12) и (13) нарушаются, что приводит к невязке

$$\Delta^{\text{ОИНО}}(l, \zeta_l) = \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{ОИНО}}(\mathbf{S}_l^*, \Theta_l^*) = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^{K_l} \mathbf{S}_{il}^* - \Theta_l^*,$$

где $\mathbf{S}_l^* = [(\mathbf{S}_{il}^*)^T, i = \overline{1, K_l}]^T$, $\mathbf{S}_{il}^* = \mathbf{S}_{il}^*(\zeta_l)$, $\Theta_l^* = \Theta_l^*(\zeta_l)$. В этом случае задача распознавания в рамках ОИНО решается на основе критерия минимума квадратичной формы:

$$(16) \quad \begin{aligned} (l^*, \zeta_{l^*}) &= \arg \min_{l, \zeta_l} \chi^{\text{ОИНО}}(l, \zeta_l) = \\ &= \arg \min_{l, \zeta_l} [\Delta^{\text{ОИНО}}(l, \zeta_l)]^T (\mathbf{K}^{\Xi})^{-1} (\Delta^{\text{ОИНО}})(l, \zeta_l), \end{aligned}$$

при этом результирующие оценки параметров сигналов и сингулярной помехи находятся как $\mathbf{S}_{l*}^* = \mathbf{S}_{l=l*}^*$, $\mathbf{A}_{l*}^* = \mathbf{A}_{l=l*}^*$, $\mathbf{\Theta}_{l*}^* = \mathbf{\Theta}_{l=l*}^*$, $\mathbf{B}_{l*}^* = \mathbf{B}_{l=l*}^*$, где $\mathbf{A}_l^* = [(\mathbf{A}_{kl}^*)^T, k = \overline{1, K_l}]^T$.

В (16) минимизация по нелинейному параметру выполняется сразу на всех узлах ζ_l числовой сетки методом параллельных вычислений.

Формулы (1)–(16) полностью задают все модели, ограничения и критерии, необходимые для разработки нового метода разрешения сигналов в условиях существенной априорной неопределенности, а также его сравнения с РМНК. Требуется построить матрицы $\mathbf{P}_{kl}^S$, $\mathbf{P}_{kl}^A$ и $\mathbf{P}_{kl}^{\Theta}$, $\mathbf{P}_{kl}^B$ для фиксированных l и $\mathbf{d}$; с учетом построенных матриц и принятого критерия оптимальности в декомпозированном виде решить задачу оптимального распознавания сигналов (с линейными и нелинейными параметрами) без традиционного расширения пространства состояний в условиях минимума априорной статистической информации (используя лишь матрицу $\mathbf{K}^{\Xi}$), обеспечив автокомпенсацию сингулярной помехи и параллельную обработку наблюдений; привести формулы для случайных и методических ошибок результирующего оценивания; сравнить разработанный метод с РМНК в плане вычислительной эффективности; продемонстрировать возможность его сравнения с известными статистическими методами распознавания сигналов; привести иллюстративный пример, подтверждающий преимущества разработанного метода по сравнению с РМНК.

Решение задачи распознавания в общем случае (когда неизвестно какие сигналы ансамбля присутствуют в наблюдении (1) и неизвестно значение нелинейного параметра ζ_i для каждого из этих сигналов $s_i(t, \mathbf{A}_i, \zeta_i)$) приводит к сложным итерационным процедурам, связанным с необходимостью выбора достаточно хороших начальных приближений. На практике обойти указанную сложность удастся на основе параллельного алгоритма, предполагающего проверку всех возможных гипотез присутствия сигналов и помехи в (4), а также просмотр всех узлов для каждой гипотезы. Именно такой подход будет применен ниже, что позволит уйти от указанной выше нелинейности и связанных с ней трудностей, о которых говорилось ранее. Подобная идея успешно использована в [20, 21] при решении ряда прикладных задач управления.

3. Построение матриц оптимального линейного автокомпенсационно-декомпозиционного оценивания

Предположим сначала, что точное значение параметра ζ известно, а в смеси (1) присутствуют все K сигналов ансамбля, т.е. $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 1$ (в этом случае индекс l можно опустить). Тогда решение задачи распознавания можно искать в классе линейных оценок в виде K параллельных алгоритмов вычислений

$$(17) \quad \mathbf{A}_k^* = \mathbf{P}_k^A \mathbf{H}, \quad k = \overline{1, K},$$

где $\mathbf{A}_k^*$ — оценка вектора $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} = [p_{kmn}^{\mathbf{A}}, m = \overline{1, M_k}, n = \overline{1, N}]$ — матрица неизвестных весовых коэффициентов оптимального оценивания.

Корреляционная матрица ошибок оценивания на основе (17) находится по правилу

$$(18) \quad \mathbf{K}_k^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} \mathbf{K}^{\Xi} (\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}})^{\mathbf{T}}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Критерий качества, необходимый для нахождения $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$, соответствует минимизации следа матрицы $Sp \mathbf{K}_k^{\mathbf{A}}$ (см. (11)). Кроме того, должны выполняться сопутствующие условия несмещенности (12) и инвариантности (13).

Для нахождения матрицы $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$ преобразуем (9) к следующему виду:

$$(19) \quad \mathbf{H} = \mathbf{S}_k + \mathbf{X}_k + \Xi,$$

где $\mathbf{X}_k = [x_{kn}, n = \overline{1, N}]^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{X}_k = \mathbf{Y}_k \mathbf{C}_k$,

$\mathbf{Y}_k = [\Psi_1 : \dots : \Psi_{k-1} : \Psi_{k+1} : \dots : \Psi_K : \Omega]$ — матрица размером $N \times (\overline{M_k} + J)$,

$\mathbf{C}_k = [\mathbf{A}_1^{\mathbf{T}} : \dots : \mathbf{A}_{k-1}^{\mathbf{T}} : \mathbf{A}_{k+1}^{\mathbf{T}} : \dots : \mathbf{A}_K^{\mathbf{T}} : \mathbf{B}^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}$ — вектор размером $(\overline{M_k} + J) \times 1$, $\overline{M_k} = M_1 + \dots + M_{k-1} + M_{k+1} + \dots + M_K$.

Применительно к рассматриваемому случаю условия несмещенности и инвариантности (с учетом (12), (13) и (19)) можно записать так

$$(20) \quad \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} \Psi_k - [\mathbf{E}]_{M_k \times M_k} = [\mathbf{0}]_{M_k \times M_k},$$

$$(21) \quad \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} \mathbf{Y}_k = [\mathbf{0}]_{M_k \times (\overline{M_k} + J)},$$

где $[\mathbf{0}]_{M_k \times M_k}$ и $[\mathbf{E}]_{M_k \times M_k}$ — нулевая и единичная матрицы соответственно, $[\cdot]_{M_k \times M_k}$ — обозначение размерности матрицы, стоящей в квадратных скобках (такое обозначение используется далее по всей статье).

Для дальнейшего изложения потребуется вектор $\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = [p_{pmn}^{\mathbf{A}}, n = \overline{1, N}]^{\mathbf{T}}$, который состоит из элементов m -й строки матрицы $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$. Он позволяет найти скалярную оценку a_{km}^* коэффициента a_{km} для фиксированных значений k и m . Очевидно, что выполняются условия несмещенности $(\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{T}} \mathbf{S}_k = a_{km}$ и инвариантности $(\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{T}} \mathbf{X}_k = 0$. Или, по аналогии с (20) и (21), имеем

$$(22) \quad (\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{T}} \Psi_k - \mathbf{E}_{km}^{\mathbf{T}} = [\mathbf{0}]_{1 \times M_k},$$

$$(23) \quad \mathbf{Y}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = [\mathbf{0}]_{(\overline{M_k} + J) \times 1},$$

где $\mathbf{E}_{km}$ — вектор-столбец, состоящий из нулей, но на m -й позиции стоит единица.

Теорема. Вектор $\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}}$ оптимального оценивания спектрального коэффициента a_{km} , обеспечивающий минимум квадратичной формы $(\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{T}} \mathbf{K}^{\Xi} \mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}}$, а также выполнение условий несмещенности (22) и инвариантности (23), находится по правилу

$$(24) \quad \mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_k \mathbf{V}_k (\Psi_k^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_k \mathbf{V}_k)^{-1} \mathbf{E}_{km}.$$

Доказательство теоремы приводится в Приложении.

Скалярная оценка a_{km}^* коэффициента находится так

$$(25) \quad a_{km}^* = \mathbf{H}^T \mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = \mathbf{H}^T \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k (\mathbf{\Psi}_k^T \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k)^{-1} \mathbf{E}_{km}.$$

Переходя от скалярного коэффициента a_{km} к вектору $\mathbf{A}_k$, с учетом (24) получаем матрицу оптимального оценивания

$$(26) \quad \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} = [\mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k (\mathbf{\Psi}_k^T \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k)^{-1}]^T, \quad k = \overline{1, K}.$$

Подставляя (26) в (17), находим искомые оценки

$$(27) \quad \mathbf{A}_k^* = \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} \mathbf{H} = [\mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k (\mathbf{\Psi}_k^T \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k)^{-1}]^T \mathbf{H}, \quad k = \overline{1, K}.$$

В свою очередь, матрицу оптимального оценивания сигналов $\mathbf{S}_{kl}$ находим как

$$(28) \quad \mathbf{P}_k^{\mathbf{S}} = \mathbf{\Psi}_k \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}},$$

а саму оценку в виде

$$(29) \quad \mathbf{S}_k^* = \mathbf{\Psi}_k \mathbf{A}_k^* = \mathbf{\Psi}_k [\mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k (\mathbf{\Psi}_k^T \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k)^{-1}]^T \mathbf{H}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Оценки (27) и (29) являются оптимальными в смысле несмещенности, эффективности (обеспечивают минимальную дисперсию) и инвариантности (по отношению к результирующей сингулярной помехе).

Для решения ряда задач распознавания сигналов, помимо матриц $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{P}_k^{\mathbf{S}}$, возникает необходимость построения матриц $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{P}^{\mathbf{\Theta}}$ оптимального оценивания параметров помехи с соблюдением условий несмещенности и инвариантности (по аналогии с (22) и (23)). Теперь вместо $\mathbf{Y}_{kl}$ и $\mathbf{C}_{kl}$ строятся матрицы $\mathbf{Y}_k^{\mathbf{\Theta}}$ и $\mathbf{C}_k^{\mathbf{\Theta}}$ с учетом того, что при нахождении оценок $\mathbf{B}^*$ и $\mathbf{\Theta}^*$ все полезные сигналы рассматриваются как мешающие составляющие. Формулы для матриц $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}^{\mathbf{\Theta}}$ и оценок $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{\Theta}^*$ записываются по аналогии с (26)–(29).

Для задач распознавания с учетом возможных гипотез Γ_l и нелинейного параметра γ строится семейство матриц оптимального оценивания для всех значений l и узлов $\zeta(\mathbf{d})$: $\mathbf{P}_{k(\mathbf{d})}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{k(\mathbf{d})}^{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{P}_{(\mathbf{d})}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}_{(\mathbf{d})}^{\mathbf{\Theta}}$.

Рассмотренных в данном разделе матриц оценивания необходимо и достаточно для решения широкого круга задач, связанных с распознаванием сигналов, в условиях существенной априорной неопределенности. В следующем разделе рассматриваются наиболее распространенные задачи распознавания: оценивание (известно какие сигналы в наблюдении присутствуют и требуется только оценить их параметры); обнаружение (надо установить присутствует ли в наблюдении полезный сигнал); различение (в наблюдении присутствует только один сигнал из заданного ансамбля и надо установить какой именно); разрешение (в наблюдении могут присутствовать те или иные сигналы ансамбля и надо установить какие). Кроме того, задачи обнаружения, различения и разрешения могут сопровождаться оцениванием параметров сигналов и помехи.

4. Алгоритмы решения базовых задач распознавания сигналов в условиях неопределенности

Алгоритм оценивания сигналов с известными нелинейными параметрами (1). Пусть в смеси (1) присутствуют все сигналы ансамбля, т.е. $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 1$. Требуется дать оценку всех коэффициентов $\mathbf{A}_k$ и самих сигналов $\mathbf{S}_k$, не прибегая к оценке коэффициента $\mathbf{B}$ помехи Θ , т.е. без расширения пространства состояний. В данной задаче гипотезы не используются, поэтому индекс l опускаем.

Шаг 1.1. Строим матрицы $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$ весовых коэффициентов.

Шаг 1.2. Находим оценки $\mathbf{A}_k^* = \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} \mathbf{H}$ векторных коэффициентов $\mathbf{A}_k$, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 1.3. Строим матрицы $\mathbf{P}_k^{\mathbf{S}} = \Psi_k \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$, $k = \overline{1, K}$.

Шаг 1.4. Находим оценки $\mathbf{S}_k^* = \mathbf{P}_k^{\mathbf{S}} \mathbf{H}$ самих сигналов $\mathbf{S}_k$, $k = \overline{1, K}$.

Алгоритм оценивания сигналов и помехи с учетом неизвестных нелинейных параметров (2). Пусть в смеси (1) присутствуют все сигналы ансамбля, т.е. $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 1$. Требуется дать оценки всех коэффициентов $\mathbf{A}_k$, ζ_k и самих сигналов $\mathbf{S}_k$, а также оценки коэффициента $\mathbf{B}$ и самой помехи Θ . В данной задаче гипотезы не используются, поэтому индекс l опускаем.

Шаг 2.1. Строим матрицы $\mathbf{P}_{k(\mathbf{d})}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{k(\mathbf{d})}^{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{P}_{(\mathbf{d})}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}_{(\mathbf{d})}^{\Theta}$ для всех узлов $\zeta(\mathbf{d})$.

Шаг 2.2. Находим частные оценки $\mathbf{A}_{k(\mathbf{d})}^*$, $\mathbf{S}_{k(\mathbf{d})}^*$ и $\mathbf{B}_{(\mathbf{d})}^*$, $\Theta_{(\mathbf{d})}^*$ для всех узлов $\zeta(\mathbf{d})$.

Шаг 2.3. Находим невязки

$$\Delta^{\text{оино}}(\mathbf{d}) = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^K \mathbf{S}_{i(\mathbf{d})}^* - \Theta_{(\mathbf{d})}^*$$

для всех узлов $\zeta(\mathbf{d})$.

Шаг 2.4. Находим оценку $\mathbf{d}^*$ для $\mathbf{d}$ в виде

$$\mathbf{d}^* = \arg \min_{\mathbf{d}} \chi^{\text{оино}}(\mathbf{d}) = \arg \min_{\mathbf{d}} [\Delta^{\text{оино}}(\mathbf{d})]^T (\mathbf{K}^{\Xi})^{-1} \Delta^{\text{оино}}(\mathbf{d}).$$

Шаг 2.5. Находим результирующие оценки $\mathbf{A}_{k\mathbf{d}^*}^*$, $\mathbf{S}_{k(\mathbf{d}^*)}^*$, $\zeta_{k(\mathbf{d}^*)}^*$ и $\mathbf{B}_{(\mathbf{d}^*)}^*$, $\Theta_{(\mathbf{d}^*)}^*$.

Алгоритм совместного обнаружения-оценивания с известными нелинейными параметрами (3). В этом случае $K = 1$, $L = 2$, следовательно можно записать $\mathbf{H} = q\mathbf{S} + \Theta + \Xi$, т.е. в зависимости от значения коэффициента q возможны две гипотезы (Γ_1 , если $q = 0$ и Γ_2 , если $q = 1$). Надо дать оценку $l^* \in \{0, 1\}$ для параметра $l \in \{0, 1\}$, а также построить оценки $\mathbf{A}_{l^*}^*$, $\mathbf{S}_{l^*}^*$ и $\mathbf{B}_{l^*}^*$, $\Theta_{l^*}^*$. В этом случае индекс k в формулах (26)–(29) можно опустить.

Шаг 3.1. Строим матрицы $\mathbf{P}_{l=1}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{l=2}^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{P}_{l=1}^{\mathbf{S}}$, $\mathbf{P}_{l=2}^{\mathbf{S}}$ для Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Шаг 3.2. Находим оценки $\mathbf{A}_{l=1}^*$, $\mathbf{S}_{l=1}^*$ (для сигнала $\mathbf{S} = [\mathbf{0}]_{N \times 1}$ и гипотезы Γ_1) и $\mathbf{A}_{l=2}^*$, $\mathbf{S}_{l=2}^*$ (для $\mathbf{S} \neq [\mathbf{0}]_{N \times 1}$ и гипотезы Γ_2).

Шаг 3.3. Строим матрицы $\mathbf{P}_{l=1}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}_{l=1}^{\Theta}$ и $\mathbf{P}_{l=2}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}_{l=2}^{\Theta}$ для Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Шаг 3.4. Находим оценки $\mathbf{B}_{l=1}^*$, $\Theta_{l=1}^*$ и $\mathbf{B}_{l=2}^*$, $\Theta_{l=2}^*$.

Шаг 3.5. Находим невязки

$$\Delta^{\text{оино}}(l) = \mathbf{H} - \mathbf{S}_l^* - \Theta_l^*$$

и номер наилучшей гипотезы с использованием критерия:

$$l^* = \arg \min_l \chi^{\text{оино}}(l) = \arg \min_l [\Delta^{\text{оино}}(l)]^T (\mathbf{K}^{\Xi})^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l), \quad l^* \in \{0, 1\}.$$

Шаг 3.6. Находим результирующие оценки $\mathbf{A}_{l^*}^*$, $\mathbf{S}_{l^*}^*$ и $\mathbf{B}_{l^*}^*$, $\Theta_{l^*}^*$.

Алгоритм совместного различения и оценивания параметров сигналов и помехи с неизвестными нелинейными параметрами (4). В этом случае K произвольное, $L = K$, $\mathbf{H} = \mathbf{S}_l + \Theta + \Xi$, $l \in \{1, \dots, L\}$. Надо установить, какой сигнал из заданного ансамбля $\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_L\}$ присутствует в наблюдении, т.е. вынести оценку $l^* \in \{1, \dots, L\}$ для параметра l а также построить оценки $\mathbf{A}_{l^*}^*$, $\mathbf{S}_{l^*}^*$ и $\mathbf{B}_{l^*}^*$, $\Theta_{l^*}^*$. В этом случае индекс k опускаем.

Шаг 4.1. Строим матрицы $\mathbf{P}_{l(\mathbf{d})}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{l(\mathbf{d})}^{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{P}_{l(\mathbf{d})}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}_{l(\mathbf{d})}^{\Theta}$ для всех и узлов $\zeta(\mathbf{d})$.

Шаг 4.2. Находим частные оценки $\mathbf{A}_{l(\mathbf{d})}^*$, $\mathbf{S}_{l(\mathbf{d})}^*$ и $\mathbf{B}_{l(\mathbf{d})}^*$, $\Theta_{l(\mathbf{d})}^*$ для всех Γ_l и узлов $\zeta(\mathbf{d})$.

Шаг 4.3. Находим невязки

$$\Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}) = \mathbf{H} - \mathbf{S}_{l(\mathbf{d})}^* - \Theta_{l(\mathbf{d})}^*$$

для всех Γ_l и узлов $\zeta(\mathbf{d})$.

Шаг 4.4. Находим номер наилучшей гипотезы с использованием следующего критерия:

$$(l^*, \mathbf{d}^*) = \arg \min_{l, \mathbf{d}} \chi^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}) = \arg \min_{l, \mathbf{d}} [\Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d})]^T (\mathbf{K}^{\Xi})^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}).$$

Шаг 4.5. Находим результирующие оценки $\mathbf{A}_{l^*(\mathbf{d}^*)}^*$, $\mathbf{S}_{l^*(\mathbf{d}^*)}^*$ и $\mathbf{B}_{l^*(\mathbf{d}^*)}^*$, $\Theta_{l^*(\mathbf{d}^*)}^*$ для гипотезы Γ_{l^*} и узла $\zeta(\mathbf{d}^*)$.

Алгоритм совместного разрешения и оценивания параметров сигналов и помехи с неизвестными нелинейными параметрами (5). Рассматривается общий случай (4). В этом случае K произвольное, $L = 2^K$, $L \geq 2$. Надо установить, какие сигналы из заданного ансамбля $\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_L\}$ присутствуют в наблюдении и дать оценку их линейных и нелинейных параметров, а также оценить параметры помехи. В этом случае используются гипотезы Γ_l , где $l \in \{1, \dots, 2^K\}$.

Шаг 5.1. Строим матрицы $\mathbf{P}_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{P}_{l(\mathbf{d})}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}_{l(\mathbf{d})}^{\Theta}$ для всех Γ_l , $k = \overline{1, K_l}$ и узлов $\zeta(\mathbf{d})$.

Шаг 5.2. Находим частные оценки $\mathbf{A}_{kl(\mathbf{d})}^*$, $\mathbf{S}_{kl(\mathbf{d})}^*$ и $\mathbf{B}_{l(\mathbf{d})}^*$, $\Theta_{l(\mathbf{d})}^*$ для всех Γ_l , $k = \overline{1, K_l}$ и узлов $\zeta(\mathbf{d})$.

Шаг 5.3. Находим невязки

$$\Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}) = \mathbf{H} - \sum_{k=l}^{K_l} \mathbf{S}_{kl(\mathbf{d})}^* - \Theta_{(\mathbf{d})}^*$$

для всех Γ_l и узлов $\zeta_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 5.4. Находим номер наилучшей гипотезы с использованием следующего критерия:

$$(l^*, \mathbf{d}^*) = \arg \min_{l, \mathbf{d}} \chi^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}) = \arg \min_{l, \mathbf{d}} [\Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d})]^T (\mathbf{K}^{\Xi})^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}).$$

Шаг 5.5. Находим результирующие оценки $\mathbf{A}_{kl^*(\mathbf{d}^*)}^*$, $\mathbf{S}_{kl^*(\mathbf{d}^*)}^*$ (где $k = \overline{1, K_l}$) и $\mathbf{B}_{l^*(\mathbf{d}^*)}^*$, $\Theta_{l^*(\mathbf{d}^*)}^*$ для гипотезы Γ_{l^*} и узла $\zeta_{(\mathbf{d}^*)}$.

Примечание: используемые в алгоритмах критерии оптимизации обеспечивают минимизацию влияния друг на друга соседних сигналов ансамбля, автокомпенсацию сингулярной помехи и сглаживание шума (потенциально сравнимое с возможностями РМНК).

Рассмотренные алгоритмы лишь иллюстрируют некоторые возможности развиваемого метода. Возможны и другие постановки задачи распознавания сигналов в условиях неопределенности с учетом особенностей назначения и применения рассматриваемой информационно-измерительной системы. Очевидно, что предложенный метод можно комплексировать и с традиционными вероятностными подходами в зависимости от условий функционирования системы.

Необходимость обработки наблюдений для множества гипотез приводит к необходимости организации 2^L каналов параллельных вычислений с просмотром всех узлов числовой сетки для нелинейных параметров полезных сигналов. Для современных информационно-измерительных систем, ориентированных на режим функционирования в реальном времени, предлагаемый метод может оказаться весьма перспективным.

5. Анализ разрешения сигналов

В силу линейности предлагаемого метода существенно упрощается нахождение корреляционных матриц ошибок оценивания. Так с учетом (18) и (26) для гипотезы Γ_{l^*} и узла $\zeta_{(\mathbf{d}^*)}$ находим выражение для корреляционной матрицы оценки

$$(30) \quad \mathbf{K}_{kl^*(\mathbf{d}^*)}^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_{kl^*(\mathbf{d}^*)}^{\mathbf{A}} \mathbf{K}^{\Xi} \left(\mathbf{P}_{kl^*(\mathbf{d}^*)}^{\mathbf{A}} \right)^T, \quad k = \overline{1, K_{l^*}},$$

$$\text{где } \mathbf{P}_{kl^*(\mathbf{d}^*)}^{\mathbf{A}} = \left[\Lambda_{kl^*(\mathbf{d}^*)} \mathbf{V}_{k^*(\mathbf{d}^*)} \left(\Psi_{k^*(\mathbf{d}^*)}^T \Lambda_{k^*(\mathbf{d}^*)} \mathbf{V}_{k^*(\mathbf{d}^*)} \right)^{-1} \right]^T.$$

Выражение (30) позволяет в каждом конкретном случае оценить потенциальные возможности метода с учетом требований, задаваемых к системе.

По аналогии с (30) можно записать математические формулы для корреляционных матриц $\mathbf{K}_{kl^*}^{\mathbf{S}}(\mathbf{d}^*)$, $\mathbf{K}_{l^*}^{\mathbf{B}}(\mathbf{d}^*)$ и $\mathbf{K}_{l^*}^{\Theta}(\mathbf{d}^*)$, характеризующих точности оценивания не только отсчетов сигналов и их спектральных коэффициентов, но и сингулярной помехи. Так, дисперсии ошибок оценивания скалярных координат a_{km} вектора $\mathbf{A}_k$ и отсчетов s_{kn} сигнала $\mathbf{S}_k$ находятся так:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{kml^*}^{\mathbf{A}}(\mathbf{d}^*)\right)^2 &= \left(\mathbf{P}_{kml^*}^{\mathbf{A}}(\mathbf{d}^*)\right)^T \mathbf{K}^{\Xi} \mathbf{P}_{kml^*}^{\mathbf{A}}(\mathbf{d}^*), \quad m = \overline{1, M_{kl^*}}, \\ \left(\sigma_{kml^*}^{\mathbf{S}}(\mathbf{d}^*)\right)^2 &= \left(\mathbf{P}_{kml^*}^{\mathbf{S}}(\mathbf{d}^*)\right)^T \mathbf{K}^{\Xi} \mathbf{P}_{kml^*}^{\mathbf{S}}(\mathbf{d}^*), \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Для оценки характеристик обнаружения, различения и разрешения сигналов, а также возможности сравнения развитого и известных методов, достаточно задаться наиболее подходящим (для рассматриваемых условий наблюдения) законом распределения шумов наблюдений (как правило, гауссовским), а также, при необходимости, некоторыми априорными вероятностями (например, появления полезных сигналов в наблюдении) и значениями рисков от неправильных решений. Это позволяет исследовать характеристики метода в рамках известных статистических подходов [4–10], для чего строятся соответствующие функции правдоподобия и на их основе находятся значения наиболее важных (для конкретной задачи) линейных функционалов (например, вероятностей ложной тревоги, правильного обнаружения и т. д.).

Применяя построенные матрицы $\mathbf{P}_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{P}_{l(\mathbf{d})}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}_{l(\mathbf{d})}^{\Theta}$ непосредственно к (4), получим набор трансформированных уравнений наблюдения, сохраняющих аддитивность, но с новыми шумами $\Xi_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{A}} \Xi$, $\Xi_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{S}} = \mathbf{P}_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{S}} \Xi$ и $\Xi_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_{kl(\mathbf{d})}^{\mathbf{B}} \Xi$, $\Xi_{kl(\mathbf{d})}^{\Theta} = \mathbf{P}_{kl(\mathbf{d})}^{\Theta} \Xi$.

Следовательно, зная закон распределения для исходного шума Ξ , несложно записать законы распределения для новых шумов и вычислить значения интересующих функционалов. Такой подход позволяет сравнивать разработанный метод не только с РМНК, но и известными статистическими подходами к распознаванию сигналов.

Анализ выражений (27) и (29) показывает, что в развиваемом методе требуется обращение матрицы Φ_{kl} размером $(\overline{M}_{kl} + J) \times (\overline{M}_{kl} + J)$, а также матрицы $\Psi_{kl}^T \mathbf{A}_{kl} \mathbf{V}_{kl}$ размером $M_{kl} \times M_{kl}$.

Применительно к РМНК для фиксированного k предполагается обращение матрицы большего размера $(M_{1l} + M_{2l} + \dots + M_{K_l} + J) \times (M_{1l} + M_{2l} + \dots + M_{K_l} + J)$.

Очевидно, что при плохой обусловленности обрабатываемых матриц предлагаемый метод может оказаться весьма эффективным в вычислительном плане.

Пусть модельное уравнение наблюдения имеет вид

$$\mathbf{H}_l = (\mathbf{S}_{kl} + \Delta \mathbf{S}_{kl}) + (\mathbf{X}_{kl} + \Delta \mathbf{X}_{kl}) + \Xi,$$

где $\Delta \mathbf{S}_{kl}$ и $\Delta \mathbf{X}_{kl}$ — добавки к сигналу и помехе, обусловленные учетом «хвостов», используемых функциональных рядов.

В этом случае для оценки a_{kml}^* (вычисленной без учета этих добавок) имеем

$$a_{kml}^* = (\mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}})^T \mathbf{H}_l = (\mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}})^T (\mathbf{S}_{kl} + \Delta \mathbf{S}_{kl}) + \\ + (\mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}})^T (\mathbf{X}_{kl} + \Delta \mathbf{X}_{kl}) + (\mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}})^T \Xi.$$

Соответственно для истинного значения a_{kml} справедливо представление

$$a_{kml} = (\mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}} + \Delta \mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}})^T (\mathbf{S}_{kl} + \Delta \mathbf{S}_{kl}) + (\mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}} + \Delta \mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}})^T (\mathbf{X}_{kl} + \Delta \mathbf{X}_{kl}),$$

где $\Delta \mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}}$ — добавка к столбцу весовых коэффициентов, необходимая для учета указанных «хвостов».

Если использовать символ математического ожидания $M\{\cdot\}$, то в качестве среднего значения методической ошибки можно принять величину

$$(31) \quad \overline{\Delta a_{kml}} = M\{a_{kml} - a_{kml}^*\} = \\ = (\Delta \mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}})^T (\mathbf{S}_{kl} + \Delta \mathbf{S}_{kl}) + (\Delta \mathbf{P}_{kml}^{\mathbf{A}})^T (\mathbf{X}_{kl} + \Delta \mathbf{X}_{kl}),$$

где учтено, что $M\{\Xi\} = [\mathbf{0}]_{N \times 1}$.

Используя (31) совместно с (30), можно подобрать необходимые параметры развиваемого метода, обеспечивающие минимизацию результирующей ошибки оценивания в каждом конкретном случае.

Необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи оценивания по аналогии с [1–3] требуют невырожденности и соблюдения некоторых ограничений на ранги ряда матриц. Выполнение заданных условий на практике обеспечивается рациональным выбором используемых функциональных базисов, числа степеней свободы в моделях сигналов и сингулярной помехи, а также заданием соответствующих условий наблюдения. Все эти вопросы относятся к планированию вычислительного эксперимента и далее не рассматриваются, поскольку требуют отдельных исследований в каждом конкретном случае.

Для оценки вычислительной эффективности развитого метода достаточно воспользоваться результатами работы [2], в которой демонстрируется возможность реализации процедуры ОИНО на основе распределенной обработки данных. В качестве показателя вычислительной эффективности метода можно принять время, затрачиваемое на получение искомых оценок. Данное время определяется как быстродействием распределенной среды, общим числом операций, необходимых при реализации метода и способом программирования. В [2] показано, что поскольку процедура ОИНО не требует расширения пространства состояний, то реализуемые на ее основе методы оценивания позволяют достичь значительного выигрыша в вычислительной эффективности. В [2] также дана количественная оценка достигаемого выигрыша на конкретном примере.

6. Иллюстративный пример

Пример искусственно выбран таким, чтобы он был достаточно простым и, в тоже время, наглядно демонстрировал достигаемый вычислительный эффект развиваемого метода по сравнению с РМНК (ограничимся *алгоритмом оценивания* (1)). Для этой цели использованы исходные данные, приводящие к задаче оценивания параметров сигналов с плохо обусловленными матрицами.

Примем: $K = 2$, $\mathbf{H} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{\Theta} + \mathbf{\Xi}$, где $\mathbf{A}_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}]^T$, $\mathbf{\Theta}_1(t) = [1, t^2, t^3, t^5]^T$, $M_1 = 4$, $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{\Theta}_1$, $\mathbf{A}_2 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}]^T$, $\mathbf{\Theta}_2(t) = [t, t^4, t^6]^T$, $M_2 = 3$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{A}_2^T \mathbf{\Theta}_2$, $\mathbf{B} = [b_1, b_2]^T$, $\mathbf{\Omega}(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t)]^T$, $J = 2$, $\mathbf{\Psi}_1 =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^5 \\ 1 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N^2 & t_N^3 & t_N^5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & t_1^4 & t_1^6 \\ 1 & t_2^4 & t_2^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N^4 & t_N^6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1(t_1) & \omega_2(t_1) \\ \omega_1(t_2) & \omega_2(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \omega_1(t_N) & \omega_2(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{Y}_1 \mathbf{C}_1,$$

$\mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2$, $\mathbf{Y}_1 = [\mathbf{\Psi}_2; \mathbf{\Omega}]$ — матрица размером $N \times 5$, $\mathbf{Y}_2 = [\mathbf{\Psi}_1; \mathbf{\Omega}]$ — матрица размером $N \times 6$, $\mathbf{C}_1 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_1, b_2]^T$, $\mathbf{C}_2 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, b_2]^T$.

При формировании уравнения наблюдения полагалось: $a_{11} = 10^3$, $a_{12} = 50$, $a_{13} = 10$, $a_{14} = 3$, $a_{21} = -2 \cdot 10^3$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = 1$, $\mathbf{K}^{\Xi} = \text{diag}[\sigma_n^2, n = \overline{1, N}]$, $\sigma_n^2 = \sigma^2 = 4 \cdot 10^{-2}$, $t_{t+1} - t_n = 0.5$, $N = 300$.

Мерой качества оценивания (в процентах) служит величина $\delta a_{km} = 10^2 |a_{km}^* - a_{km}| / |\bar{a}_{km}^*|$, где $\bar{a}_{km}^* = \max \{a_{km}^*, |a_{km}|\}$. Сингулярная помеха задавалась в виде линейной комбинации из двух базисных функций

$$\theta(t, b_1, b_2) = b_1 \omega_1(t) + b_2 \omega_2(t) = b_1 \sin(\alpha_1 t) + b_2 \exp(\alpha_2 t),$$

где α_1 и α_2 — произвольные числа.

Параметры помехи выбирались случайным образом (их конкретные значения не принципиальны, поскольку в данном методе достигается полная автокомпенсация помехи при любых значениях параметров).

Все расчеты проводились с точностью до 15 разрядов путем усреднения результатов, полученных в ходе тысячи экспериментов. Применительно к развиваемому методу получены следующие оценки для координат векторов $\delta \mathbf{A}_1 = [\delta a_{1m}, m = \overline{1, 4}]^T$ и $\delta \mathbf{A}_2 = [\delta a_{2m}, m = \overline{1, 3}]^T$:

$$\begin{aligned} \delta a_{11} &= 1,585, & \delta a_{12} &= 0,621, & \delta a_{13} &= 0,082, & \delta a_{14} &= 1,967 \cdot 10^{-5}, \\ \delta a_{21} &= 1,643 \cdot 10^{-4}, & \delta a_{22} &= 1,409 \cdot 10^{-7}, & \delta a_{23} &= 2,756 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

В свою очередь, для РМНК:

$$\begin{aligned} \delta a_{11} &= 43,053, & \delta a_{12} &= 24,902, & \delta a_{13} &= 2,686, & \delta a_{14} &= 0,138, \\ \delta a_{21} &= 2,968 \cdot 10^{-3}, & \delta a_{22} &= 2,906 \cdot 10^{-6}, & \delta a_{23} &= 3,846 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Видим, что достигается существенный выигрыш по точности, а оценки для РМНК (в рассматриваемых условиях) оказываются малоприменимыми.

Сравнительный анализ показывает, что разработанный метод позволяет также существенно снизить вычислительную погрешность оценивания, что обусловлено декомпозицией и снижением размерности вычислительной процедуры. В ходе расчетов с использованием евклидовой нормы определялись числа обусловленности (ν_1 и ν_2) обрабатываемых матриц $\Psi_1^T \Lambda_1 V_1$ и $\Psi_2^T \Lambda_2 V_2$, а также число ν обусловленности соответствующей объединенной матрицы РМНК. В итоге $\nu_1 = 5,283 \cdot 10^{15}$, $\nu_2 = 1,276 \cdot 10^{14}$ и $\nu = 4,537 \cdot 10^{26}$.

Кроме того, подсчитывалось количество операций сложения и умножения, необходимых для реализации РМНК и разработанного метода. Относительный вычислительный выигрыш составил 1,35 раза, что также подтверждает эффективность нового метода.

В ходе численного эксперимента рассчитывались также корреляционные матрицы K_1^A и K_2^A (по аналогии с (30)). В целях сокращения записей приводятся лишь диагональные элементы этих матриц

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}^A)^2 &= 0,031, & (\sigma_{12}^A)^2 &= 3,631 \cdot 10^{-6}, & (\sigma_{13}^A)^2 &= 2,306 \cdot 10^{-9}, & (\sigma_{14}^A)^2 &= 0, \\ (\sigma_{21}^A)^2 &= 2,287 \cdot 10^{-5}, & (\sigma_{22}^A)^2 &= 0, & (\sigma_{23}^A)^2 &= 0. \end{aligned}$$

В тоже время для РМНК

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}^A)^2 &= 0,755, & (\sigma_{12}^A)^2 &= 7,002 \cdot 10^{-4}, \\ (\sigma_{13}^A)^2 &= 1,236 \cdot 10^{-6}, & (\sigma_{14}^A)^2 &= 4,781 \cdot 10^{-14}, \\ (\sigma_{21}^A)^2 &= 0,073 \cdot 10^{-6}, & (\sigma_{22}^A)^2 &= 5,096 \cdot 10^{-10}, & (\sigma_{23}^A)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку оба сравниваемых метода являются линейными и оптимальными, то дисперсии ошибок оценивания не должны отличаться (если не учитывать погрешностей вычислений), т.е. методы наследуют одну и ту же потенциальную точность оценивания. Однако, как показывают расчеты, в силу указанных выше причин оценки дисперсий для разработанного метода существенно меньше аналогичных оценок для РМНК. Это также связано с тем, что погрешности вычислений по заданным формулам существенно зависят от размерности обрабатываемых плохо обусловленных матриц.

7. Заключение

Развитый метод может эффективно сочетаться с алгоритмами ортогональных разложений [13] и решения некорректных задач [22, 23]. Возможность декомпозиции и распараллеливания вычислительных процедур позволяет более эффективно решать целый круг прикладных задач, связанных с параллельной обработкой измерений в различных областях. Полученные алгоритмы разрешения сигналов в условиях сингулярных помех несложно реали-

зовать в специализированных ЭВМ, ориентированных на информационно-измерительные комплексы, предназначенные для функционирования в реальном времени.

Получены компактные аналитические выражения, позволяющие заранее, под конкретную прикладную задачу, подобрать необходимые модели сигналов и помех, а также количественные значения их параметров, при которых развитый метод обеспечит достижение своих потенциальных возможностей. Метод относится к классу линейных, поэтому все процедуры сводятся к простейшим математическим операциям над векторами и матрицами, а также допускает возможность комбинирования с традиционными подходами к решению прикладных задач, связанных с оптимальной и квазиоптимальной обработкой измерений.

Полученные результаты можно применять и к классу динамических систем с измеряемым выходом, если воспользоваться известным комбинированным методом опорных интегральных кривых и обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания [3, 24, 25]. В этом случае состояние и выход таких систем можно также представлять в виде конечной линейной оболочки заданного функционального базиса, если использовать заранее построенное семейство опорных кривых или поверхностей необходимого объема.

В следующих публикациях по данной теме целесообразно более подробно исследовать эффективность метода с учетом ограничений, накладываемых на модели сигналов и сингулярной помехи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задачу оптимального оценивания коэффициента a_{km} будем решать методом множителей Лагранжа путем нахождения экстремума следующей функции

$$(П.1) \quad \begin{aligned} F(\mathbf{P}_{km}^A, \gamma_{km}, \boldsymbol{\eta}_{km}) &= (\mathbf{P}_{km}^A)^T \mathbf{K}^\Xi \mathbf{P}_{km}^A + \\ &+ \gamma_{km}^T \mathbf{Y}_k^T \mathbf{P}_{km}^A + \left[(\mathbf{P}_{km}^A)^T \boldsymbol{\Psi}_k - \mathbf{E}_{km}^T \right] \boldsymbol{\eta}_{km}, \end{aligned}$$

$\gamma_{km} = [\gamma_{kmn}, n = \overline{1, \overline{M_k + J}}]^T$ и $\boldsymbol{\eta}_{km} = [\eta_{kmn}, n = \overline{1, \overline{M_k}}]^T$ — векторные множители Лагранжа, соответствующие условиям несмещенности (22) и инвариантности (23).

Дифференцируя функцию (П.1) по всем аргументам, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \partial F / \partial \mathbf{P}_{km}^A &= 2\mathbf{K}^\Xi \mathbf{P}_{km}^A + \mathbf{Y}_k \gamma_{km} + \boldsymbol{\Psi}_k \boldsymbol{\eta}_{km} = [\mathbf{0}]_{n \times 1}, \\ \partial F / \partial \gamma_{km} &= \mathbf{Y}_k^T \mathbf{P}_{km}^A = [\mathbf{0}]_{(\overline{M_k + J}) \times 1}, \\ \partial F / \partial \boldsymbol{\eta}_{km} &= \boldsymbol{\Psi}_k^T \mathbf{P}_{km}^A - \mathbf{E}_{km} = [\mathbf{0}]_{M_k \times 1}. \end{aligned}$$

Введем следующие матрицы:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_k &= (\mathbf{K}^\Xi)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k, & \bar{\mathbf{V}}_k &= (\mathbf{K}^\Xi)^{-1} \mathbf{Y}_k, \\ \boldsymbol{\Phi}_k &= \boldsymbol{\Psi}_k^T \mathbf{V}_k, & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k &= \mathbf{Y}_k^T \bar{\mathbf{V}}_k, \\ \mathbf{Z}_k &= \mathbf{Y}_k^T \mathbf{V}_k, & \bar{\mathbf{Z}}_k &= \boldsymbol{\Psi}_k^T \bar{\mathbf{V}}_k.\end{aligned}$$

С учетом полученной системы уравнений и принятых обозначений находим строку весовых коэффициентов

$$(П.2) \quad \mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = 2^{-1} (\mathbf{V}_k \boldsymbol{\eta}_{km} - \bar{\mathbf{V}}_k \boldsymbol{\gamma}_{km}).$$

Умножая левую и правую части (П.2) слева на матрицу $\mathbf{Y}_k^T$ и учитывая условие инвариантности (23), после несложных преобразований находим

$$(П.3) \quad \boldsymbol{\gamma}_{km} = \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \boldsymbol{\zeta}_{km}.$$

Аналогичным умножением (П.2) на матрицу $\boldsymbol{\Psi}_k^T$ и учитывая условие несмещенности (22) получаем

$$(П.4) \quad \boldsymbol{\eta}_{km} = 2\boldsymbol{\Phi}_k (\mathbf{E}_{km} + 2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_k \boldsymbol{\gamma}_{km}).$$

Разрешая (П.3) и (П.4) относительно $\boldsymbol{\gamma}_{km}$ и $\boldsymbol{\eta}_{km}$, имеем

$$(П.5) \quad \boldsymbol{\gamma}_{km} = 2\bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \left([\mathbf{E}]_{M_k \times M_k} - \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \mathbf{E}_{km},$$

$$(П.6) \quad \boldsymbol{\eta}_{km} = 2 \left([\mathbf{E}]_{M_k \times M_k} - \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \mathbf{E}_{km}.$$

Подставляя (П.5) и (П.6) в (П.2), получаем

$$(П.7) \quad \mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{V}_k - \bar{\mathbf{V}}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \right) \left([\mathbf{E}]_{M_k \times M_k} - \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \mathbf{E}_{km}.$$

Вводя обозначение $\mathbf{L}_k = [\mathbf{E}]_{N \times N} - \bar{\mathbf{V}}_k \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Y}_k^T$, формулу (П.7) запишем в следующем компактном виде (24). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булычев Ю.Г., Елисеев А.В., Бородин Л.И. и др. Обобщенное инвариантно-несмещенное маскирование и оценивание информационных процессов в условиях мультиструктурных помех // АиТ. 2010. № 4. С. 140–149.
2. Булычев Ю.Г., Елисеев А.В. Вычислительная схема инвариантно-несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
3. Булычев Ю.Г. Некоторые аспекты идентификации динамических объектов при некорректных условиях наблюдения // АиТ. 2020. № 6. С. 131–152.

4. *Френкс Л.* Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1969.
5. *Ширман Я.Д.* Разрешение и сжатие сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
6. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
7. *Фалькович С.В., Хомяков Э.Н.* Статистическая теория радиосистем. М.: Радио и связь, 1981.
8. *Черняк В.С., Заславский Л.П., Осипов Л.В.* Многопозиционные радиолокационные станции и системы // Зарубежная радиоэлектроника. 1987. № 1. С. 9–69.
9. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014.
10. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
11. *Богданович В.А., Вострецов А.Г.* Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. М.: Физматлит, 2004.
12. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
13. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
14. *Булычев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
15. *Булычев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др.* Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение – Полет, 2016.
16. *Ежова Н.А., Соколинский Л.Б.* Обзор моделей параллельных вычислений // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2019. Т. 8. № 3. С. 58–91.
17. *Иванов А.И., Шпилевая С.Г.* О квантовых параллельных вычислениях // Вестник Балт. ун-та им. Канта. Серия «Физико-математические и технические науки». 2021. № 2. С. 95–99.
18. *Sutti C.* Lokal and global optimization by parallel algorithms for MIMD systems // Ann. Oper. Res. 1984. V. 1. P. 151–164.
19. *Price W.L.* Global optimization algorithms for a CAD workstation // J. Optim. Theory Appl. 1987. V. 55. P. 133–146.
20. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В.* Алгоритмы решения уравнений Риккати в задачах управления нестационарными объектами // Изв. РАН. ТиСУ. 1997. № 4. С. 102–110.
21. *Булычев Ю.Г., Манин А.А.* Численно-аналитический подход к решению краевой задачи принципа максимума Понтрягина // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 2. С. 118–126.
22. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
23. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989.
24. *Булычев Ю.Г.* Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1991. Т. 31. № 9. С. 1305–1319.

25. Булычев Ю.Г. Численно-аналитического интегрирование дифференциальных уравнений с использованием обобщенной интерполяции // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1994. Т. 34. № 4. С. 520–532.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 26.06.2023

После доработки 06.12.2023

Принята к публикации 20.01.2024

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2024 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru),
Е.А. РЯБУШЕВ (lispandhaskell@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОИСК СУБОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО¹

Рассматривается задача составления плана обхода прямолинейно движущихся в одну точку целей для простых движений перехватчика (коммивояжера). Предлагаются новый критерий задачи на основе начального разбиения области возможного перехвата, а также алгоритм поиска субоптимального плана обхода на основе построения дерева поиска решения методом Монте-Карло. Разработана численная реализация алгоритма, проведено моделирование и статистически проанализированы полученные планы обхода целей.

Ключевые слова: динамическая задача коммивояжера, перехват в простых движениях, комбинаторная оптимизация, алгоритм Монте-Карло.

DOI: 10.31857/S0005231024020065, EDN: UCSGKV

1. Введение

Настоящая работа посвящена проблеме предотвращения достижения заданной точки пространства прямолинейно движущимися атакующими целями. Защищать точку предлагается с помощью перехватчика, который способен свободно перемещаться в пространстве и обходить атакующие цели. При этом ключевую роль играет выбор наилучшего порядка обхода множества приближающихся целей. Данная задача уже рассматривалась в [1], где обсуждались понятия опасности, удобства и сложности перехвата целей и предлагались векторные критерии качества планов обхода целей. В [1] предлагался интеллектуальный алгоритм в общем случае на основе полного перебора, способный эффективно находить планы обороны защищаемой точки одним перехватчиком от атак до двадцати целей. В настоящей работе предлагается другой алгоритм, способный находить субоптимальный план перехвата, который справляется с задачей при наличии более двадцати целей с приемлемой эффективностью.

Известная в литературе «динамическая задача коммивояжера» (ДЗК) [2, 3] или Moving Targets Traveling Salesman Problem (MTTSP) [4, 5] является близкой по смыслу к проблеме, исследуемой в настоящей работе. ДЗК обобщает задачу коммивояжера (ЗК), и в 1972 г. была доказана NP-полнота за-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

дачи о гамильтоновом цикле, что подразумевает NP-полноту ЗК и, как следствие, ДЗК [6]. На данный момент не существует эффективных методов точного решения ДЗК, а сама задача находится на начальных этапах исследования [7]. Из этого следует, что в общем случае точное построение плана перехвата может оказаться весьма затруднительным при большом числе целей, и поэтому разумным является вопрос о быстром поиске суб-оптимального решения. В настоящий момент существуют подходы к построению таких решений ДЗК на основе генетических алгоритмов, о которых более подробно можно прочитать, например, в [7] или локальной эвристической оптимизации [8].

Одним из методов поиска субоптимальных решений для задач дискретной оптимизации является алгоритм поиска по дереву Монте-Карло (Monte Carlo Tree Search) [9, 10]. Этот метод получил широкую известность после его успешного применения для игры в Го в рамках проекта AlphaGo [9], где поиск деревом Монте-Карло применялся совместно с нейросетевым обучением. Помимо антагонистических игр, этот алгоритм в различных вариациях применялся и к одиночным играм, которые можно трактовать как задачи дискретной оптимизации [10, 11]. Дополнительно, алгоритм поиска по дереву Монте-Карло предлагает удобную базу для применения нейросетевых подходов к задачам дискретной оптимизации. Так, нейросетевое обучение может применяться для вычисления эвристических функций полезности и для построения распределений вероятности, по которым строятся случайные продолжения. Таким образом, базовый алгоритм поиска по дереву позволяет разбить исходную задачу на более простые составляющие, которые уже могут решаться обученными нейросетями. Более подробное обсуждение возможных способов сочетания нейросетевых подходов с поиском по дереву Монте-Карло можно найти в [9, 12, 13].

В данной работе применяются основные идеи этого алгоритма к рассматриваемой задаче защиты точки от проникновения в нее движущихся целей. Для этого используется модель простых движений для перехватчика, поскольку дистанции при перемещении между целями являются достаточно великими по сравнению с реальным радиусом разворота перехватчика. В таких предположениях учет маневренности в задаче планирования обхода целей не оказывает влияния на структуру оптимального плана, что позволяет перейти от дискретно-непрерывной задачи оптимизации к дискретной. Еще одним отличием текущей работы от известных в литературе постановок является критерий задачи, который имеет смысл для приложений на практике и оптимальное значение которого в общем случае достижимо на наборе планов, т.е. является неединственным. Таким образом, основное предложение данной работы состоит в применении нового подхода, изначально разработанного для решения игровых задач, к проблеме построения субоптимального решения для варианта динамической задачи коммивояжера с защитой охраняемой точки от приближающихся целей. Предлагаемый здесь подход позволяет получать такие решения способом, который ранее для данных целей не приме-

нялся и может служить альтернативой более известным подходам на основе генетических алгоритмов, которые ранее применялись в подобных задачах.

2. Математическая модель и постановка задачи

Математическая модель и постановка задачи, используемые в настоящей работе, совпадают с предложенными в [1], однако для полноты изложения приводим их описание в данном разделе.

2.1. Модель движения целей и перехватчика

Полагаем, что перехватчику требуется перехватить n целей, которые прямолинейно движутся в одной плоскости со скоростями из диапазона $[v_{\min}, v_{\max}]$. Защищаемая точка расположена на плоскости в начале координат, а цели появляются на внешней границе круга радиуса R в слое толщиной $2\Delta R$. Перехватчик при этом может перемещаться в простых движениях со скоростью $v(t) < V$, причем $V > v_{\max}$.

Начальные положения целей задаются радиус-векторами $\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0$, где $\mathbf{r}_i^0 = (x_i^0, y_i^0)$. Скорости целей $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ полагаем известными и задаем их движение линейными соотношениями

$$(1) \quad \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i^0 + \mathbf{v}_i t.$$

Также считаем, что траектории всех целей проходят через начало координат и, таким образом, время подлета i -цели к защищаемой точке дается выражением

$$(2) \quad t_i(t) = \frac{|\mathbf{r}_i(t)|}{|\mathbf{v}_i|}.$$

Величину, обратную к времени подлета, будем называть опасностью цели, для чего введем обозначение:

$$(3) \quad d_i(t) = t_i^{-1}(t) = \frac{|\mathbf{v}_i|}{|\mathbf{r}_i(t)|}.$$

Таким образом, начальная тактическая обстановка задается начальным расположением всех целей совместно с их векторами скорости, а также указанием начального положения перехватчика.

Движение перехватчика определяется системой дифференциальных уравнений

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}_a = v(t) \sin \psi(t) \\ \dot{y}_a = v(t) \cos \psi(t) \end{cases},$$

где $\mathbf{r}_a = (x_a, y_a)$ – положение перехватчика, $v(t)$ – модуль его скорости, а $\psi(t)$ – управление направлением движения. Минимальное время τ_i , необходимое перехватчику на перехват i -цели, находится из квадратного уравнения

$$(5) \quad (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_a + \mathbf{v}_i \tau)^2 = V^2 \tau^2$$

как его минимальный положительный корень

$$(6) \quad \tau_i(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = \frac{\sqrt{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_a)^2(V^2 - \mathbf{v}_i^2) + ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{v}_i)^2} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{v}_i}{V^2 - \mathbf{v}_i^2}.$$

Таким образом, функция перехвата цели является решением задачи наискорейшего перехвата одиночной цели. Данной модели достаточно для поиска оптимального плана для перехватчика, движущегося в классе простых движений, поскольку для нее справедливы принципы неоптимальности простоя и движения на максимальной скорости. В [1] это было доказано для оптимизации плана перехвата по числу пропущенных целей и времени перехвата. В текущей работе будет использоваться другой критерий оптимизации, однако модель наискорейшего перехвата одиночной цели все равно будет использоваться.

2.2. План перехвата

План π по перехвату k целей задается упорядоченным списком $[\pi_1, \dots, \pi_k]$, где π_i – номер цели, которая перехватывается в i -очередь. Пространство всех планов по перехвату k целей совпадает с множеством

$$(7) \quad \Pi_k = \{[\pi_1, \dots, \pi_k] : \forall i = 1, \dots, k \rightarrow \pi_i \in \{1, \dots, n\}, \pi_i \neq \pi_j \longleftrightarrow i \neq j\}.$$

Например, для общего количества из $n = 2$ целей определены пространства планов $\Pi_0 = \{[\]\}$, $\Pi_1 = \{[1], [2]\}$, $\Pi_2 = \{[1, 2], [2, 1]\}$. Наконец, пространство всех планов перехвата для n целей дается совокупностью

$$(8) \quad \Pi = \bigcup_{k=0}^n \Pi_k$$

всех планов конечной длины.

Однако часть планов из Π может быть некорректна, поскольку для этих планов могут найтись цели, которые достигнут защищаемой точки, прежде чем их перехватят. Формализуем данную идею, введя для произвольного плана $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_k]$ время, необходимое на его выполнение:

$$(9) \quad T(\pi) = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \tau_i(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i), & k = 1; \\ t + \tau_i(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i), & k > 2, \quad t = T([\pi_1, \dots, \pi_{k-1}]). \end{cases}$$

Теперь, следуя [1], пространство всех допустимых планов может быть определено как множество

$$(10) \quad \Pi_A = \{\pi \in \Pi : \forall j \in \{1, \dots, k\} : T([\pi_1, \dots, \pi_j]) \leq t_{\pi_j}\}$$

таких планов, для которых перехват целей происходит, прежде чем они достигают защищаемой точки.

Для дальнейшего удобства введем дополнительное определение. Под тактической обстановкой, связанной с планом π , понимается расположение перехватчика $\mathbf{r}_a$ и всех целей $\mathbf{r}_i$; $i = 1, \dots, n$, $i \notin \pi$, не вошедших в план π на момент его завершения. Обращаем внимание, что для плана $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_k]$ со временем выполнения $t_\pi = T(\pi)$ величины, составляющие тактическую обстановку, вычисляются по формулам

$$(11) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_a = r_{\pi_k}(t_\pi) \\ \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t_\pi), \quad i = 1, \dots, n, \quad i \notin \pi, \end{cases}$$

поскольку после завершения плана положение перехватчика и остальных целей определяется местом и временем достижения последней цели в π соответственно.

2.3. Критерий качества планов перехвата

Для постановки задачи оптимизации необходимо сформулировать критерии качества планов перехвата. Для этого на множестве допустимых планов Π_A зададим векторную функцию потерь

$$(12) \quad J[\pi] = (n_1[\pi], n_2[\pi], n_3[\pi], n_4[\pi]),$$

где

$$n_1[\pi] = \sum_{j=1}^n I(j \notin \pi)$$

есть количество целей, пропущенных по итогу плана π (I – индикатор выполнения предиката), а

$$\begin{aligned} n_2[\pi] &= \sum_{j=1}^n I(|\mathbf{r}_j(t_{\pi_j})| \in [0, R/4]), \\ n_3[\pi] &= \sum_{j=1}^n I(|\mathbf{r}_j(t_{\pi_j})| \in (R/4, R/2]), \\ n_4[\pi] &= \sum_{j=1}^n I(|\mathbf{r}_j(t_{\pi_j})| \in (R/2, R]) \end{aligned}$$

равны числу целей, которые на момент перехвата по плану π приблизились к защищаемой точке на расстояния от 0 до $\frac{R}{4}$, от $\frac{R}{4}$ до $\frac{R}{2}$, от $\frac{R}{2}$ до R соответственно. Заметим, что данные диапазоны расстояний являются параметрами задачи и могут быть выбраны и уточнены для конкретных постановок. Также обратим внимание, что сравнение двух планов перехвата по данному критерию осуществляется согласно стандартному словарному упорядочиванию.

Минимизация потерь по данному критерию равносильна перехвату как можно большего числа целей на как можно большем удалении от защищаемой точки. Действительно, чем больше целей было пропущено к защищаемой

точке, тем хуже; при одинаковом количестве пропущенных целей необходимо сравнивать число целей, перехваченных вблизи защищаемой точки, и чем их меньше, тем лучше; при прочих равных условиях, необходимо сравнивать количество целей, перехваченных на среднем и большом удалении от защищаемой точки. Причем в качестве характерной меры масштаба задачи разумно принять радиус R области, на границе которой появляются цели.

Поскольку для любого допустимого плана $\pi \in \Pi_A$ верно, что

$$n = n_1[\pi] + n_2[\pi] + n_3[\pi] + n_4[\pi],$$

то общее число целей n является верхней границей для $n_1[\pi], \dots, n_4[\pi]$. Поэтому значение функции потерь $J[\pi]$ можно рассматривать как запись числа в позиционной системе счисления с основанием $n + 1$, что позволяет ввести числовой эквивалент функции потерь:

$$(13) \quad J_n[\pi] = n_1[\pi](n + 1)^3 + n_2[\pi](n + 1)^2 + n_3[\pi](n + 1) + n_4[\pi].$$

Эти две функции потерь равносильны, так как $J[\pi] < J[\pi'] \iff J_n[\pi] < J_n[\pi']$. Для дальнейшего описания введем также нормированную функцию качества

$$(14) \quad J_q[\pi] = \frac{n(n + 1)^3 + 1}{n(n + 1)^3 - 1} - \frac{2J_n[\pi]}{n(n + 1)^3},$$

которая планам с наименьшей возможной функцией потерь $(0, 0, 0, n)$ ставит оценку 1, а с наихудшей $(n, 0, 0, 0) - 1$.

Теперь оптимизационную задачу можно сформулировать следующим образом: по начальной обстановке найти допустимый план перехвата π^* с минимально возможной функцией потерь $J_q[\pi]$:

$$(15) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0 \\ \mathbf{v}_1^0, \dots, \mathbf{v}_n^0 \end{cases} \longrightarrow \pi^* \in \Pi_A : \pi^* = \operatorname{argmin} J_q[\pi].$$

Поскольку найти точное решение вышеуказанной задачи весьма затруднительно, разумной также является задача поиска субоптимальных планов, на которых функция потерь принимает значение, близкое к оптимальному.

3. Алгоритм Монте-Карло для построения субоптимального плана перехвата

3.1. Принципиальная схема алгоритма

Для поиска субоптимального плана предлагается алгоритм поиска по дереву Монте-Карло. Его основная идея состоит в построении дерева поиска решения посредством Монте-Карло симуляций. Под деревом поиска понимается граф планов $S = (W, E)$, где W и E – множества его вершин и ребер

соответственно. Вершины $w \in W$ помечаются допустимыми планами перехвата $\pi_w \in \Pi_A$, причем вершина w_2 соединяется ребром с w_1 , только если план π_{w_2} продолжает план π_{w_1} ровно на одну цель:

$$(16) \quad (w_1, w_2) \in E \iff \pi_{w_1} = [\pi_1, \dots, \pi_{k-1}] \wedge \pi_{w_2} = [\pi_1, \dots, \pi_{k-1}, \pi_k].$$

Для удобства назовем вершину $w_0 \in W$, которая помечена пустым планом $[\]$, корнем дерева, а потомками вершины $w \in W$ – такие $w' \in W$, для которых план $\pi_{w'}$ есть продолжение π_w . Заметим, что для любой $w \in W$ существует единственный путь, который соединяет w с корнем. Таким образом, $w \in W$ всегда лежит на пути от корня до любого из своих потомков.

Базовый цикл алгоритма состоит из трех шагов:

1. Спуск по дереву от корня $w_0 \in W$ до вершины $w \in W$, которая не посещалась алгоритмом на предыдущих итерациях.
2. Построение для вершины w случайного продолжения плана перехвата π_w , соответствующего данной вершине.
3. Оценка полученного продолжения по функции качества (14) и поднятие от последнего результата к корню дерева.

Далее, пусть p_w задает количество проходов алгоритма через вершину $w \in W$ при спусках по дереву, а q_w – это средняя оценка случайных планов, построенных для вершины $w \in W$ и ее потомков. Значение p_w возрастает на единицу при каждом проходе алгоритма через $w \in W$ на очередном спуске. А величина q_w пересчитывается при поднятии случайной оценки от одного из потомков $w \in W$ обратно к корню. Поэтому количество случайных оценок, которые усредняются для вычисления q_w , в точности равняется p_w . Например, для корня дерева q_{w_0} совпадает со средней оценкой всех построенных случайных планов. Таким образом, каждая итерация базового цикла приводит

1. К просмотру одной новой вершины $w_1 \in W$ дерева поиска, для которой $p_{w_1} = 0$ до этого момента.
2. К построению для w_1 случайного продолжения плана перехвата π_{w_1} , соответствующего данной вершине.
3. К пересчету чисел p_w и q_w для всех вершин $w \in W$ дерева поиска, находящихся на пути от корня w_0 до w_1 .

Базовый цикл повторяется до исчерпания вычислительного лимита, отведенного на решение задачи. Затем по результатам накопленной статистики по числам p_w и q_w строится итоговый план перехвата. Поэтому для полного описания алгоритма необходимо указать следующие его особенности:

1. Метод спуска по дереву и использованные для его построения эвристики.
2. Способ случайного продолжения плана π_w для произвольной вершины $w \in W$ дерева поиска.
3. Механизм извлечения результирующего плана из дерева поиска по числам p_w и q_w .

Это будет выполнено в следующих подразделах.

3.2. Метод спуска по дереву поиска на основе функции полезности

Спуск по дереву поиска начинается от корня $w_0 \in W$ и осуществляется следующим образом.

1. Если текущая вершина w ранее не посещалась, т.е. если $p_w = 0$, то спуск останавливается на w и алгоритм переходит к построению случайного продолжения для плана π_w .
2. Иначе необходимо рассмотреть все смежные вершины w_i , т.е. такие $w_i \in W$, что $\exists(w, w_i) \in E$, и перейти из них к доставляющей максимум функции полезности

$$(17) \quad u(w_i, w) = q_{w_i} + (\theta(w_i) + P(w, w_i)) \frac{\sqrt{2p_w}}{1 + p_{w_i}}.$$

Здесь $\theta(w_i)$ и $P(w, w_i)$ – это две эвристики, задающие направление спуска совместно с p_w и q_w . Функция $\theta(w)$ оценивает предполагаемое наилучшее продолжение плана π_w в диапазоне $[-1; 1]$, а $P(w, w_i)$ – вероятность того, что данное продолжение достигается в направлении w_i .

Для произвольной вершины $w \in W$

$$p_w = 1 + \sum_{w_i} p_{w_i},$$

где сумма берется по всем w_i , смежным с w . Поэтому в (17) множитель $\frac{\sqrt{2p_w}}{1+p_{w_i}}$, с которым $\theta(w_i)$ и $P(w, w_i)$ входят в $u(w_i, w)$, убывает с ростом p_{w_i} . Таким образом, при спуске к потомку w_i с большим p_{w_i} главную роль играет высокая оценка q_{w_i} . В свою очередь, при малом p_{w_i} среднее q_{w_i} не должно играть роли из-за малости выборки, по которой оно находится. В этом случае $\theta(w_i)$ и $P(w, w_i)$ приобретают в (17) больший вес по сравнению с оценкой q_{w_i} .

Вместо функции полезности (17) также может использоваться функция

$$u(w_i, w) = q_{w_i} + \frac{\sqrt{2} \ln(p_w)}{p_{w_i}},$$

где при $p_{w_i} = 0$ вершине w_i приписывается бесконечная полезность. Данный вид функции полезности называется верхней границей уверенности (upper confidence bounds) и был впервые предложен в [14] для поиска оптимальной стратегии при игре в многорукого бандита. Приложение данной функции полезности к проблеме построения алгоритма поиска по дереву Монте-Карло обсуждалось в [15]. Однако для задачи более эффективной оказалась функция полезности в виде (17), которая использовалась в [9] для игры в Го, за счет наличия в ней эвристических функций.

Теперь перейдем к конкретным функциям $\theta(w)$ и $P(w, w_i)$, которые использовались при построении алгоритма. Для этого введем понятие уточненной оценки $\hat{J}_q[\pi]$ для произвольного плана π , под которой будем понимать

оценку $J_q[\pi]$, найденную по точкам возможного прямого перехвата целей по итогу плана π (для целей, вошедших в план π , в расчет берутся точки их перехвата по плану π). Тогда функцию $\theta(w)$ можно представить в следующем виде:

$$(18) \quad \theta(w) = \begin{cases} \hat{J}_q[\pi_w], & p_w > 0 \\ J_q[\pi_w], & p_w = 0. \end{cases}$$

Для вершин $w \in W$ с $p_w = 0$ в качестве $\theta(w)$ используется обычная оценка $J_q[\pi_w]$, а для всех остальных – уже уточненная $\hat{J}_q[\pi_w]$. Это экономит вычислительные ресурсы при нахождении функции полезности (17) на вершинах с малыми числами посещений p_w .

В свою очередь, для нахождения $P(w, w_i)$ выбрано нормированное на единицу распределение

$$(19) \quad P(w, w_i) = \frac{\tau^* - \tau_i + \tau_*}{\sum_{i=1}^n (\tau^* - \tau_i + \tau_*)},$$

где $\tau^* = \max_i \tau_i$, $\tau_* = \min_i \tau_i$, а τ_i – длительность прямого перехвата i -цели, который можно выполнить сразу после выполнения плана π_w .

3.3. Построение случайных продолжений

Для продолжения плана π_w на вершине $w \in W$ алгоритм использует распределение вероятностей

$$(20) \quad P(i \notin \pi_w) = \frac{d_i}{\sum_{i \notin \pi_w} d_i}$$

на целях, не вошедших в план π_w , где d_i – это опасности, введенные согласно (3). Затем план π^i последовательно достраивается назначением по одной дополнительной цели по данному распределению вероятности до полного исчерпания доступных для перехвата целей.

Другим способом построения продолжений для планов π_w является обход непосещенных целей в порядке убывающей опасности. Хотя данный способ продолжения не содержит в себе случайного элемента, в силу специфики данной задачи, он оказывается оптимальным для построения алгоритма.

3.4. Построение итогового плана перехвата алгоритмом Монте-Карло

Итоговый план перехвата строится по результирующему дереву поиска после исчерпания лимита вычислений (ограничения на число итераций или времени выполнения). Для этого алгоритм дополнительно отслеживает наилучшую оценку J_q^* из всех случайных оценок, построенных при повторении

базового цикла, и соответствующий данной оценке план перехвата π_q^* . После завершения вычислений алгоритм в качестве ответа возвращает найденный таким образом план π_q^* .

Данный подход позволяет внести ряд улучшений в принципиальную схему алгоритма, изложенную в разделе 3.1. Действительно, для вершин $w \in W$ дерева поиска становится возможной проверка на неоптимальность. Так, если для произвольной $w \in W$ оценка $J_q[\pi_w]$ плана π_w оказывается хуже наилучшей достигнутой оценки J_q^* , то, значит, среди продолжений плана π_w нет оптимального решения и эту ветвь поиска следует отсечь. Поэтому при спуске по дереву такие вершины следует пометить как неоптимальные. Также вершину $w \in W$ следует пометить как неоптимальную в случае, если все ее прямые потомки уже помечены как неоптимальные. Если в процессе спуска достигается некоторая вершина $w \in W$, которую по описанным выше принципам алгоритм помечает как неоптимальную, то процесс спуска поднимается на одну вершину к корню и затем заново принимает решение о направлении спуска, оптимизируя функцию полезности (17) по усеченному множеству вариантов. В качестве исходного значения оценки J_q^* в силу специфики задачи выбирается оценка плана π_d , который получается путем упорядочивания целей по опасностям от самой опасной к наименее опасной.

Текущая оптимальная оценка J_q^* также используется для оптимизации процедуры продолжения произвольного плана π . А именно, данное продолжение осуществляется, пока текущая оценка, достигнутая на этом продолжении, не становится хуже оптимальной. Если данная ветвь продолжения оказывается заведомо неоптимальной, продолжения прекращаются и к корню дерева поиска поднимается минимально возможная оценка -1 , что существенно понижает оценки вершин, для которых типичное продолжение оказалось неоптимальным.

Наконец, если два плана π_1 и π_2 отличаются друг от друга лишь порядком целей и при этом совпадают по последней цели, то тогда худший из них является заведомо неоптимальным и соответствующая ему вершина должна быть удалена из дерева поиска.

Таким образом, описанные выше меры позволяют отсекаать заведомо неоптимальные ветви дерева поиска, что существенно повышает эффективность алгоритма, как это будет показано на конкретных примерах в следующем разделе.

4. Моделирование работы алгоритма

Приведем сравнение алгоритма с полным перебором в глубину с отсечением вариантов по методу ветвей и границ. Для моделирования работы алгоритма рассматривались начальные позиции со случайной расстановкой целей в рамках постановки задачи из раздела 2. Для задачи с 10 атакующими целями, оба алгоритма нашли оптимальный план, как это показано на рис. 1 и 2. Также приводим сводную табл. 1 по качеству построенных планов и времени работы. Как видно, при малом числе целей полнопереборный алгоритм

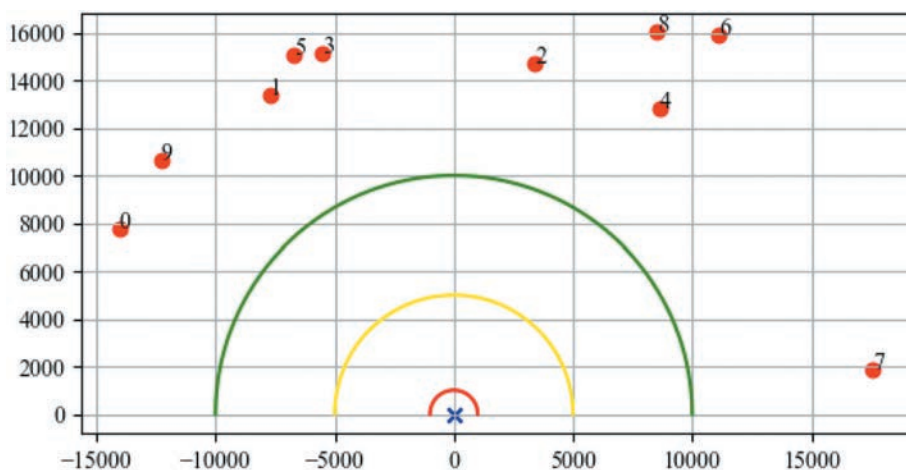


Рис. 1. Начальное положение целей и перехватчика для задачи с 10 целями.

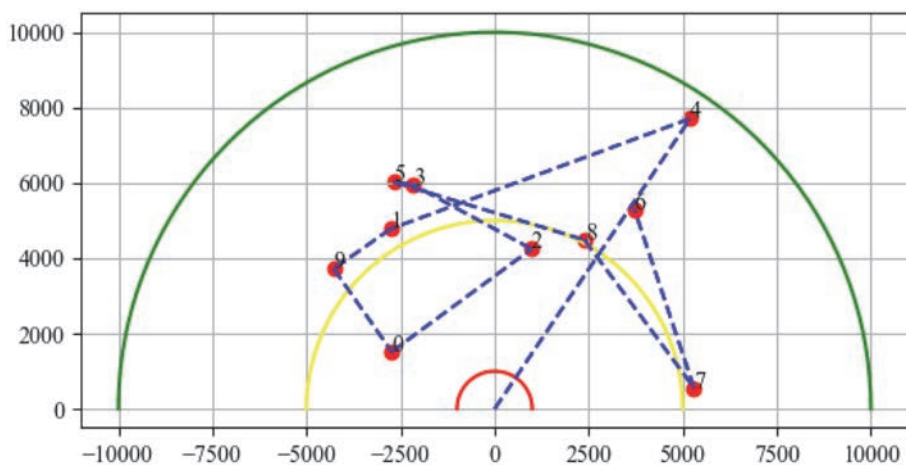


Рис. 2. Оптимальный план перехвата, построенный алгоритмами полного перебора и Монте-Карло.

оказывается значительно быстрее. Это связано с тем, что время работы алгоритма поиска деревом было задано равным одной секунде безотносительно размера задачи.

Таблица 1. Сводные данные о работе алгоритмов для задачи с 10 целями

Тип Алгоритма	Оценка качества	Время работы
Полный перебор	(0, 2, 8, 0)	0,05 с
Монте-Карло	(0, 2, 8, 0)	1 с

Теперь перейдем к примеру с 15 целями, начальное положение которых приведено на рис. 3. В этом случае оба алгоритма также справились с на-

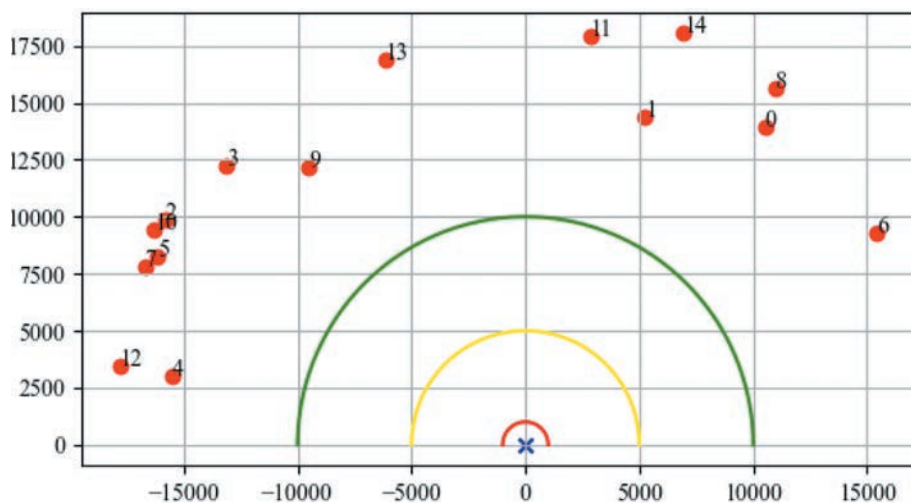


Рис. 3. Начальное положение целей и перехватчика для задачи с 15 целями.

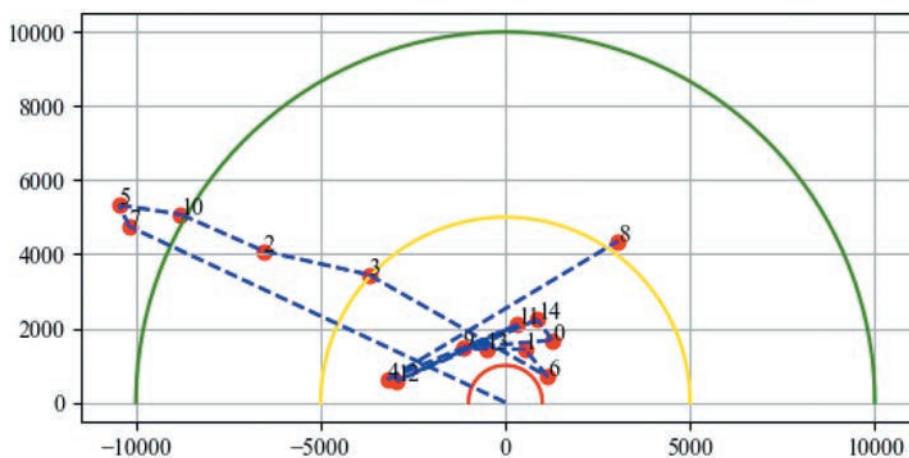


Рис. 4. Оптимальный план перехвата, построенный полным перебором и по поиску деревом для 15 целей.

хождением оптимального плана, показанного на рис. 4. Однако теперь полный переборный алгоритм опередил алгоритм Монте-Карло лишь на полсекунды вычислительного времени, как это следует из табл. 2.

Таблица 2. Сводные данные о работе алгоритмов для задачи с 15 целями

Тип Алгоритма	Оценка качества	Время работы
Полный перебор	(0, 9, 3, 3)	0,48 с
Монте-Карло	(0, 9, 3, 3)	1 с

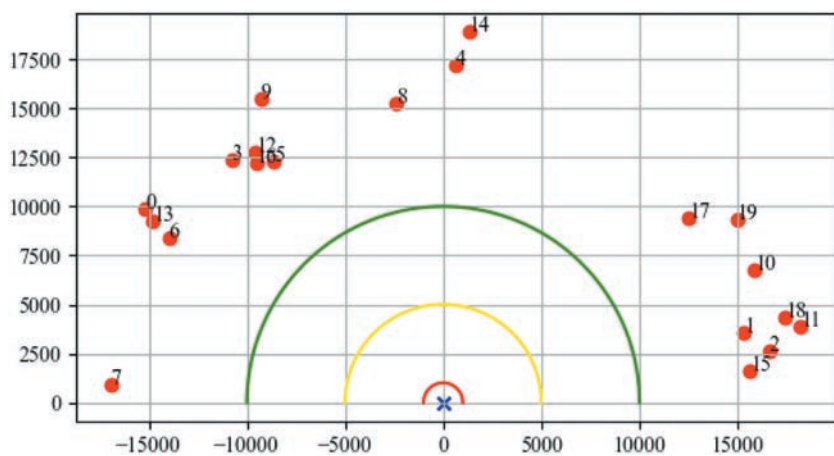


Рис. 5. Начальное положение 20 целей.

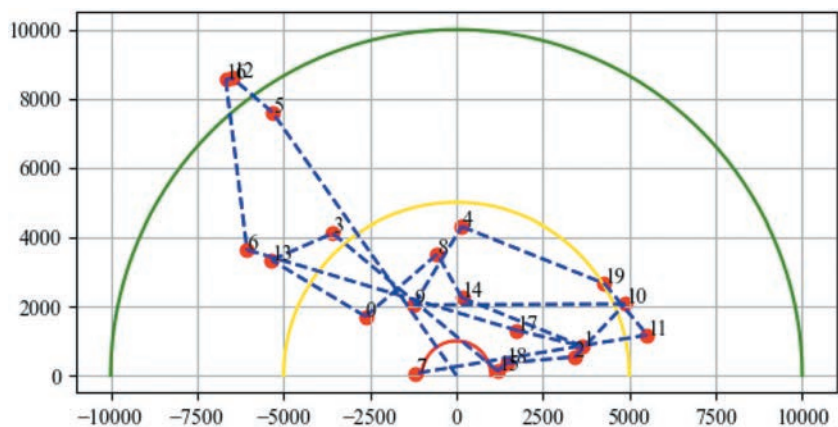


Рис. 6. Оптимальный план перехвата, построенный алгоритмом полного перебора для 20 целей.

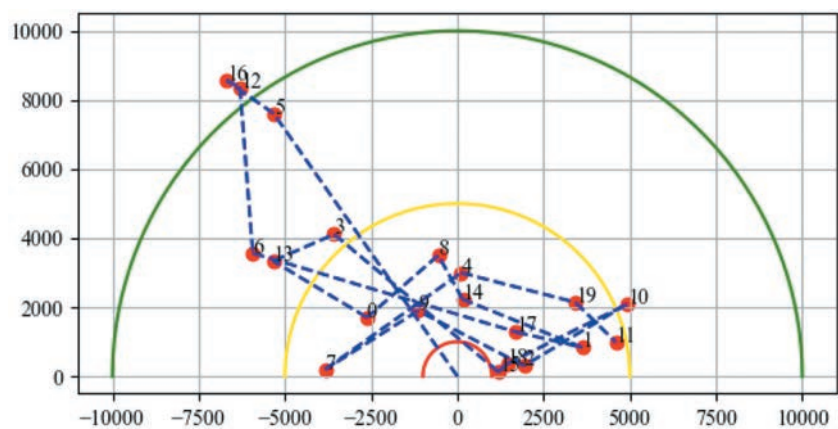


Рис. 7. План перехвата, построенный алгоритмом Монте-Карло для 20 целей.

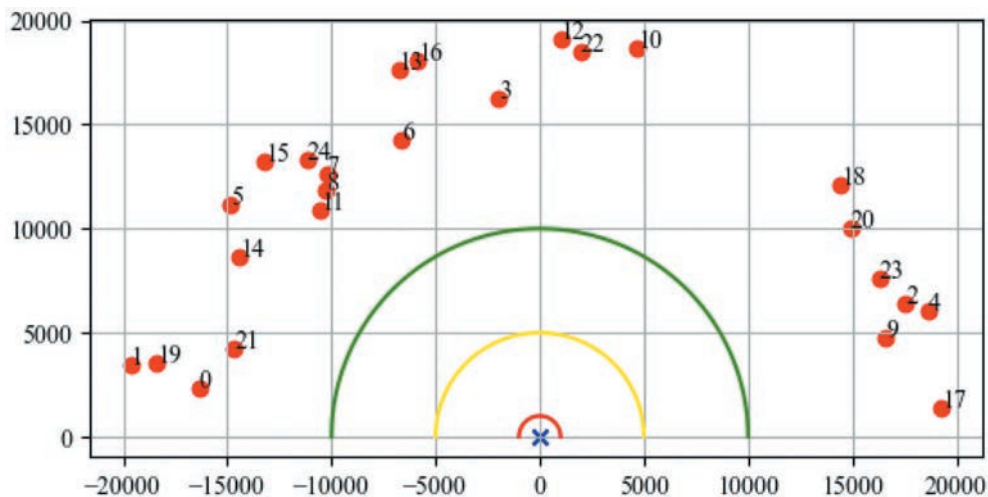


Рис. 8. Начальное положение 25 целей.

Для задачи с 20 целями, приведенной на рис. 5, алгоритм поиска построил план перехвата без пропуска целей в ближнюю зону, который, однако, был неоптимальным. Сравнение двух планов приведено на рис. 6 и 7 и в табл. 3, обращаем внимание, что на этом размере входных данных поиск деревом оказался в 4 раза быстрее полного перебора.

Таблица 3. Сводные данные о работе алгоритмов для задачи с 20 целями

Тип Алгоритма	Оценка качества	Время работы
Полный перебор	(0, 11, 7, 2)	4,07 с
Монте-Карло	(0, 13, 5, 2)	1 с

Для задачи с 25 целями поиск деревом смог построить план перехвата лишь с пропуском одной цели. Однако время его работы оказалось намного меньшим по сравнению с полнопереборным алгоритмом. Начальное положение целей для этой задачи показано на рис. 8, построенные планы перехвата приведены на рис. 9 и 10, а время работы алгоритмов и оценки полученных планов указаны в табл. 4.

Таблица 4. Сводные данные о работе алгоритмов для задачи с 25 целями

Тип Алгоритма	Оценка качества	Время работы
Полный перебор	(0, 15, 10, 0)	13,63 с
Монте-Карло	(1, 19, 4, 1)	1 с

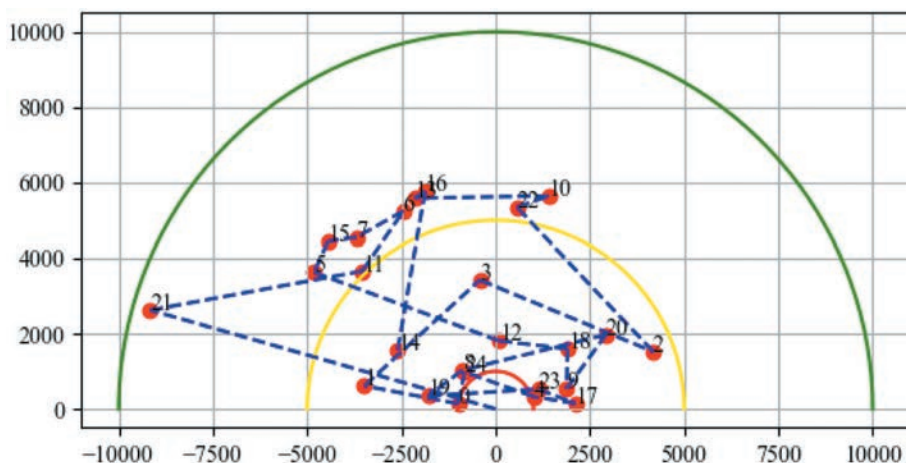


Рис. 9. Оптимальный план перехвата, построенный алгоритмом полного перебора для 25 целей.

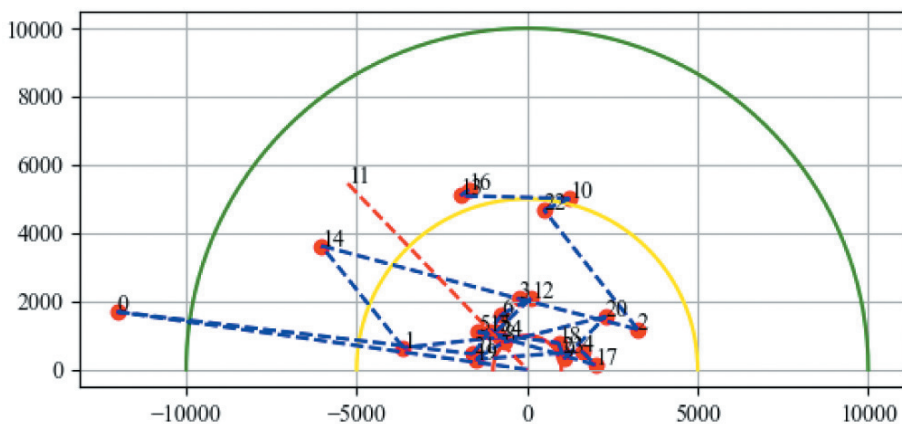


Рис. 10. План перехвата, построенный алгоритмом Монте-Карло для 25 целей. Красной линией показана траектория пропущенной цели.

5. Заключение

В данной работе предложен алгоритм поиска деревом Монте-Карло при построении субоптимального плана перехвата для обороны защищаемой точки от прямолинейно движущихся целей. Этот метод позволяет эффективно строить приемлемые решения даже для случаев с большим количеством атакующих целей, при которых полнопереборные алгоритмы могут оказаться слишком медленными для практических приложений. Однако остается возможность использования двух алгоритмов одновременно и осуществлять выбор по результатам их работы в режиме реального времени. Подход, предложенный в данной работе, также может быть прямо обобщен на случай обо-

роны защищаемой точки несколькими перехватчиками против существенно большего числа атакующих целей.

Кроме того, предложенный метод решения подходит не только для рассматривавшейся задачи, но и для любой другой проблемы дискретной оптимизации. Рассмотренная схема может различным образом оптимизироваться и улучшаться для приложения к самым разнообразным задачам. Широкий разбор последних версий и приложений алгоритма поиска деревом Монте-Карло приводится в [16]. Таким образом, открывается широкий выбор возможных приложений описанной в данной работе схемы построения приближенных решений в других задачах дискретной оптимизации.

Другим возможным направлением для дальнейших исследований по данной теме является применение нейросетевых подходов совместно с поиском по дереву Монте-Карло. Так, обученные нейросети могут применяться для вычисления эвристик θ и P , которые входят в функцию полезности (17). Использование нейросетей при вычислении эвристик для алгоритма поиска по дереву Монте-Карло уже показало себя чрезвычайно эффективным при построении программ для игры в Го [9]. Поэтому адаптация такого подхода может оказаться столь же плодотворной и для решения динамической задачи коммивояжера и других подобных задач дискретной оптимизации, что может стать темой для дальнейших исследований по данному вопросу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галяев А.А., Яхно В.П., Берлин Л.М., Лысенко П.В., Бузиков М.Э. Оптимизация плана перехвата прямолинейно движущихся целей // А и Т. 2023. № 10. С. 18–36.
2. Сихарулидзе Г.Г. Об одном обобщении задачи коммивояжера. I // А и Т. 1971. № 8 С. 116–123.
3. Сихарулидзе Г.Г. Об одном обобщении задачи коммивояжера. II // А и Т. 1971. № 10. С. 142–147.
4. Picard J.C., Queyranne M. The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling // Oper. Res. 1978. V. 26. No. 1. P. 86–110. DOI: 10.1287/opre.26.1.86
5. Helvig C.S., Robins G., Zelikovsky A. The moving-target traveling salesman problem // J. Algorithm. Comput. Technol. 2003. V. 49. No. 1. P. 153–174. [https://doi.org/10.1016/S0196-6774\(03\)00075-0](https://doi.org/10.1016/S0196-6774(03)00075-0)
6. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco, Calif.: W. H. Freeman & Co., 1979.
7. Li C., Yang M., Kang L. A New Approach to Solving Dynamic Traveling Salesman Problems. In: Wang, TD., et al. Simulated Evolution and Learning // Lecture Notes Comput. Sci. 2006. V. 4247. Springer, Berlin, Heidelberg.
8. Archetti C., Feillet D., Mor A., Speranza M.G. Dynamic traveling salesman problem with stochastic release dates // Eur. J. Oper. 2020. V. 280. I. 3. P. 832–844. ISSN 0377-2217

9. *Silver D., Huang A., Maddison C. et al* Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search // *Nature*. 28 January 2016. 529 (7587): P. 484–489. <https://doi.org/10.1038/nature16961>.
10. *Schadd M.P.D., Winands M.H.M., van den Herik H.J., Chaslot G.M.J.B., Uiterwijk J.W.H.M.* (2008). Single-Player Monte-Carlo Tree Search // *Computers and Games*. CG 2008. Lecture Notes in Computer Science, vol 5131. Springer, Berlin, Heidelberg.
11. *Mattia Crippa, Pier Luca Lanzi, Fabio Marocchi.* An analysis of Single-Player Monte Carlo Tree Search performance in Sokoban // *Expert Syst. Appl.* 15 April 2022. V. 192. P. 2–3.
12. *Cotarelo A., Vicente G., Edward Rolando N., Cristian G., Alberto G., Jerry Ch.* Improving Monte Carlo Tree Search with Artificial Neural Networks without Heuristics. *Appl. Sci.* 2021. V. 11, No. 5. 2056. <https://doi.org/10.3390/app11052056>
13. *Marco K.* Beyond Games: A Systematic Review of Neural Monte Carlo Tree Search Applications // *arXiv:2303.08060*, <https://doi.org/10.48550>
14. *Auer P., Cesa-Bianchi N., Fischer P.* Finite-time Analysis of the Multiarmed Bandit Problem // *Machine Learning*. 2002. V. 47. P. 235–256. <https://doi.org/10.1023/A:1013689704352>
15. *Kocsis L., Szepesvari C.* Bandit Based Monte-Carlo Planning. *Furnkranz J., Scheffer T., Spiliopoulou M.* (eds) // *Machine Learning: ECML 2006*. ECML 2006. Lecture Notes Comput. Sci. V. 4212. Springer, Berlin, Heidelberg.
16. *Swiechowski M., Godlewski K., Sawicki B. et al.* Monte Carlo Tree Search: a review of recent modifications and applications // *Artif. Intell. Rev.* 2023 V. 56. P. 2497–2562. <https://doi.org/10.1007/s10462-022-10228-y>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 05.10.2023

После доработки 04.12.2023

Принята к публикации 21.12.2023



**Юрий Владимирович Митришкин
(1946–2024)**

22 января 2024 г., на 78-м году жизни, скоропостижно ушел из жизни Юрий Владимирович Митришкин – выдающийся ученый и замечательный преподаватель с полувековым стажем, доктор технических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

Юрий Владимирович родился в Куйбышеве (ныне Самара) 26 ноября 1946 г. В 1970 г. окончил КПТИ им. В.В. Куйбышева (ныне Самарский государственный технический университет) по специальности промышленная электроника. Свой путь в науке он начал в 1972 г. с поступления в аспирантуру ИПУ. В 1978 г. в ИПУ защитил кандидатскую диссертацию «Настройка систем управления методом автоматического поиска» по специальности «Техническая кибернетика и теория информации». В 1982 г. окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности «Прикладная математика». В 2003 г. в Курчатовском институте защитил докторскую диссертацию «Комплексная разработка и применение адаптивных автоколебательных и робастных систем управления плазмой в

термоядерных установках». В ИПУ он проработал почти полсотни лет, с 1975 г. и до последнего своего дня.

Еще будучи аспирантом, Юрий Владимирович заинтересовался только зарождающейся в те времена проблемой управляемого термоядерного синтеза. Он был специалистом по системам автоматического управления и электронной технике, и ему стало интересно применить свои навыки для разработки систем управления плазмой в токамаках, ведь плазма в токамаке с точки зрения теории автоматического управления является сложнейшим объектом. Этой проблеме он и посвятил всю свою жизнь, став ведущим специалистом по управлению плазмой в России. Его работы известны во всем мире – им и под его руководством проводились исследования и были разработаны системы управления плазмой в открытых магнитных ловушках ОГРА-2 и ОГРА-3, в токамаках ТУМАН-3, ТВД, ТСП, Т-11, Т-15, Глобус, Глобус-М, ИГНИТОР, КТМ, Глобус-М2.

Несколько лет Юрий Владимирович работал в «Калэмской лаборатории» (Culham Centre for Fusion Energy, Великобритания) на токамаке JET (1994–1995), в центральной команде международного проекта токамака ITER в Институте атомной энергии Японии (1995–1998), был профессором Токийского университета. Он хотел дожить до того дня, когда заработает первая термоядерная электростанция, или хотя бы до получения первого плазменного разряда в токамаке ITER. Очень жаль, что этого не случилось.

Юрий Владимирович был рецензентом множества журналов, приглашенным редактором журнала Mathematics (MDPI), отрецензировал за свою жизнь несколько сотен статей. Регулярно участвовал в международных конференциях, неоднократно участвовал во всемирном конгрессе ИФАК (IFAC World Congress), состоял в IEEE. Он оставил после себя более 200 научных трудов, включая большой обзор «Управление плазмой в токамаках» в нескольких частях в журнале «Проблемы управления», 12 монографий по теории автоматического управления и синтезу систем магнитного управления плазмой в токамаках и 23 патента на изобретения.

Юрий Владимирович всегда сторонился административной работы и предпочитал участию в различных заседаниях обсуждение научных проблем с коллегами и учениками. Он имел очень волевой характер и мог неустанно, в течение нескольких лет продвигать один и тот же вопрос перед администрациями любых уровней, получая в итоге необходимые для проведения научных исследований средства. Он высказывал свою точку зрения по всем вопросам открыто, как есть, не смягчая и не преуменьшая имеющиеся проблемы.

Юрий Владимирович преподавал в МФТИ (кафедра «Техническая кибернетика») и в МГТУ им. Н.Э. Баумана (кафедра «Системы автоматического управления», ИУ-1). С момента создания новой кафедры в МГУ в 2009 г. и до последнего дня он был профессором кафедры физико-математических методов управления Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Вокруг Юрия Владимировича было всегда много студентов. Каждый студент, который также, как и он, заинтересовался проблемой УТС, мог получить от него задачу, решив которую можно было начать работать с ним по существу дела. Он учил самостоятельно ставить и решать научные задачи, мог всецело и по достоинству оценивать результаты проделанной работы, умел оригинально поздравить с получением очередного научного результата. Он был очень тактичен в общении, обладал оригинальным чувством юмора, умел находить общий язык, заинтересовать новой задачей. Он очень уважительно относился к своим ученикам, к нему всегда можно было обратиться с вопросами – никогда не отказывал, помогал разбираться в сложных темах. С ним можно было обсуждать научные вопросы и в выходные, и в праздники, до последнего своего дня он активно работал. Он всегда горой стоял за своих учеников, никогда не оставался в стороне от их проблем, в какой бы сфере они не возникали, помогал искренне и бескорыстно.

Юрий Владимирович любил поговорить на исторические темы, особенно касающиеся отечественной истории, очень переживал за нашу науку, армию и флот и в целом за Россию. Он любил повторять: «В некоторых вопросах мы отстали от передовых разработок на 40 лет, нам необходимо очень быстро сократить это отставание» и прилагал для этого все усилия.

Юрий Владимирович строил долгосрочные планы, следовал им и добивался своих целей. Заряжал своих учеников уверенностью в их осуществимость. Он является организатором научной школы по управлению плазмой в токамаках, которая продолжит свою работу и будет дальше развивать его идеи.

Юрий Владимирович был и останется для нас Учителем (с большой буквы).

*Ученики Юрия Владимировича Митришкина,
научные сотрудники ИПУ РАН:*

Коньков А.Е.

Коренев П.С.

Кружков В.И.

Павлова Е.А.

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Царьков К.А. Устойчивость решений экстремальных задач с ограничениями на основе λ -укорочений	3
Жусубалиев Ж.Т., Титов Д.В., Яночкина О.О., Сопуев У.А. О бифуркациях граничного столкновения в импульсной системе	21
Тормагов Т.А. Метод деформации путей ограниченной кривизны для колесных роботов в точном земледелии на основе конического программирования второго порядка	46
Точилин П.А., Паршиков М.В. Об использовании методов эллипсоидального оценивания в алгоритме поиска субоптимальных путей RRT*	60

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Булычев Ю.Г. Распознавание сигналов без расширения пространства состояний по результатам наблюдений, содержащих сингулярную помеху, с учетом нелинейности	81
--	----

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Галяев А.А., Рябушев Е.А. Поиск субоптимального решения динамической задачи коммивояжера методом Монте-Карло	103
---	-----

Заметки, хроника, информация

Некролог	120
-----------------------	-----

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Tsarkov K.A. Stability of Solutions to Extremal Problems with Constraints Based on λ -Truncations.....	3
Zhusubaliyev Zh.T., Titov D.V., Yanochkina O.O., Sopuev U.A. On Border-Collision Bifurcations in a Pulse System.....	21
Tormagov T.A. Path Deformation Method with Constraints on Normal Curvature for Wheeled Robots in Precision Agriculture Based on Second-Order Cone Programming.....	46
Tochilin P.A., Parshikov M.V. On the Use of Ellipsoidal Estimation Techniques in the RRT* Suboptimal Pathfinding Algorithm	60

Intellectual Control Systems, Data Analysis

Bulychev Yu.G. Signal Recognition without State Space Expansion Based on Observations Containing a Singular Interference: The Case of Nonlinear Parameters of Basis Functions.....	81
---	----

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Galyaev A.A., Ryabushev E.A. Search for a Suboptimal Solution to the Dynamic Traveling Salesman Problem by the Monte Carlo Method.....	103
---	-----

Notes, Meetings, Information

Obituary	120
----------------	-----