



А ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

5

М А Й

Москва

2024

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,
Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В.,
Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В.,
Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,
Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартыхина*

Москва

«Издательство «Наука»

Тематический выпуск



3 февраля 2023 г. ушел из жизни выдающийся ученый-математик и замечательный человек – Борис Теодорович Поляк. Силами сотрудников лаборатории № 7 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, которой он долгое время руководил и десятилетия являлся генератором ярких научных идей, мы задумали организовать специальный выпуск журнала «Автоматика и телемеханика». Выход этого сборника приурочен не к печальной годовщине кончины Бориса Теодоровича, но ко дню его рождения 4 мая 1935 г.

Круг научных интересов Бориса Теодоровича поражает своим разнообразием, – достаточно лишь взглянуть на список опубликованных им работ, который мы приводим в нашем сборнике. Стоит обратить внимание и на то, что, помимо широты интересов Бориса Теодоровича, приведенная библиография свидетельствует о большом количестве его соавторов, – он всегда щедро делился своими идеями как с молодыми учениками, так и с более старшими коллегами.

Конечно, в рамках одного номера невозможно затронуть все направления, в которых работал Борис Теодорович, но мы попытались собрать статьи по тематикам, наиболее интересовавшим его в последние годы. Здесь и любимая им с молодости теория оптимизации, и методы классической теории автоматического управления, робастность и подавление внешних возмущений, линейные матричные неравенства, сверхустойчивость, прикладные задачи исследования энергетических систем, и явление всплеска. Из-за ограничений

на объем одного номера часть поступивших статей перенесена в 6-й номер журнала.

В следующем году мы планируем выпуск еще одного тематического сборника, посвященного 90-летию со дня рождения Б.Т. Поляка; круг авторов предполагается гораздо более широким.

От лица всех сотрудников лаб. 7 ИПУ РАН
ответственный за выпуск
П.С. Щербаков

© 2024 г.

БОРИС ТЕОДОРОВИЧ ПОЛЯК: СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ¹

Монографии

- 1.1. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.; 2-е изд., испр. и доп. М.: УРСС, 2014. 386 с.; М.: Ленанд, 2019, 392 с.; 3-е изд. М.: УРСС, 2023. 404 с.
- 1.2. Polyak B.T. Introduction to Optimization. New York, Optimization Software, 1987. 438 p. (расширенный и исправленный перевод [1.1], 1983).
- 1.3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
- 1.4. Граничин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003. 292 с.
- 1.5. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М.: УРСС, 2014. 560 с.
- 1.6. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: УРСС, 2019. 500 с.

Диссертации

- 2.1. Поляк Б.Т. Градиентные методы минимизации функционалов, решения уравнений и неравенств // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1963.
- 2.2. Поляк Б.Т. Методы оптимизации при наличии помех // Дис. ... д-р техн. наук. М.: ИПУ, 1978.

Статьи в рецензируемых журналах

- 3.1. Поляк Б.Т. Метод определения взаимной независимости размерностей величин // Научные доклады высшей школы. Metallurgy. 1958. № 2. С. 118–120.
- 3.2. Каган А.С., Поляк Б.Т., Шильштейн С.Ш. Влияние рельефа поверхности на интенсивность рентгеновских дифракционных максимумов // Журн. техн. физики. 1959. Т. 29. № 2. С. 1142–1145.
- 3.3. Иванцов Г.П., Любов Б.Я., Поляк Б.Т., Ройтбурд А.Я. Расчет скорости кристаллизации металлического слитка при различных тепловых потоках через его поверхность // Инж. физ. журн. 1960. Т. 3. № 3. С. 41–48.
- 3.4. Иванцов Г.П., Поляк Б.Т. Режим охлаждения плоского слитка при непрерывной разливке, обеспечивающий минимальные термические напряжения в его корке // Кристаллизация металлов. Изд-во АН СССР, 1960. С. 139–149.

¹ Составители: П.С. Щербаков, А.А. Тремба, Я.И. Квинто. Тексты почти всех журнальных статей (и не только) можно найти здесь:
<https://sites.google.com/site/lab7polyak/> © А.А. Тремба.

- 3.5. *Поляк Б.Т.* Градиентные методы минимизации функционалов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1963. Т. 3. № 4. С. 643–653.
Polyak B. Gradient methods for the minimisation of functionals // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1963. V. 3. No. 4. P. 864–878.
- 3.6. *Поляк Б.Т.* О некоторых способах ускорения сходимости итерационных методов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1964. Т. 4. № 5. С. 791–803.
Polyak B. Some Methods of Speeding Up the Convergence of Iteration Methods // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1964. V. 4. No. 5. P. 1–17.
- 3.7. *Поляк Б.Т.* Градиентные методы решения уравнений и неравенств // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 995–1005.
Polyak B. Gradient Methods for Solving Equations and Inequalities // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1964. V. 4. No. 6. P. 17–32.
- 3.8. *Поляк Б.Т.* Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 2. С. 287–290.
Poljak B.T. Existence Theorems and Convergence of Minimizing Sequences in Extremum Problems with Restrictions // Soviet Math. Dokl. 1966. V. 7. P. 72–75.
- 3.9. *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* О сходимости минимизирующих последовательностей в задачах на условный экстремум // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. № 5. С. 997–1000.
Levitin E.S., Poljak B.T. Convergence of Minimizing Sequences in Conditional Extremum Problems // Soviet Math. Dokl. 1966. V. 5. P. 764–767.
- 3.10. *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1966. Т. 6. № 5. С. 787–823.
Levitin E.S., Polyak B.T. Constrained Minimization Methods // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1966. V. 6. No. 5. P. 1–50.
- 3.11. *Поляк Б.Т.* Один общий метод решения экстремальных задач // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 1. С. 33–36.
Poljak B.T. A General Method of Solving Extremum Problems // Soviet Math. Dokl. 1967. V. 8. No. 6. P. 593–597.
- 3.12. *Поляк Б.Т.* Метод минимизации функций многих переменных // Экономика и математические методы. 1967. Т. 3. № 6. С. 881–902.
- 3.13. *Гурин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В.* Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1967. Т. 7. № 6. С. 1211–1228.
Gurin L.G., Polyak B.T., Raik E.V. The Method of Projections for Finding the Common Point of Convex Sets // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1967. V. 7. No. 6. P. 1–24.
- 3.14. *Поляк Б.Т.* К теории нелинейных задач оптимального управления // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1968. № 2. С. 30–40.
- 3.15. *Поляк Б.Т.* Полунепрерывность интегральных функционалов и теоремы существования в задачах на экстремум // Математический сборник. 1969. Т. 78(120). № 1. С. 65–84.
Poljak B.T. Semicontinuity of Integral Functionals and Existence Theorems on Extremal Problems // Mathematics of the USSR – Sbornik. 1969. V. 7. No. 1. P. 59–77.

- 3.16. *Поляк Б.Т.* Исправление к статье «Полунепрерывность интегральных функционалов и теоремы существования в задачах на экстремум», Математический сборник, 1969, Т. 78(120). № 1. С. 65–84 // Математический сборник. 1969. Т. 80(122). С. 616.
Poljak B.T. Corrections to the paper «Semicontinuity of integral functionals and existence theorems on extremal problems», Mathematics of the USSR – Sbornik. 1969. V. 7. No. 1. P. 59–77 // Mathematics of the USSR – Sbornik. 1969. V. 9. No. 4. P. 570.
- 3.17. *Поляк Б.Т.* Минимизация негладких функционалов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1969. Т. 9. № 3. С. 509–521.
Polyak B.T. Minimization of Unsmooth Functionals // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1969. V. 9. No. 3. P. 14–29.
- 3.18. *Поляк Б.Т.* Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1969. Т. 9. № 4. С. 807–821.
Polyak B.T. The Conjugate Gradient Method in Extremal Problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1969. V. 9. No. 4. P. 94–112.
- 3.19. *Поляк Б.Т.* Итерационные методы, использующие множители Лагранжа, для решения экстремальных задач с ограничениями типа равенств // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1970. Т. 10. № 5. С. 1098–1106.
Polyak B.T. Iterative Methods Using Lagrange Multipliers for Solving Extremal Problems with Constraints of the Equation Type // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1970. V. 10. No. 5. P. 42–52.
- 3.20. *Поляк Б.Т.* О скорости сходимости метода штрафных функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1971. Т. 11. № 1. С. 3–11.
Polyak B.T. The Convergence Rate of the Penalty Function Method // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1971. V. 11. No. 1. P. 1–12.
- 3.21. *Поляк Б.Т.* Сходимость методов возможных направлений в экстремальных задачах // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1971. Т. 11. № 4. С. 855–869.
Polyak B.T. Convergence of Methods of Feasible Directions in Extremal Problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1971. V. 11. No. 4. P. 53–70.
- 3.22. *Поляк Б.Т., Третьяков Н.В.* Об одном итерационном методе линейного программирования и его экономической интерпретации // Экономика и математические методы. 1972. Т. 8. № 5. С. 740–751.
Polyak B.T., Tretyakov N.V. On a Linear Programming Iterative Method and its Economic Interpretation // Matekon. 1974. V. 10. No. 3. P. 81–100.
- 3.23. *Поляк Б.Т., Третьяков Н.В.* Метод штрафных оценок для задач на условный экстремум // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1973. Т. 13. № 1. С. 34–46.
Polyak B.T., Tretyakov N.V. The Method of Penalty Estimates for Conditional Extremum Problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1973. V. 13. No. 1. P. 42–58.
- 3.24. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // АИТ. 1973. № 3. С. 45–68.
Polyak B.T., Tsyypkin Ya.Z. Pseudogradient Adaptation and Training Algorithms // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 3. P. 377–397.

- 3.25. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Достижимая точность алгоритмов адаптации // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 3. С. 532–535.
Tsyppkin J.Z., Poljak B.T. Attainable Accuracy of the Adaptation Algorithms // Sov. Phys. Dokl. 1974. V. 19. P. 562–563.
- 3.26. Бакушинский А.Б., Поляк Б.Т. О решении вариационных неравенств // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 5. С. 1038–1041.
Bakushinskii A.B., Poljak B.T. On the Solution of Variational Inequalities // Sov. Math. Dokl. 1974. V. 15. No. 6. P. 1705–1710.
- 3.27. Поляк Б.Т. Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. I. Общий случай // АиТ. 1976. № 12. С. 83–94.
Polyak B.T. Convergence and Convergence Rate of Iterative Stochastic Algorithms. I. General Case // Autom. Remote Control. 1976. V. 37. No. 12. P. 1858–1868.
- 3.28. Поляк Б.Т. Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. II. Линейный случай // АиТ. 1977. № 4. С. 101–107.
Polyak B.T. Convergence and Convergence Rate of Iterative Stochastic Algorithms. II. The Linear Case // Autom. Remote Control. 1977. V. 38. No. 4. P. 537–542.
- 3.29. Поляк Б.Т. Сравнение скорости сходимости одношаговых и многошаговых алгоритмов оптимизации при наличии помех // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1977. № 1. С. 9–12.
Polyak B.T. Comparison of the Convergence Rates for Single-Step and Multi-Step Optimization Algorithms in the Presence of Noise // Eng. Cybern. 1977. V. 15. No. 1. P. 6–10.
- 3.30. Поляк Б.Т. К вопросу о сравнении градиентного метода и метода случайного поиска // Автоматика и вычислительная техника. 1977. № 3. С. 57–60.
Poliak B.T. On the Comparison of Gradient Method and Random Search Method // Autom. Control. Comput. Sci. 1977. V. 11. No. 3. P. 59–62.
- 3.31. Poljak B.T. Nonlinear Programming Methods in the Presence of Noise // Mathematical Programming. Series B. 1978. V. 14(1). P. 87–97.
- 3.32. Белов Е.Н., Поляк Б.Т., Скоков В.А. Комплекс программ оптимизации // Экономика и математические методы. 1978. Т. 14. № 4. С. 792–796.
- 3.33. Поляк Б.Т. Минимизация сложных функций регрессии // Кибернетика. 1978. № 4. С. 148–149.
- 3.34. Поляк Б.Т., Скоков В.А. Решение задач на минимум суммы квадратов // Экономика и математические методы. 1978. Т. 14. № 6. С. 1173–1180.
- 3.35. Поляк Б.Т. Методы решения задач на условный экстремум при наличии случайных помех // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1979. Т. 19. № 1. С. 70–78.
Polyak B.T. Methods for Solving Constrained Extremum Problems in the Presence of Random Noise // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1979. V. 19. No. 1. P. 72–81.
- 3.36. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Адаптивные алгоритмы оценивания (сходимость, оптимальность, стабильность) // АиТ. 1979. № 3. С. 71–84.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Adaptive Estimation Algorithms (Convergence, Optimality, Stability) // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 3. P. 378–389.
- 3.37. Poljak B.T., Tsyppkin J.Z. Robust Identification // Automatica. 1980. V. 16(1). P. 53–63.

- 3.38. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы стохастической оптимизации // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 5. С. 1084–1087.
Poliak B.T., Tsyppkin J.Z. Optimal Pseudogradient Algorithms for Stochastic Optimization // Sov. Phys. Dokl. 1980. V. 25. No. 2. P. 85–87.
- 3.39. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // АИТ. 1980. № 8. С. 74–84.
Poliak B.T., Tsyppkin J.Z. Optimal Pseudogradient Adaptation Algorithms // Autom. Remote Control. 1981. V. 41. No. 8. P. 1101–1110.
- 3.40. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // АИТ. 1980. № 10. С. 91–97.
Poliak B.T., Tsyppkin J.Z. Robust Pseudogradient Adaptation Algorithms // Autom. Remote Control. 1981. V. 41. No. 10. P. 1404–1409.
- 3.41. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные методы оценивания коэффициентов авторегрессии при неполной информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 1. С. 118–126.
Poliak B.T., Tsyppkin J.Z. Optimal and Robust Estimation of Autoregression Coefficients // Eng. Cybern. 1983. V. 21. No. 1. P. 100–109.
- 3.42. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные алгоритмы критериальной оптимизации в условиях неопределенности // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 315–318.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Optimal Algorithms of Criterial Optimization Under Conditions of Uncertainty // Soviet Physics – Doklady. 1983. V. 28. No. 11. P. 919–920.
- 3.43. Немировский А.С., Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б. Оценки типа максимума правдоподобия для непараметрической регрессии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 6. С. 1310–1314.
Nemirovskii A.S., Polyak B.T., Tsybakov A.B. Estimators of Maximum Likelihood Type for Nonparametric Regression // Soviet Math. Dokl. 1983. V. 28. No. 3. P. 788–792.
- 3.44. Поляк Б.Т., Немировский А.С., Цыбаков А.Б. Метод максимального правдоподобия для непараметрической регрессии // Теория вероятностей и ее применение. 1983. Т. 28. № 4. С. 794–795. Теория вероятностей и ее применение, 1983, Т. 28. № 4. С. 794–805.
Polyak B.T., Nemirovskii A.S., Tsybakov A.B. The Maximum Likelihood Method in Nonparametric Regression // Theor. Probab. Appl. 1984. V. 28. No. 4. P. 830–831.
- 3.45. Немировский А.С., Поляк Б.Т. Итеративные методы решения линейных некорректных задач при точной информации. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 2. С. 13–25.
Nemirovski A.S., Polyak B.T. Iterative Methods for Solving of Linear Ill-Posed Problems under Exact Information. I // Engineering Cybernetics. 1984. V. 22. No. 3. P. 1–11.
- 3.46. Немировский А.С., Поляк Б.Т. Итеративные методы решения линейных некорректных задач при точной информации. II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 3. С. 18–35.
Nemirovski A.S., Polyak B.T. Iterative Methods for Solving of Linear Ill-Posed Problems under Exact Information. II // Engineering Cybernetics. 1984. V. 22. No. 4. P. 50–56.

- 3.47. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Критериальные алгоритмы стохастической оптимизации // *АиТ*. 1984. № 6. С. 95–104.
Poliak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Criterion Algorithms of Stochastic Optimization // *Autom. Remote Control*. 1984. V. 45. No. 6. P. 766–774.
- 3.48. Немировский А.С., Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б. Обработка сигналов непараметрическим методом максимума правдоподобия // *Проблемы передачи информации*. 1984. Т. 20. № 3. С. 29–46.
Nemirovskii A.S., Polyak B.T., Tsybakov A.B. Signal Processing by the Nonparametric Maximum-Likelihood Method // *Problems of Information Transmission*. 1984. V. 20(3). P. 177–192.
- 3.49. Верулава Ю.Ш., Горгадзе З.Н., Поляк Б.Т. Исследование алгоритмов оценивания коэффициентов авторегрессии // *АиТ*. 1984. № 11. С. 49–57.
Verulava Yu.Sh., Gorgadze Z.N., Polyak B.T. Algorithms for Estimation of Autoregression Coefficients // *Autom. Remote Control*. 1984. V. 45. No. 11. P. 1428–1434.
- 3.50. Немировский А.С., Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б. Скорость сходимости непараметрических оценок типа максимума правдоподобия // *Проблемы передачи информации*. 1985. Т. 21. № 4. С. 17–33.
Nemirovskii A.S., Polyak B.T., Tsybakov A.B. Rate of Convergence of Nonparametric Estimates of Maximum-Likelihood Type // *Problems of Information Transmission*. 1985. V. 21. No. 4. P. 258–272.
- 3.51. Немировский А.С., Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные алгоритмы стохастической оптимизации при мультипликативных помехах // *Докл. АН СССР*. 1985. Т. 284. № 3. С. 563–567.
Nemirovskii A.S., Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Optimum Algorithms of Stochastic Optimization with Multiplicative Error // *Sov. Phys. Dokl.* 1985. V. 30. No. 9. P. 744–745.
- 3.52. Верулава Ю.Ш., Поляк Б.Т. Выбор порядка регрессионной модели // *АиТ*. 1988. № 11. С. 113–129.
Verulava Yu.Sh., Polyak B.T. Selection of the Regression Model Order // *Autom. Remote Control*. 1988. V. 49. No. 11. P. 1482–1494.
- 3.53. Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б. Оптимальные проекционные оценки для функции регрессии неизвестной гладкости // *Докл. АН СССР*. 1989. Т. 304. № 2. С. 297–301.
Polyak B.T., Tsybakov A.B. Optimal Projection Estimates for a Regression Function of Unknown Smoothness // *Soviet Math. Dokl.* 1989. V. 39. No. 1. P. 73–77.
- 3.54. Назин А.В., Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б. Пассивная стохастическая аппроксимация // *АиТ*. 1989. № 11. С. 127–134.
Nazin A.V., Polyak B.T., Tsybakov A.B. Passive Stochastic Approximation // *Autom. Remote Control*. 1989. V. 50. No. 11. P. 1563–1569.
- 3.55. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Градиентные методы стохастической оптимизации // *Измерения, контроль, автоматизация*. 1989. № 3(71). С. 50–54.
- 3.56. Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б. Асимптотическая оптимальность C_p -критерия при проекционном оценивании регрессии // *Теория вероятностей и ее применение*. 1990. Т. 35. № 2. С. 305–317.
- 3.57. Поляк Б.Т. Новый метод типа стохастической аппроксимации // *АиТ*. 1990. № 7. С. 98–107.

- Polyak B.T.* New Method of Stochastic Approximation Type // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 7. P. 937–946.
- 3.58. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // АиТ. 1990. № 9. С. 45–54.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Frequency Criteria of Robust Stability and Aperiodicity of Linear Systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 9. P. 1192–1201.
- 3.59. *Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Цыбаков Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической оптимизации // Проблемы передачи информации. 1990. Т. 26. № 2. С. 45–53.
Polyak B.T., Tsybakov A.B. Optimal Order of Accuracy for Search Algorithms in Stochastic Optimization // Problems of Information Transmission. 1990. V. 26(2). P. 126–133.
- 3.60. *Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.* Частотные критерии робастной модальности линейных дискретных систем // Автоматика. 1990. № 4. С. 3–9.
Tsyppkin Y.Z., Polyak B.T. Frequency Criteria for Robust Modality of Linear Discrete Systems // Sov. J. Autom. Inform. Sci. 1990. V. 23. No. 4. P. 1–7.
- 3.61. *Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T.* Frequency Domain Criteria for l^p -Robust Stability of Continuous Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 12. P. 1464–1469.
- 3.62. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных дискретных систем // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 4. С. 842–846.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Robust Stability of Discrete Linear Systems // Sov. Phys. Dokl. 1991. V. 36. No. 2. P. 111–113.
- 3.63. *Киселев О.Н., Поляк Б.Т.* Эллипсоидальное оценивание по обобщенному критерию // АиТ. 1991. № 9. С. 133–145.
Kiselev O.N., Polyak B.T. Ellipsoidal Estimation with Respect to a Generalized Criterion // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 9. P. 1281–1292.
- 3.64. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров // АиТ. 1991. № 8. С. 45–55.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Robust Stability under Complex Perturbations of the Parameters // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 8. P. 1069–1077.
- 3.65. *Петров Н.П., Поляк Б.Т.* Робастное D -разбиение // АиТ. 1991. № 11. С. 41–53.
Petrov N.P., Polyak B.T. Robust D -Partition // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 11. P. 1513–1523.
- 3.66. *Поляк Б.Т.* Частотные методы в теории робастной устойчивости // АиТ. 1992. № 1. С. 172–175. (Раздел в статье: Дискуссия по проблеме робастности в системах управления) // АиТ. № 1. 1992. С. 165–176.
Polyak B.T. Frequency Methods in the Theory of Robust Stability // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 1. P. 140–142.
- 3.67. *Polyak B.T., Juditsky A.B.* Acceleration of Stochastic Approximation by Averaging // SIAM J. Control Optim. 1992. V. 30(4). P. 838–855.
- 3.68. *Nazin A.V., Polyak B.T., Tsybakov A.B.* Optimal and Robust Kernel Algorithms for Passive Stochastic Approximation // IEEE Trans. Inform. Theory. 1992. V. 38. No. 5. P. 1577–1583.
- 3.69. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастный критерий Найквиста // АиТ. 1992. № 7. С. 25–31.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Robust Nyquist Test // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 7. P. 972–977.

- 3.70. *Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T.* Optimal Recurrent Algorithms for Identification of Nonstationary Plants // Comput. Elect. Engin. 1992. V. 18(5). P. 365–371.
- 3.71. *Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Семейство асимптотически оптимальных методов выбора порядка проекционной оценки регрессии // Теория вероятностей и ее применение. 1992. Т. 37. № 3. С. 502–512.
- 3.72. *Goldenshluger A.V., Polyak B.T.* Estimation of Regression Parameters with Arbitrary Noise // Mathematical Methods of Statistics. 1993. V. 2(1). P. 18–29.
- 3.73. *Киселев О.Н., Поляк Б.Т.* Робастная устойчивость цепочки простых звеньев // АиТ. 1993. № 12. С. 115–127.
Kiselyov O.N., Polyak B.T. Robust Stability of a Chain of Simple Links // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 12. P. 1824–1834.
- 3.74. *Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T.* Robust Absolute Stability of Continuous Systems // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1993. V. 3. No. 3. P. 231–239.
- 3.75. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная аперiodичность // Докл. АН. 1994. Т. 335. № 3. С. 304–307.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Robust Aperiodicity // Doklady RAN. Phys. 1994. V. 39. No. 3. P. 149–152.
- 3.76. *Polyak B.T., Scherbakov P.S., Shmulyian S.B.* Construction of Value Set for Robustness Analysis via Circular Arithmetic // Int. J. Robust. Nonlin. 1994. V. 4(3). P. 371–385.
- 3.77. *Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z., Shi Y.Q., Yen K.K., Chen C.M.* Comments on «Two Necessary Conditions for a Complex Polynomial To Be Strictly Hurwitz and Their Applications in Robust Stability Analysis» (with reply) // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39(5). P. 1147–1148.
- 3.78. *Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T., Katbab A., Jury E.I.* On the Strict- and Wide-Sense Stability Robustness of Uncertain Systems: Application of a New Frequency Criterion // Syst. Control Lett. 1994. V. 22(5). P. 377–383.
- 3.79. *Polyak B.T., Shmulyian S.B.* Frequency Domain Criteria for Robust Stability of Bivariate Polynomials // IEEE Trans. Circ. Syst. I: Fundamental Theory and Applications. 1994. V. 41(2). P. 161–167.
- 3.80. *Немировский А.С., Поляк Б.Т.* Необходимые условия устойчивости полиномов и их использование // АиТ. 1994. № 11. С. 113–119.
Nemirovskii A.S., Polyak B.T. Necessary Conditions for the Stability of Polynomials and Their Use // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 11. P. 1644–1649.
- 3.81. *Kiselev O.N., Polyak B.T.* Robust Gain Margin for a Cascade of Uncertain Links // Int. J. Syst. Sci. 1995. V. 26(4). P. 965–974.
- 3.82. *Панченко О.Б., Поляк Б.Т.* Оценка меры устойчивых полиномов в интервальном семействе // АиТ. 1995. № 7. С. 108–115.
Panchenko O.B., Polyak B.T. Estimation of the Measure of Stable Polynomials in an Interval Family // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 7. P. 997–1003.
- 3.83. *Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.* Робастная устойчивость одного класса систем с распределенными параметрами // Докл. АН. 1995. Т. 341. № 4. С. 463–465.
Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T. Robust Stability of a Class of Distributed-Parameter Systems // Dokl. Math. 1995. V. 51. No. 2. P. 304–306.
- 3.84. *Polyak B.T., Kogan J.* Necessary and Sufficient Conditions for Robust Stability of Linear Systems with Multiaffine Uncertainty Structure // IEEE Trans. Autom. Control. 1995. V. 40. No. 7. P. 1255–1260.

- 3.85. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Критический коэффициент усиления для последовательности неопределенных звеньев // *АиТ*. 1995. № 9. С. 93–103.
Kiselev O.N., Polyak B.T. Gain Margin for a Cascade of Uncertain Components // *Autom. Remote Control*. 1995. V. 56. No. 9. P. 1278–1286.
- 3.86. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Алгоритмы матричного оценивания // *АиТ*. 1995. № 11. С. 122–139.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Algorithms of Matrix Estimation // *Autom. Remote Control*. 1995. V. 56. No. 11. P. 1605–1619.
- 3.87. Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T. Frequency Domain Criteria for Robust Stability of a Family of Linear Difference Equations // *J. Diff. Equat. Appl.* 1995. V. 1(2). P. 137–149.
- 3.88. Polyak B.T., Vishnyakov A.N. Multiplying Disks: Robust Stability of a Cascade Connection // *Eur. J. Control*. 1996. V. 2. No. 2. P. 101–111.
- 3.89. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // *АиТ*. 1996. № 11. С. 91–104.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Stability and Robust Stability of Uniform Systems // *Autom. Remote Control*. 1996. V. 57. No. 11. P. 1606–1617.
- 3.90. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Вероятностный подход к робастной устойчивости систем с запаздыванием // *АиТ*. 1996. № 12. С. 97–108.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. A Probabilistic Approach to Robust Stability of Time Delay Systems // *Autom. Remote Control*. 1996. V. 57. No. 12. P. 1770–1779.
- 3.91. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Robust Stability of Systems with Uncertain Delays // *Mathematics Today*. 1996. V. 32. No. 7–8. P. 118–121.
- 3.92. Киселев О.Н., Лан Х.Л., Поляк Б.Т. Частотные характеристики при параметрической неопределенности // *АиТ*. 1997. № 4. С. 155–174.
Kiselev O.N., Le Hung Lan, Polyak B.T. Frequency Responses under Parametric Uncertainty // *Autom. Remote Control*. 1997. V. 58. No. 4. P. 645–661.
- 3.93. Поляк Б.Т., Панченко О.Б. Вероятностный подход к проблеме устойчивости интервальных матриц // *Доклады АН*. 1997. Т. 353. № 4. С. 456–458.
Polyak B.T., Panchenko O.B. Probabilistic Approach to Stability Problem for Interval Matrices // *Doklady Mathematics*. 1997. V. 55(2). P. 309–311.
- 3.94. Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Optimal and Robust Methods for Stochastic Optimization // *Nov. J. Math. Gam. Theor. Algebra*. 1997. V. 6(2/3). P. 163–176.
- 3.95. Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T. Stability of Linear Difference Equations with Unmodelled Higher Order Terms // *J. Diff. Equat. Appl.* 1998. V. 3(5–6). P. 539–546. (Dedicated to Gerry Ladas on his sixtieth birthday.)
- 3.96. Polyak B.T. Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // *J. Optim. Theor. Appl.* 1998. V. 99(3). P. 553–583.
- 3.97. Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T. High-Gain Robust Control // *Eur. J. Control*. 1999. V. 5. No. 1. P. 3–9.
- 3.98. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности // *АиТ*. 1999. № 3. С. 119–130.
Kiselev O.N., Polyak B.T. Design of Low-Order Controllers by the H^∞ and Maximal-Robustness Performance Indices // *Autom. Remote Control*. 1999. V. 60. No. 3. P. 393–402.

- 3.99. *Polyak B.T., Halpern M.E.* Robust Stability and Design of Linear Discrete-Time SISO Systems under l_1 Uncertainties // IEEE Trans. Autom. Control. 1999. V. 44(11). P. 2076–2080.
- 3.100. *Polyak B.T., Haddad W.M., Chellaboina V., Kumar R.* Discussion on: «Multiobjective L_1/H_∞ Controller Design for Systems with Frequency and Time Domain Constraints» // Eur. J. Control. 2000. V. 6(2). P. 184–185.
- 3.101. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Random Spherical Uncertainty in Estimation and Robustness // IEEE Trans. Autom. Control. 2000. V. 45(11). P. 2145–2150.
- 3.102. *Вишняков А.Н., Поляк Б.Т.* Синтез регуляторов низкого порядка для дискретных систем управления при наличии неслучайных возмущений // АиТ. 2000. № 9. С. 112–119.
Vishnyakov A.N., Polyak B.T. Low-Order Controllers for Discrete Control Systems under Nonrandom Disturbances: A Synthesis Method // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 9. P. 1515–1521.
- 3.103. *Polyak B., Halpern M.* Optimal Design for Discrete-Time Linear Systems via New Performance Index // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 2001. V. 15(2). P. 129–152.
- 3.104. *Поляк Б.Т.* Локальное программирование // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2001. Т. 41. № 9. С. 1324–1331.
Polyak B.T. Local programming // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2001. V. 41(9). P. 1259–1266.
- 3.105. *Polyak B.T.* Convexity of Nonlinear Image of a Small Ball with Applications to Optimization // Set-Valued Analysis. 2001. V. 9(1–2). P. 159–168.
- 3.106. *Киселев О.Н., Поляк Б.Т.* Минимизация перерегулирования в линейных дискретных системах регуляторами низкого порядка // АиТ. 2001. № 4. С. 98–108.
Kiselev O.N., Polyak B.T. Minimization of Overshoot in Linear Discrete-Time Systems via Low-Order Controllers // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 4. P. 597–606.
- 3.107. *Calafiore G., Polyak B.T.* Stochastic Algorithms for Exact and Approximate Feasibility of Robust LMIs // IEEE Trans. Automatic Control. 2001. V. 46(11). P. 1755–1759.
- 3.108. *Polyak B.T., Tempo R.* Probabilistic Robust Design with Linear Quadratic Regulators // Sys. Control Lett. 2001. V. 43(5). P. 343–353.
- 3.109. *Durieu C., Walter É., Polyak B.* Multi-Input Multi-Output Ellipsoidal State Bounding // J. Optim. Theor. Appl. 2001. V. 111(2). P. 273–303.
- 3.110. *Polyak B.T.* History of Mathematical Programming in the USSR: Analyzing the Phenomenon // Mathematical Programming. Series B. 2002. V. 91(3). P. 401–416.
- 3.111. *Halpern M.E., Polyak B.T.* Optimization-Based Design of Fixed-Order Controllers for Command Following // Automatica. 2002. V. 38(9). P. 1615–1619.
- 3.112. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // АиТ. 2002. № 8. С. 37–53.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable Linear Control Systems. I. Analysis // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 8. P. 1239–1254.
- 3.113. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // АиТ. 2002. № 11. С. 56–75.

- Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Superstable Linear Control Systems. II. Design // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 11. P. 1745–1763.
- 3.114. *Polyak B.T.* The Convexity Principle and its Applications // Bul. Brazil. Mat. Soc. 2003. V. 34(1). P. 59–75.
- 3.115. *Dabbene F., Gay P., Polyak B.T.* Recursive Algorithms for Inner Ellipsoidal Approximation of Convex Polytopes // Automatica. 2003. V. 39(10). P. 1773–1781.
- 3.116. *Polyak B.T.* Convexity of the Reachable Set of Nonlinear Systems under L_2 Bounded Controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A. Mathematical Analysis. 2004. V. 11. Nos. 2–3. P. 255–267.
- 3.117. *Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E.* Ellipsoidal Parameter or State Estimation under Model Uncertainty // Automatica. 2004. V. 40(7). P. 1171–1179.
- 3.118. *Polyak B.T., Nazin S.A.* Interval Solutions for Interval Algebraic Equations // Mat. Comput. Simulat. 2004. V. 66. Iss. 2–3. P. 207–217.
- 3.119. *Поляк Б.Т.* Поляк Обобщенная сверхустойчивость в теории управления // АиТ. 2004. № 4. С. 70–80.
Polyak B.T. Extended Superstability in Control Theory // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 4. P. 567–576.
- 3.120. *Назин А.В., Назин С.А., Поляк Б.Т.* О сходимости внешних эллипсоидальных аппроксимаций областей достижимости линейных дискретных динамических систем // АиТ. 2004. № 8. С. 39–61.
Nazin A.V., Nazin S.A., Polyak B.T. On Convergence of External Ellipsoidal Approximations of the Reachability Domains of Discrete Dynamic Linear Systems // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. P. 1210–1230.
- 3.121. *Polyak B.T.* Newton–Kantorovich Method and Its Global Convergence // J. Mat. Sci. 2006. V. 133(4). P. 1513–1523.
- 3.122. *Nazin S.A., Polyak B.T.* Interval Parameter Estimation under Model Uncertainty // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences. 2005. V. 11(2). P. 225–237.
- 3.123. *Поляк Б.Т., Щербakov П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // АиТ. 2005. № 5. С. 7–46.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Solution // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 5. P. 681–718.
- 3.124. *Поляк Б.Т.* Стабилизация хаоса с помощью прогнозирующего управления // АиТ. 2005. № 11. С. 99–112.
Polyak B.T. Stabilizing Chaos with Predictive Control // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 11. P. 1791–1804.
- 3.125. *Ефремов С.В., Поляк Б.Т.* Синхронизация хаотических систем с помощью прогнозирующего управления // АиТ. 2005. № 12. С. 40–50.
Efremov S.V., Polyak B.T. Using Predictive Control to Synchronize Chaotic Systems // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 12. P. 1905–1915.
- 3.126. *Gryazina E.N., Polyak B.T.* Stability Regions in the Parameter Space: D -Decomposition Revisited // Automatica. 2006. V. 42(1). P. 13–26.
- 3.127. *Поляк Б.Т., Назин С.А.* Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределенностью // Проблемы управления и информатики. 2006. № 1–2. С. 103–115.
Polyak B.T., Nazin S.A. Estimation of Parameters in Linear Multidimensional

- Systems under Interval Uncertainty // J. Autom. Inform. Sci. 2006. V. 38. No. 2. P. 19–33.
- 3.128. *Polyak B.T.* Newton–Kantorovich Method and Its Global Convergence // J. Math. Sci. 2006. V. 133(4). P. 1513–1523.
- 3.129. *Polyak B.T.* Controlling Chaos with Predictive Control // Appl. Comput. Mat. 2006. V. 5(1). P. 66–78.
- 3.130. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Техника D -разбиения при решении линейных матричных неравенств // АиТ. 2006. № 11. С. 159–174.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. The D -Decomposition Technique for Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1847–1861.
- 3.131. *Nesterov Yu., Polyak B.T.* Cubic Regularization of Newton Method and Its Global Performance // Mathematical Programming. Series A. 2006. V. 108(1). P. 177–205.
- 3.132. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ : параметрический подход // АиТ. 2007. № 3. С. 94–105.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. Design of the Low-order Controllers by the H_∞ Criterion: A Parametric Approach // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 456–466.
- 3.133. *Dabbene F., Polyak B.T., Tempo R.* On the Complete Instability of Interval Polynomials // Syst. Control Lett. 2007. V. 56(6). P. 431–438.
- 3.134. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
- 3.135. *Polyak B.T., Nazin S.A.* Invariant Ellipsoids Technique for Persistent Disturbance Rejection // Int. J. Tomograph. Stat. 2007. V. 5(W07). P. 165–170.
- 3.136. *Polyak B.T.* Newton’s Method and Its Use in Optimization // Eur. J. Oper. Res. 2007. V. 181(3). P. 1086–1096.
- 3.137. *Назин С.А., Поляк Б.Т.* Параметрическое оценивание методом эллипсоидов в линейных многомерных системах с неопределенным описанием модели // АиТ. 2007. № 6. С. 67–80.
Nazin S.A., Polyak B.T. Ellipsoid-based Parametric Estimation in the Linear Multidimensional Systems with Uncertain Model Description // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 6. P. 993–1005.
- 3.138. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т.* Многомерная область устойчивости полиномиальных семейств специального вида // АиТ. 2007. № 12. С. 38–52.
Gryazina E.N., Polyak B.T. Multidimensional Stability Domain of Special Polynomial Families // Autom. Remote Control. 2007. V. 86. No. 12. P. 2128–2141.
- 3.139. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: Метод инвариантных эллипсоидов // Докл АН. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.
Polyak B.T., Topunov M.V. Filtering under Nonrandom Disturbances: The Method of Invariant Ellipsoids // Doklady Mathematics. 2008. V. 77. No. 1. P. 158–162.
- 3.140. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.

- Polyak B.T., Topunov M.V.* Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // *Autom. Remote Control*. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
- 3.141. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D -разбиения // *АиТ*. 2008. № 12. С. 3–40.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. D -Decomposition Technique State-of-the-Art // *Autom. Remote Control*. 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
- 3.142. *Назин А.В., Поляк Б.Т.* Рандомизированный алгоритм нахождения собственного вектора стохастической матрицы с приложением к PageRank // *Докл. АН*. 2009. Т. 426. № 6. С. 734–737.
Nazin A.V., Polyak B.T. The Randomized Algorithm for Finding an Eigenvector of the Stochastic Matrix with Application to PageRank // *Doklady Mathematics*. 2009. V. 79. No. 3. P. 424–427.
- 3.143. *Поляк Б.Т.* Развитие теории автоматического управления // *Проблемы управления*. 2009. № 3.1. С. 13–18.
- 3.144. *Кунцевич В.М., Поляк Б.Т.* Инвариантные множества нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями и задачи управления // *Проблемы управления и информатики*. 2009. № 6. С. 6–21.
Kuntsevich V.M., Polyak B.T. Invariant Sets of Nonlinear Discrete Systems with Bounded Disturbances and Control Problems // *J. Autom. Inform. Sci.* 2009. V. 41. No. 11. P. 1–16.
- 3.145. *Dabbene F., Shcherbakov P., Polyak B.* A Randomized Cutting Plane Method with Probabilistic Geometric Convergence // *SIAM J. Optim.* 2010. V. 2. No. 6. P. 3185–3207.
- 3.146. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Randomized Methods Based on New Monte Carlo Schemes for Control and Optimization // *Ann. Oper. Res.* 2011. V. 189(1). P. 343–356.
- 3.147. *Назин А.В., Поляк Б.Т.* Рандомизированный алгоритм нахождения собственного вектора стохастической матрицы с применением к задаче PageRank // *АиТ*. 2011. № 2. С. 131–141.
Nazin A.V., Polyak B.T. Randomized Algorithm to Determine the Eigenvector of a Stochastic Matrix with Application to the PageRank Problem // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 2. P. 342–352.
- 3.148. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // *АиТ*. 2011. № 11. С. 9–59.
Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of Linear Systems Subject to Bounded Exogenous Disturbances: The Invariant Ellipsoid Technique // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 11. P. 2227–2275.
- 3.149. *Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Решение задачи PageRank для больших матриц с помощью регуляризации // *АиТ*. 2012. № 11. С. 144–166.
Polyak B.T., Tremba A.A. Regularization-based Solution of the PageRank Problem for Large Matrices // *Autom. Remote Control*. 2012. V. 73. No. 11. P. 1877–1894.
- 3.150. *Juditsky A., Karzan F.K., Nemirovski A., Polyak B.* Accuracy Guarantees for l_1 Recovery of Block-sparse Signals // *Annal. Stat.* 2012. V. 40. No. 6. P. 3077–3107.
- 3.151. *Поляк Б.Т.* Наукометрия: кого мы лечим? // *Управление большими системами*. 2013. Т. 44. С. 161–170.

- 3.152. *Gryazina E.N., Polyak B.T.* Random sampling: Billiard Walk algorithm // Eur. J. Oper. Res. 2014. V. 238(2). P. 497–504.
- 3.153. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Разреженная обратная связь в линейных системах управления // АиТ. 2014. № 12. С. 13–27.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Sparse Feedback in Linear Control Systems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 12. P. 2099–2111.
- 3.154. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // АиТ. 2015. № 6. С. 18–41.
Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 957–976.
- 3.155. *Barabanov N., Ortega R., Griño R., Polyak B.* On Existence and Stability of Equilibria of Linear Time-Invariant Systems With Constant Power Loads // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2016. V. 63(1). P. 114–121.
- 3.156. *Поляк Б.Т., Кузнецов О.Н., Чумаченко В.В.* Исследование устойчивости энергосистемы с однополярным электромагнитным тормозом // АиТ. 2016. № 9. С. 58–69.
Polyak B.T., Kuznetsov O.N., Chumachenko V.V. Stability Study of a Power System with Unipolar Electromagnetic Brake // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1557–1566.
- 3.157. *Polyak B.T., Smirnov G.* Large Deviations for Non-Zero Initial Conditions in Linear Systems // Automatica. 2016. V. 74. P. 297–307.
- 3.158. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Метод главных компонент: Робастные версии // АиТ. 2017. № 3. С. 130–148.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Principle Component Analysis: Robust Versions // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 3. P. 490–506.
- 3.159. *Polyak B., Shcherbakov P.* Why Does Monte Carlo Fail to Work Properly in High-Dimensional Optimization Problems? // J. Optim. Theor. Appl. 2017. V. 173(2). P. 612–627.
- 3.160. *Поляк Б.Т., Квинто Я.И.* Устойчивость и синхронизация осцилляторов: новые функции Ляпунова // АиТ. 2017. № 7. С. 76–85.
Polyak B.T., Kvinto Ya.I. Stability and Synchronization of Oscillators: New Lyapunov Functions // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1234–1242.
- 3.161. *Machado J.E., Griño R., Barabanov N., Ortega R., Polyak B.* On Existence of Equilibria of Multi-Port Linear AC Networks With Constant-Power Loads // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2017. V. 64(10). P. 2772–2782.
- 3.162. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Optimization and Asymptotic Stability // Int. J. Control. 2018. V. 91(11). P. 2404–2410.
- 3.163. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Smirnov G.* Peak Effects in Stable Linear Difference Equations // J. Differ. Equat. Appl. 2018. V. 24(9). P. 1488–1502.
- 3.164. *Polyak B., Tremba A.* Sparse Solutions of Optimal Control via Newton Method for Under-Determined Systems // J. Global Optim. 2020. V. 76(3). P. 613–623.
- 3.165. *Поляк Б.Т., Смирнов Г.В.* Переходные процессы в матричных дискретных линейных системах // АиТ. 2019. № 9. С. 112–121.

- Polyak B.T., Smirnov G.V.* Transient Response in Matrix Discrete-Time Linear Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 9. P. 1645–1652.
- 3.166. *Поляк Б.Т., Шалби Л.А.* Стабилизация космического аппарата в точках Лагранжа с минимальным расходом топлива // АиТ. 2019. № 12. С. 160–172.
Polyak B.T., Shalby L.A. Minimum Fuel-Consumption Stabilization of a Spacecraft at the Lagrangian Points // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 12. P. 2217–2228.
- 3.167. *Balashov M.V., Polyak B.T., Tremba A.A.* Gradient Projection and Conditional Gradient Methods for Constrained Nonconvex Minimization // Numer. Function. Anal. Optim. 2020. V. 41(7). P. 822–849.
- 3.168. *Polyak B., Tremba A.* New Versions of Newton Method: Step-size Choice, Convergence Domain and Under-determined Equations // Optim. Method. Softwar. 2020. V. 35(6). P. 1272–1303.
- 3.169. *Поляк Б.Т., Фатхуллин И.Ф.* Применение проективного покоординатного спуска в задаче Фекете // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2020. Т. 60. № 5. С. 815–827.
Polyak B.T., Fatkhullin I.F. Use of Projective Coordinate Descent in the Fekete Problem // Comput. Math. and Math. Phys. 2020. V. 60. No. 5. P. 795–807.
- 3.170. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. on Control and Optimization. 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
- 3.171. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
- 3.172. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
- 3.173. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // АиТ. 2022. № 3. С. 7–32.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324.
- 3.174. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // АиТ. 2022. № 11. С. 62–82.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New Criteria for Tuning PID Controllers // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.
- 3.175. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Поправка к статье Б.Т. Поляка, М.В. Хлебникова «Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации». АиТ. 2022. № 3. С. 7–32. // АиТ. 2022. № 11. С. 167–168.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Erratum to: Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem. Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324 // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 11. P. 1818–1819.
- 3.176. *Stonyakin F.S., Kuruzov I.A., Polyak B.T.* Stopping Rules for Gradient Methods for Non-Convex Problems with Additive Noise in Gradient // J. Optim. Theor. Appl. 2023. V. 198. Iss. 2. P. 531–551.

- 3.177. *Beznosikov A., Polyak B., Gorbunov E., Kovalev D., Gasnikov A.* Smooth Monotone Stochastic Variational Inequalities and Saddle Point Problems: A Survey // Eur. Mat. Soc. Magazin. 2023. V. 127. P. 15–28.

Статьи в сборниках, главы в книгах, препринты и другое

- 4.1. *Иванцов Г.П., Поляк Б.Т.* Вопросы устойчивости правильной формы кристалла // Сб. трудов ЦНИИЧМ. 1960. № 21. С. 464–479.
- 4.2. *Поляк Б.Т.* Задачи многоходового выбора // Вопросы теории математических машин. Т. 2. / Под ред. Ю.Я. Базилевского. М.: Физматлит, 1962. С. 156–173.
- 4.3. *Поляк Б.Т., Шрейдер Ю.А.* Применение полиномов Уолша в приближенных вычислениях // Вопросы теории математических машин. Т. 2. / Под ред. Ю.Я. Базилевского. М.: Физматлит, 1962. С. 174–190.
Poljak B.T., Schreider Ju. A. Application of Walsh Polynomials in Approximate Calculation // AMS. Nine Papers on Foundations, Measure Theory and Analysis 1967. V. 57. P. 171–189.
- 4.4. *Борисова Т.Н., Влашек З., Карманов В.Г., Поляк Б.Т.* Некоторые методы решения задач о размещении // Вычислительные методы и программирование. Т. 3. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1965. С. 441–451.
- 4.5. *Бер А.М., Белов Е.Н., Поляк Б.Т.* О некоторых задачах оптимизации сетей // Вычислительные методы и программирование. Т. 5. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1966. С. 115–123.
- 4.6. *Поляк Б.Т., Шостаковский Б.И.* Одна задача на максимум функции нескольких переменных // Вычислительные методы и программирование. Т. 5. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1966. С. 107–114.
- 4.7. *Карманов В.Г., Руднева Т.Л., Поляк Б.Т.* О некоторых методах решения экстремальных задач экономического и технико-экономического содержания // Вычислительные методы и программирование. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1967. Т. 9. С. 143–147.
- 4.8. *Поляк Б.Т., Шостаковский Б.И.* Об одном методе решения задачи наилучшего равномерного приближения // Вычислительные методы и программирование. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1967. Т. 9. С. 160–166.
- 4.9. *Поляк Б.Т., Скоков В.А.* Подбор параметров кинетических уравнений по экспериментальным данным // Вычислительные методы и программирование. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1967. Т. 9. С. 167–178.
- 4.10. *Орлов В.С., Поляк Б.Т., Ребрий В.А., Третьяков Н.В.* Опыт решения задач оптимального управления // Вычислительные методы и программирование. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1967. Т. 9. С. 179–192.
- 4.11. *Иванова Т.П., Поляк Б.Т., Пухова Г.В.* Численные методы решения некоторых экстремальных задач с частными производными // Вычислительные методы и программирование. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1967. Т. 9. С. 193–202.

- 4.12. Поляк Б.Т. Об одном методе решения задач линейного и квадратичного программирования большого объема // Вычислительные методы и программирование. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1969. Т. 12. С. 10–17.
- 4.13. Поляк Б.Т. Итерационные методы решения некоторых некорректных вариационных задач // Вычислительные методы и программирование. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1969. Т. 12. С. 38–52.
- 4.14. Поляк Б.Т., Пухова Г.В. Об одной многомерной вариационной задаче с ограничениями // Вычислительные методы и программирование. (Сборник работ вычислительного центра МГУ). М.: Изд-во МГУ, 1970. Т. 14. С. 186–197.
- 4.15. Поляк Б.Т. Методы минимизации при наличии ограничений // Итоги науки и техники / Под ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1974. Т. 12. С. 147–197.
Polyak B.T. Minimization Methods with Constraints // J. Sov. Mat. 1976. V. 5. No. 1. P. 97–128.
- 4.16. Поляк Б.Т. Устойчивые методы оценки параметров // Структурная адаптация сложных систем управления / Под ред. Л.А. Растригина. Воронеж: Изд-во Воронежского политех. ин-та, 1977. С. 66–71.
- 4.17. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Стабильное оценивание в условиях неполной информации / Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. М.: Изд-во Совета по кибернетике АН СССР, 1977. С. 6–15.
- 4.18. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Огрубленный метод максимального правдоподобия // Динамика систем. Математические методы теории колебаний / Под ред. Ю.И. Неймарка, Н.В. Бутенина и др. Горький: Изд-во Горьковского государственного университета, 1977. Т. 12. С. 22–46.
- 4.19. *Poljak B.T. Subgradient Methods: A Survey of Soviet Research // Nonsmooth Optimization. Proc. IIASA Workshop March 28–April 8, 1977. IIASA Proceedings Series. V. 3. / Eds.: C. Lemarechal, R. Mifflin. Oxford: Pergamon Press, 1978. P. 5–29.*
- 4.20. *Poljak B.T. On the Bertsekas' Method for Minimization of Composite Functions // International Symposium on Systems Optimization and Analysis. V. 14 / Eds.: A. Bensoussan, J.L. Lions. Springer-Verlag, 1979. P. 176–184.*
- 4.21. *Poljak B.T. Iterative Algorithms for Singular Minimization Problems // Nonlinear Programming / Eds.: O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson. Academic Press, 1981. V. 4. P. 147–166.*
- 4.22. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Идентификация нестационарных динамических объектов // Итоги науки и техники. Т. 21. / Под ред. С.В. Емельянова. М.: ВИНТИ, 1987. С. 68–91.
- 4.23. *Nazin A.V., Polyak B.T., Tsybakov A.B. Passive Stochastic Approximation // Preprint. Moscow: Institute of Control Sciences, 1990.*
- 4.24. *Polyak B.T. Variational Problems Arising in Statistics // Perspectives in Control Theory. V. 2. Proc. of the Sielpia Conference, Sielpia, Poland, 1988 / Eds.: B. Jakubczyk, K. Malanowski, W. Respondek. Birkhauser, 1990. P. 277–285.*
- 4.25. Поляк Б.Т. Методы оптимизации при наличии помех // Глава в книге «Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании» / Под ред. Е.Г. Гольштейн. М.: Наука. 1991. С. 86–94.
Polyak B.T. Optimization Problems in the Presence of Noise // Chapter in book:

- «Modern Mathematical Methods of Optimization» / Eds.: K. Elster. Academic Verlag. 1993. P. 53–61.
- 4.26. *Tsygkin Ya.Z., Polyak B.T.* Frequency Domain Approach to Robust Stability of Continuous Systems // Systems and Control: Topics in Theory and Applications / Eds.: T. Ono, F. Kozin. Mita Press, 1991. P. 389–399.
 - 4.27. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Т. 32 / Под ред. С.В. Емельянова. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3–31.
 - 4.28. *Tsygkin Ya.Z., Polyak B.T.* Frequency Domain Criterion for Robust Stability of Polytope of Polynomials // Control of Uncertain Dynamic Systems / Eds.: S.P. Bhattacharyya, L.H. Keel. CRC Press, 1991. P. 491–499. (A collection of papers presented at the International Workshop on Robust Control, San Antonio, Texas, March 1991.)
 - 4.29. *Polyak B.T., Tsybakov A.B.* On Stochastic Approximation with Arbitrary Noise (the KW-case) // Topics in Nonparametric Estimation. V. 12 / Eds.: R.Z. Khasminskii. AMS. 1992.
 - 4.30. *Polyak B.T.* Robustness Analysis for Multilinear Perturbations // Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties / Eds.: M. Mansour, S. Balemi, W. Truöl. Birkhäuser, 1992. P. 93–104.
 - 4.31. *Tsygkin Ya.Z., Polyak B.T.* Robust Absolute Stability of Continuous Systems // Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties / Eds.: M. Mansour, S. Balemi, W. Truöl. Birkhäuser, 1992. P. 113–121.
 - 4.32. *Tsygkin Ya.Z., Polyak B.T.* Robust Stability of Discrete-Time Systems: Frequency Domain Approach // Fundamentals of Discrete-Time Systems: A Tribute to Professor Eliahu I. Jury / Eds.: M. Jamshidi, M. Mansour, B.D.O. Anderson, N.K. Bose. TSI Press, 1993. P. 163–169.
 - 4.33. *Polyak B.T., Kogan J.* Necessary and Sufficient Conditions of Robust Stability of Multiaffine Systems // Research Report 93–06. Dept. Math., University of Maryland, Baltimore County, Baltimore, USE, 1993.
 - 4.34. *Barmish B.R., Polyak B.T.* The Volumetric Singular Value and Robustness of Feedback Control Systems // Technical Report ECE-93-9, University of Wisconsin-Madison, September 1993.
 - 4.35. *Polyak B., Scherbakov P., Shmulyan S.* Circular Arithmetic and its Applications to Robustness Analysis // Modeling Techniques for Uncertain Systems / Eds.: A.B. Kurzhanski, V.M. Veliov. Birkhauser, 1994. P. 229–243.
 - 4.36. *Polyak B.T.* Robust Stability of Interval Matrices: A Stochastic Approach // Stochastic Programming Methods and Technical Applications (Proc. 3rd GAMM/IFIP Workshop «Stochastic Optimization: Numerical Methods and Technical Applications.» Munich, Germany. June 17–20, 1996) / Eds.: K. Marti, P. Kall. Springer. 1998. P. 202–207.
 - 4.37. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Numerical Search of Stable or Unstable Element in Matrix or Polynomial Families: A Unified Approach to Robustness Analysis and Stabilization // Robustness in Identification and Control. Lect. Notes Control Inf. Sci., V. 245 / Eds.: A. Garulli, A. Tesi, A. Vicino. Springer, 1999. P. 344–358.
 - 4.38. *Поляк Б.Т.* Робастная устойчивость // Труды Института проблем управления РАН. Т. 5. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 1999. С. 36–43.

- 4.39. *Polyak B.T.* Random Algorithms for Solving Convex Inequalities // Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications. Studies in Computational Mathematics. V. 8 / Eds.: D. Butnariu, S. Reich, Y. Censor. Elsevier Science, 2001. P. 409–422.
- 4.40. *Nazin S.A., Polyak B.T.* Limiting Behavior of Bounding Ellipsoids for State Estimation // Nonlinear Control Systems. V. 2 / Eds.: A. Kurzhanski, A. Fradkov. Elsevier, 2002. P. 553–558.
- 4.41. *Polyak B.T.* Convexity of the Reachable Set of Nonlinear Systems under L_2 Bounded Controls // Preprint of the Institute Mittag-Leffler. No. 02. Spring, 2003. 13 p.
- 4.42. *Nesterov Yu., Polyak B.T.* Cubic Regularization of Newton Scheme and its Global Performance // Preprint CORE DP 2003/41. Louvain-la-Neuve, Belgium, 2003. 27 p.
- 4.43. *Polyak B.T.* Robust Linear Algebra and Robust Aperiodicity // Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization. V. 286 / Eds.: A. Rantzer, C.I. Byrnes. Springer-Verlag, 2003. P. 249–260.
- 4.44. *Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы решения выпуклых неравенств // В сб.: «Стохастическая оптимизация в информатике» / Под ред. О.Н. Граничина. СПб.: Изд-во СПбУ, 2005. С. 150–169.
- 4.45. *Polyak B.T.* Early Control Textbooks in Russia (Soviet Union) // Historic Control Textbook / Ed.: J. Gertler. Elsevier, 2006. P. 213–232.
- 4.46. *Polyak B.* New Challenges in Nonlinear Control: Stabilization and Synchronization of Chaos // Forever Ljung in System Identification / Eds.: T. Glad, G. Hendeby. Studentlitteratur, Lund, 2006. P. 147–168.
- 4.47. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Рандомизированный метод решения задач полуопределенного программирования // Стохастическая оптимизация в информатике / Под ред. О.Н. Граничина. СПб.: Изд-во СПбУ, 2006. Вып. 2. С. 38–70.
- 4.48. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Описание областей постоянства сигнатуры аффинных матричных функций // Прикладные проблемы управления макросистемами. Труды ИСА РАН. М.: КомКнига, 2006. Т. 28. С. 125–147.
- 4.49. *Поляк Б.Т.* Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике // Прикладные проблемы управления макросистемами. Труды ИСА РАН., М.: КомКнига, 2006. Т. 28. С. 48–66.
- 4.50. *Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С.* Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений // «Стохастическая оптимизация в информатике» / Под ред. О.Н. Граничина. СПб.: Изд-во СПбУ, 2007. Вып. 3. С. 51–84.
- 4.51. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Техника D -разбиения при решении линейных матричных неравенств // Глава в книге «Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства» / Под ред. А.Х. Гелига, Г.А. Леонова, А.Л. Фрадкова. М.: Физматлит, 2008. С. 135–154.
- 4.52. *Polyak B.T., Nazin S.A., Khlebnikov M.V.* The Invariant Ellipsoids Technique for Analysis and Design of Linear Control Systems // Advances in Mechanics: Dynamics and Control / Eds.: F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin. Moscow, Nauka, 2008. P. 239–246. (Proc. of the 14th International Workshop on Dynamics and control, Moscow–Zvenigorod, Russia May 28–June 2, 2008. Dedicated to Professor Angelo Miele on the occasion of his 85th Birthday.)

- 4.53. *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Robust Rejection of Exogenous Disturbances via Invariant Ellipsoids Technique // *Advances in Mechanics: Dynamics and Control* / Eds.: F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin. Moscow, Nauka, 2008. P. 247–254. (Proc. of the 14th International Workshop on Dynamics and Control, Moscow–Zvenigorod, Russia May 28–June 2, 2007. Dedicated to Professor Angelo Miele on the occasion of his 85th Birthday).
- 4.54. *Petrikevich Ya., Polyak B.* Monte-Carlo Technique for Stabilization of Linear Discrete-Time Systems via Low-Order Controllers // *Advances in Mechanics: Dynamics and Control* / Eds.: F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin. Moscow, Nauka, 2008. P. 232–238. (Proc. of the 14th International Workshop on Dynamics and control, Moscow–Zvenigorod, Russia May 28–June 2, 2007. Dedicated to Professor Angelo Miele on the occasion of his 85th Birthday).
- 4.55. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов // *Стохастическая оптимизация в информатике* / Под ред. О.Н. Граничина. СПб.: Изд-во СПбУ, 2008. Вып. 4. С. 3–24.
- 4.56. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями // *Проблемы устойчивости и управления*. М.: Физматлит, 2013. С. 270–299. (Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика В.М. Матросова).
- 4.57. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Почему метод Монте-Карло неэффективен в оптимизационных задачах большой размерности? // *Стохастическая оптимизация в информатике* / Под ред. О. Граничина. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 2014. Вып. 10. С. 89–100.
- 4.58. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Stability and Performance of Complex Systems Affected by Parametric Uncertainty // Chapter in book: «Encyclopedia of Systems and Control» / Eds.: J. Baillieul, T. Samad. Springer, 2014. Current version: 2021. P. 2117–2124.
- 4.59. *Polyak B., Gryazina E.* Convexity/Nonconvexity Certificates for Power Flow Analysis // Chapter in book: «Advances in Energy System Optimization: Proceedings of the First International Symposium on Energy System Optimization» / Eds.: V. Bertsch, W. Fichtner, V. Heuveline, T. Leibfried. Springer International Publishing, 2017. P. 221–230.
- 4.60. *Polyak B., Shcherbakov P.* Randomization in Robustness, Estimation, and Optimization // Chapter in book: «Uncertainty in Complex Networked Systems: In Honor of Roberto Tempo» / Eds.: T. Basar. Springer International Publishing, 2018. P. 181–208.
- 4.61. *Danilova M., Kulakova A., Polyak B.* Non-monotone Behavior of the Heavy Ball Method // Difference Equations and Discrete Dynamical Systems with Applications. V. 312 / Eds.: M. Bohner, S. Siegmund, R. Simon Hilscher, P. Stehlik. Springer International Publishing, 2020. P. 213–230. (Proc. 24th International Conference on Difference Equations and Applications. Dresden, Germany, May, 2018).

Труды конференций

- 5.1. *Гурсанов И.В., Поляк Б.Т.* Математические методы решения задачи о размещении / *Проблемы оптимального управления, планирования и размещения производства*. М.: Изд-во МГУ, 1963. С. 288–300.

- 5.2. Гурсанов И.В., Поляк Б.Т., Фейгин Е.А., Платонов В.М. Вычисление параметров кинетических уравнений по экспериментальным данным // Всесоюз. конф. по хим. реакторам. Новосибирск, 1965. С. 412–423.
- 5.3. Polyak B.T. Some Aspects of Mathematical Theory and Methods for Extremal Problems // Int. Congr. Math. Abstracts. Sect. 13. Moscow, 1966. P. 29.
- 5.4. Поляк Б.Т. Метод сопряженных градиентов // Тр. II Зимней школы по мат. программированию и смежн. вопросам (плeнарный доклад). Дрогобыч, 1969. Т. 1. С. 152–201.
- 5.5. Поляк Б.Т. О некоторых двойственных методах решения задач на условный экстремум / Тр. симп. «Проблемы точности и эффективности вычислит. методов». Киев, 1969. Т. 4. С. 104–114.
- 5.6. Поляк Б.Т., Третьяков Н.В. Об одном итеративном методе решения задач математического программирования и его экономической интерпретации // Тр. 1-й конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. Секц. 3. Москва, 1971. С. 260–264.
- 5.7. Polyak B.T. Stochastic Regularized Algorithms // Suppl. to Preprints of the IFAC Symp. Stoch. Contr. Budapest, 1974.
- 5.8. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Потенциальные возможности алгоритмов адаптации // Тр. II Ленинградского Симпозиума по теории адаптивных систем (плeнарный доклад). Ленинград, 1976. С. 6–19.
- 5.9. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Помехоустойчивая идентификация // Тр. IV Симпозиума ИФАК. Идентификация и оценка параметров систем. Часть 1 (плeнарный доклад). Тбилиси, 1976. С. 190–213.
- 5.10. Polyak B.T. Nonlinear Programming Methods in the Presence of Noise // Proc. IX Intern. Symp. Math. Progr. «Survey of Math. Progr.» V. 2 (plenary talk). Budapest, 1976 / Ed. A. Prekopa. Akademia Kiado, Budapest, 1977. P. 155–165.
- 5.11. Поляк Б.Т. Использование априорной информации в адаптивных алгоритмах // Тр. VII Всесоюзной конференции по проблемам управления. Минск, 1977. Т. 1. С. 87–89.
- 5.12. Polyak B.T., Fedorova I.E. DAS-method (Descent–Ascent–Saddle Point) for Global Optimization // Abstracts of the 9th IFIP Conference on Optimization Techniques. Warszawa, Sept. 1979. P. 180.
- 5.13. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные и робастные методы безусловной оптимизации // Тр. VIII Всесоюзной конференции по проблемам управления. Т. 2 (плeнарный доклад). Таллинн, 1980. С. 261–262.
- 5.14. Poljak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Optimal and Robust Methods for Unconditional Optimization // Proc. of the 8th IFAC World Congress. Kyoto, August 24–28, 1981. V. 4. P. 94–98.
- 5.15. Немировский А.С., Поляк Б.Т., Цыбаков А.В. Непараметрическая идентификация методом максимального правдоподобия // Тр. Всесоюзной конференции «Теория адаптивных систем и ее применения». Москва, 1983. С. 160–163.
- 5.16. Polyak B.T. Recurrent Methods of Unconstrained Stochastic Optimization // Proc. Int. Conf. «Stochastic Optimization.» Kiev, 1984. Part II. P. 55–57.
- 5.17. Tsyppkin Ya.Z., Poljak B.T. Optimal Recurrent Algorithms for Identification of Nonstationary Plants // Proc. of the 10th IFAC World Congress. 1987. V. 10. P. 318–321.

- 5.18. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Matrix Estimation and Its Applications to Optimization Problems // Proc. of the 7th IFAC Workshop on Control Applications of Nonlinear Programming and Optimization. Tbilisi, 1988. P. 82–83.
- 5.19. *Polyak B.T.* Variational Problems Arising in Statistics // Proc. of the Sielpia Conf. «Perspectives in Control Theory» (plenary talk) Poland, Sep. 19–24, 1988. P. 60–61.
- 5.20. *Polyak B.T., Tsyppkin Y.Z.* Frequency Domain Criterion for Robust Stability of a Polytope of Polynomials // Proc. Int. Workshop on Robust Control. San Antonio, TX, March 1991. P. 52.
- 5.21. *Polyak B.T., Tsyppkin Y.Z.* Robust Stability of Disk Polynomials: Frequency Domain Approach // Proc. Int. Workshop on Robust Control. San Antonio, TX, March 1991. P. 53.
- 5.22. *Polyak B.T., Tsyppkin Y.Z.* Robust Stability: Frequency Domain Approach // Proc. Symposium on Modelling, Inverse Problems, and Numerical Methods. Tallinn, Estonia, April, 1991.
- 5.23. *Polyak B., Tsybakov A.* On Stochastic Approximation with Arbitrary Dependent Noise // Center for Operations Research and Econometrics, University Catholique de Louvain, 1991. Discussion paper No. 9160.
- 5.24. *Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T., Katbab A., Jury E.I.* On the Strict and Wide-Sense Stability Robustness of Uncertain Systems — Application of a New Frequency Criterion // Proc. of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, UK, Dec. 11–13, 1991. P. 37–42.
- 5.25. *Polyak B.T.* Mathematical Programming with Multilinear Functions // Proc. of the Workshop on Computational Optimization. Haifa, Israel, March 1992.
- 5.26. *Polyak B.T.* Robustness Analysis: Small Multilinear Perturbations Can be Treated as Linear Ones // Proc. Int. Workshop on Robust Control. Monte Verita, Switzerland, April 1992. P. 33.
- 5.27. *Tsyppkin Ya.Z., Polyak B.T.* Robust Absolute Stability of Continuous Systems // Proc. Int. Workshop on Robust Control. Monte Verita, Switzerland, April 1992. P. 39.
- 5.28. *Barmish B.R., Polyak B.T.* A New Singular Value for Control Problems // Proc. of the 27th Conf. Inform. Sci. Systems. Johns Hopkins University, Baltimore, MD, March 1993. P. 195.
- 5.29. *Barmish B.R., Polyak B.T.* The Volumetric Singular Value and Robustness of Feedback Control Systems // Proc. of the 32nd Conference on Decision and Control. San Antonio, TX, December 1993. P. 521–522.
- 5.30. *Abrishamchian M., Barmish B.R., Polyak B.T.* Positive Realness and Coprime Factor Uncertainty Conditions for Reduction of Robust Stabilization Problems to Classical H^∞ Problems // Proc. of the American Control Conference. June, 1994. V. 2. P. 1413–1415.
- 5.31. *Abrishamchian M., Barmish B.R., Polyak B.T.* Special Weighting and Objective Functions for Robust Synthesis with a Type of Coprime Factor Uncertainty Model // Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control, Orlando, FL, December, 1994. P. 2983–2984.
- 5.32. *Nemirovskii A.S., Polyak B.T.* Probability for a Random Interval Polynomial to Be Stable // Proc. Int. Conf. Interval Methods in Science and Engineering. St. Petersburg, March, 1994. P. 183–184.

- 5.33. *Barmish B.R., Polyak B.T.* Stochastic Approach to Robustness in Control Theory // VII Int. Conf. on Stochastic Programming. Naharia, Israel, June, 1995.
- 5.34. *Barmish B.R., Polyak B.T.* Stochastic Approach to Robustness in Control Theory // Proc. of the 2nd Russian-Swedish Control Conference (plenary talk). St. Petersburg, Russia, August, 1995. P. 115–116.
- 5.35. *Polyak B.T., Vishnyakov A.N.* Multiplying Disks: Robust Stability of a Cascade Connection // Proc. of the 3rd European Control Conference. Rome, Italy, Sep. 1995. P. 1406–1411.
- 5.36. *Tsympkin Ya.Z., Polyak B.T.* Robustness radius for sector stability of polynomials // IFAC Proceedings Volumes. 1996. V. 29. No. 1. P. 3428–3431.
- 5.37. *Barmish B.R., Polyak B.T.* A New Approach to Open Robustness Problems Based on Probabilistic Prediction Formulae // Proc. of the 13th IFAC World Congress. V. H. San Francisco, July, 1996. P. 1–6.
- 5.38. *Durieu C., Polyak B.T., Walter E.* Trace versus Determinant in Ellipsoidal Outer-Bounding, with Application to State Estimation // Proc. of the 13th IFAC World Congress. V. I. San Francisco, July, 1996. P. 43–48.
- 5.39. *Polyak B.T.* A Theorem on an Image of a Set under Nonlinear Map and Its Application in Robustness Analysis // Abstracts of the 4th Int. Conf. «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems.» Moscow, Russia, June, 1996.
- 5.40. *Tsympkin Ya.Z., Polyak B.T.* Stability and Robust Stability of Nested Transfer Functions // Proc. of the IFAC Int. Workshop on Robust Control, Napa, CA, June, 1996.
- 5.41. *Durieu C., Polyak B.T., Walter E.* Ellipsoidal State Outer-Bounding for MIMO Systems via Analytical Techniques // Proc. of the IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications. Lille, France, July, 1996. P. 843–848.
- 5.42. *Polyak B.T.* Robust Stability of Interval Matrices: A Stochastic Approach // Proc. of the 35th CDC. Kobe, Japan, December, 1996. P. 18–23.
- 5.43. *Polyak B.T.* A Theorem on an Image of a Convex Set under Nonlinear Transformation // Proc. of the Int. Workshop on Nonsmooth Analysis and Optimization. Ballarat, Australia, February, 1997.
- 5.44. *Polyak B.T.* Quadratic Transformations and Their Use in Control and Optimization // Proc. of the Workshop «Semidefinite Programming and Large Scale Optimization,» Haifa, Israel, April 1997.
- 5.45. *Polyak B.T.* Value Sets for Transfer Functions under Parametric Uncertainty // Proc. of the 2nd IFAC Symposium on Robust Control Design. Budapest, Hungary, June, 1997.
- 5.46. *Durieu C., Walter E., Polyak B.T.* Ellipsoidal Bounding Techniques for Parameter Tracking // IFAC Proceedings Volumes. 1997. V. 30. No. 11. P. 1673–1678.
- 5.47. *Polyak B.T., Halpern M.E.* Robust Stability and Design of Linear Discrete-Time SISO Systems under l_1 Uncertainties // Proc. of the 36th Conference on Decision and Control. V. 2. San Diego, CA, Dec. 1997. P. 1564–1567.
- 5.48. *Polyak B.T.* H^∞ Optimization via Low-Order Controllers // Proc. of the 3rd Russian-Swedish Control Conference. Stockholm, Sweden, May, 1998.
- 5.49. *Kiselev O.N., Polyak B.T.* Computer-Aided H^∞ Design via Low-Order Controllers // Abstracts of the 5th Int. Conf. «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems.» Moscow, June, 1998. P. 79–80.

- 5.50. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Numerical Solution of Hard Problems in Control via Perturbation Theory // Proc. of the Int. IFAC Workshop «Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization.» Chelyabinsk, Russia, June 17–20, 1998. P. 176–180.
- 5.51. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and its Use in Control and Optimization // Proc. of the 11th Baikal Int. School-Seminar «Optimization Methods and Their Applications.» Baikal, Russia, July, 1998. P. 205–219.
- 5.52. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Numerical Search for Stable or Unstable Member in Matrix or Polynomial Families with Applications to Robustness Analysis and Stabilization // Proc. of the Workshop «Robustness in Identification and Control.» Siena, Italy, August 1998. P. 21–24.
- 5.53. *Vishnyakov A.N., Polyak B.T.* Design of Low-Order Controllers for Disturbance Attenuation in Discrete-Time Linear Systems // Proc. of the DYCOMANS Workshop «Techniques for Supervisory Management Systems.» Bled, Slovenia, May 1999. P. 13–16.
- 5.54. *Поляк Б.Т.* Новые подходы к управлению дискретными системами при ограниченных возмущениях // Тр. Международной конференции, посвященной 60-летию Института проблем управления (плeнарный доклад). Москва, июнь 1999. С. 111–117.
- 5.55. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* A New Approach to Robustness and Stability of Control Systems via Perturbation Theory // Proc. of the 14th IFAC World Congress. Beijing, China, July, 1999. V. C. P. 13–18.
- 5.56. *Polyak B.T.* New Approaches to Optimal Design for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Disturbances // Proc. of the 6th St. Petersburg Symposium on Adaptive Systems Theory (plenary talk). St. Petersburg, September, 1999.
- 5.57. *Polyak B.T.* Hidden Convexity in Optimization Problems // Proc. of the 7th Workshop on Well-posedness in Optimization and Related Topics (plenary talk). Gargnano, Italy, Sep. 13–18, 1999.
- 5.58. *Polyak B.T., Halpern M.E.* The Use of a New Optimization Criterion for Discrete-Time Feedback Controller Design // Proc. of the 38th CDC. Phoenix, Arizona. December, 1999. P. 894–899.
- 5.59. *Polyak B.T.* Random Algorithms for Projections in Feasible and Infeasible Cases // Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications (plenary talk). Haifa, Israel, March, 2000. P. 25–26.
- 5.60. *Polyak B.T., Tempo R.* Linear-Quadratic Regulator Design under Uncertainty // Abstracts of the 6th Int. Conf. «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems.» Moscow, June, 2000. P. 14–15.
- 5.61. *Durieu C., Walter E., Polyak B.* Set-Membership Estimation with the Trace Criterion Made Simpler than with the Determinant Criterion // IFAC Proceedings Volumes. 2000. V. 33. No. 15. P. 1007–1012.
- 5.62. *Vishnyakov A.N., Polyak B.T.* Design of Low-Order Controllers for Discrete-Time Linear Systems with Nonrandom Disturbances // Proc. of the 8th IEEE Mediterranean Conf. on Control and Autom. Patras, Greece, July, 2000.
- 5.63. *Polyak B.T.* History of Mathematical Programming in the USSR: Analyzing the Phenomenon // Proc. of the 17th Int. Symposium on Mathematical Programming (plenary talk). Atlanta, GA, August, 2000.

- 5.64. *Polyak B.T.* Random Algorithms for Solving Convex Inequalities // Proc. of the 17th Int. Symposium on Mathematical Programming. Atlanta, GA, August, 2000.
- 5.65. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Random Spherical Uncertainty in Estimation and Robustness // Proc. of the 39th CDC. Sydney, Australia, December, 2000. P. 3339–3340.
- 5.66. *Polyak B.T., Tempo R.* Probabilistic Robust Design with Linear Quadratic Regulators // Proc. of the 39th CDC. Sydney, Australia, Dec. 2000. P. 1037–1042.
- 5.67. *Dabbene F., Gay P., Polyak B.* Inner Ellipsoidal Approximation of Membership Set: A Fast Recursive Algorithm // Proc. of the 39th CDC. Sydney, Australia, Dec. 2000. P. 209–211.
- 5.68. *Halpern M.E., Polyak B.T.* Optimal Tracking with Fixed Order Controllers // Proc. of the 39th CDC. Sydney, Australia, December, 2000. P. 3908–3913.
- 5.69. *Calafiore D., Polyak B.T.* Fast Algorithms for Exact and Approximate Feasibility of Robust LMIs // Proc. of the 39th CDC. Sydney, Australia, December, 2000. P. 5035–5040.
- 5.70. *Polyak B.T.* Superstability and Its Use in Feedback // Proc. of the 4th Russian-Swedish Control Conference (plenary talk). Moscow, May, 2001.
- 5.71. *Поляк Б.Т.* Сверхустойчивые системы управления // Тр. 12-й Байкальской Международной конференции «Методы оптимизации и их приложения» (плeнарный доклад). Иркутск, июнь 2001. С. 209–219.
- 5.72. *Nazin S.A., Polyak B.T.* Limiting Behavior of Bounding Ellipsoids for State Estimation // IFAC Proceedings Volumes. 2001. V. 34. No. 6. P. 553–557.
- 5.73. *Polyak B.T.* Hidden Convexity in Optimization and Control // Proc. of the Workshop «Smooth and Nonsmooth Optimization» (plenary talk). Rotterdam, The Netherlands, July, 2001.
- 5.74. *Polyak B.T.* Superstable Linear Difference and Differential Equations // Proc. of the 6th Int. Conference on Difference Equations and Applications (plenary talk). Augsburg, Germany, August, 2001.
- 5.75. *Polyak B.T.* Robust Linear Algebra and Robust Stability // Abstracts of the 7th Int. Conf. «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems.» Moscow, May, 2002.
- 5.76. *Polyak B.T.* A Convexity Principle and its Applications in Linear Algebra, Optimization and Control // Proc of the Conf. «IMPA – 50 Years» (plenary talk). Rio-de-Janeiro, Brazil, June, 2002 (plenary talk).
- 5.77. *Polyak B.T.* Robust Linear Algebra with Applications to Real Stability Radius // Proc. of the IFAC Workshop «Uncertain Dynamical Systems.» Cascais, Portugal. July, 2002.
- 5.78. *Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E.* Ellipsoidal Estimation under Model Uncertainty // IFAC Proceedings Volumes. 2002. V. 35. No. 1. P. 25–30 (Proc. of the 15th IFAC World Congress. Barcelona, Spain. July, 2002. P. 1090–1095).
- 5.79. *Polyak B.T., Sznaier M., Shcherbakov P.S., Halpern M.* Superstable Control Systems // Proc. of the 15-th IFAC World Congress. Barcelona, Spain, July, 2002. P. 799–804.
- 5.80. *Polyak B.T.* Robust Linear Algebra and Robust Aperiodicity // Proc. of the Symp. «New Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization» (plenary talk). Stockholm, November, 2002.

- 5.81. *Sznaier M., Polyak B.T., Halpern A., Lagoa C.* A Superstability Approach to Synthesizing Low Order Suboptimal L-infinity Induced Controllers for LPV Systems // Proc. of the 41th CDC. Las Vegas, December, 2002.
- 5.82. *Polyak B.T., Nazin S.A.* Interval Solutions for Interval Algebraic Equations // Proc. of the 4-th MATHMOD Conference, Vienna, February 2003. P. 973–980.
- 5.83. *Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E.* Guaranteed Ellipsoidal State Estimation for Uncertain MIMO Models // IFAC Proceedings Volumes. 2003. V. 36. No. 16. P. 1017–1022.
- 5.84. *Polyak B.T.* Newton-Kantorovich Method and its Global Convergence // Proc. of the Kantorovich Memorial «Mathematics and Economics: Old Problems and New Approaches» (plenary talk). St.-Petersburg, Russia, January, 2004.
- 5.85. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Возможные подходы к решению трудных задач линейной теории управления // Тр. 3-й Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» (пленарный доклад). Москва, 2004, С. 6–46.
- 5.86. *Назин А.В., Назин С.А., Поляк Б.Т.* Сходимость рекуррентных эллипсоидальных оценок областей достижимости линейных дискретных динамических систем // Тр. 8-й междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, Россия, 2–4 июня 2004. С. 125–132.
- 5.87. *Поляк Б.Т., Грязина Е.Н.* Геометрия D-разбиения // Тр. 8-й междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, июнь 2004.
- 5.88. *Polyak B.T., Maslov V.P.* Controlling Chaos via Predictive Control // Proc. of the Int. Workshop «Dynamical Systems and Control.» Haifa, Israel, June, 2004.
- 5.89. *Polyak B.T.* Newton's Method and Its Use in Optimization // Proc. of the 22th Euro Summer Institute «Optimization and Data Mining.» Ankara, Turkey, July 9–25, 2004.
- 5.90. *Polyak B.T., Maslov V.P.* Controlling Chaos and Synchronization by Predictive Control // Proc. of the 1st Intern. Conf. on Control and Optimization with Industrial Applications (plenary talk). Baku, Azerbaidjan, May, 2005.
- 5.91. *Gryazina E.N., Polyak B.T.* On the Root Invariant Regions Structure for Linear Systems // IFAC Proceedings Volumes. 2005. V. 38. No. 1. P. 90–95.
- 5.92. *Polyak B.T., Maslov V.P.* Controlling Chaos by Predictive Control // Proc. of the 16th IFAC World Congress. Prague, Czech Republic, July, 2005.
- 5.93. *Polyak B.T., Nazin S.A.* Interval Technique for Parameter Estimation under Model Uncertainty // IFAC Proceedings Volumes. 2005. V. 38. No. 1. P. 118–123.
- 5.94. *Polyak B.T.* Newton's Method and Its Role in Optimization // Proc. of the 6th Brazilian Workshop on Continuous Optimization (plenary talk). Goiania, Brazil, July, 2005.
- 5.95. *Поляк Б.Т.* Управление и стабилизация хаоса с помощью прогнозирующего управления // Тр. 7-й Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Н. Новгород, сентябрь 2005.
- 5.96. *Nesterov Yu., Polyak B.* Global Performance of the Newton Method // Proc. of the Workshop «Optimization and Applications.» Jan 9–15, 2005. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Rep. No. 2/2005. P. 107–108.
- 5.97. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т.* Развитие теории D-разбиения // 7-я Всероссийская научная конференция «Нелинейные колебания механических систем». Н. Новгород, сентябрь 2005.

- 5.98. *Gryazina E.N., Polyak B.T.* Geometry of the Stability Domain in the Parameter Space // Proc. of the 44th IEEE CDC and ECC. Seville, Spain, December, 2005. P. 6510–6515.
- 5.99. *Поляк Б.Т.* Метод Ньютона и его роль в вычислительной математике и оптимизации // 7-я Всероссийская школа-семинар «Прикладные проблемы управления макросистемами» (пленарный доклад). Апатиты, Апрель, 2006.
- 5.100. *Polyak B.T., Nazin S.A.* Invariant Ellipsoids Technique for Persistent Disturbance Rejection // Proc. 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. Paris–Cachan, France, Apr. 2006. P. 422–427.
- 5.101. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений на примере задачи о двойном маятнике // Труды 9-й междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, июнь 2006. С. 213–214.
- 5.102. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Техника D-разбиения в теории линейных матричных неравенств // Тр. 9-й междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, июнь 2006. С. 214–216.
- 5.103. *Dabbene F., Polyak B.T., Tempo R.* On the Complete Instability of Interval Polynomials // Proc. of the 17th Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. Kyoto, Japan, July, 2006.
- 5.104. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Iterations of Perturbed Tent Maps with Applications to Chaos Control // IFAC Proceedings Volumes. 2006. V. 39. No. 8. P. 125–129.
- 5.105. *Polyak B.T.* Solving LMIs via Random Search // Proc. of the 5th Russian-Swedish Control Conference. Lund, Sweden, August, 2006.
- 5.106. *Polyak B.T.* New Challenges in Nonlinear Control: Stabilization and Synchronization of Chaos // Workshop «Forever Ljung in System Identification» (plenary lecture). Linköping, Sweden, September, 2006.
- 5.107. *Dabbene F., Polyak B.T., Tempo R.* On the Complete Instability of Interval Polynomials // Proc. of the 45th IEEE CDC. San Diego, CA, Dec. 2006. P. 3186–3191.
- 5.108. *Polyak B.T., Nazin A.V., Topunov M.V., Nazin S.A.* Rejection of Bounded Disturbances via Invariant Ellipsoids Technique // Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA, December, 2006. P. 1429–1434.
- 5.109. *Назин С.А., Поляк Б.Т.* Подавление внешних возмущений на основе метода инвариантных множеств // Тр. 2-й Всероссийской научной конференции «Теория и практика системной динамики». Апатиты, апрель 2007. С. 65–66.
- 5.110. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Рандомизированный подход к решению задач полупределенного программирования // Тр. 2-й Всероссийской научной конференции «Теория и практика системной динамики». Апатиты, апрель 2007. С. 17–24.
- 5.111. *Polyak B.T.* Boundary Oracle and Its Use in Convex Optimization // Int. Conf. «Convex Optimization and Applications in Control Theory, Probability and Statistics». Luminy, France, April, 2007.
- 5.112. *Polyak B.T., Topunov M.V., Shcherbakov P.S.* Robust Rejection of Exogenous Disturbances via Invariant Ellipsoids Technique // Proc. XIV Int. Workshop «Dynamics and Control». Zvenigorod, May, 2007. P. 66.
- 5.113. *Petrikevich Ya.I., Polyak B.T.* Monte Carlo Technique for Stabilization of Linear Discrete-Time Systems via Low-Order Controllers // Proc. XIV Int. Workshop «Dynamics and Control». Zvenigorod, May, 2007.

- 5.114. *Polyak B.T., Nazin S.A., Topunov M.V.* The Invariant Ellipsoids Technique for Analysis and Design of Linear Control Systems // Proc. XIV Int. Workshop «Dynamics and Control». Zvenigorod, May, 2007.
- 5.115. *Поляк Б.Т., Грязина Е.Н.* Новые аспекты D-разбиения // 9-я Четаевская Междунар. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (пленарный доклад). Иркутск, июнь 2007. С. 141–158.
- 5.116. *Поляк Б.Т.* Современные методы минимизации // 2-я школа молодых ученых по управлению сложными системами (пленарная лекция). Воронеж, июль 2007.
- 5.117. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* A Randomized Method for Solving Semidefinite Programs // Proc. 9th IFAC Workshop «Adaptation and Learning in Control and Signal Processing» (ALCOSP'07). St. Petersburg, Russia, August, 2007.
- 5.118. *Petrikevich Ya.I., Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Fixed-Order Controller Design for SISO Systems Using Monte Carlo Technique // Proc. 9th IFAC Workshop «Adaptation and Learning in Control and Signal Processing» (ALCOSP'07). St. Petersburg, Russia, August, 2007.
- 5.119. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V.* Optimal Control of a Mechanical Two-Mass-System Using Invariant Ellipsoids Technique // Proc. 3rd IEEE Conf. «Physics and Control» (PhysCon-2007). Potsdam, Germany, September, 2007.
- 5.120. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Stochastic Approach to a Class of Convex Optimization Problems // 3rd Intern. IEEE Sci. Conf. on Physics and Control (PhysCon-2007). Potsdam, Germany, September, 2007.
- 5.121. *Поляк Б.Т.* Современная теория управления: результаты и перспективы // 3-я Всероссийская молодежная конференция по проблемам управления (пленарный доклад). Москва, апрель 2008.
- 5.122. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Randomized Methods Based on New Monte Carlo Schemes for Convex Optimization // 20th EURO Mini Conference «Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies» (EurOPT-2008). Neringa, Lithuania, May 2008. P. 485–489.
- 5.123. *Поляк Б.Т., Грязина Е.Н.* Modern Monte-Carlo Methods for Analysis and Design of Linear Systems // 10-й Междунар. Семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, июнь 2008. С. 243–244.
- 5.124. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Attraction Domains for Systems with Bounded Controls // Abstracts of 10th Int. Conf. «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems.» Moscow, Jun 3–6, 2008. P. 244–245.
- 5.125. *Polyak B.T.* Randomized Methods for Convex Optimization // Conference on Nonlinear Analysis and Optimization. Haifa, Israel, June, 2008.
- 5.126. *Polyak B.T., Topunov M.V.* Filtering with Nonrandom Noise: Invariant Ellipsoids Technique // Proc. of the 17th IFAC World Congress. Seoul, July, 2008. P. 15349–15352.
- 5.127. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Hit-and-Run: New Design Technique for Stabilization, Robustness and Optimization of Linear Systems // IFAC Proceedings Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 376–380.
- 5.128. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V.* Invariant Ellipsoids Approach to Robust Rejection of Persistent Disturbances // Proc. of the 17th IFAC World Congress. Seoul, July, 2008. P. 3976–3981.

- 5.129. *Tremba A., Calafiore G., Dabbene F. et al.* RACT: Randomized Algorithms Control Toolbox for MATLAB // Proc. of the 17th IFAC World Congress. Seoul, July, 6–11, 2008. P. 390–395.
- 5.130. *Polyak B.T.* Randomized Methods Based on New Monte-Carlo Schemes for Control and Optimization // Efficient Monte-Carlo: From Variance Reduction to Combinatorial Optimization. Conference in Honor of R.Rubinstein. Sonderborg, Denmark, July, 2008.
- 5.131. *Поляк Б.Т.* История математического программирования в СССР: попытка анализа // Тр. 14-й Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (пленарная статья). Т. 1. С. 2–20. Иркутск, июль 2008.
- 5.132. *Поляк Б.Т.* Рандомизированные методы в оптимизации и управлении // 33-я Дальневосточная математическая школа-семинар им. ак. Е.В. Золотова (пленарный доклад). Владивосток, август 2008.
- 5.133. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Линейная задача управления с ограниченными внешними возмущениями: новый подход // 8-я Всероссийская научная конференция «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород, сентябрь 2008. Т. 1. С. 273–278.
- 5.134. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов: управление по выходу // Тез. докл. IX Крымской международной математической школы «Метод функций Ляпунова и его приложения», MFL-2008. Алушта, Украина. 15–20 сентября 2008. Симферополь: Таврический нац. ун-т, 2008. С. 140–141.
- 5.135. *Поляк Б.Т., Щербakov П.С.* Эллипсоидальные аппроксимации областей достижимости и притяжения динамических систем с ограниченными входами // 15-я Международная конференция по автоматическому управлению «Автоматика-2008». Одесса, Украина, 22–26 сентября 2008. С. 451–454.
- 5.136. *Dabbene F., Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* A Randomized Cutting Plane Scheme with Geometric Convergence: Probabilistic Analysis and SDP Applications // Proc. 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, December 2008. P. 3044–3049.
- 5.137. *Поляк Б.Т.* Подавление ограниченных возмущений в линейных и нелинейных системах // Мультиконференция «Теория и системы управления» (пленарный доклад). Москва, январь 2009.
- 5.138. *Поляк Б.Т.* Робастность в системах управления // Научная сессия ОНИТ РАН, посвященная 80-летию академика С.В. Емельянова (пленарный доклад). Москва, май 2009.
- 5.139. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Ellipsoidal Approximations to Attraction Domains of Linear Systems with Bounded Control // American Control Conference (ACC2009). St. Louis, Missouri, June 2009. P. 5363–5367.
- 5.140. *Polyak B.T.* Some New Randomized Methods for Control and Optimization // Workshop in Honor of the Sixtieth Birthday of Bob Barmish (plenary talk). St. Louis, Missouri, June, 2009.
- 5.141. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Robust Stabilization via Hit-and-Run Techniques // Proc. of the IEEE Int. Symposium on Intelligent Control (ISIC-2009). Part of the 2009 IEEE Multi-Conference on Systems and Control. St. Petersburg, Russia, July, 2009. P. 537–541.

- 5.142. *Nazin A.V., Polyak B.T.* A Randomized Algorithm for Finding Eigenvector of Stochastic Matrix with Application to PageRank Problem // Proc. of the IEEE Int. Symposium on Intelligent Control (ISIC-2009). Part of the 2009 IEEE Multi-Conference on Systems and Control. St. Petersburg, Russia, July, 2009. P. 412–416.
- 5.143. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Подавление неслучайных ограниченных возмущений в линейных управляемых системах: управление по выходу // Тез. докл. XVI Международной конференции по автоматическому управлению «Автоматика-2009». Черновцы, Украина, 22–25 сентября 2009. Черновцы: Книги–XXI, 2009. С. 44–45.
- 5.144. *Nazin A.V., Polyak B.T.* Adaptive Randomized Algorithm for Finding Eigenvector of Stochastic Matrix With Application to PageRank // Proc. of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, December, 2009. P. 127–132.
- 5.145. *Поляк Б.Т.* Новые подходы к задачам управления и фильтрации // 7-я Всероссийская школа-конференция «Управление большими системами» (пленарный доклад). Пермь, май 2010.
- 5.146. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т.* Эффективное случайное блуждание // 7-я Всероссийская школа-конференция «Управление большими системами». Пермь, май 2010. С. 23–24.
- 5.147. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Новые методы управления в линейных системах с ограниченными внешними возмущениями // Тез. докл. XI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, 1–4 июня 2010. С. 329–330.
- 5.148. *Поляк Б.Т.* Робастность в системах управления // Междунар. Школа-Семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (пленарные лекции). Иркутск, июль 2010. С. 261–273.
- 5.149. *Arzelier D., Gryazina E.N., Peaucelle D., Polyak B.T.* Mixed LMI/Randomized Methods for Static Output Feedback Control Design // Proc. of the American Control Conference, ACC2010. Baltimore, MD, July, 2010. P. 4683–4688.
- 5.150. *Polyak B.T.* Simple Examples of Multi-Agent Dynamical Systems: Local Location Control which Guarantees Global Behavior // Mini-workshop «Glocal Control» at the IEEE Multi-conference on Systems and Control. Yokohama, September, 2010.
- 5.151. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Markov Chain Monte Carlo Method Exploiting Barrier Functions with Applications to Control and Optimization // Proc. of the IEEE Multi-Conference on Systems and Control. Yokohama, Japan, September 2010. P. 1553–1557.
- 5.152. *Polyak B.T.* Uniform Sampling by Random Walks in Convex Sets // Bristol Stochastic Approximation Workshop (plenary talk). Bristol, UK, September, 2010.
- 5.153. *Поляк Б.Т.* Методы l_1 -оптимизации в управлении и фильтрации // 3-я Мультиконференция по проблемам управления (пленарный доклад). С.-Петербург, октябрь 2010 (напечатано отдельной брошюрой).
- 5.154. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Hit-and-Run: Randomized Technique for Control Problems Recasted as Concave Programming // IFAC Proceedings Volumes. 2011. V. 44. No. 1. P. 2321–2325.

- 5.155. Polyak B.T., Timonina A.V. PageRank: New Regularizations and Simulation Models // IFAC Proceedings Volumes. 2011. V. 44. No. 1. P. 11202–11207.
- 5.156. Polyak B., Khlebnikov M. Design of Dynamic Controller for Rejection of Persistent Disturbances // Proc of PHYSCON-2011. Leon, Spain, September, 2011.
- 5.157. Polyak B.T. Reducing the Number of Control States or Outputs in Linear Systems // Russian-Swedish Control Conference. St. Petersburg, September, 2011.
- 5.158. Поляк Б.Т. Методы L_1 -оптимизации в задачах управления // Международная конференция «Автоматика-2011» (пленарный доклад). Львов, Украина, сентябрь 2011.
- 5.159. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. ℓ_1 -Подходы к построению стабилизирующих регуляторов низкого порядка // Международная конференция «Автоматика-2011». Львов, Украина, Сентябрь 2011.
- 5.160. Polyak B.T. L_1 Techniques in Control Problems // Conference «Optimization, Games and Dynamics.» Paris, France, November 2011.
- 5.161. Karzan F., Nemirovski A.S., Polyak B., Juditsky A. On the Accuracy of l_1 -filtering of Signals with Block-sparse Structure // Advances in Neural Information Processing Systems NIPS-2011. MIT Press, 2011. P. 1260–1268.
- 5.162. Polyak B.T. L_1 Problems in Control and Numerical Methods for Their Solution // Conference «Numerical Analysis and Optimization—Theory and Applications.» KFUPM, Saudi Arabia, December, 2011.
- 5.163. Поляк Б.Т. Негладкие задачи оптимизации, возникающие в робастной оптимизации, оценивании и ранжировании // 3-я Международная конференция «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии». Кишинев, Молдавия, март 2012.
- 5.164. Polyak B.T. Robust Eigenvector of a Stochastic Matrix with Application to PageRank // Applied Statistics and Probability Theory Colloquium, April 2012. Royal Holloway University of London, Egham, UK.
- 5.165. Polyak B.T. Robust Eigenvector Problem and Its Application to PageRank // Proc. of the the 25th European Conference on Operational Research «EURO 2012» (plenary talk). Vilnius, Lithuania, July, 2012.
- 5.166. Polyak B.T. L_1 Problems in Control // Proc. of the 10th EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization (plenary talk). Shiaulai, Lithuania, July, 2012.
- 5.167. Поляк Б.Т., Щербаков П.С., Хлебников М.В. LMI-подходы к некоторым «неудобным» задачам разреженной оптимизации // XIX Международная конференция по автоматическому управлению «Автоматика-2012» (пленарный доклад). Киев, Украина, сентябрь 2012.
- 5.168. Polyak B.T. L_1 Problems in Control and Numerical Methods for Their Solution // 3rd Int. Conference «Optimization Methods and Applications» OPTIMA-2012 (invited lecture). Costa da Caparica, Portugal, September, 2012.
- 5.169. Juditsky A., Polyak B. Robust Eigenvector of a Stochastic Matrix with Application to PageRank // 51st IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii. December, 2012. P. 3171–3176.
- 5.170. Polyak B.T. New Random Sampling: Billiard Walks // Workshop «Optimization and Statistical Learning». Les Houches, France, January, 2013.
- 5.171. Polyak B.T. Robust Principal Component Analysis // Workshop «Advances in predictive modeling and optimization». Berlin, Germany, May, 2013.

- 5.172. *Polyak B.T.* Robust Principal Component Analysis // International Conference on Robust Statistics (keynote lecture). St. Petersburg, Russia, July 2013.
- 5.173. *Polyak B.T., Khlebnikov M., Shcherbakov P.* An LMI Approach to Structured Sparse Feedback Design in Linear Control Systems // Proc. of the European Control Conference. Zurich, Switzerland, July 2013. P. 833–838.
- 5.174. *Газлоев А.В., Поляк Б.Т.* Сравнение различных методов скорейшего спуска для квадратичной функции // Тезисы докладов 56-й Научной конференции МФТИ. Москва, ноябрь 2013. Т. 1. С. 120–121.
- 5.175. *Поляк Б.Т.* Управление линейными системами при неопределенности: некоторые подходы. Пленарный доклад // Научная сессия ОНТИИТ РАН «Основы теории управления нелинейными нестационарными объектами», посвященная 85-летию ак. С.В. Емельянова. Москва, май 2014.
- 5.176. *Поляк Б.Т.* Теория линейных систем — по-прежнему источник интересных задач // 12-е Всероссийское совещание по проблемам управления (пленарный доклад). Москва, июнь 2014.
- 5.177. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Синтез разреженной обратной связи в линейных системах управления // 12-е Всероссийское совещание по проблемам управления. Москва, июнь 2014. С. 218–229.
- 5.178. *Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Аналитическое решение линейного дифференциального уравнения с одинаковыми корнями характеристического полинома // 12-е Всероссийское совещание по проблемам управления. Москва, июнь 2014. С. 212–217.
- 5.179. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Billiard Walk – a New Sampling Algorithm for Control and Optimization // IFAC Proceedings Volumes. 2014. V. 47. No. 3. P. 6123–6128.
- 5.180. *Polyak B.T., Smirnov G.V.* Large Deviations in Continuous-Time Linear Single-Input Control Systems // Proc of the 19th IFAC World Congress. Cape Town, August 2014. P. 5586–5591.
- 5.181. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Оценки больших уклонений в непрерывных системах // 21-я Международная конференция по автоматическому управлению «Автоматика-2014» (пленарный доклад). Киев, Украина, сентябрь 2014. С. 14–15.
- 5.182. *Квинто Я.И., Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Некоторые эксперименты по получению разреженных регуляторов // 11-я Всероссийская школа «Управление большими системами». Арзамас, сентябрь 2014. С. 227–238.
- 5.183. *Polyak B., Shcherbakov P., Khlebnikov M.* Quadratic Image of a Ball: Towards Efficient Description of the Boundary // 18th Int. Conference on System Theory, Control and Computing, Sinaia, Romania, October 2014. P. 105–112.
- 5.184. *Polyak B.T.* Quadratic Transformations: Convexity vs Nonconvexity // Workshop «Frontiers of High Dimensional Statistics, Optimization, and Econometrics». Moscow, Higher School of Economics, February, 2015.
- 5.185. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Gryazina E.N.* Quadratic Transformations with Applications to Power Systems // Conference «Advanced Mathematical Methods for Energy Systems: From Theory to Practice». SkolTech, Москва, июнь 2015.
- 5.186. *Polyak B.T.* Quadratic Transformations: Convexity vs Nonconvexity // The 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, MICNON-2015 (plenary talk). С.-Петербург, июнь 2015.

- 5.187. *Polyak B.T.* V.A. Yakubovich and Convexity of Quadratic Transformations // The 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, MICNON-2015. С.-Петербург, июнь 2015.
- 5.188. *Polyak B.T., Gryazina E.N.* Convexity/Nonconvexity Certificates for Power Flow Analysis // Int. Symposium on Energy System Optimization. HITS, Heidelberg, Germany, November 2015.
- 5.189. *Polyak B.T.* Quadratic Transformations: Feasibility and Convexity // Workshop «Optimization Without Borders». Les Houches, France, February, 2016.
- 5.190. *Поляк Б.Т.* Оптимизация и асимптотическая устойчивость // 13-я Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (пленарный доклад). Москва, ИПУ РАН, июнь 2016. С. 289–294.
- 5.191. *Barabanov N., Ortega R., Grino R., Polyak B.* On Existence and Stability of Equilibria of Linear Time-Invariant Systems with Constant Power Loads // European Control Conference, ECC 2016. Aalborg, Denmark, June 2016.
- 5.192. *Polyak B.T.* Optimization and Asymptotic Stability // 7th Int. Conference «Optimization and Applications» (plenary talk). Petrovac, Montenegro, September 2016.
- 5.193. *Polyak B.T.* Robust principal component analysis // Proc. of the 11th Int. Conf. «Intelligent Data Processing» (plenary talk). Barcelona, Spain, October, 2016.
- 5.194. *Polyak B.T.* Optimization and Asymptotic Stability // Proc. of the VIII Moscow Int. Conf. on Operations Research «ORM-2016» (plenary talk). Moscow, October 2016.
- 5.195. *Polyak B.T.* Solving Underdetermined Nonlinear Equations // Workshop in Optimization to Celebrate Roman Polyak's 80th Birthday. Technion, Haifa, April 2017.
- 5.196. *Polyak B.T., Tremba A.A.* New Newton-like Algorithm for Underdetermined Equations // Международная конференция «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященная памяти В.Ф. Демьянова, Санкт-Петербург, Россия, май 2017.
- 5.197. *Polyak B.T.* Estimates of Transients in Linear Differential and Difference Equations // IFAC Workshop «Roberto Tempo» on Uncertain Dynamical Systems. Banyuls-sur-Mer, France, July 2017.
- 5.198. *Polyak B., Khlebnikov M.* Robust Principal Component Analysis: An IRLS Approach // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 2762–2767 (Proc. of the 20th IFAC World Congress. Toulouse, France, July, 2017).
- 5.199. *Polyak B., Shcherbakov P.* Lyapunov Functions: An Optimization Theory Perspective // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 7456–7461 (Proc. of the 20th IFAC World Congress. Toulouse, France, July 2017).
- 5.200. *Polyak B., Khlebnikov M.* Robust Versions of the Principal Component Analysis // Proc. International Conference on Big Data Analytics, Data Mining and Computational Intelligence 2017 (BigDaCI 2017), Lisbon, Portugal, July 2017. P. 247–254.
- 5.201. *Polyak B., Scherbakov P., Smirnov G.* Estimates of Transients in Stable Linear Difference Equations // Abstracts of the 23rd Int. Conference on Difference Equations and Applications – ICDEA 2017, Timisoara, Romania, July 2017. P. 105–106.

- 5.202. *Polyak B., Tremba A.* Norm Variability in Newton Method for Underdetermined Systems of Equations // 17-я Международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» БАИКАЛ-2017. Baikal, Russia, August, 2017.
- 5.203. *Поляк Б.Т.* Монте-Карло и рандомизация в задачах оптимизации // Школа-конференция молодых ученых «Информационные технологии и системы – 2017». Уфа, Россия, сентябрь 2017.
- 5.204. *Polyak B., Tremba A.* Newton Method with Adaptive Step-size for Underdetermined Systems of Equations // Proc. of the «8th International Conference on Optimization and Applications, OPTIMA-2017» (plenary talk). Петровац, октябрь 2017. С. 475–480.
- 5.205. *Polyak B.T.* Fast Gradient Methods Revisited // 69th Int. Workshop «Variational Analysis and Applications». Erice, Italy, September, 2018.
- 5.206. *Polyak B., Tremba A.* Local and Global Convergence of Frank-Wolfe Method on Stiefel Manifolds for Non-convex Functions // 8th Int. Conf. «Optimization and applications», OPTIMA-2018. Petrovac, Montenegro, October, 2018.
- 5.207. *Balashov M., Polyak B.T., Tremba A.* The Gradient Projection Algorithm for Smooth Sets and Functions. Nonconvex Case // Conference «Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications». Долгопрудный, Россия, декабрь 2018.
- 5.208. *Shalbi L., Polyak B.T.* Stabilizing Spacecraft at Interior Lagrangian Point with Minimal Fuel Consumption // Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019. Москва, Июнь 2019. С. 1016–1021.
- 5.209. *Polyak B.T.* Accelerated Optimization Methods Revisited // Symposium «The Issues of Calculations Optimization, ISCOPT-XLV». Kiev, Ukraine, September, 2019.
- 5.210. *Polyak B.T., Tremba A.* Sparse Solutions of Optimal Control with L_1 -objective // European Control Conference, ECC-2020. St. Petersburg, Russia, May, 2020. P. 1707–1712.
- 5.211. *Polyak B.T.* Centenary of Yakov Zalmanovich Tsypkin's Birth // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. No. 2. P. 1401–1404 (Proc. of the 21th IFAC World Congress. Berlin, July, 2020).
- 5.212. *Fradkov A., Polyak B.T.* Adaptive and Robust Control in the USSR // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. No. 2. P. 1373–1378 (Proc. of the 21th IFAC World Congress. Berlin, July, 2020).
- 5.213. *Shcherbakov P., Dabbene F., Polyak B.* Solutions of Stable Difference Equations Probably Experience Peak // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. No. 2. P. 4762–4767 (Proc. of the 21th IFAC World Congress. Berlin, July, 2020).
- 5.214. *Polyak B.T.* Accelerated Gradient Methods: History and Properties // Proc. of the 7th Int. Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, COIA-2020 (plenary talk). Baku, August, 2020. V. 1. P. 23–26.
- 5.215. *Polyak B.T., Fatkhullin I.* Static Feedback in Linear Control Systems as Optimization Problem // Proc. of the 11th International Conference «Optimization and Applications», OPTIMA-2020 (invited talk). Petrovac, Montenegro, September, 2020.
- 5.216. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т.* Фильтрация при произвольных ограниченных внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств // 13-я Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2020). Материалы

XXXII Конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. Санкт-Петербург, 6–8 октября 2020 г. СПб: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2020. С. 291–294.

- 5.217. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Построение разреженной обратной связи в линейных системах управления // Конференция «Математическая теория управления и ее приложения», МТУиП-2020. Санкт-Петербург, октябрь 2020.
- 5.218. *Polyak B.T.* Optimization and Control: Mutual Connections // Conference «Optimization without borders». Sochi, Russia, July, 2021.
- 5.219. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т.* Подавление внешних возмущений как задача оптимизации // Материалы XIV Всероссийской Мультиконференции по проблемам управления. Локальная научно-техническая конференция «Управление в распределенных и сетевых системах» (УРСС-2021). Дивноморское, Геленджик, 27 сентября – 2 октября 2021 г. С. 78–81.
- 5.220. *Polyak B.T.* The Unreasonable Effectiveness of Optimization in Applications: Personal Experience. Khachyan prize talk // INFORMS Annual meeting. Anaheim, CA, October, 2021.
- 5.221. *Шатов Д.В., Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез ПИД-регуляторов следящих систем по квадратичному критерию // Труды XVIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС-2022). Челябинск, 5–8 сентября 2022 г. С. 565–568.
- 5.222. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Выбор обратной связи в задачах управления как задача оптимизации // Материалы XVI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (пленарный доклад). Москва, 1–3 июня 2022 г. С. 355–358.
- 5.223. *Polyak B.T.* Feedback Design in Control as Optimization Problem // 18th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. Gif-sur-Yvette, France, July, 2022.
- 5.224. *Polyak B.T.* The Unreasonable Effectiveness of Optimization in Applications: Personal Experience // Летняя школа «Обучение, понимание и оптимизация в моделях искусственного интеллекта», Pushkino, Russia, June, 2022.

Предисловия, рецензии, персоналии и т.п.

- 6.1. *Поляк Б.Т.* Рецензии в сборнике «Новые книги за рубежом»: 1962, №4; 1971, №10; 1982, №9; 1983, №1; 1983, №2; 1983, №3; 1983, №10; 1984, №5; 1985, №6; 1986, №9; 1987, №1; 1987, №4; 1987, №11; 1988, №3; 1989, №5; 1989, №10; 1990, №11; 1990, №12; 1991, №11; 1991, №12.
- 6.2. *Дынкин Е.Б., Колмогоров А.Н., Поляк Б.Т., Фрейдлин М.И.* Игорь Владимирович Гирсанов (некролог) // Теория вероятн. и ее примен. 1967. Т. 12. № 3. С. 532–535.
- 6.3. *Поляк Б.Т.* Редактирование книги: «Вычислительные методы и программирование». Вып. 9. М.: Изд-во МГУ, 1967.
- 6.4. *Поляк Б.Т.* Редактирование перевода книги: Р. Арис «Дискретное динамическое программирование». М.: Мир, 1969.
- 6.5. *Поляк Б.Т.* Редактирование книги и предисловие к ней: И.В. Гирсанов «Лекции по математической теории экстремальных задач». М.: Изд-во МГУ, 1970. (англ. перевод Springer, 1972).

- 6.6. Поляк Б.Т. Редактирование перевода книги: М. Аоки «Введение в методы оптимизации». М.: Наука, 1977.
- 6.7. Поляк Б.Т. Редактирование книги: Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. «Итерационные процедуры в некорректных задачах». М.: Наука, 1986.
- 6.8. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Новая книга по динамике хаоса // АиТ. 1989. № 5. С. 188–189.
- 6.9. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Международный симпозиум по робастному управлению // АиТ. 1993. № 1. С. 185–187.
- 6.10. Поляк Б.Т. Международный симпозиум «Робастность в идентификации и управлении» (Сиена, Италия, 30 июля–2 августа 1998 г.) // АиТ. 1999. № 8. С. 189–190.
- 6.11. Polyak B.T. Yakov Zalmanovich Tsytkin – 19 September 1919–2 December 1997 (Obituary) // J. Difference Eq. Appl. 1999. V. 5(3). P. 217–218.
- 6.12. Polyak B.T. He was a lucky person. . . // Int. J. of Adapt. Contr. and Signal Proc. 2001. V. 15. No. 2. P. 113–114.
- 6.13. Поляк Б.Т. 4-я Российско-шведская конференция по управлению // АиТ. 2001. № 7. С. 219–221.
- 6.14. Поляк Б.Т. Рецензия на книгу: Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков «Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab» // АиТ. 2001. № 10. С. 236–237.
- 6.15. Куржанский А.Б., Поляк Б.Т., Черноусько Ф.Л. 15-й международный конгресс ИФАК // АиТ. 2003. № 1. С. 186–190.
Kurzhanski A.B., Polyak B.T., Chernousko F.L. Fifteenth International IFAC Congress // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 1. P. 170–173.
- 6.16. Поляк Б.Т. Рецензия на книгу: Е.С. Пятницкий «Избранные труды». В 3 томах. М.: Физматлит, Т. 1, 2004; Т. 2, 2005 // АиТ. 2001. № 10. С. 187–188.
- 6.17. Поляк Б.Т. Редактирование книги: «Яков Залманович Цыпкин (1919–1997)». М.: ЛКИ, 2007, а также главы в ней «Лаборатория им. Я.З. Цыпкина» (с. 86–101) и «Он был счастливым человеком» (с. 192–194).
- 6.18. Арутюнов А.В., Поляк Б.Т. Рецензия на книгу: Б.Ш. Мордухович «Вариационный анализ и обобщенное дифференцирование. Т. 1: Теория; Т. 2: Приложения» // АиТ. 2009. № 6. С. 187–189.
- 6.19. Поляк Б.Т., Грязина Е.Н. Первая традиционная всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация» // АиТ. 2009. № 11. С. 172–174.
- 6.20. Поляк Б.Т. Рецензия на книгу: А.С. Позняк «Математика для специалистов по автоматическому управлению. Т. 1. Детерминированные методы» // АиТ. 2009. № 11. С. 175–176.
- 6.21. Поляк Б.Т. Редактирование книги и предисловие к ней: Ю.Е. Нестеров «Введение в выпуклую оптимизацию». М.: МЦНМО, 2010.
- 6.22. Поляк Б.Т. Редактирование книги и предисловие к ней: И.И. Дикин «Метод внутренних точек в линейном и нелинейном программировании». М.: УРСС, 2010.
- 6.23. Поляк Б.Т. Предисловие ко 2-му изданию книги А.А. Первозванского «Курс теории автоматического управления». СПб.: Лань, 2012.

- 6.24. Поляк Б.Т., Степанов О.А., Фрадков А.Л. 19-й Всемирный конгресс ИФАК // АиТ. 2015. № 2. С. 150–156.
- 6.25. Поляк Б.Т., Степанов О.А., Фрадков А.Л. К итогам 19-го Всемирного конгресса ИФАК (24–29 августа 2014 г., Кейптаун, ЮАР) // 28-е Общее собрание Академии навигации и управления движением. С.-Петербург, 9 октября 2014.
- 6.26. Polyak B.T. Preface to the monograph: O. Granichin, Z. Volkovich, D. Toledano-Kitai «Randomized Algorithms in Automatic Control and Data Mining» Springer, 2015.
- 6.27. Поляк Б.Т. К столетию со дня рождения Якова Залмановича Цыпкина // Control Engineering Россия. 2019. Т. 80. № 2. С. 78–80.
- 6.28. Поляк Б.Т. «Оптимизация»: глава в книге «Математическая составляющая» / Редакторы-составители Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин. М.: Фонд «Математические этюды», 2019. 367 с.
- 6.29. Поляк Б.Т., Фрадков А.Л. К 100-летию со дня рождения Якова Залмановича Цыпкина // Общее собрание Академии навигации и управления движением. С.-Петербург, Россия, октябрь 2019.
- 6.30. Поляк Б.Т., Назин А.В. Якову Залмановичу Цыпкину – 100 лет // АиТ. 2019. № 9. С. 6–8.
- 6.31. Поляк Б.Т. Предисловие к книге: А.В. Гасников «Современные численные методы оптимизации: метод универсального градиентного спуска». М.: МЦНМО, 2020.
- 6.32. Поляк Б.Т. К 70-летию К. Айда-заде / «К. Айда-заде». Баку: Элм, 2021. С. 141–143.

Некоторые наукометрические показатели публикаций по Scopus/Google Scholar (на момент подготовки данного списка трудов): индекс Хирша 35/65, число цитирований — более 9 500/32 600 (постоянный рост с 2004 г., «экспоненциальный» — с 2015 г.), две наиболее цитируемые статьи — [3.6] (более 1 800/3 500) и [3.67] (около 1 150/2 400), число соавторов — 81.

Составители признательны читателям за возможные дополнения, указания на неточности и просто ошибки. Полагаем, что для специалистов в соответствующих областях науки список трудов Бориса Теодоровича замечательно характеризует эпоху и отражает популярность различных тематик и смену приоритетов с течением времени. Планируется издание полной и точной библиографии отдельной брошюрой.

© 2024 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук (va.alexandrov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ПРИ СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРА МЕТОДОМ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ¹

Рассматривается задача поиска размещения полюсов замкнутой системы управления, которое обеспечивает минимизацию целевой функции. Критерием оптимальности системы выбрано значение H_∞ нормы частотной передаточной функции относительно возмущения при соблюдении ограничений на размещение полюсов системы и значения H_∞ норм функции чувствительности и передаточной функции от помехи измерения к управлению. Сформулирована задача оптимизации, в которой вектор варьируемых переменных – это корни характеристического полинома замкнутой системы, допустимые значения которых ограничены заданной областью размещения полюсов, а целевая функция, кроме критерия оптимальности, включает штрафные элементы, сформированные для остальных ограничений. Предложено использовать логарифмический масштаб для модулей корней характеристического полинома как элементов вектора варьируемых переменных. Проблема многоэкстремальности целевой функции решается применением процедуры множественного старта. Для поиска используется модификация покоординатного спуска, в которой варьируется одновременно пара координат.

Ключевые слова: синтез регулятора, передаточная функция, размещение полюсов, оптимизация, робастная система.

DOI: 10.31857/S0005231024050012, **EDN:** YQHOSU

1. Введение

Подавление действия неизмеряемого возмущения – одна из основных задач синтеза регулятора [1]. С другой стороны, учитывая, что используемая при синтезе регулятора модель объекта неточна, полученная система должна удовлетворять условиям робастности. Для линейных систем в первую очередь должны выполняться требования к запасам устойчивости [2]. Эти требования могут быть выражены как задание минимально допустимого радиуса запасов устойчивости [3] или ограничение значения функции чувствительности [4, 5]. Мерой робастности к немоделируемой динамике может служить H_∞ норма функции чувствительности к помехе измерения [5, 6].

Многие методы синтеза регулятора сводятся к задаче оптимизации. Так, методы H_∞ -оптимизации [7] и инвариантных эллипсоидов [1] сводятся к оптимизационной процедуре решения системы линейных матричных неравенств.

¹ Исследования, представленные в разделах 2 и 3, выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-29-00588, <https://rscf.ru/project/23-29-00588/>).

Задача оптимизации может стать невыпуклой и многоэкстремальной при задании структуры регулятора, когда варьируемые переменные – это коэффициенты регулятора [8, 9]. Успешные результаты решения таких задач позволили развивать подобные подходы для настройки широко применяемых на практике ПИД-регуляторов [10, 11].

В [12] рассмотрена линейная система с одним входом и одним выходом и предложена идея оптимизации размещения полюсов замкнутой системы, когда коэффициенты регулятора находятся с помощью стандартной процедуры размещения полюсов, а корни желаемого характеристического полинома замкнутой системы ищутся при помощи процедуры оптимизации, исходя из заданных критериев качества и ограничений. При этом была использована стандартная процедура глобальной оптимизации из пакета MATLAB Global Optimization Toolbox [13]. Критерием качества было выбрано значение H_∞ нормы передаточной функции относительно возмущения при заданных ограничениях на значения H_∞ норм функции чувствительности и передаточной функции от помехи измерения к управлению. Кроме того, должны выполняться ограничения на размещение полюсов системы. Настоящая статья посвящена разработке процедуры оптимизации специально для решения задачи выбора размещения полюсов замкнутой системы, минимизирующего заданную целевую функцию при соблюдении заданных ограничений, и с учетом особенностей корней характеристического полинома в качестве варьируемых переменных.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная система с одним входом управления и одним регулируемым выходом, структура которой представлена на рис. 1. Пусть объект описывается передаточной функцией:

$$(1) \quad P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0},$$

где s – переменная преобразования Лапласа, значения коэффициентов a_i, b_i ($i = 0, \dots, n-1$) $\in \mathbb{R}$ известны, причем хотя бы один из коэффициентов b_i не равен 0 и полиномы $a(s), b(s)$ взаимно просты. При $s = j\omega$, где $\omega \in [0, \infty)$,

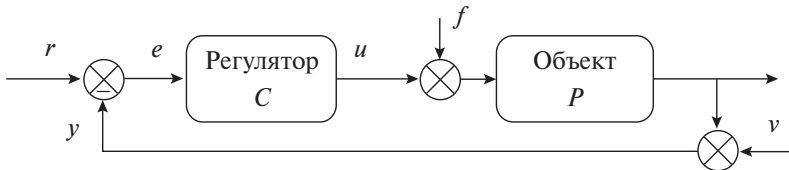


Рис. 1. Замкнутая система: y – измеряемый выход, ν – помеха измерения, r – сигнал задания, e – ошибка управления, u – управление, f – внешнее возмущение.

получим частотную передаточную функцию. Следует отметить, что использование частотных передаточных функций подразумевает, что сигналы в системе, в том числе и неизмеряемое внешнее возмущение, интегрируемы и удовлетворяют ограничениям для применения преобразования Фурье [2]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Полагаем, что передаточная функция регулятора имеет вид

$$(2) \quad C(s) = \frac{d(s)}{c(s)} = \frac{d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0}{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_0},$$

где порядок регулятора $n - 1$ обусловлен порядком модели объекта (1). Регулятор большего порядка, который может получаться, например, при добавлении в регулятор интегральной составляющей, здесь не рассматривается, а регулятор меньшего порядка не может быть получен методом размещения полюсов, что будет пояснено ниже.

Метод размещения полюсов [14, 15] заключается в том, что полиномы $c(s)$, $d(s)$ регулятора (2) могут быть получены путем решения уравнения

$$(3) \quad a(s)c(s) + b(s)d(s) = \delta(s),$$

где левая часть – это характеристический полином системы (1), (2), в котором $a(s), b(s)$ – известные полиномы передаточной функции объекта, а $\delta(s)$ – заданный желаемый характеристический полином. Известно [14], что существует единственное решение этого уравнения для условия $\deg d(s) < \deg a(s)$ или $\deg c(s) < \deg b(s)$. Кроме того, при условии $\deg \delta(s) \geq 2 \deg a(s) - 1$ соблюдается причинность управления: $\deg d(s) \leq \deg c(s)$. Тогда, выбирая желаемый полином $\delta(s)$ степени $\deg \delta(s) = 2 \deg a(s) - 1$, очевидно получим решение вида (2), для которого выполняются условия $\deg d(s) \leq \deg c(s)$ и $\deg d(s) < \deg a(s)$. В этом случае уравнение (3) можно решить, составив систему $2n$ линейных алгебраических уравнений с $2n$ неизвестными, приравняв коэффициенты левой и правой частей уравнения (3) при равных степенях s :

$$(4) \quad \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ \dots \\ c_0 \\ d_{n-1} \\ \dots \\ d_0 \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{2n-1} \\ \dots \\ \delta_0 \end{bmatrix},$$

где $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ – матрица, полученная из значений коэффициентов a_i, b_i ($i = 0, \dots, n - 1$).

Таким образом, для любого объекта вида (1) можно найти регулятор вида (2), обеспечивающий любой заданный характеристический полином замкнутой системы $\delta(s)$ степени $2n - 1$. Следует заметить, что для неустойчивого объекта порядка n может не существовать регулятора порядка, меньшего чем $n - 1$, обеспечивающего хотя бы устойчивость системы. Поэтому предлагается рассматривать регулятор порядка $n - 1$, что позволит обеспечить не только устойчивость, но и другие свойства системы, выбирая соответствующий желаемый характеристический полином.

Характеристический полином можно представить в виде

$$(5) \quad \delta(s) = \prod_{i=1}^{n_r} (s + \lambda_i) \prod_{k=1}^{n_c} (s^2 + 2\zeta_k \check{\omega}_k s + \check{\omega}_k^2),$$

где $n_r = 2n - 2n_c - 1$ – число вещественных корней полинома $\delta(s)$, n_c – число комплексно-сопряженных пар корней, значения $\lambda_i, \check{\omega}_k \in \mathbb{R}$, $\zeta_k \in [0, 1]$ определяют размещение полюсов замкнутой системы и коэффициенты $\delta_0, \dots, \delta_{2n-2}$ в (4) при том, что $\delta_{2n-1} = 1$. Собственные частоты системы обозначаем как $\check{\omega}_k$, так как обозначение ω использовано для частоты в передаточных функциях.

Кроме стандартных ограничений $\lambda_i > 0$, $\check{\omega}_k > 0$, $0 < \zeta_k \leq 1$, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы, можно задать дополнительные:

$$(6) \quad 0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}, \quad 0 < \check{\omega}_{\min} \leq \check{\omega}_k \leq \check{\omega}_{\max}, \quad 0 < \zeta_{\min} \leq \zeta_k \leq 1$$

для получения желаемого быстродействия и демпфирования системы и ограничения высокочастотных составляющих.

Так же как в [12], критерием качества системы будем считать значение H_∞ нормы частотной передаточной функции относительно возмущения

$$(7) \quad \|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \frac{b(j\omega)c(j\omega)}{\delta(j\omega)} \right|.$$

При этом должны выполняться следующие ограничения:

– для H_∞ нормы функции чувствительности

$$(8) \quad \|S(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \frac{a(j\omega)c(j\omega)}{\delta(j\omega)} \right| \leq S_{\max},$$

чтобы обеспечить необходимые запасы устойчивости,

– для H_∞ нормы передаточной функции относительно помехи

$$(9) \quad \|G_{uv}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \frac{a(j\omega)d(j\omega)}{\delta(j\omega)} \right| \leq N_{\max},$$

чтобы обеспечить робастность системы при наличии немоделируемой динамики [5, 6], ограничивая коэффициент усиления регулятора.

Итак, задача состоит в том, чтобы для объекта (1) при заданных значениях a_i, b_i ($i = 0, \dots, n-1$), $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, \check{\omega}_{\min}, \check{\omega}_{\max}, \zeta_{\min}, S_{\max}, N_{\max}$ найти регулятор (2), минимизирующий действие внешнего возмущения в смысле нормы (7) при соблюдении ограничений (6), (8) и (9). Ее можно сформулировать как задачу оптимизации.

Задача 1. Найти

$$\min_{x \in Q} \|G_{yf}(j\omega, x)\|_{\infty}$$

при ограничениях

$$(10) \quad \begin{aligned} \|S(j\omega, x)\|_{\infty} &\leq S_{\max}, \\ \|G_{uv}(j\omega, x)\|_{\infty} &\leq N_{\max}, \end{aligned}$$

где $S_{\max}, N_{\max}$ – заданные значения. Вектор варьируемых переменных $x \in \mathbb{R}^{2n-1}$ имеет вид

$$(11) \quad x = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n_r}, \check{\omega}_1, \dots, \check{\omega}_{n_c}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n_c}],$$

где n_r, n_c – заданные числа: $0 \leq n_c \leq n-1$, $n_r = 2n - 2n_c - 1$, n – заданный порядок объекта (1). Область допустимых значений Q определяется неравенствами (6) с заданными параметрами $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, \check{\omega}_{\min}, \check{\omega}_{\max}, \zeta_{\min}$. Частотные передаточные функции $G_{yf}(j\omega, x)$, $S(j\omega, x)$, $G_{uv}(j\omega, x)$ формируются в соответствии с (7)–(9) из заданных полиномов объекта (1) $a(j\omega)$, $b(j\omega)$, полинома $\delta(j\omega)$, определяемого для вектора (11) по формуле (5), и полиномов регулятора $c(j\omega)$, $d(j\omega)$, коэффициенты которых находятся путем решения системы (4).

Следует заметить, что может существовать выбор ограничений (6), (8) и (9), которые не могут быть выполнены одновременно, т.е. множество допустимых значений будет пусто. Вопрос согласования ограничений в этой работе не рассматривается, и предполагается, что ограничения совместны. На практике для конкретной задачи может проводиться итерационный процесс поиска приемлемых значений ограничений, для которых может быть найдено приемлемое значение минимизируемой функции.

3. Поиск оптимальных корней характеристического полинома

3.1. Целевая функция со штрафами

Предлагается для учета ограничений (10) использовать метод штрафных функций, где штрафная функция $\tilde{G}(x)$ для значения $\|G(j\omega, x)\|_{\infty}$ формируется следующим образом:

$$(12) \quad \tilde{G}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|G(j\omega, x)\|_{\infty} \leq G_{\max}, \\ \ln \frac{\|G(j\omega, x)\|_{\infty}}{G_{\max}}, & \text{если } \|G(j\omega, x)\|_{\infty} > G_{\max}. \end{cases}$$

Целевая функция в этом случае принимает вид

$$(13) \quad f(x) = \|G_{yf}(j\omega, x)\|_\infty + \mu_1 \tilde{S}(x) + \mu_2 \tilde{G}_{uv}(x),$$

где $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ – весовые коэффициенты, $\tilde{S}(x)$, $\tilde{G}_{uv}(x)$ – штрафные функции, полученные по (12) для ограничений (10). Следует заметить, что в соответствии с (12) в точках, где $\|S(j\omega, x)\|_\infty = S_{\max}$ или $\|G_{uv}(j\omega, x)\|_\infty = N_{\max}$, целевая функция (13) недифференцируема. Кроме того, функции (7)–(9) могут быть невыпуклыми и многоэкстремальными и градиент для них не выписывается в явном виде.

3.2. Масштабирование варьируемых переменных

При анализе динамических систем в частотной области часто используется логарифмический масштаб [2]. Заметим, что элементы вектора варьируемых переменных (11) λ_i , $\tilde{\omega}_k$ являются собственными частотами системы. Предлагается перевести их в логарифмический масштаб, таким образом придавая больший вес изменению корней с модулем, близким к нулю, описывающим медленную динамику системы, по сравнению с изменением корней с большим модулем, относящимся к быстрой динамике:

$$(14) \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= [\lg \lambda_1, \dots, \lg \lambda_{n_r}, \lg \tilde{\omega}_1, \dots, \lg \tilde{\omega}_{n_c}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n_c}] = \\ &= [\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n_r}, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{n_c}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n_c}], \end{aligned}$$

где $\tilde{\lambda}_i$, $\tilde{\omega}_i$ – десятичные логарифмы переменных λ_i и $\tilde{\omega}_i$. При этом ограничения (6) принимают вид

$$(15) \quad 0 < \lg \lambda_{\min} \leq \tilde{\lambda}_i \leq \lg \lambda_{\max}, \quad 0 < \lg \tilde{\omega}_{\min} \leq \tilde{\omega}_k \leq \lg \tilde{\omega}_{\max}, \quad 0 < \zeta_{\min} \leq \zeta_k \leq 1.$$

Для вычисления целевой функции нужно обратно привести значения варьируемых переменных к виду (11) возведением в степень: $\lambda_i = 10^{\tilde{\lambda}_i}$, $i = 1, \dots, n_r$, $\tilde{\omega}_i = 10^{\tilde{\omega}_i}$, $i = 1, \dots, n_c$. Обозначения без индекса $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\omega}$, ζ будем использовать для соответствующих групп в векторе варьируемых переменных (14):

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= [\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n_r}], \\ \tilde{\omega} &= [\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{n_c}], \\ \zeta &= [\zeta_1, \dots, \zeta_{n_c}], \end{aligned}$$

и вектор (14) представлять как $\tilde{x} = [\tilde{\lambda}, \tilde{\omega}, \zeta]$.

При проектировании систем обычно пренебрегают динамикой с частотами, которые многократно выше минимальной собственной частоты объекта управления. Поэтому разница для десятичных логарифмов допустимых значений модулей корней характеристического полинома обычно не превышает 5. Так, при рассмотрении системы с медленной динамикой, где, например,

$\lambda_{\min} = 0,001$ и $\lambda_{\max} = 1$, получим $\lg \lambda_{\min} = -3$, $\lg \lambda_{\max} = 0$, а для системы с быстрой динамикой могут быть значения $\lg \lambda_{\min} = 2$, $\lg \lambda_{\max} = 6$ при таких же или близких значениях для $\lg \tilde{\omega}_{\min}$ и $\lg \tilde{\omega}_{\max}$. Тогда очевиден выбор минимального шага для групп варьируемых переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$. При таких масштабах из практических соображений следует, что шаг в диапазоне от 0,0001 до 0,01 будет достаточно малым. Для группы ζ , элементы которой находятся в диапазоне $[\zeta_{\min}, 1]$, такой размер шага также является разумным.

3.3. Множественный старт

Один из стандартных подходов к решению проблемы многоэкстремальности целевой функции (13) – это множественный старт, когда процедура поиска запускается из разных начальных точек. Для рассматриваемой задачи можно использовать, например, такое правило выбора начальных значений:

– выбрать количество вариантов n_1, n_2, n_3 для каждой из групп варьируемых переменных $\tilde{\lambda}, \tilde{\omega}, \zeta$;

– для групп $\tilde{\lambda}, \tilde{\omega}$ сформировать варианты, где первые элементы групп равномерно распределяются в разрешенном диапазоне, а остальные элементы равномерно распределяются в диапазоне $[\tilde{\lambda}_1, \lg \lambda_{\max}]$ или $[\tilde{\omega}_1, \lg \tilde{\omega}_{\max}]$ соответственно:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda}_1^{(\ell)} &= \lg \lambda_{\min} + \ell \frac{\lg \lambda_{\max} - \lg \lambda_{\min}}{n_1 + 1}, \quad \ell = 1, \dots, n_1, \\
 \tilde{\lambda}_i^{(\ell)} &= \tilde{\lambda}_1^{(\ell)} + (i - 1) \frac{\lg \lambda_{\max} - \tilde{\lambda}_1^{(\ell)}}{n_r}, \quad i = 2, \dots, n_r, \\
 \tilde{\omega}_1^{(\ell)} &= \lg \tilde{\omega}_{\min} + \ell \frac{\lg \tilde{\omega}_{\max} - \lg \tilde{\omega}_{\min}}{n_2 + 1}, \quad \ell = 1, \dots, n_2, \\
 \tilde{\omega}_i^{(\ell)} &= \tilde{\omega}_1^{(\ell)} + (i - 1) \frac{\lg \tilde{\omega}_{\max} - \tilde{\omega}_1^{(\ell)}}{n_c}, \quad i = 2, \dots, n_c;
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

– для группы ζ можно использовать одинаковые значения для всех элементов группы:

$$\zeta_i^{(\ell)} = \begin{cases} \frac{1 - \zeta_{\min}}{2}, & \text{если } n_3 = 1, \\ \zeta_{\min} + (\ell - 1) \frac{1 - \zeta_{\min}}{n_3 - 1}, & \text{если } n_3 > 1, \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n_c, \quad \ell = 1, \dots, n_3;$$

– сформировать множество $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ начальных точек, комбинируя все варианты для каждой из групп.

Тогда, например, при $n_1 = 4, n_2 = 4, n_3 = 2$ получим 32 точки старта.

Если составлять другую сетку начальных значений, то нужно учитывать, что перестановка элементов внутри групп $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$ не имеет значения, так как независимо от порядка элементов в группе полином $\delta(s)$ получится одинаковый в соответствии с (5).

3.4. Метод поиска

Целевая функция (13) в общем случае невыпуклая, многоэкстремальная и в некоторых точках недифференцируемая, поэтому стандартные методы поиска не гарантируют нахождение глобального минимума. Для рассматриваемой задачи предлагается использовать комбинированный метод, в котором для группы варьируемых переменных ζ применяется покоординатный спуск, а группы $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$ объединяются в одну, где поиск осуществляется по парам координат. Размерность вектора $[\tilde{\lambda}, \tilde{\omega}]$ равна $n_a = n_r + n_c$. Из элементов этого вектора можно составить $n_a!/(2(n_a - 2)!)^2$ пар. При $n_a = 10$ получим 45 пар, что вычислительно реализуемо. Для большинства практических одномерных задач такое ограничение будет выполняться, а для задач большей размерности надо использовать не все пары. Например, можно объединять в пары только соседние элементы, и тогда получим $n_a - 1$ пар, или формировать пары отдельно для групп $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$.

Предлагается выбирать следующую точку $k + 1$ после варьирования пары элементов i, j ($i = 1, \dots, n_a - 1, j = i + 1, \dots, n_a$):

$$(18) \quad \tilde{x}_{k+1} = \arg \min_{\alpha, \beta} f(\tilde{x}_k + \alpha e_i + \beta e_j),$$

где e_i, e_j – векторы с 1 на i и j местах соответственно и нулевыми остальными элементами, α, β – значения из некоторого множества вариаций, например:

$$(19) \quad \alpha, \beta \in \{0, 0,001, -0,001, 0,01, -0,01\}.$$

Если в результате (18) получено $\alpha = \beta = 0$, то новая точка не найдена. Если же получено новое рекордное значение целевой функции, то для найденных значений α, β можно выполнить одномерный поиск:

$$(20) \quad \tilde{x}_{k+1} = \arg \min_{\gamma} f(\tilde{x}_k + \gamma \alpha e_i + \gamma \beta e_j),$$

где, например, $\gamma \in \{0, 10\}$.

Применение фиксированных значений шага обусловлено тем, что целевая функция невыпуклая, и поэтому поиск оптимальной длины шага в заданном направлении может оказаться вычислительно сложной задачей.

При варьировании элементов групп $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$ предлагается учитывать, что целевая функция не зависит от перестановки элементов. Тогда можно зафиксировать порядок элементов как $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_{n_r}, \tilde{\omega}_1 \leq \tilde{\omega}_2 \leq \dots \leq \tilde{\omega}_{n_c}$ и, кроме границ (15), использовать соседние элементы также в качестве границ. Например, для $\tilde{\lambda}$ при $n_r > 2$:

$$(21) \quad \begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &\in [\lg \lambda_{\min}, \tilde{\lambda}_2], \\ \tilde{\lambda}_i &\in [\tilde{\lambda}_{i-1}, \tilde{\lambda}_{i+1}], \quad 1 < i < n_r, \\ \tilde{\lambda}_{n_r} &\in [\tilde{\lambda}_{n_r-1}, \lg \lambda_{\max}]. \end{aligned}$$

После проведения поиска (18) для всех пар $(i = 1, \dots, n_a - 1, j = i + 1, \dots, n_a)$ проводится покоординатный спуск для группы ζ :

$$(22) \quad \tilde{x}_{k+1} = \arg \min_{\eta} f(\tilde{x}_k + \eta e_i), \quad i = 1, \dots, n_c,$$

где η – набор фиксированных значений шага, e_i – вектор со значением 1 на $(i + n_r + n_c)$ -м месте и нулевыми остальными элементами. Множество значений шага может быть, например, таким:

$$(23) \quad \eta \in \{0,001, -0,001, 0,01, -0,01, 0,05, -0,05\}.$$

Варьирование элементов группы ζ проводится в пределах заданных границ $\zeta_i \in [\zeta_{\min}, 1]$.

Итак, для решения задачи 1 получен следующий алгоритм для $n_a > 1$.

Алгоритм 1.

1. Выбрать весовые коэффициенты μ_1, μ_2 штрафов для целевой функции (13) и задать пороговое значение поиска ε .

2. Сформировать сетку начальных точек как описано в разделе 3.3 и выбрать первую начальную точку.

3. Вычислить в начальной точке значение целевой функции $f_{\min}^{(\ell)}$.

4. Выбрать пару элементов групп варьируемых переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$.

5. Выполнить (18) перебором по множеству (19).

6. Если найдено новое рекордное значение целевой функции, то выполнить (20) по полученному направлению и перейти к новой точке.

7. Выбрать следующую пару элементов групп варьируемых переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$ и перейти к шагу 5. Если перебор пар закончен, то перейти к следующему шагу 8.

8. Если $n_c > 0$, то выбрать элемент группы ζ . Иначе перейти к шагу 11.

9. Выполнить (22) перебором по множеству (23).

10. Выбрать следующий элемент группы ζ и перейти к шагу 9. Если перебор элементов группы ζ закончен, то перейти к следующему шагу 11.

11. Если полученное в результате шагов 4–10 рекордное значение целевой функции $\hat{f}$ меньше чем $f_{\min}^{(\ell)} - \varepsilon$, то заменить значение $f_{\min}^{(\ell)}$ полученным $\hat{f}$ и с найденной новой точкой перейти к шагу 4. Иначе запомнить значение целевой функции $\min(f_{\min}^{(\ell)}, \hat{f})$ и соответствующую точку $\tilde{x}$, выбрать очередную начальную точку и перейти к шагу 3. Если поиск по всем начальным точкам, полученным на шаге 2, завершен, то перейти к следующему шагу 12.

12. Найти минимальное значение целевой функции из полученных для всех начальных точек и соответствующую точку $\tilde{x}$ и завершить процедуру поиска.

В этот алгоритм можно добавить дополнительные этапы поиска, когда на шаге 11 не уменьшается значение целевой функции: 1) увеличить значения весовых коэффициентов μ_1, μ_2 и продолжить поиск от полученной точки, 2) продолжить поиск с меньшими значениями множества вариаций (19) для α и β .

4. Примеры

4.1. Регулятор позиции подводного аппарата

В [16] идентифицированы передаточные функции для позиции в локальной системе координат. Здесь рассмотрим синтез регулятора для координаты z с идентифицированной передаточной функцией

$$(24) \quad P_z(s) = \frac{0,018}{s(0,98s + 1)}.$$

ПИД-регулятор с двумя степенями свободы, построенный в [16], позволяет задавать желаемую передаточную функцию замкнутой системы. Для рассматриваемого примера выбрана следующая желаемая передаточная функция:

$$(25) \quad P_m(s) = \frac{1}{(0,98s + 1)(0,5s + 1)}.$$

При синтезе регулятора с двумя степенями свободы знаменатель передаточной функции (25) должен включаться в желаемый характеристический полином замкнутой системы. Тогда для варьирования остается только два корня. Если принять, что это комплексно-сопряженная пара корней характеристического полинома, то коэффициенты регулятора

$$(26) \quad C(s) = \frac{d_2s^2 + d_1s + d_0}{s(c_1s + c_0)}$$

находятся из уравнения

$$\begin{aligned} s^2(0,98s + 1)(c_1s + c_0) + 0,018(d_2s^2 + d_1s + d_0) = \\ = (0,98s + 1)(0,5s + 1)(s^2 + 2\zeta\dot{\omega} + \dot{\omega}^2). \end{aligned}$$

Такой пример позволит построить графики процедуры поиска для варьируемых переменных ζ и $\dot{\omega}$. Так как в этом примере $n_a = 1$, то вместо алгоритма 1 будет использоваться покоординатный спуск.

Заданы следующие ограничения:

$$(27) \quad \dot{\omega}_{\min} = 0,6, \quad \dot{\omega}_{\max} = 20, \quad \zeta_{\min} = 0,8, \quad S_{\max} = 1,7, \quad N_{\max} = 150.$$

Для целевой функции (13) необходимо задать весовые коэффициенты для штрафных функций. Выбор этих коэффициентов определяется тем, что ограничения должны иметь приоритет по сравнению с минимизацией воздействия возмущения. Следует заметить, что штрафные функции входят в (13) как отношение H_∞ нормы к ее допустимому максимальному значению, а H_∞ норма по возмущению используется в абсолютных единицах. Поэтому для выбора весовых коэффициентов нужна оценка возможного значения

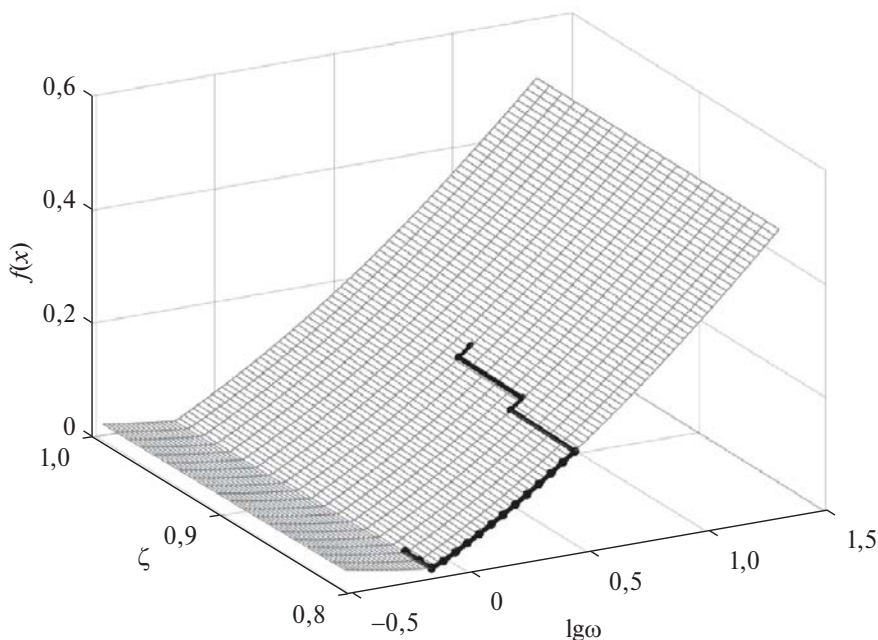


Рис. 2. Покоординатный спуск: $\tilde{x} = [\tilde{\omega}, \zeta]$.

$\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty$. Например, для минимальных значений из допустимой области $\tilde{\omega} = 0,6$, $\zeta = 0,8$ получаем $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = 0,0239$. Тогда можно выбрать $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 0,1$. Множество значений шага (23) использовано для обеих варьируемых переменных.

На рис. 2 приведена поверхность целевой функции, построенная по сетке с шагом 0,02 для $\tilde{\omega}$ и 0,01 для ζ в пределах заданных ограничений, и представлен график значений целевой функции на каждом шаге процедуры покоординатного спуска с начальной точкой

$$\tilde{x}_0 = \left[\frac{\lg \tilde{\omega}_{\max} + \lg \tilde{\omega}_{\min}}{2}, \frac{1 + \zeta_{\min}}{2} \right] = [0,5396, 0,9].$$

Найдена точка минимума $\tilde{\omega} = 0,6928$, $\zeta = 0,821$, в которой

$$\|S(j\omega)\|_\infty = 1,27, \quad \|G_{uv}(j\omega)\|_\infty = 149,97, \quad \|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = 0,0206.$$

4.2. Регулятор для двухмассовой системы

Рассмотрим предложенный в [17] тестовый пример управления двумя тележками, соединенными пружиной. В [12] для этого примера был построен регулятор методом оптимизации размещения полюсов, удовлетворяющий требованиям быстродействия и робастности системы, но для поиска оптимальных корней характеристического полинома использовалась стандартная процедура глобальной оптимизации из пакета MATLAB Global Optimization

Toolbox [13]. Здесь для решения той же задачи будет использован разработанный алгоритм 1.

Дана передаточная функция относительно управления:

$$(28) \quad P(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)}.$$

В этом объекте управление и возмущение приложены в разных точках, и известна передаточная функция относительно возмущения:

$$(29) \quad P_f(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2)}.$$

В этом случае H_∞ норма частотной передаточной функции относительно возмущения отличается от (7) и вычисляется как

$$(30) \quad \|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega \left| \frac{b_f(j\omega)c(j\omega)}{\delta(j\omega)} \right|,$$

где $b_f(j\omega)$ – полином числителя передаточной функции (29).

Так же как в [12], будем искать регулятор вида (2), где $n = 4$, при следующих ограничениях:

$$(31) \quad \begin{aligned} \lambda_{\min} &= \check{\omega}_{\min} = 0,1, \quad \lambda_{\max} = \check{\omega}_{\max} = 100, \\ \zeta_{\min} &= 0,7, \quad S_{\max} = 1,665, \quad N_{\max} = 100. \end{aligned}$$

Выбираем структуру характеристического полинома (5) $n_r = 1$, $n_c = 3$ и весовые коэффициенты для штрафных функций в (13) $\mu_1 = \mu_2 = 100$. Пороговое значение изменения целевой функции выбираем $\varepsilon = 10^{-6}$. Формируем 24 начальные точки для множественного старта, выбрав $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, используя (16) для групп $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\omega}$, и варианты для группы ζ : 1) все элементы равны $\zeta_{\min}$ и 2) все элементы равны 1.

В результате найдена точка минимума целевой функции (13)

$$(32) \quad x_{\min} = [0,3417, 1,4138, 1,4145, 3,6593, 0,701, 0,700, 0,700],$$

для которой

$$\|S(j\omega)\|_\infty = 1,665, \quad \|G_{uv}(j\omega)\|_\infty = 99,96, \quad \|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = 5,296.$$

Минимум найден за 20 итераций от начальной точки. График рекордных значений целевой функции приведен на рис. 3. Еще шесть начальных точек множественного старта привели к результату $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty < 6$ при выполнении ограничений. Остальные начальные точки привели к локальным минимумам, где не выполнено ограничение $\|S(j\omega)\|_\infty \leq S_{\max}$ или получено большее значение $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty$. Только две из двадцати четырех начальных точек

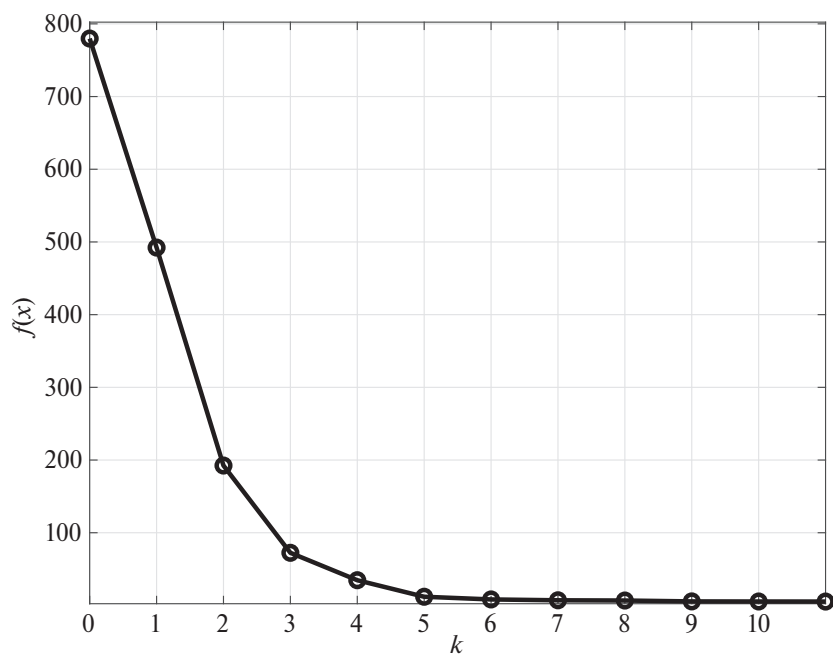


Рис. 3. Значения целевой функции $f(x)$ на каждой итерации алгоритма поиска.

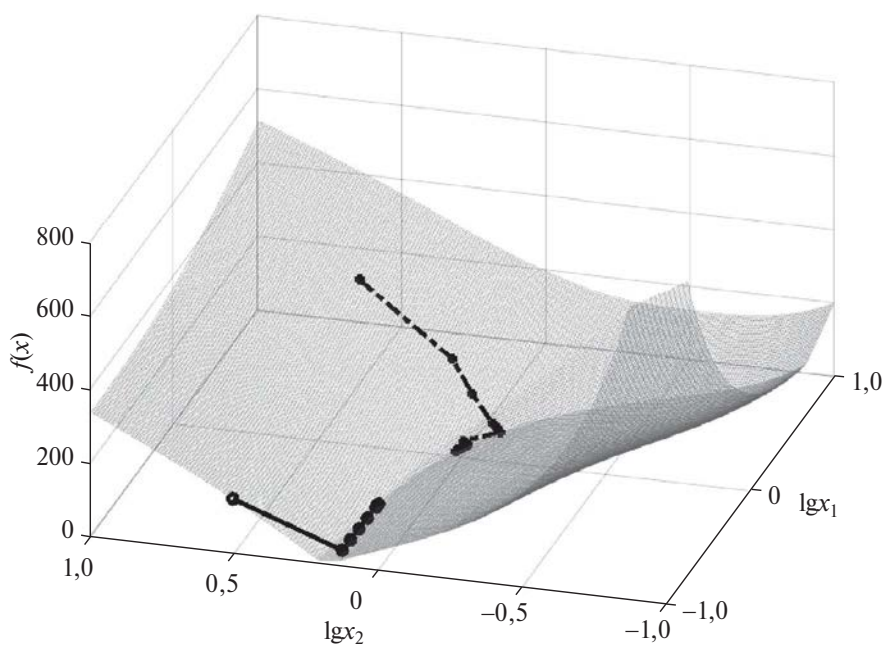


Рис. 4. Значения целевой функции $f(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\omega}_1)$.

множественного старта привели к одному и тому же локальному минимуму, остальные привели к разным точкам останова.

На рис. 4 показана поверхность, полученная для вектора $\tilde{x}$, в котором варьируются только первые два элемента (а остальные равны найденным значениям (32)), и варианты поиска по этим двум элементам из начальных точек $[0,5, 0,5]$ и $[-1, 0,5]$. Видно, что поиск сходится к разным локальным минимумам. При этом получены значения целевой функции, равные 19,8 и 5,3 соответственно. То есть даже в упрощенном варианте с двумя варьируемыми переменными целевая функция для этого примера имеет непростой овражный рельеф.

Этот же пример с такими же ограничениями решался несколькими методами в [12]. При помощи процедуры `systune` настройки системы управления с фиксированной структурой [18] из пакета MATLAB Robust Control Toolbox получен регулятор, обеспечивающий выполнение всех заданных ограничений и практически такой же результат: $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = 5,301$. Решение методом оптимизации размещения полюсов в [12] было реализовано при помощи стандартной процедуры глобальной оптимизации, и найден регулятор, который подавляет возмущение немного хуже: $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = 6,64$.

Таким образом, предложенный в настоящей статье алгоритм поиска нашел решение лучше, чем стандартная процедура глобальной оптимизации. То, что решение, полученное процедурой `systune`, практически не улучшено, позволяет предположить, что найден глобальный минимум.

5. Заключение

Для задачи синтеза регулятора методом размещения полюсов разработан алгоритм поиска значений желаемых полюсов исходя из заданных критерия качества системы и ограничений. В статье рассматривается задача, в которой критерием качества системы выступает значение H_∞ нормы частотной передаточной функции относительно возмущения, а в качестве ограничений задаются максимально допустимые значения H_∞ норм функции чувствительности и частотной передаточной функции относительно помехи. Полученный алгоритм поиска можно использовать и для других критериев и ограничений. Возможным изменением будет только формирование штрафных составляющих (12) в целевой функции (13). Следует заметить, что в примере раздела 4.1 структура регулятора отличается от (2), так как в регулятор добавлена интегральная составляющая. То есть область применения разработанного подхода не ограничивается системами с регулятором вида (2), а охватывает все структуры регулятора, которые могут быть получены методом размещения полюсов. Также для простоты изложения рассматривается структура системы, где внешнее возмущение приложено вместе с управлением. Это обусловлено тем, что часто реальная передаточная функция относительно возмущения неизвестна, и в этом случае такое упрощение структуры системы позволяет, тем не менее, рассматривать действие возмущения в системе.

Если же передаточная функция объекта относительно возмущения известна, как в примере раздела 4.2, то она должна использоваться при формировании передаточной функции замкнутой системы относительно возмущения.

Преимущества предлагаемого метода поиска получены благодаря учету свойств корней характеристического полинома. Использование логарифмического масштаба для модулей корней характеристического полинома позволяет, во-первых, обоснованно выбрать величину приращения варьируемых переменных в процедуре поиска и, во-вторых, формировать ограниченный набор начальных точек для процедуры множественного старта. Алгоритм поиска с одновременным варьированием пары элементов дает возможность находить минимум для целевой функции со сложным рельефом. Таким образом, использование известных для рассматриваемой задачи особенностей вектора варьируемых переменных позволило разработать эффективный алгоритм условной минимизации невыпуклой многоэкстремальной целевой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966.
3. Александров А.Г. Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления // АиТ. 2007. № 8. С. 4–17.
Aleksandrov A.G. Stability margins of the systems of optimal and modal control // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 8. P. 1296–1308.
4. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ -оптимизации // АиТ. 1999. № 7. С. 100–109.
Chestnov V.N. Synthesis of controllers for multivariate systems with a given radius of stability margin by the H-infinity-optimization method // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 986–993.
5. Astrom K.J., Murray R.M. Feedback Systems: an Introduction for Scientists and Engineers. New Jersey: Princeton University Press, 2008.
6. Alexandrov V.A., Chestnov V.N., Shatov D.V. Stability Margins for Minimum-Phase SISO Plants: A Case Study // Proc. Eur. Control Conf. 2020. P. 2068–2073.
7. Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ -control // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1994. Vol. 4. No. 4. P. 421–448.
8. Apkarian P., Noll D. Nonsmooth H_∞ Synthesis // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. V. 51. No. 1. P. 71–86.
9. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.

10. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2022. № 11. С. 62–82.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New Criteria for Tuning PID Controllers // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.
11. Шатов Д.В. Синтез параметров пропорционально-интегрирующих и пропорционально-интегрально-дифференцирующих регуляторов для стационарных линейных объектов с ненулевыми начальными условиями // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2023. № 1. С. 18–27.
12. Александров В.А. Оптимизация размещения полюсов в одномерной системе управления // *АиТ*. 2021. № 6. С. 102–123.
Alexandrov V.A. Pole Placement Optimization for SISO Control System // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 6. P. 1013–1029.
13. Ugray Z., Lasdon L., Plummer J., Glover F., Kelly J., Marti R. Scatter Search and Local NLP Solvers: A Multistart Framework for Global Optimization // *INFORMS J. Computing*. 2007. V. 19. No. 3. P. 328–340.
14. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.
15. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012.
16. Alexandrov V., Shatov D., Abramenkov A., Abdulov A. Position control of maneuverable underwater vehicle based on model identification // *Proc. of the 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. Lipetsk, Russian Federation: IEEE Xplore digital library, 2023. P. 76–81.
17. Wie B., Bernstein D.S. A Benchmark Problem for Robust Control Design // *Proc. Amer. Control Conf.* San Diego, CA, USA. 1990. P. 961–962.
18. Apkarian P., Gahinet P., Buhr C. Multi-Model, Multi-Objective Tuning of Fixed-Structure Controllers // *Proc. Eur. Control Conf.* 2014. P. 856–861.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. М.В. БАЛАШОВ, д-р физ.-мат. наук (balashov73@mail.ru),
К.З. БИГЛОВ (biglov.kz@phystech.edu)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Московский физико-технический институт, Долгопрудный)

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ¹

Рассматриваются некоторые задачи о многозначных отображениях, которые могут быть сведены к минимизации положительно однородной липшицевой функции на единичной сфере. Последняя задача может быть в некоторых случаях решена алгоритмом первого порядка – методом проекции градиента. В качестве одного из примеров рассмотрен случай, когда многозначное отображение есть множество достижимости автономной линейной управляемой системы. Для ряда постановок доказана линейная сходимость метода проекции градиента в рассматриваемой ситуации. Мы используем схему доказательства сходимости градиентного метода, предложенную Б.Т. Поляком, в случае выполнения неравенства Лежанского–Поляка–Лоясевича. В отличие от других способов решения, например при помощи аппроксимации множества достижимости, приведенные алгоритмы гораздо слабее зависят от размерности фазового пространства и других параметров задачи. Также возможна эффективная оценка ошибок. Численные эксперименты подтверждают эффективность рассматриваемого подхода. Помимо множества достижимости, рассмотренные алгоритмы могут быть применены к различным теоретико-множественным задачам с многозначными отображениями достаточно общего вида.

Ключевые слова: метод проекции градиента, многозначный интеграл, сильная выпуклость, опорное множество, условие Липшица, негладкий анализ.

DOI: 10.31857/S0005231024050024, **EDN:** YQFMTE

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$. Определим шар $\mathcal{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$, ($a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$) и единичную сферу $\mathcal{S}_1 = \partial\mathcal{B}_1(0)$. Обозначим как $\text{int}\mathcal{N}$ и $\partial\mathcal{N}$ внутренность и границу множества $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ соответственно. Напомним, что опорной функцией для замкнутого выпуклого множества $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ и вектора $p \in \mathbb{R}^n$ называется $s(p, \mathcal{N}) = \sup_{x \in \mathcal{N}} (p, x)$, а опорным

¹ Теоремы 1, 3, 4 и §5 получены М.В. Балашовым при финансовой поддержке РФФ, проект № 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/> в ИПУ РАН. Теорема 2 и численные результаты раздела 6 получены А.А. Трембой при финансовой поддержке РФФ, проект № 21-71-30005, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

множеством называется $\mathcal{N}(p) = \{x \in \mathcal{N} : (p, x) = s(p, \mathcal{N})\}$. Множество $\mathcal{N}(p)$ называется опорным элементом, если оно одноточечно. Для выпуклого компакта $\mathcal{N}$ множество $\mathcal{N}(p)$ является субдифференциалом (в смысле выпуклого анализа) опорной функции $s(p, \mathcal{N})$ в точке p . Функция $s(p, \mathcal{N})$ липшицева с постоянной $\|\mathcal{N}\| = \max\{\|x\| : x \in \mathcal{N}\}$. Пусть $P_{\mathcal{N}}x$ – метрическая проекция точки $x \in \mathbb{R}^n$ на замкнутое выпуклое множество $\mathcal{N}$.

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ – выпуклый компакт, $f(p) = s(p, \mathcal{N})$. Рассмотрим задачу

$$(1) \quad \min_{\|p\|=1} f(p) = J.$$

Очевидно, что решение (1) – единичный вектор p_0 такой, что $p_0 = -z_0/\|z_0\|$, где $P_{\mathcal{N}}0 = \{z_0\}$ и $J = (p_0, z_0) = -\|z_0\|$. Также $z_0 \in \mathcal{N}(p_0)$. Таким образом поиск проекции нуля $z_0 = P_{\mathcal{N}}0$ эквивалентен задаче (1). Решение общей задачи поиска проекции имеет вид $P_{\mathcal{N}}x = x + P_{\mathcal{N}+(-x)}0$.

Напомним ряд алгоритмов решения задачи проецирования точки на выпуклое замкнутое множество $\mathcal{N}$. Каждый из алгоритмов зависит от способа задания множества $\mathcal{N}$. Если $\mathcal{N}$ – многогранник, то можно воспользоваться квадратичным программированием и решить задачу $\min \|x\|^2$ при ограничениях $(p_i, x) \leq s(p_i, \mathcal{N})$, где $\{p_i\}$ – набор единичных нормалей к граням $\mathcal{N}$. В ряде случаев можно применять метод альтернативных проекций при наличии условия трансверсальности, см. [1, § 8.5]. В [2] рассматриваются свойства оператора проектирования. Также рассматривается сходимость итерационного алгоритма проекции/отражения для нахождения пары точек, на которой достигается локальный минимум расстояния между двумя выпуклыми замкнутыми множествами или между замкнутым выпуклым множеством и замкнутым проксимально гладким множеством. Использование алгоритмов в духе метода условного градиента для нахождения проекций на выпуклые множества изучалось в [3]. В [4] авторы предложили итерационный алгоритм поиска проекции точки на множество уровня квадратичной функции. Некоторые алгоритмы поиска проекции Брегмана точки на замкнутое выпуклое множество могут быть найдены в [5].

Лучшая скорость сходимости, полученная в приведенных выше статьях, линейная. При этом предложенные алгоритмы зачастую не позволяют реализовать эффективный вычислительный процесс.

Далее предполагаем, что заданы опорная функция $s(p, \mathcal{N})$ и опорное множество $\mathcal{N}(p)$. “Заданы” означает, что можно вычислить $s(p, \mathcal{N})$ и $\mathcal{N}(p)$ для любого вектора $p \in \mathbb{R}^n$ с помощью формулы или достаточно эффективной вычислительной процедуры.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, $\mathcal{R}(\cdot) : [0, T] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, $\mathcal{R}(0) = \{0\}$ – непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. Рассмотрим некоторые задачи, которые могут быть сведены к постановке (1).

Задача (P1). Для данного $t \geq 0$ найти минимальное расстояние между точками множеств $\mathcal{R}(t)$ и $\mathcal{M}$, т.е. величину $\rho(\mathcal{R}(t), \mathcal{M}) = \inf_{x \in \mathcal{R}(t), y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$. Найти минимальное $t \geq 0$, при котором $\rho(\mathcal{R}(t), \mathcal{M}) = 0$.

Задача (P2). Для данного $t \geq 0$ выяснить справедливость включения множеств $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$. Найти максимальное $t \geq 0$, при котором $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$.

Задача (P3). Для данного $t \geq 0$ выяснить справедливость включения множеств $\mathcal{R}(t) \supset \mathcal{M}$. Найти минимальное $t \geq 0$, при котором $\mathcal{R}(t) \supset \mathcal{M}$.

Задачи (P1)–(P3) могут быть поставлены для произвольного многозначного непрерывного отображения с выпуклыми компактными значениями $\mathcal{R}(t)$ и выпуклого компакта $\mathcal{M}$. Рассмотрим частный случай многозначного интеграла вида

$$(2) \quad \mathcal{R}(t) = \int_0^t \mathcal{F}(s) ds,$$

где $\mathcal{F}$ – многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. По умолчанию предполагается, что $0 \in \mathcal{F}(s)$ для всех $s \geq 0$. Интеграл рассматривается в смысле Аумана [6]:

$$\int_0^t \mathcal{F}(s) ds = \left\{ \int_0^t u(s) ds : u(s) \in \mathcal{F}(s) - \text{измеримая ветвь} \right\}.$$

По теореме Ляпунова о векторных мерах [7] интеграл является выпуклым компактом. Из формулы (2) и включения $0 \in \mathcal{F}(s)$ для всех $s \in [0, t]$ получаем возрастание $\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0}$ по включению $\mathcal{R}(t_1) \subset \mathcal{R}(t_2)$ для всех $0 \leq t_1 \leq t_2$. Также можно рассматривать множество $\mathcal{M}$, зависящее от t , т.е. $\mathcal{M}(t)$.

Опорная функция и опорное множество интеграла (2) могут быть легко вычислены: для единичного вектора p и любого $t \geq 0$ имеют место равенства

$$(3) \quad s(p, \mathcal{R}(t)) = s\left(p, \int_0^t \mathcal{F}(s) ds\right) = \int_0^t s(p, \mathcal{F}(s)) ds, \quad \mathcal{R}(t)(p) = \int_0^t \mathcal{F}(s)(p) ds.$$

Другой класс множеств, для которых известна опорная функция и опорный элемент, – это конечные суммы линейных образов какого-то фиксированного множества $\mathcal{M}$ с известными $s(p, \mathcal{M})$ и $\mathcal{M}(p)$, к примеру $\mathcal{M}$ может быть эллипсоидом. Пусть $\mathcal{R}(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t)B_1(0)$, $A_k(t)$ – непрерывные невырожденные матрицы для всех $t \geq 0$. Тогда

$$(4) \quad \begin{aligned} s(p, \mathcal{R}(t)) &= \sum_{k=1}^m s(p, A_k(t)B_1(0)) = \sum_{k=1}^m \|A_k^\top(t)p\|, \\ \mathcal{R}(t)(p) &= \sum_{k=1}^m \frac{A_k(t)A_k^\top(t)p}{\|A_k^\top(t)p\|}. \end{aligned}$$

Заметим, что конечная сумма эллипсоидов не является эллипсоидом в общем случае.

Одним из важнейших примеров является множество достижимости линейной автономной управляемой системы, которую рассмотрим в форме дифференциального включения

$$(5) \quad x'(t) \in Ax(t) + \mathcal{U}, \quad x(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, $0 \in \mathcal{U}$. Множество достижимости (точки $\mathbb{R}^n$, в которые можно перевести систему (5) за время t) представимо в виде

$$(6) \quad \mathcal{R}(t) = \int_0^t e^{As} \mathcal{U} ds.$$

Напомним, что наиболее важное усиление условия выпуклости для компактных множеств из $\mathbb{R}^n$ – это сильная выпуклость с радиусом $R > 0$. Подмножество $\mathbb{R}^n$ называется сильно выпуклым с радиусом R , если оно может быть представлено как пересечение шаров радиуса R [8, 9]. Это свойство также может быть выражено через модуль выпуклости [10]. В [8] было доказано, что многозначный интеграл (2) является сильно выпуклым, если многозначное отображение $\mathcal{F}(s)$ имеет сильно выпуклые значения. В [11] была доказана в некотором виде локальная сильная выпуклость для интеграла (2) с $\mathcal{F}(s) = A(s)U$, где $A(s)$ – некоторый класс гладких матриц, а U – многогранник. В [12] была рассмотрена аппроксимация второго порядка по времени типа Рунге–Кутты для дискретизации сильно выпуклых дифференциальных включений.

Различные задачи о многозначных интегралах могут решаться при помощи аппроксимации их значений. В [13] авторы описывают различные методы построений аппроксимаций множества достижимости управляемой системы, см. [13, табл. 1]. Один из самых общих и эффективных методов основывается на опорной функции (он также называется методом гиперплоскостей) [14]. Можно рассмотреть, например, внешнюю многогранную аппроксимацию для произвольного выпуклого компактного подмножества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ вида

$$(7) \quad \{x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq s(p, \mathcal{M}), \quad \forall p \in \mathbb{G}\},$$

где $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ – конечная сетка единичных векторов, и решить соответствующую задачу для аппроксимации. Недостаток такого подхода в том, что разумные приближения могут быть получены только в пространствах малой размерности $2 \leq n < 5$ [15].

Также существуют подходы, использующие особые аппроксимации, например при помощи зонотопов [16] или эллипсоидальной техники [17]. Последняя иногда позволяет описывать множество достижимости локально.

В данной статье рассматриваются $\mathcal{R}(t)$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ как значения многозначного интеграла или конечные суммы эллипсоидов. Показывается, как можно свести различные задачи, в первую очередь (P1)–(P3), о подобных множествах к

задаче (1). Минимизируемая в (1) функция $f(p)$ оказывается при этом опорной функцией какого-то выпуклого компакта $\mathcal{N}$, зависящего от $\mathcal{R}(t)$ и $\mathcal{M}$. Мы доказываем выполнение условия Лежанского–Поляка–Лоясевича [18, формула (4.6)] в задаче (1), что гарантирует линейную скорость сходимости метода проекции градиента. Опорная функция $f(p)$ и ее градиент могут быть вычислены с помощью (3) для многозначного интеграла или (4) для суммы эллипсоидов. Опорная функции и ее градиент позволяют получить эффективную схему вычислений. Также рассматривается локальное условие сильной выпуклости: для некоторого $R > 0$ для решения p_0 , $\|p_0\| = 1$ задачи (1) должно иметь место включение $\mathcal{N} \subset B_R(\mathcal{N}(p_0) - Rp_0)$. При выполнении данного условия задача может быть решена методом проекции градиента с фиксированной величиной шага или выбором величины шага по Армихо. Во всех алгоритмах доказана линейная скорость сходимости, рассматриваются различные примеры.

Заметим, что есть другой способ решения задачи (1), который заключается в использовании метода условного градиента. Рассматриваются функция $g(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, начальная точка $x_1 \in \mathcal{N}$ и итерации $\bar{x}_k = \arg \max_{x \in \mathcal{N}}(-g'(x_k), x)$, $x_{k+1} \in \text{Arg min}_{x \in [x_k, \bar{x}_k]} g(x)$. Отметим, что для обеспечения линейной сходимости указанного алгоритма обычно требуется сильная выпуклость множества $\mathcal{N}$ [18, теорема 6.1, п. 5)].

1.1. Основные обозначения и вспомогательные результаты

Для множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ из $\mathbb{R}^n$ определяются операции $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \{x + y : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}\}$ и $\mathcal{M} \stackrel{*}{-} \mathcal{N} = \{x : x + \mathcal{N} \subset \mathcal{M}\} = \bigcap_{x \in \mathcal{N}} (\mathcal{M} - x)$. Они называются суммой и разностью Минковского для множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Обозначим через $\varrho(x, \mathcal{M}) = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$ расстояние от точки x до множества $\mathcal{M}$.

Расстояние Хаусдорфа на пространстве выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ задается по формуле

$$h(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \max_{\|p\|=1} |s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{N})|.$$

Введем функцию $[a]_- = |a|$ для $a \leq 0$ и $[a]_- = 0$ для $a > 0$. Тогда $[\min_{\|p\|=1} (s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{N}))]_-$ называется полурасстоянием от $\mathcal{N}$ до $\mathcal{M}$, оно равняется $\max_{x \in \mathcal{N}} \varrho(x, \mathcal{M})$.

Пусть множество $\mathcal{R}(t)$ (2) зависит от параметра t . Будем обозначать *опорное множество* для вектора p как $\mathcal{R}(t)(p)$. Из определения Ауманна или Римана интеграла следует, что для произвольной матрицы $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ имеет место $J\mathcal{R}(t) = \int_0^t J\mathcal{F}(s) ds$. В частности, для любого вектора $p \in \mathbb{R}^n$ имеем $\mathcal{R}(t)(p) = \int_0^t \mathcal{F}(s)(p) ds$.

Множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ называется *сильно выпуклым с радиусом* $R > 0$, если его можно представить как пересечение некоторого набора замкнутых евклидовых шаров радиуса R . Для произвольного сильно выпуклого множества $\mathcal{M}$

с радиусом R существует другое сильно выпуклое с радиусом R множество $\mathcal{N}$ такое, что $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{B}_R(0)$ [8, 19]. Сильная выпуклость выпуклого компакта $\mathcal{M}$ с радиусом R эквивалентна липшицевости опорного элемента $\mathcal{M}(p)$ на единичной сфере: для всех $\|p\| = \|q\| = 1$ выполняется $\|\mathcal{M}(p) - \mathcal{M}(q)\| \leq R\|p - q\|$ [8].

Будем говорить, что выпуклое множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *равномерно гладкое* с постоянной $r > 0$, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{B}_r(0)$, где $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт. Это определение появлялось ранее, см. [20, определение 2.1].

Пусть $\varepsilon > 0$, $\mathcal{S}_0 \subset \mathbb{R}^n$ – гладкое многообразие без края, $\bar{x} \in \mathcal{S}_0$. Для дифференцируемой по Фреше функции $f : \mathcal{S}_0 + \text{int}\mathcal{B}_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$ определим $\mathcal{S} = \mathcal{S}(f, \bar{x}) = \{x \in \mathcal{S}_0 : f(x) \leq f(\bar{x})\}$. Пусть $\mathcal{S}$ – гладкое многообразие с краем $\partial\mathcal{S} \subset \{x \in \mathcal{S}_0 : f(x) = f(\bar{x})\}$. Будем говорить, что на $\mathcal{S}$ выполняется условие *Лежанского–Поляка–Лоясевича (LPL)* [18; 21, §3.2] с постоянной $\mu > 0$, если $\Omega = \text{Arg min}_{x \in \mathcal{S}} f(x) \neq \emptyset$ и для всех $x \in \mathcal{S}$ имеет место неравенство

$$\|P_{\mathcal{T}_x} f'(x)\|^2 \geq \mu(f(x) - f(\Omega)).$$

Здесь $\mathcal{T}_x$ – касательное пространство к многообразию $\mathcal{S}$ в точке $x \in \mathcal{S}$, $P_{\mathcal{T}_x}$ – ортогональный проектор на $\mathcal{T}_x$, $f'(x)$ – производная Фреше функции f в точке $x \in \mathcal{S}$.

Лемма 1. Для любых ненулевых векторов $p, q \in \mathbb{R}^n$ имеет место

$$\left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{\|p - q\|}{\sqrt{\|p\| \|q\|}}.$$

Предложение 1 [8]. Пусть многозначное отображение $\mathcal{F} : [0, t] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ принимает сильно выпуклые значения $\mathcal{F}(s)$ с интегрируемым на $[0, t]$ радиусом $R(s)$ для всех $s \in [0, t]$ и непрерывно в метрике Хаусдорфа. Тогда интеграл $\mathcal{R}(t) = \int_0^t \mathcal{F}(s) ds$ сильно выпуклый с радиусом $R = \int_0^t R(s) ds$.

Упомянем, что многозначный интеграл может быть сильно выпуклым, даже если множества $\mathcal{F}(s)$ таковыми не являются. Такая ситуация типична в размерности $n = 2$ [22]. Тем не менее множество достижимости линейной управляемой системы в размерности $n \geq 3$ часто не является сильно выпуклым.

Рассмотрим элементарный пример системы (5) (похожая система рассматривается ниже в примере 1). Пусть множество управления – отрезок: $\mathcal{U} = \text{co}\{\pm v\}$. Введем вспомогательную аналитическую функцию $g_p(s) = (p, e^{As}v)$. Для фиксированного p опорное множество $\mathcal{R}(t)(p)$ состоит из одного элемента, если $g_p(s) \neq 0$. Выполнение условия полного ранга

$$\text{span}\{A^i v\}_{i=0}^{n-1} = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \text{span } \mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$$

гарантирует, что g_p не есть тождественный нуль. Из аналитичности g_p следует, что у уравнения $g_p(s) = 0$ конечное число корней на $[0, t]$. Из конечности числа корней вытекает строгая выпуклость $\mathcal{R}(t)$. Для опорного элемента име-

ет место формула

$$(8) \quad \mathcal{R}(t)(p) = \int_0^t e^{As} v \times \text{sign } g_p(s) ds = \sum_{i=0}^k \epsilon_i \int_{s_i(p)}^{s_{i+1}(p)} e^{As} v ds,$$

где $s_i(p)$, $i = \overline{1, k}$ – корни $g_p(s)$ на $[0, t]$ (вследствие аналитичности g_p они изолированы и их конечное число), $s_0 = 0$, $s_{k+1} = t$, $\epsilon_i = \pm 1$ есть знак $g_p(s)$ при $s \in [s_i, s_{i+1}]$. Таким образом, исследование поведения опорного элемента сводится к исследованию зависимости корней аналитической функции $g_p(s)$ от параметра p . Легко заметить, что если все корни простые (и для простоты лежат в интервале $(0, t)$), то из теоремы о неявной функции следует, что они (корни) гладко зависят от p в некоторой окрестности, а значит, опорный элемент – тоже гладкая функция p в этой окрестности. Отсюда вытекает локальная липшицевость опорного элемента $\mathcal{R}(t)(p)$ по p . Обратная ситуация возникает при наличии кратных корней на отрезке при некотором заданном p . Как показано в примере ниже, в таком случае характерно нарушение липшицевости опорного элемента в точке p , что ведет к отсутствию сильной выпуклости. Тем не менее легко показать, что множество векторов p , для которых функция g_p имеет кратные корни на $[0, t]$, имеет меру нуль. Некоторые обобщения подобного подхода на многозначные интегралы более общего вида приведены в [11].

Отметим, что если все собственные значения A , то оптимальное управление $u(t) = \mathcal{U}(e^{A^\top(T-t)}p) = v \text{sign } g_p$ (как $T - t$), $t \in [0, T]$ имеет не более $n - 1$ переключений, что является частным случаем теоремы Фельдбаума о числе переключений [23, теорема 2.11]. В примерах динамическая система задается уравнением $\dot{x} = Ax + Bu$, $u \in \mathcal{U}$, $t \in [0, T]$. Оптимальное управление в такой системе, приводящее к опорному элементу множества достижимости $\mathcal{R}(t)(p)$, имеет вид [24]:

$$(9) \quad u(t) = \mathcal{U}(B^\top e^{A^\top(T-t)}), \quad t \in [0, T].$$

Рассмотрим систему

$$(10) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следуя замечаниям выше, положим

$$g_p(s) = (p, e^{As} B) = \frac{1}{2} e^{-s} (p_1 s^2 + 2p_2 s + 2p_3).$$

Пусть $p_0 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$, заметим что $g_{p_0}(s) = \frac{1}{3} e^{-s} (s - 1)^2$ имеет кратный корень при $s = 1$. Рассмотрим поведение опорного элемента в окрестности p_0 . Напомним, что $f(s) \asymp g(s)$, $s \rightarrow 0$, если $f(s) = O(g(s))$ и $g(s) = O(f(s))$, $s \rightarrow 0$.

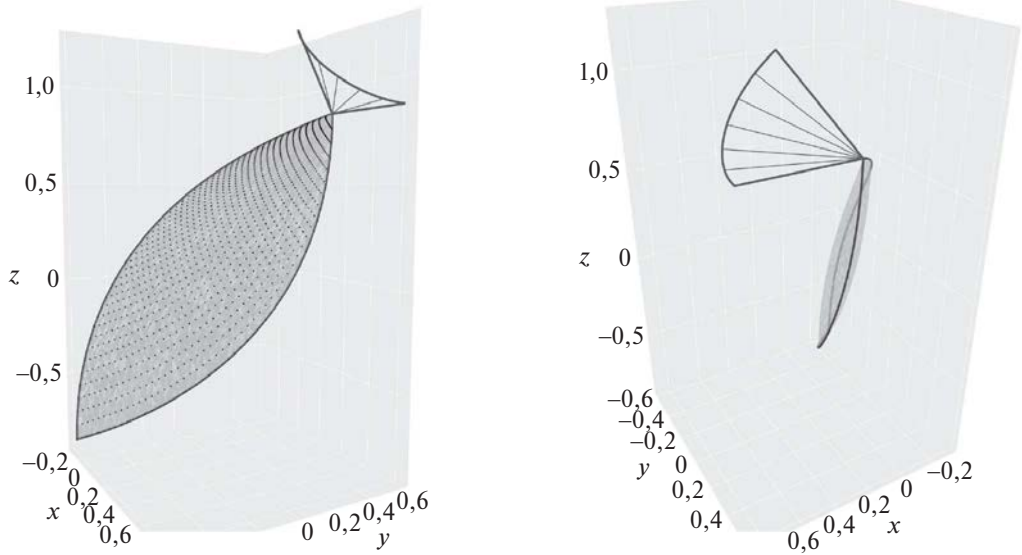


Рис. 1. Множество достижимости системы (10) и нормали, для которых нет локальной липшицевости опорного элемента, при $t = 2$.

Рассмотрим для $\varepsilon \in (0, 1)$ вектор $q = q(\varepsilon) = \frac{(2, -2, 1 - \varepsilon)}{\sqrt{9 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}}$. Легко заметить, что $\|p - q(\varepsilon)\| \asymp \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, а также найти корни $g_{q(\varepsilon)} =: s_{1,2}(\varepsilon) = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$. Тогда для $t > 1 + \sqrt{\varepsilon}$ можно записать для опорного элемента

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t)(p) - \mathcal{R}(t)(q) &= \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} e^{-s} (s^2, 2s, 2)^\top ds, \\ \|\mathcal{R}(t)(p) - \mathcal{R}(t)(q)\| &\geq \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} 2e^{-s} ds \asymp \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в окрестности точки p_0 нарушается липшицевость опорного элемента, а значит множество $\mathcal{R}(t)$ не сильно выпукло.

На рис. 1 показан вид множества достижимости системы при $t = 2$. Нормали, для которых нет локальной липшицевости опорного элемента, показаны на рис. 1 сверху, множество этих нормалей является частью границы нормального конуса в вершине множества. Кроме того, можно заметить, что множество достижимости обладает структурой, похожей на клеточный комплекс. Эта структура возникает вследствие того, что, благодаря (8), опорный элемент можно задать положениями и кратностями корней функции $g_p(s)$ на отрезке $[0, t]$, а также знаком $g_p(s)$ вблизи левого конца отрезка. Если матрица рассматриваемой системы имеет вещественные собственные значения, то суммарная кратность корней $g_p(s)$ не превосходит $(n - 1)$. Можно показать,

что в этом случае произвольная конфигурация корней даст при подстановке в (8) некоторую точку $\partial\mathcal{R}(t)$. Рассмотрение наборов корней с различными суммарными кратностями позволяет выделить в множестве достижимости криволинейные ребра и грани. Некоторые обобщения рассуждений выше приведены в [11].

Лемма 2. Пусть $A_1 = J^{-1}AJ$ – жорданова форма матрицы A системы (5), $\mathcal{U}_1 = J^{-1}\mathcal{U}$, $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица перехода. Если множество $\mathcal{R}_1(t) = \int_0^t e^{A_1 s} \mathcal{U}_1 ds$ сильно выпукло с радиусом r , то $\mathcal{R}(t) = \int_0^t e^{As} \mathcal{U} ds$ также сильно выпукло с радиусом $R = r\alpha^2/\beta$, где $\alpha = \|J\| = \max_{\|h\|=1} \|Jh\|$, $\beta = \min_{\|h\|=1} \|Jh\|$.

Заметим, что из [25, Теорема 3] следует, что любой эллипсоид

$$\mathcal{N} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \leq 1 \right\}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0,$$

является сильно выпуклым с радиусом $R = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_n}$.

Лемма 3. Пусть в системе (5) множество $\mathcal{U}$ является равномерно гладким с постоянной $r > 0$. Тогда множество $\mathcal{R}(t)$ (6) является равномерно гладким с постоянной $r_0 = r \int_0^t \frac{\lambda_n^2(s)}{\lambda_1(s)} ds$, где $\lambda_1(s) \geq \dots \geq \lambda_n(s) > 0$ – это полуоси эллипсоида $e^{As} \mathcal{B}_1(0)$.

Заметим, что из доказательства леммы 3 следует, что любой эллипсоид

$$\mathcal{N} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \leq 1 \right\}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0,$$

является равномерно гладким с постоянной $r = \frac{\lambda_n^2}{\lambda_1}$.

В частности, леммы 2 и 3 показывают, что достаточно рассматривать системы (5) с матрицей A , приведенной к жордановой форме.

Следующее предложение оценивает убывание липшицево дифференцируемой функции за один шаг метода проекции градиента.

Предложение 2 [26, Лемма 2]. Рассмотрим задачу $\min_{\mathcal{M}} f(x)$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{M}$ – замкнутое множество, f' – липшицева функция с постоянной L_1 . Фиксируем $0 < \lambda \leq \frac{1}{L_1}$. Пусть $x_0 \in \mathcal{M}$ и $y_0 \in P_{\mathcal{M}}(x_0 - \lambda f'(x_0))$. Тогда

$$f(x_0) - f(y_0) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - L_1 \right) \|x_0 - y_0\|^2.$$

Для выполнения предыдущего утверждения условие Липшица для f' с постоянной L_1 должно выполняться на отрезке $[x_0, y_0]$, см. доказательство утверждения 2.2 [27].

1.2. Дополнительные предположения о $\mathcal{R}(s)$

При решении задач (P1)–(P3) будем требовать наличие некоторых свойств у множеств, с которыми работаем. Приведем их здесь, чтобы далее не повторяться.

1. Множество $\mathcal{R}(s)$ сильно выпукло с радиусом $R_T > 0$ для всех $s \in [0, T]$.
2. Множество $\mathcal{M}$ – равномерно гладкое с постоянной $r > 0$: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{B}_r(0)$, при этом
 - (а) множество $\mathcal{M}_0$ сильно выпукло с постоянной $R_0 > 0$.
 - (б) $r > R_T$.
3. Множество $\mathcal{M}$ сильно выпукло с постоянной $R_0 > 0$.
4. Множество $\mathcal{U}$ равномерно гладкое с постоянной $r_{\mathcal{U}} > 0$: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{B}_{r_{\mathcal{U}}}(0)$.
5. $r(t) > R_0$, где $r(t) = r_{\mathcal{U}} \int_0^t \frac{\lambda_n^2(s)}{\lambda_1(s)} ds$ и $\lambda_1(s) \geq \dots \geq \lambda_n(s) > 0$ – это полуоси эллипсоида $e^{As}\mathcal{B}_1(0)$.

Первое утверждение выполняется, если, в частности, множество $e^{As}\mathcal{U}$ сильно выпукло с радиусом $R(s) > 0$. Тогда из предложения 1 и линейности интеграла следует, что

$$\mathcal{R}(T) = \int_0^T e^{As}\mathcal{U} ds = \int_0^t e^{As}\mathcal{U} ds + \int_t^T e^{As}\mathcal{U} ds = \mathcal{R}(t) + \int_t^T e^{As}\mathcal{U} ds,$$

и получаем, что множество

$$\mathcal{R}(t) = \bigcap \left\{ \mathcal{R}(T) - x : x \in \int_t^T e^{As}\mathcal{U} ds \right\}$$

сильно выпукло с радиусом $R_T = \int_0^T R(s) ds$ для всех $t \in [0, T]$.

1.3. Структура статьи

В разделах 2–4 приводятся достаточные условия для линейной сходимости метода проекции градиента в некоторой задаче оптимизации опорной функции, к которой сводятся задачи (P1)–(P3). Это решает задачи для фиксированного $t \in [0, T]$.

В разделе 5 обсуждается поиск начального приближения p_1 для итерационного процесса. Даны оценки вероятности нахождения p_1 случайным поиском.

В разделе 6 приводятся результаты различных численных экспериментов. Тут же рассматривается поиск оптимального значения t для задач (P1)–(P3).

2. Задача (P1)

Используемые предположения: 1, 2(a).

Для всех $t \in [0, T]$ рассмотрим множество $\mathcal{N}(t) = \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M}_0)$. Множество $\mathcal{N}(t)$ сильно выпукло с радиусом $R = R_T + R_0$ как сумма сильно выпуклых множеств [19]. Равенство $\mathcal{R}(t) \cap \mathcal{M} = \emptyset$ может быть переформулировано следующим образом: расстояние от нуля до $\mathcal{N}(t)$ больше чем $r > 0$. Если это так, то $0 \notin \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M})$, а в противном случае $0 \in \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M})$. На языке опорных функций это сводится к задаче минимизации функции $f(p) = s(p, \mathcal{N}(t)) = s(p, \mathcal{R}(t)) + s(p, -\mathcal{M}_0)$:

$$(11) \quad \min_{\|p\|=1} f(p) = J.$$

Если $J < -r$, то расстояние от нуля до множества $\mathcal{N}(t)$ больше r . Если же $J \geq -r$, то расстояние от нуля до множества $\mathcal{N}(t)$ не превышает r и, следовательно, $0 \in \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M})$. Заметим, что

$$(12) \quad f'(p) = \mathcal{R}(t)(p) + (-\mathcal{M}_0)(p) = \int_0^t (e^{As}\mathcal{U})(p) ds + (-\mathcal{M}_0)(p).$$

Теорема 1. Фиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Предположим, что в (11) $J < 0$. Тогда при выполнении приведенных выше предположений функция f в (11) удовлетворяет условию LPL на многообразии $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{S}_1 : f(p) \leq 0\}$ с постоянной $\mu = |J|$. Также функция f имеет градиент, удовлетворяющий условию Липшица с постоянной $L_1 = \frac{R}{1-\varepsilon} = \frac{R_T+R_0}{1-\varepsilon}$ на множестве $\{p \in \mathbb{R}^n : 1-\varepsilon \leq \|p\| \leq 1+\varepsilon\}$.

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$(13) \quad p_1 \in \mathcal{S} \text{ (т.е. } f(p_1) \leq 0), \quad p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)), \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{L_1}\right].$$

Если $p_k \in \mathcal{S}$, то $p_{k+1} \in \mathcal{S}$. Действительно, из предложения 2 следует, что

$$f(p_k) - f(p_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - L_1 \right) \|p_k - p_{k+1}\|^2 \geq 0, \quad f(p_{k+1}) \leq f(p_k) \leq 0.$$

Рассмотрим точку $p_k - \lambda f'(p_k)$. Имеем

$$\|p_k - \lambda f'(p_k)\| \geq (p_k, p_k - \lambda f'(p_k)) = 1 - \lambda(p_k, f'(p_k)) = 1 - \lambda f(p_k) \geq 1.$$

Теорема 2. Предположим, что функция f липшицева с постоянной $L = \|\mathcal{N}(t)\|$, отображение f' липшицево на $\mathcal{S}_1$ с постоянной $R = R_T + R_0$. Также предполагаем $J < 0$. Положим $L_1 = 2R$.

Фиксируем $\lambda \in (0, \min\{\frac{1}{L_1}, \frac{1}{2L}\})$. Тогда алгоритм (13) сходится к минимуму $p_0 \in \mathcal{S}_1$ с линейной скоростью:

$$\begin{aligned} f(p_{k+1}) - f(p_0) &\leq q (f(p_k) - f(p_0)), \\ \|p_{k+1} - p_k\| &\leq q^{k/2} \sqrt{2\lambda(f(p_1) - f(p_0))}, \\ q &= 1 - \frac{\lambda|J|}{2L\lambda + 2} \in (0, 1). \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что условие острого минимума вида $\exists \alpha > 0$, такое что $f(p) - f(p_0) \geq \alpha \|p - p_0\|$, не выполняется для всех $p \in \mathcal{S}$.

Рассмотрим $L > r > 0$, $\|p_0\| = 1$ и множество $\mathcal{N} = \mathcal{B}_r(-Lp_0)$. Тогда для всех $p \in \mathcal{S}_1$ имеем

$$s(p, \mathcal{N}) - s(p_0, \mathcal{N}) = L(1 - (p, p_0)) = \frac{L}{2} \|p - p_0\|^2.$$

Замечание 1. Приведенные выше результаты могут быть доказаны при более локальных условиях. Вместо предположения 1 о сильной выпуклости $\mathcal{R}(T)$ с радиусом R_T можно потребовать выполнения для всех $p \in \mathcal{S}$ опорного принципа для множества $\mathcal{R}(t)$: существует $R_T > 0$, такое что

$$(14) \quad \mathcal{R}(t) \subset B_{R_T}(\mathcal{R}(t)(p) - R_T p), \quad \forall p \in \mathcal{S}.$$

Предположение 2(а), относящееся к $\mathcal{M}$, должно быть выполнено.

В данной ситуации множество $Z(t) = \mathcal{R}(t) + (-\mathcal{M}_0)$ удовлетворяет опорному принципу для всех $p \in \mathcal{S}$ с радиусом $R = R_T + R_0$:

$$Z(t) \subset B_R(\mathcal{N}(t)(p) - R p), \quad \forall p \in \mathcal{S}.$$

Для любых $p, q \in \mathcal{S}$ получаем

$$\|\mathcal{N}(t)(p) - R p - \mathcal{N}(t)(q)\|^2 \leq R^2, \quad \|\mathcal{N}(t)(q) - R q - \mathcal{N}(t)(p)\|^2 \leq R^2$$

$$\text{и} \quad \|\mathcal{N}(t)(p) - \mathcal{N}(t)(q)\|^2 \leq 2R(p, \mathcal{N}(t)(p) - \mathcal{N}(t)(q)),$$

$$\|\mathcal{N}(t)(q) - \mathcal{N}(t)(p)\|^2 \leq 2R(q, \mathcal{N}(t)(q) - \mathcal{N}(t)(p)) = 2R(-q, \mathcal{N}(t)(p) - \mathcal{N}(t)(q)),$$

следовательно, $\|\mathcal{N}(t)(p) - \mathcal{N}(t)(q)\| \leq R\|p - q\|$. Принимая во внимание, что для любых $p, q \in \mathcal{S}$ меньшая дуга окружности радиуса 1 с центром в 0 и концевыми точками p, q лежит в $\mathcal{S}$, можно повторить доказательства теорем 1 и 2 в рассматриваемом случае. Для обобщения теоремы 1 нужно брать $p, q \in \mathbb{R}^n$ с $\frac{p}{\|p\|}, \frac{q}{\|q\|} \in \mathcal{S}$, т.е. условие Липшица будет доказываться на множестве $\left\{p \in \mathbb{R}^n : 1 - \varepsilon \leq \|p\| \leq 1 + \varepsilon, \frac{p}{\|p\|} \in \mathcal{S}\right\}$.

3. Задача (P2)

Используемые предположения: 1, 2(b), 3.

Фиксируем $\varepsilon \in (0, r - R_T)$. Рассмотрим ε -окрестность $\mathcal{R}_\varepsilon(t) = \mathcal{R}(t) + \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ множества $\mathcal{R}(t)$. Включение $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$ означает, что

$$\max_{x \in \mathcal{R}_\varepsilon(t)} \varrho(x, \mathcal{M}) \leq \varepsilon,$$

и наоборот, если $\max_{x \in \mathcal{R}_\varepsilon(t)} \varrho(x, \mathcal{M}) > \varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \not\subset \mathcal{M}$. На языке опорных функций можно поставить следующую эквивалентную задачу: найти минимум функции $f(p) = s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t))$:

$$(15) \quad \min_{\|p\|=1} f(p) = J.$$

Если $J \geq -\varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$, в случае $J < -\varepsilon$ выполнено $\mathcal{R}(t) \not\subset \mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{S}_1 = \{p : \|p\| = 1\}$ и $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{S}_1 : f(p) \leq 0\}$, $p_0 \in \mathcal{S}_1$ – решение (15).

Предположим, что $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$(16) \quad p_1 \in \mathcal{S}, \quad p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)).$$

Теорема 3. Пусть выполняются предположения раздела 3 и в задаче (15) имеет место $J < 0$. Пусть $r_0 = r - R_T - \varepsilon > 0$, $L = \|\mathcal{M}^ \mathcal{R}_\varepsilon(t)\| > 0$. Тогда для любых $p_1 \in \mathcal{S}$ и $0 < \lambda \leq \min\{r_0^2/R_0^3, 1/(2L), 1/(2R_0)\}$ итерации (16) сходятся с линейной скоростью к решению p_0 :*

$$\|p_{k+1} - p_0\| \leq q \|p_k - p_0\|, \quad q = \sqrt{1 - \frac{2r_0^2}{R_0} \lambda + R_0^2 \lambda^2} \in (0, 1).$$

Замечание 2. Как и в разделе 2, вышеприведенные результаты могут быть доказаны при более локальных предположениях. Вместо предположения 1 о сильной выпуклости $\mathcal{R}(s)$ для всех $s \in [0, T]$ с радиусом R_T можно потребовать выполнения для всех $p \in \mathcal{S}$ опорного условия для множества $\mathcal{R}(t)$: существует $R_T > 0$, такое что для любого числа $\varepsilon \in (0, r - R_T)$ выполняется

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}(p) - \mathcal{R}(t)(p) + \mathcal{R}(t) &\subset B_{R_T}(\mathcal{M}(p) - R_T p) \subset \\ &\subset B_{r-\varepsilon}(\mathcal{M}(p) - (r - \varepsilon)p) \subset \mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Предположения 2(b), 3, касающиеся $\mathcal{M}$, должны выполняться.

В рассматриваемой ситуации имеем

$$(18) \quad \mathcal{M}(p) - \mathcal{R}(t)(p) - \varepsilon p + \mathcal{R}_\varepsilon(t) \subset \mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{S}$$

и, следовательно, $f'(p) = \mathcal{M}(p) - \mathcal{R}(t)(p) - \varepsilon p = \mathcal{M}(p) - \mathcal{R}_\varepsilon(t)(p) = (\mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t))(p)$ для всех $p \in \mathcal{S}$, так как $f'(p) \in \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t)$ и $(p, f'(p)) = s(p, \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t))$ для всех $p \in \mathcal{S}$. Действительно, фиксируем $p \in \mathcal{S}$. Из включения $f'(p) + \mathcal{R}_\varepsilon(t) \subset \mathcal{M}$ получаем $f'(p) \in \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t)$. С другой стороны, $(p, f'(p)) + s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)) = s(p, \mathcal{M})$ и, таким образом, $(p, f'(p)) = s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)) \geq \text{co}(s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t))) = s(p, \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t))$.

Дальнейшие шаги повторяют доказательство теоремы 3.

4. Задача (РЗ)

Используемые предположения: 1, 3, 4, 5.

Из леммы 3 следует, что множество $\mathcal{R}(t)$ является равномерно гладким с постоянной $r(t)$, следовательно $R_T \geq r(t)$.

Фиксируем $\varepsilon \in (0, r(t) - R_0)$. Рассмотрим ε -окрестность $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{M} + \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ множества $\mathcal{M}$. Включение $\mathcal{R}(t) \supset \mathcal{M}$ означает, что

$$\max_{x \in \mathcal{M}_\varepsilon} \varrho(x, \mathcal{R}(t)) \leq \varepsilon,$$

и наоборот, если $\max_{x \in \mathcal{M}_\varepsilon} \varrho(x, \mathcal{R}(t)) > \varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \not\supset \mathcal{M}$. На языке опорных функций формулируется следующая эквивалентная задача: найти минимум функции $f(p) = s(p, \mathcal{R}(t)) - s(p, \mathcal{M}_\varepsilon) = s(p, \mathcal{R}(t)) - s(p, \mathcal{M}) - \varepsilon \|p\|$:

$$(19) \quad \min_{\|p\|=1} f(p) = J.$$

Если $J \geq -\varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \supset \mathcal{M}$, если же $J < -\varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \not\supset \mathcal{M}$.

Как обычно, $\mathcal{S}_1 = \{p : \|p\| = 1\}$ и $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{S}_1 : f(p) \leq 0\}$. Пусть $p_0 \in \mathcal{S}_1$ — решение задачи (19).

Предполагаем, что $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$(20) \quad p_1 \in \mathcal{S}, \quad p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)).$$

Теорема 4. Пусть выполняются предположения раздела 4, причем в задаче (19) выполняется $J < 0$. Пусть $r = r(t) - R - \varepsilon > 0$, $L = \|\mathcal{R}(t) \stackrel{}{\mathcal{M}_\varepsilon}\|$. Тогда для любых $p_1 \in \mathcal{S}$ и $0 < \lambda \leq \min\{r^2/R_T^3, 1/(2L), 1/(2R_T)\}$ итерации (20) сходятся с линейной скоростью к решению p_0 :*

$$\|p_{k+1} - p_0\| \leq q \|p_k - p_0\|, \quad q = \sqrt{1 - \frac{2r^2}{R_T} \lambda + R_T^2 \lambda^2} \in (0, 1).$$

Замечание 3. Как и в разделе 3, результаты верны при более локальных предположениях. Вместо сильной выпуклости $\mathcal{M}$ с радиусом R_0 в предположении 3 можно потребовать выполнения для всех $p \in \mathcal{S}$ опорного принципа для множества $\mathcal{M}$: существует $R_0 > 0$, такое что

$$(21) \quad \mathcal{M} \subset B_{R_0}(\mathcal{M}(p) - R_0 p), \quad \forall p \in \mathcal{S}.$$

Предположения 1, 4 и 5 должны выполняться.

5. Выбор начального приближения p_1 в методе проекции градиента

Начальный вектор p_1 выбирается методом случайного поиска: в задачах (Р1)–(РЗ) берем (равномерно распределенный) случайный вектор $p_1 \in \mathcal{S}_1 =$

$= \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$ и проверяем неравенство $f(p_1) \leq 0$. Если оно не выполнено, то выбирается еще один случайный вектор $p_1 \in \mathcal{S}_1$ и так далее. В данном разделе оценим вероятность $\mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\})$ нахождения подходящего вектора p_1 . Для определенности, рассмотрим задачу (P1) для фиксированного $t > 0$. Напомним, что $J < 0$ – решение задачи (11). По предположениям для задачи (P1) множество $\mathcal{N}(t)$ сильно выпукло с радиусом $R > 0$. Обозначим $z_0 = P_{\mathcal{N}(t)} 0$, $p_0 = -z_0 / \|z_0\|$. Для множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\text{cone } \mathcal{M}$ (выпуклую) коническую оболочку, т.е. $\text{cone } \mathcal{M} = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in \mathcal{M}, \lambda_i \geq 0\}$. Для пары точек $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, определим луч $[x, y) = \{x + t(y - x) : t \geq 0\}$.

Пусть $D > 0$ и $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x - z_0) = 0\}$. Предположим, что $\mathcal{K} = \text{cone}(H \cap B_D(z_0)) \supset \text{cone } \mathcal{N}(t)$. К примеру, D можно взять равным диаметру множества $\mathcal{N}(t)$, т.е. $D = \sup_{x, y \in \mathcal{N}(t)} \|x - y\|$.

Множество $\mathcal{K}$ – конус вращения с осью $[0, z_0)$. Угол между осью и образующей равен α , $\text{tg } \alpha = \frac{D}{|J|}$. Поляра $\mathcal{K}^- = \{p \in \mathbb{R}^n : (p, q) \leq 0 \quad \forall q \in \mathcal{K}\}$ также является конусом вращения с осью $[0, -z_0)$, для которого угол между осью и образующей равен $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, таким образом, $\cos \beta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + J^2}}$.

По определению $\mathcal{K}$ имеем для всех $p_1 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{K}^-$ неравенство $f(p_1) \leq 0$. Обозначим $\mathcal{S}_{\text{cap}} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{K}^-$ и $\mathcal{S}_0 = \mathcal{K}^- \cap H_0$, где $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x) = \cos \beta\}$. Заметим, что $\mathcal{S}_0 = H_0 \cap B_{r_0}(p_0 \cos \beta)$, где $r_0 = \sin \beta = \frac{|J|}{\sqrt{D^2 + J^2}}$. $(n-1)$ -мера Лебега, $\mu_{n-1} \mathcal{S}_0 \leq \mu_{n-1} \mathcal{S}_{\text{cap}}$. Таким образом,

$$\mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}) \geq \frac{\mu_{n-1} \mathcal{S}_{\text{cap}}}{\mu_{n-1} \mathcal{S}_1} \geq \frac{\mu_{n-1} \mathcal{S}_0}{\mu_{n-1} \mathcal{S}_1} = \frac{r_0^{n-1}}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} = \frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left(\frac{|J|}{\sqrt{D^2 + J^2}} \right)^{n-1},$$

где $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Предположим теперь что $B_r(z_0 - rp_0) \subset \mathcal{N}(t)$ для некоторого $r > 0$. Рассмотрим конус вращения $\mathcal{K} = \text{cone } B_r(z_0 - rp_0) \subset \text{cone } \mathcal{N}(t)$ с осью $[0, z_0)$. Угол между осью и образующей $\mathcal{K}$ равен α , $\sin \alpha = \frac{r}{r+|J|}$. Возьмем поляр $\mathcal{K}^- \supset (\text{cone } \mathcal{N}(t))^-$ с углом β между осью $[0, -z_0)$ и образующей, $\cos \beta = \frac{r}{r+|J|}$. Имеем для произвольных $p_1 \in \mathcal{S}_1 : f(p_1) \leq 0$, что $p_1 \in \mathcal{S}_{\text{cap}}$. Как и ранее, $\mathcal{S}_{\text{cap}} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{K}^-$. Определим $\mathcal{S}_0^1 = \mathcal{K}^- \cap H_1$, где $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x) = 1\}$. Используя элементарную планиметрию, можно получить, что $\mathcal{S}_0^1 = H_1 \cap B_{r_1}(p_0)$, $r_1 = \text{tg } \beta = \frac{\sqrt{2r|J|+|J|^2}}{r}$. Тогда $\mu_{n-1} \mathcal{S}_0^1 \geq \mu_{n-1} \mathcal{S}_{\text{cap}}$ и

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}) &\leq \frac{\mu_{n-1} \mathcal{S}_{\text{cap}}}{\mu_{n-1} \mathcal{S}_1} \leq \frac{\mu_{n-1} \mathcal{S}_0^1}{\mu_{n-1} \mathcal{S}_1} = \\ &= \frac{r_1^{n-1}}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} = \frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left(\frac{\sqrt{2r|J|+|J|^2}}{r} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

В итоге для множества $\mathcal{N}(t)$ диаметром D , являющегося равномерно гладким с постоянной r , получаем

$$(22) \quad \frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left(\frac{|J|}{\sqrt{D^2 + J^2}} \right)^{n-1} \leq \mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}) \leq \frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left(\frac{\sqrt{2r|J| + |J|^2}}{r} \right)^{n-1}.$$

Подобно правой (верхней) оценке в (22) для R -сильно выпуклого множества $\mathcal{N}(t)$ можно доказать оценку снизу

$$\frac{1}{n} \frac{V_{n-1}}{V_n} \left(\frac{\sqrt{2R|J| + |J|^2}}{R + |J|} \right)^{n-1} \leq \mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}).$$

Эта оценка показывает, что $\mathbb{P}(\{f(p_1) \leq 0\}) \asymp |J|^{n-1}$ при $J \rightarrow 0$. В рассматриваемых задачах $|J|$ имеет порядок $\varepsilon > 0$, и в данном случае левое неравенство в (22) дает более разумную оценку, так как в большинстве примеров значение D гораздо меньше R .

Полученная вероятность может быть очень мала и сильно влияет на вычисления, в частности, когда $|J|$ близко к нулю или n велико. В экспериментах в приведенных ниже примерах для n в пределах $3 \leq n \leq 12$ вектор p_1 был найден не более чем за несколько десятков попыток для задач (P1), (P2). В задаче (P3) иногда требовалось около 1000 попыток для нахождения подходящего p_1 . Одна из причин относительной эффективности при поиске p_1 случайным поиском заключается в том, что в оценках выше можно выбирать $D > 0$ много меньше, чем диаметр $\mathcal{N}(t)$. На самом деле достаточно такого $D > 0$, для которого выполнено включение $\text{cone}(H \cap B_D(z_0)) \supset \text{cone} \mathcal{N}(t)$.

В ряде случаев p_1 можно выбирать детерминированно, см. алгоритм из раздела 6 для нахождения минимального времени t при $\rho(\mathcal{R}(t), \mathcal{M}) = 0$.

Выбор шага λ в алгоритмах решения задач (P1)–(P3) можно осуществлять методом Армихо. Его подробное описание приведено в [29].

6. Моделирование и примеры

Некоторые из приведенных примеров имеют малую размерность ($n = 3$) для удобства интерпретации. Как показывает объяснение ниже, скорость сходимости для таких примеров и примеров большей размерности практически одна и та же.

Множества достижимости построены с помощью пакета программ на Python [30].

6.1. Задача (P1). Пример 1.

В этом примере находится момент времени, при котором множество достижимости $\mathcal{R}$ касается целевого множества $\mathcal{M}$.

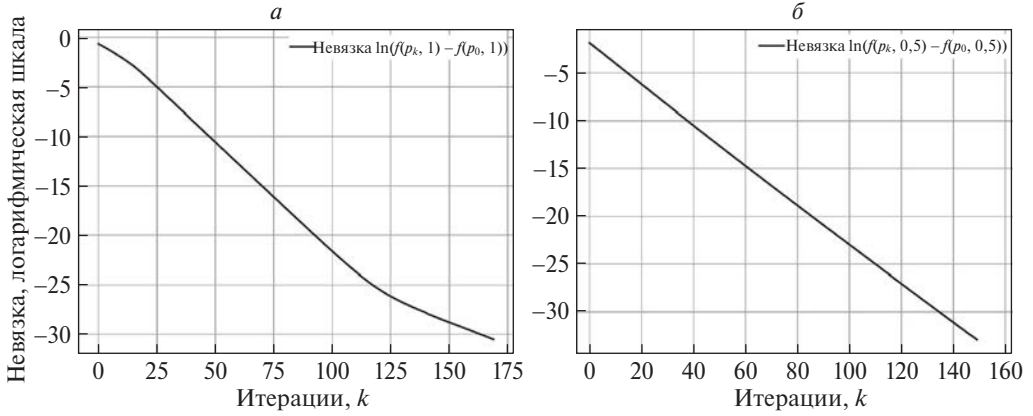


Рис. 2. Графики сходимости метода проекции градиента с размером шага $\lambda = 0,1$. (а) задача (P1), пример 1, (б) задача (P1), пример 2.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \\
 u &\in \mathbb{R} : |u| \leq 1, \\
 (23) \quad A &= \begin{bmatrix} -1,3 & 1 & 0 \\ 0 & -1,3 & 1 \\ 0 & 0 & -1,3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Целевым множеством является $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + B_r(0)$, где $\mathcal{M}_0$ – шар $B_{0,2}(0,7, -0,3, 0,35)$, $r = 0,5$. Напомним, что $f(p)$ в задаче (11) зависит от t , т.е. $f(p, t) = s(p, \mathcal{R}(t)) + s(p, -\mathcal{M}_0)$.

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу поиска расстояния между множествами $\mathcal{R}(t)$ и $\mathcal{M}$ для $t = 1$, с начальным условием $p_1 = (0,03123620, -0,72453809, 0,68852659)$, $f(p_1, 1) = -0,05270947$.

На рис. 2,а показана сходимость метода проекции градиента для вспомогательной задачи $\min_{\|p\|=1} f(p, t)$. Скорость сходимости линейная, с оценкой $f(p_k, 1) - f(p_0, 1) \approx 0,2486 \times 0,8304^k$. Найденное оптимальное значение $p_0 = (0,87540058, -0,46926876, 0,11602002)$, $f(p_0, 1) = -0,57398898$.

Множество достижимости и ближайшая к целевому множеству точка изображены на рис. 3.

При поиске оптимального времени касания заранее известен только интервал поиска $[0, T]$, но не начальное приближение p_1 для произвольно выбранного момента времени из этого интервала. Есть две разные стратегии. Первый – случайно выбирать $p_1 \in \mathcal{S}_1$, такой что $f(p_1, t) < 0$ для данного t , и увеличивать t на небольшую величину. Второй алгоритм более сложный и использует временной характер задачи (P1). Этот алгоритм отслеживает подходящее начальное приближение $p(t)$, $f(p, t) < 0$ при увеличении времени.

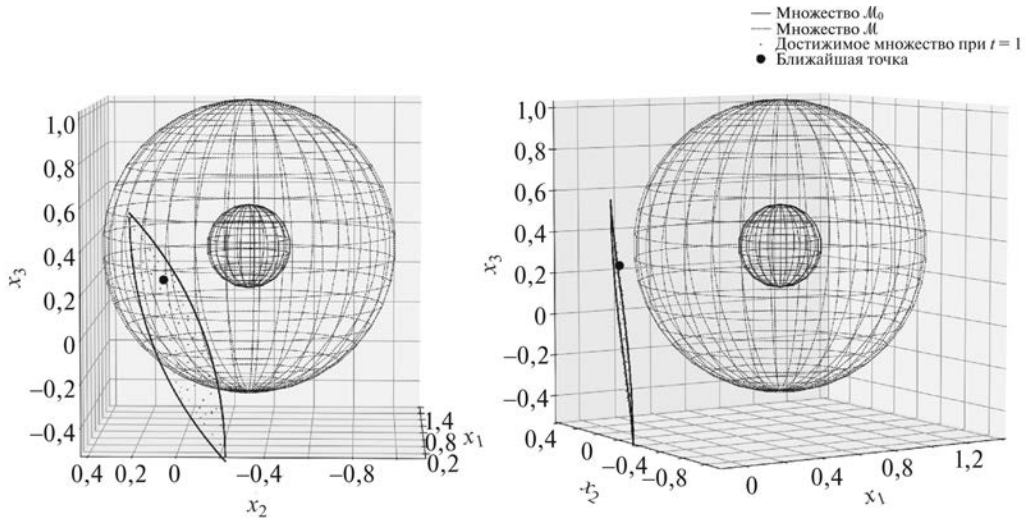


Рис. 3. Ближайшая к целевому множеству $\mathcal{M}$ точка множества достижимости $\mathcal{R}(t)$ для $t = 1$, найденная методом проекции градиента (задача (P1), пример 1).

Алгоритм для задачи (P1) (поиск минимального времени)

Информация: $T > 0$, $r > 0$, функция $f(p, t)$, требуемая точность $\varepsilon_{\text{tol}} > 0$, ограничения $t_{\text{lower}} = 0$, $t_{\text{upper}} = T$, начальный шаг по времени $\Delta_t > 0$.

1. Положим $t \leftarrow 0$ и найдем начальное приближение p_1 , удовлетворяющее $f(p_1, 0) < 0$. Далее запустим метод проекции градиента, который даст $p(0) = \arg \min_{\|p\|=1} f(p, 0) : f(p(0), 0) < 0$.
2. Положим $t_{\text{test}} = \min\{t + \Delta_t, t_{\text{upper}}\}$.
Если $f(p(t), t_{\text{test}}) \geq 0$, то полагаем $\Delta_t \leftarrow \Delta_t/2$ и повторяем этот шаг.
Если $f(p(t), t_{\text{test}}) < 0$, то переходим к шагу 3.
3. Запустим метод проекции градиента (13) для функции $f(p, t_{\text{test}})$ с начальной точкой $p_1 = p(t)$. Это дает p_0 и $J = f(p_0, t_{\text{test}}) = \min_{\|p\|=1} f(p, t_{\text{test}}) < 0$.
4. Если $J > -r + \varepsilon_{\text{tol}}$, то множество достижимости в момент t_{test} пересекается с множеством $\mathcal{M}$. Обновим $t_{\text{upper}} \leftarrow t_{\text{test}}$, $\Delta_t \leftarrow \frac{1}{2} \min\{\Delta_t, t_{\text{upper}} - t_{\text{lower}}\}$ и перейдем к шагу 2 с теми же t и $p(t)$. Иначе переходим к шагу 5.
5. Если $J < -r - \varepsilon_{\text{tol}}$, то множество достижимости еще не достигло множества $\mathcal{M}$. Обновим $t_{\text{lower}} \leftarrow t_{\text{test}}$, $\Delta_t \leftarrow \min\{2\Delta_t, \frac{t_{\text{upper}} - t_{\text{lower}}}{2}\}$.
Также обновим $t \leftarrow t_{\text{test}}$, $p(t) \leftarrow p_0$ и перейдем к шагу 2.
Иначе переходим к конечному шагу 6.
6. Решение найдено с требуемой точностью: $|J + r| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$. Возвращаем $t_0 = t_{\text{test}}$, как оптимальное время для задачи (P1), и p_0 .

Замечания: алгоритм реализует метод наподобие поиска делением пополам на отрезке $[0, T]$. Вероятность найти подходящее p_1 на шаге 1 может быть оценена с использованием результатов раздела 5. Тем не менее начальное приближение может быть получено без случайного поиска в шаге 1. Так

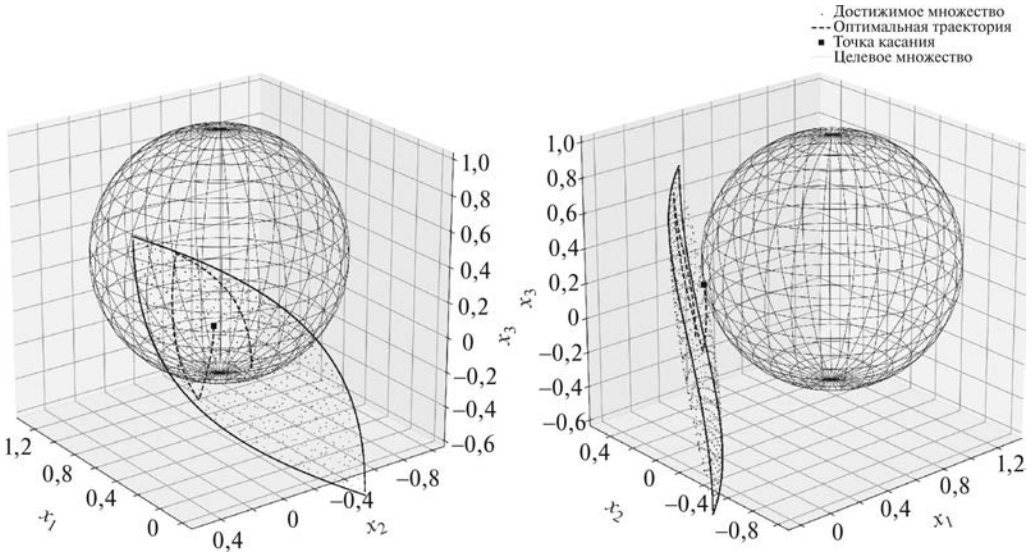


Рис. 4. Множество достижимости в момент касания целевого множества и оптимальная траектория (задача (P1), пример 1).

как $\mathcal{R}(0) = 0$, то достаточно найти единичный отделяющий вектор $p_1 \in \mathbb{R}^n$ для $\mathcal{M}$, такой что $(p_1, x) < 0$ для всех $x \in -\mathcal{M}_0$. Далее каждый раз на шаге 2 начальное приближение p_1 в методе проекции градиента выбирается детерминированным образом. На шаге 5 шаг времени удваивается для ускорения поиска. Алгоритм также можно применять, если значение T неизвестно (т.е. $t_{\text{upper}} = \infty$), но для $t_{\text{upper}} > T$ необходимые условия сходимости метода проекции градиента могут нарушаться. Тем не менее соблюдается инвариант $t_{\text{lower}} \leq t_{\text{test}} \leq t_{\text{upper}}$.

Алгоритм останавливается при получении J с заданной точностью ε_{tol} , во всех примерах далее $\varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$ и в результате получены $t_{\text{upper}} - t_{\text{lower}} \sim 10^{-6}$. Также можно останавливаться при достижении требуемой точности по времени t : т.е. при $t_{\text{upper}} - t_{\text{lower}} \leq \varepsilon_{\text{time}}$ заканчиваем вычисления и берем $t \in [t_{\text{lower}}, t_{\text{upper}}]$. Здесь $\varepsilon_{\text{time}} > 0$ – допустимая ошибка по времени.

Для системы (23) алгоритм сходится за 21 шаг. Найденное оптимальное время равно 2,73838424 при

$$p_0 = (0,77091811, -0,60777697, 0,19050571).$$

На рис. 4 изображено множество достижимости и целевое множество в момент касания, а также оптимальная траектория (9) с двумя переключениями, приводящая к целевому множеству [24].

Как было показано во введении, множество достижимости $\mathcal{R}(t)$ системы (23) не является сильно выпуклым. Для $\mathcal{U} = B[-1, 1]$ и $t > 0$ получаем $s(p, \mathcal{R}(t)) = \int_0^t e^{-1,3s} |p_1 \frac{s^2}{2} + p_2 s + p_3| ds$ для любого $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{S}_1$. Для решения $p_0 = (0,77091811, -0,60777697, 0,19050571)$ и $t = 2,73838424$ по-

лучаем корни $s_1(p_0) < s_2(p_0)$ уравнения $p_1 \frac{s^2}{2} + p_2 s + p_3 = 0$ для $p = p_0$. По теореме об обратной функции корни $\mathcal{S}_1 \ni p \rightarrow s_i(p)$, $i = 1, 2$, уравнения $p_1 \frac{s^2}{2} + p_2 s + p_3 = 0$ аналитичны в некоторой окрестности точки $p_0 \in \mathcal{S}_1$. Другими словами, существует число $\gamma > 0$, такое что функции

$$\mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0) \ni p \rightarrow s_i(p), \quad i = 1, 2,$$

являются липшицевыми некоторой постоянной $L > 0$. Более того, можно выбрать такое число $\gamma > 0$, что первые компоненты векторов из $\mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0)$ положительны и $\max\{s_1(p), s_1(q)\} \leq \min\{s_2(p), s_2(q)\}$ для всех $p, q \in \mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0)$.

Фиксируем пару точек $p, q \in \mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0)$. Положим $M = \max_{s \in [0, t]} \|e^{As}\|$. Тогда $|s_i(p) - s_i(q)| \leq L\|p - q\|$ для $i = 1, 2$, и используя оценку $\|\mathcal{U}(e^{A^\top s} p) - \mathcal{U}(e^{A^\top s} q)\| \leq 2$, получаем для опорного элемента

$$\|\mathcal{R}(t)(p) - \mathcal{R}(t)(q)\| = \sum_{i=1}^2 \left\| \int_{s_i(p)}^{s_i(q)} e^{As} (\mathcal{U}(e^{A^\top s} p) - \mathcal{U}(e^{A^\top s} q)) ds \right\| \leq 4ML\|p - q\|.$$

Таким образом, поверхность $\{\mathcal{R}(t)(p) : p \in \mathcal{S}_1 \cap B_\gamma(p_0)\}$ – это часть сильно выпуклого множества с радиусом $R = 4ML$. В текущем примере этого достаточно для сходимости метода проекции градиента для времени t . Та же ситуация имеет место для ранних моментов времени.

6.2. Задача (P1). Пример 2.

Рассмотрим пример в $\mathbb{R}^{12}$

$A = \text{diag}(-0,3, -0,8, -1, -0,7, -0,71, -0,52, -0,37, -0,05, -0,25, -0,89, -0,99, -0,2)$, $\mathcal{U} = B_1(0)$. Целевым множеством является $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + B_r(0)$, где $\mathcal{M}_0$ – шар $B_{0,4}(0,3 \times \mathbf{1})$ ($\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$), $r = 0,2$, размер шага $\lambda = 0,1$.

Рисунок 2,б: Сходимость метода проекции градиента для вспомогательной задачи $\min_{\|p\|=1} f(p, t)$ для времени $t = 0,5$ и начального условия

$$\begin{aligned} p_1 = & (0,02046203, 0,24278712, 0,21998230, 0,33539534, 0,11750331, \\ & 0,07584814, 0,44196329, 0,14159412, 0,08314335, \\ & 0,32560626, 0,49401057, 0,43339861), \end{aligned}$$

где $f(p_1, 0,5) = -0,04771303$.

Оценка скорости сходимости: $f(p_k, 0,5) - f(p_0, 0,5) \approx 0,1218 \times 0,8122^k$.

Оптимальное значение равно

$$\begin{aligned} p_0 = & (0,27300370, 0,30197686, 0,31253360, 0,29647251, 0,29702965, \\ & 0,28619273, 0,27727228, 0,25724610, 0,26991497, \\ & 0,30680235, 0,31202019, 0,26679398), \end{aligned}$$

где $f(p_0, 0,5) = -0,20238418$.

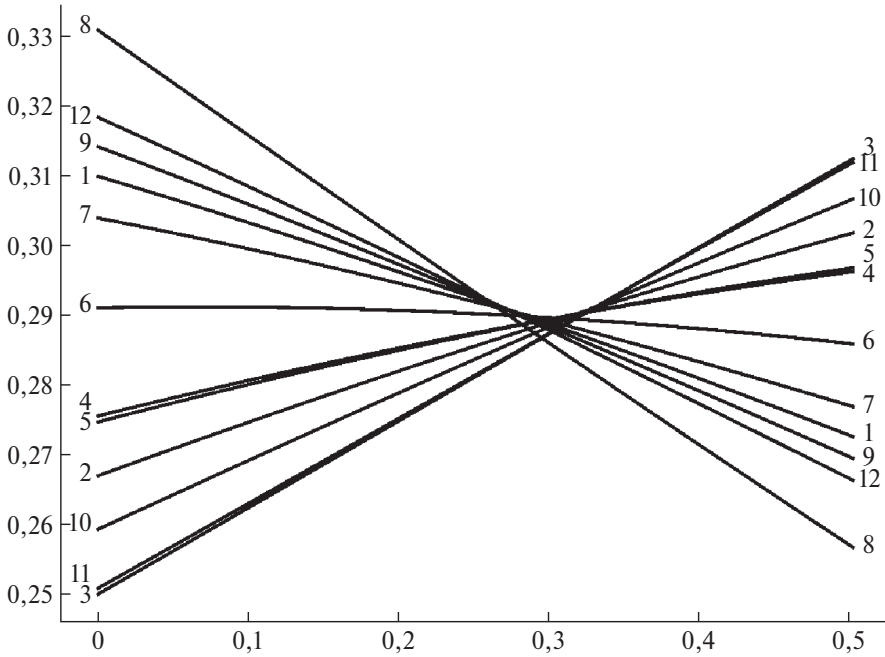


Рис. 5. k -е компоненты u_k оптимального управления (задача (P1), пример 2).

Алгоритм сходится за 21 шаг к точке

$$p_0 = (0,27281666, 0,30212210, 0,31280135, 0,29655398, 0,29711758, \\ 0,28615572, 0,27713348, 0,25688441, 0,26969324, \\ 0,30700357, 0,31228196, 0,26653741),$$

полученное оптимальное время равно 0,50315046.

Рисунок 5 показывает оптимальное управление (покомпонентно, каждая линия изображает одну из 12 компонент).

6.3. Задача (P2). Пример 3.

Множество достижимости касается целевого множества внутренним образом, оно такое же, как в задаче (P1), пример 1 (формула (23)).

Целевое множество – эллипсоид $\mathcal{M} = \{x : (x - c)^\top Q(x - c) \leq R^2\}$, где

$$Q = \begin{bmatrix} 4,5 & -1,2 & -1,6 \\ -1,2 & 6,8 & -2,3 \\ -1,6 & -2,3 & 8 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3,4 \\ -3,8 \\ 0,3 \end{bmatrix}, \quad R = 12.$$

Напомним, что $f(p, t) = s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t))$, здесь взято $\varepsilon = 0,05$, размер шага $\lambda = 0,2$.

Рисунок 6: для системы (23) похожий алгоритм деления пополам сходится за 19 шагов (т.е. $|J + \varepsilon| \leq \varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$). Оптимальное время $t = 1,64610733$, $p_0 = (0,36800454, 0,72705740 - 0,57962073)$.

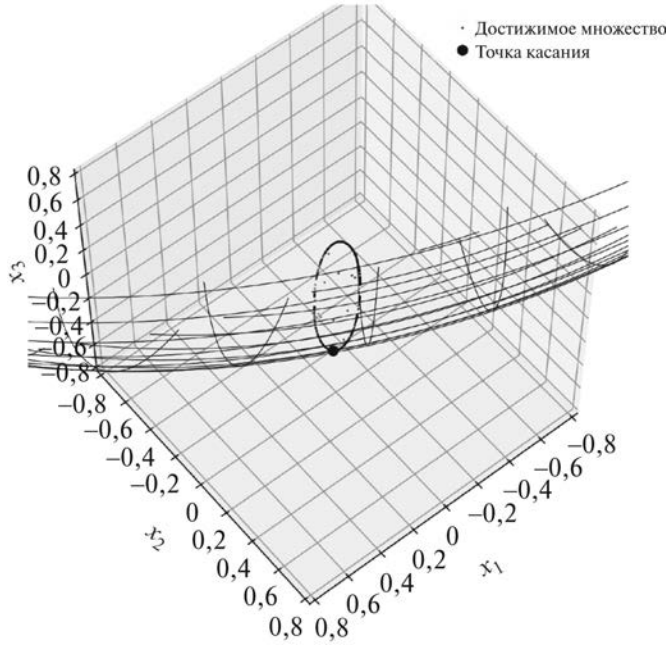


Рис. 6. Решение задачи (P2) для примера 3.

6.4. Задача (P2). Пример 4. Гомотет внутри целевого множества.

Решим задачу (P2) для гомотета, т.е. задачу, поставленную в виде

$$(24) \quad \max_{t \geq 0} t : \quad t\mathcal{R} \subset \mathcal{M}.$$

Определим $\mathcal{M} = B_{10}(0)$, т.е. шар с центром в 0 и радиусом 10. Множество $\mathcal{R}$ – сильно выпуклый отрезок с концами $[-0,1, 3, 2,05884573]$, $[-1,9, 3, -1,05884573]$ и радиусом сильной выпуклости $R = 3$, т.е. $\mathcal{R}$ – пересечение всех шаров радиуса $R = 3$, содержащих обе конечных точки.

Опорный элемент для единичного вектора $p = (p_1, \dots, p_n)$ и сильно выпуклого отрезка с концами $[-ae_1, ae_1]$ и радиусом сильной выпуклости $R > a$ равен $Rp - \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{1 - p_1^2}}(I - e_1 e_1^T)p$, если $\arctg\left(\frac{p_1}{\sqrt{1 - p_1^2}}\right) < \arcsin(\frac{a}{R})$, в противном случае он равен $\text{sign}(p_1)ae_1$. Рассмотрим гомотетию $t\mathcal{R}$ с параметром $\varepsilon = 0,1$ в определении f (15) и размером шага $\lambda = 0,2$.

Для $t = 3$ множество $t\mathcal{R}$ не содержится в $\mathcal{M}$, см. рис. 7. Алгоритм, похожий на приведенный для задачи (P2), сходится за 21 шаг к оптимальным значениям $t_0 = 2,62904820$ и $p_0 = (-0,34257770, 0,93398621, 0,10153957)$ (т.е. $|J + \varepsilon| \leq \varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$).

6.5. Задача (P3). Пример 5.

Рассмотрим пример в $\mathbb{R}^{10}$

$A = \text{diag}(0,1, 0,75, 0,8, 0,81, 0,82, 0,95, 1,0, 1,0, 1,05, 1,1)$, $\mathcal{U} = B_1(0)$.

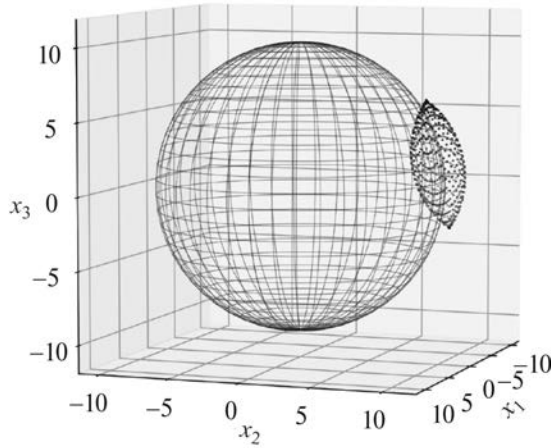


Рис. 7. Задача (P2), пример 4. Гомотет при $t = 3$ не содержится в $\mathcal{M}$.

Целевое множество равно $\mathcal{M} = B_{0,1}(0, \mathbf{1} \times \mathbf{1})$, ($\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$), $\varepsilon = 0,1$, размер шага $\lambda = 0,1$.

Понадобился 21 запуск метода проекции градиента, чтобы получить решение

$$p_0 = (0,44643102, 0,32328081, 0,31539020, 0,31383560, 0,31228874, \\ 0,29286442, 0,28572048, 0,28572048, 0,27875066, 0,27195027)$$

и оптимальное время 0,35823087.

7. Заключение

В работе на основе решения задачи (1) предложены эффективные методы решения ряда задач (P1)–(P3), в том числе задачи поиска расстояния и включения множеств. Доказана линейная скорость сходимости алгоритмов. Рассмотренные примеры показывают эффективность предложенных методов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Умножим обе части неравенства на $\sqrt{\|p\| \|q\|}$ и возведем в квадрат.

Доказательство леммы 2. Из равенства $e^{As} = J e^{A_1 s} J^{-1}$ получаем

$$\mathcal{R}(t) = \int_0^t J e^{A_1 s} J^{-1} \mathcal{U} ds = \int_0^t J e^{A_1 s} \mathcal{U}_1 ds = J \mathcal{R}_1(t).$$

Требуемое утверждение следует из [25, Теорема 3].

Доказательство леммы 3. По определению $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{B}_r(0)$. Тогда $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0(t) + r \int_0^t e^{As} \mathcal{B}_1(0) ds$,

$$\mathcal{R}_0(t) = \int_0^t e^{As} \mathcal{U}_0 ds.$$

Достаточно показать, что эллипсоид $e^{As} \mathcal{B}_1(0)$ равномерно гладкий с постоянной $r(s) = \frac{\lambda_n^2(s)}{\lambda_1(s)}$. Рассмотрим ортонормированный базис, в котором эллипсоид $e^{As} \mathcal{B}_1(0)$ принимает канонический вид

$$\mathcal{N} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \leq 1 \right\}, \quad \lambda_k = \lambda_k(s).$$

Тогда матрица $L = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$ дает $L\mathcal{B}_1(0) = \mathcal{N}$. Эллипсоид $\mathcal{V} = \{ x : \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2 \leq 1 \}$ сильно выпуклый с радиусом $\rho = \lambda_1 / \lambda_n^2$. Следовательно, существует выпуклый компакт $\mathcal{P}$, такой что $\mathcal{V} + \mathcal{P} = \mathcal{B}_\rho(0)$. Учитывая, что $L\mathcal{V} = \mathcal{B}_1(0)$, получаем:

$$L\mathcal{V} + L\mathcal{P} = L\mathcal{B}_\rho(0) = \rho L\mathcal{B}_1(0) = \rho \mathcal{N} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \mathcal{B}_1(0) + \frac{1}{\rho} \mathcal{P} = \mathcal{N}.$$

Таким образом множество $\mathcal{N}$ является равномерно гладким с постоянной $\frac{1}{\rho} = \lambda_n^2 / \lambda_1$.

Доказательство теоремы 1. Пусть I – единичная матрица, $p_0 \in \mathcal{S}_1$ – решение задачи (11). Из необходимого условия экстремума имеем $f'(p_0) = -\langle p_0, f'(p_0) \rangle = -\|f'(p_0)\|$. Тогда $P_{\mathcal{T}_p} = I - pp^\top$ для любого $p \in \mathcal{S}_1$ и $\|(I - pp^\top)f'(p)\|^2 = \|f'(p)\|^2 - f^2(p)$. Следовательно, для всех $p \in \mathcal{S}$ получаем

$$\|f'(p)\|^2 - f^2(p) = (\|f'(p)\| - f(p))(\|f'(p)\| + f(p)) = \|f'(p)\| - f(p).$$

Из неравенства $f(p) \leq 0$ и того, что опорный элемент $f'(p_0) = \mathcal{N}(t)(p_0)$ имеет минимально возможную норму, получаем, что $\|f'(p)\| - f(p) \geq \|f'(p)\| \geq \|f'(p_0)\| = |J|$. Остается заметить, что $\|f'(p)\| + f(p_0) = \|f'(p)\| - \|f'(p_0)\| \geq 0$.

Для любых двух векторов $p, q \in \mathbb{R}^n$, $1 - \varepsilon \leq \|p\|, \|q\| \leq 1 + \varepsilon$ из леммы 1 получаем, что $\left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{\|p - q\|}{\sqrt{\|p\| \|q\|}}$. Фиксируем такие p, q . Тогда из липшицевости опорного элемента $f'(\xi) = \mathcal{N}(t)(\xi)$ на единичной сфере с постоянной R и равенства $f'(\xi) = f'(\xi / \|\xi\|)$, для всех $\xi \neq 0$, получаем

$$\|f'(p) - f'(q)\| \leq R \left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{R\|p - q\|}{\sqrt{\|p\| \|q\|}} \leq \frac{R}{1 - \varepsilon} \|p - q\|.$$

Доказательство теоремы 2. Определим $q_k = p_k - \lambda f'(p_k)$, $\|q_k\| \geq 1 - \lambda \|f'(p_k)\| \geq 1 - \lambda L \geq \frac{1}{2}$. Из $\|p_k\| = \|p_{k+1}\| = 1$, леммы 1 и неравенства

$$\begin{aligned} \|p_{k+1} - p_k\| &= \|P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)) - p_k\| \leq \frac{\|p_k - q_k\|}{\sqrt{\|p_k\| \|q_k\|}} \leq \\ &\leq \lambda \sqrt{2} \|f'(p_k)\| \leq \lambda \sqrt{2} L \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

получаем $[p_k, p_{k+1}] \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq \|p\| \leq \frac{3}{2}\}$. По теореме 1 f' имеет постоянную Липшица $L_1 = R/(1 - \frac{1}{2}) = 2R$ на отрезке $[p_k, p_{k+1}]$.

Также имеет место условие LPL для функции f на множестве $\mathcal{S}$ по теореме 1 для $\mu = |J|$.

Фиксируем λ из предложения и $\ell = \frac{1}{\lambda} \geq L_1$. Положим $z_k = \|\ell p_k - f'(p_k)\| - (p_k, p_k - f'(p_k)) \geq 0$,

$$(П.1) \quad z_k = \frac{\|(I - p_k p_k^\top) f'(p_k)\|^2}{\|\ell p_k - f'(p_k)\| + (p_k, p_k - f'(p_k))} \geq \frac{\|(I - p_k p_k^\top) f'(p_k)\|^2}{2\|\ell p_k - f'(p_k)\|}.$$

Имеем

$$\|p_{k+1} - p_k\|^2 = 2 - 2 \frac{(p_k, \ell p_k - f'(p_k))}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} = \frac{2z_k}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|}$$

и из липшицевости f' на отрезке $[p_k, p_{k+1}]$ с постоянной L_1

$$\begin{aligned} f(p_{k+1}) - f(p_k) &\leq (f'(p_k), p_{k+1} - p_k) + \frac{L_1}{2} \|p_{k+1} - p_k\|^2 = \\ &= (p_k, L_1 p_k - f'(p_k)) - \left(L_1 p_k - f'(p_k), \frac{\ell p_k - f'(p_k)}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \right) = \\ &= \left(\ell p_k - f'(p_k) + (L_1 - \ell) p_k, p_k - \frac{\ell p_k - f'(p_k)}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \right), \\ f(p_{k+1}) - f(p_k) &\leq -z_k + (L_1 - \ell) \left(p_k, p_k - \frac{\ell p_k - f'(p_k)}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \right) = \\ &= -z_k + \frac{L_1 - \ell}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} z_k \leq -z_k. \end{aligned}$$

Из (П.1) и условия LPL с $\mu = |J|$ получаем, что

$$f(p_{k+1}) - f(p_k) \leq -\frac{\|(I - p_k p_k^\top) f'(p_k)\|^2}{2\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \leq -\frac{|J|}{2\|\ell p_k - f'(p_k)\|} (f(p_k) - f(p_0)).$$

Определим $\varphi(p) = f(p) - f(p_0)$ для всех $p \in \mathcal{S}_1$. Из оценки $\|\ell p_k - f'(p_k)\| \leq \ell + \|f'(p_k)\| \leq \ell + L$ получаем

$$\varphi(p_{k+1}) \leq \left(1 - \frac{|J|}{2\ell + 2L} \right) \varphi(p_k) = q\varphi(p_k)$$

и $q \in (0, 1)$, так как $|J| = \varrho(0, \mathcal{N}(t)) \leq \|\mathcal{N}(t)\| = L$.

Для точек $\{p_k\}$ имеем (заметим, что $\|p_k - \lambda f'(p_k)\| \geq 1$)

$$\|p_{k+1} - p_k\|^2 \leq \frac{2z_k}{\|\ell p_k - f'(p_k)\|} \leq \frac{2\lambda(f(p_k) - f(p_{k+1}))}{\|p_k - \lambda f'(p_k)\|} \leq 2\lambda\varphi(p_k).$$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функцию

$$f(p) = s(p, \mathcal{M}_0) + r\|p\| - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)).$$

Множество $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ сильно выпукло с радиусом $R_T + \varepsilon < r$. Следовательно, существует выпуклый компакт $\mathcal{N}(t)$, такой что $\mathcal{R}_\varepsilon(t) + \mathcal{N}(t) = \mathcal{B}_{R_T+\varepsilon}(0)$ и $r\|p\| - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)) = (r - R_T - \varepsilon)\|p\| + s(p, \mathcal{N}(t))$. Таким образом

$$\begin{aligned} f(p) &= s(p, \mathcal{M}_0) + (r - R_T - \varepsilon)\|p\| + s(p, \mathcal{N}(t)) = \\ &= s(p, \mathcal{M}_0 + \mathcal{N}(t) + \mathcal{B}_{r-R_T-\varepsilon}(0)) \end{aligned}$$

и функция $f(p)$ является опорной функцией множества $\mathcal{N}(t) = \mathcal{M}^* \mathcal{R}_\varepsilon(t) = \mathcal{M}_0 + \mathcal{N}(t) + \mathcal{B}_{r-R_T-\varepsilon}(0)$. Это множество сильно выпукло с радиусом R_0 и является равномерно гладким с постоянной $r_0 = r - R_T - \varepsilon > 0$. Функция f' липшицева на S_1 с постоянной R_0 и так же, как в доказательстве теоремы 2, $[p_k, p_{k+1}] \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq \|p\| \leq \frac{3}{2}\}$. Таким образом, для любого p из отрезка $[p_k, p_{k+1}]$ имеем $\|p\| \geq \frac{1}{2}$ и для любых $p, q \in [p_k, p_{k+1}]$ по лемме 1

$$\begin{aligned} \|f'(p) - f'(q)\| &= \left\| f' \left(\frac{p}{\|p\|} \right) - f' \left(\frac{q}{\|q\|} \right) \right\| \leq \\ &\leq R_0 \left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq R_0 \frac{\|p - q\|}{\sqrt{\|p\| \|q\|}} \leq 2R_0 \|p - q\|, \end{aligned}$$

т.е. f' – липшицево отображение на любом отрезке $[p_k, p_{k+1}]$ с постоянной $2R_0$. Из липшицевости f' и предложения 2 $f(p_k) \leq 0$ для всех k .

$$\begin{aligned} \|p_{k+1} - p_0\|^2 &= \|P_{S_1}(p_k - \lambda f'(p_k)) - P_{S_1}(p_0 - \lambda f'(p_0))\|^2, \\ \|p_k - \lambda f'(p_k)\| &\geq 1, \quad \|p_0 - \lambda f'(p_0)\| \geq 1, \end{aligned}$$

т.е. $p_k - \lambda f'(p_k) \notin \text{int } B_1(0)$, $p_0 - \lambda f'(p_0) \notin \text{int } B_1(0)$, и тогда

$$\begin{aligned} \|p_{k+1} - p_0\|^2 &\leq \|p_k - p_0 + \lambda(f'(p_k) - f'(p_0))\|^2 \leq \\ &\leq \|p_k - p_0\|^2 - 2\lambda(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) + \lambda^2\|f'(p_k) - f'(p_0)\|. \end{aligned}$$

Из сильной выпуклости множества $\mathcal{N}(t)$ с радиусом R_0 имеем $\|f'(p_k) - f'(p_0)\| \leq R_0\|p_k - p_0\|$. Также из сильной выпуклости множества $\mathcal{N}(t)$ с радиусом R_0 имеем [28, Теорема 2.1 (h)] $(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) \geq \frac{1}{R_0}\|f'(p_k) - f'(p_0)\|^2$. Из равномерной гладкости множества $\mathcal{N}(t)$ с постоянной r_0 [28, Определение 3.2, Теорема 3.6] имеем

$$(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) \geq \frac{1}{R_0}\|f'(p_k) - f'(p_0)\|^2 \geq \frac{r_0^2}{R_0}\|p_k - p_0\|^2.$$

Таким образом, $\|p_{k+1} - p_0\|^2 \leq q^2\|p_k - p_0\|^2$.

Доказательство теоремы 4. Повторяется доказательство теоремы 3. В частности, функция $f(p)$ – опорная функция множества $\mathcal{R}(t) \overset{*}{\mathcal{M}} \mathcal{B}_\varepsilon(0) = \mathcal{R}(t) \overset{*}{\mathcal{M}} \mathcal{B}_\varepsilon(0)$. Это множество сильно выпукло с постоянной R_T и является равномерно гладким с постоянной r .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioffe A.D.* Metric regularity – a survey Part I and II // J. Aust. Math. Soc. 2016. V. 101. P. 188–243; P. 376–417.
2. *Luke D.R.* Finding best approximation pairs relative to a convex and prox-regular set in a Hilbert space // SIAM J. Optim. 2008. V. 19. No. 2. P. 714–739.
3. *Grünewälder S.* Compact convex projections // J. Mach. Learn. Res. 2018. V. 18. No. 2019. P. 1–43.
4. *Sosa W., Raupp F.M.P.* An algorithm for projecting a point onto a level set of a quadratic function // Optimization. 2022. V. 71. No. 1. P. 71–89.
5. *Bregman L.M., Censor Y., Reich S., Zepkowitz-Malachi Y.* Finding the projection of a point onto the intersection of convex sets via projections onto half-spaces // J. Approx. Theory. 2003. V. 124. No. 2. P. 194–218.
6. *Aumann R.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. No. 1. P. 1–12.
7. *Ляпунов А.А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. № 6. С. 465–478.
8. *Frankowska H., Olech C.* R-convexity of the integral of the set-valued functions. Contributions to analysis and geometry (Baltimore, Md., 1980) / Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md., 1981. P. 117–129.
9. *Vial J.-Ph.* Strong and Weak Convexity of Sets and Functions // Math. Oper. Res. 1983. V. 8. No. 2. P. 231–259.
10. *Balashov M.V., Repovš D.* Uniformly convex subsets of the Hilbert space with modulus of convexity of the second order // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 377. No. 2. P. 754–761.
11. *Veliov V.M.* On the convexity of integrals of multivalued mappings: application in control theory // J. Optim. Theor. Appl. 1987. V. 54. No. 3. P. 541–563.
12. *Veliov V.M.* Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions // Syst. Control Lett. 1989. V. 13. No. 3. P. 263–269.
13. *Althoff M., Frehse G., Girard A.* Set propagation techniques for reachability analysis // Annu. Rev. Control Robot. Auton. Syst. 2021. V. 4. P. 369–395.
14. *Le Guernic C., Girard A.* Reachability analysis of linear systems using support functions // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2010. V. 4. P. 250–262.
15. *Gruber P.M.* Approximation of convex bodies / Convexity and Its Applications. Basel Birkhäuser, 1983. P. 131–162.
16. *Serry M., Reissig G.* Over-approximating reachable tubes of linear time-varying systems // IEEE Trans. Automat. Control. V. 67. No. 1. P. 443–450.
17. *Kurzanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes, theory and computation // Ser. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhauser/Springer, 2014.
18. *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 5. С. 1–50.
19. *Балашов М.В., Половинкин Е.С.* М-сильно выпуклые множества и их порождающие подмножества // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 25–60.
20. *Cannarsa P., Frankowska H.* Interior sphere property of attainable sets and time optimal control problems // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2006. V. 12. No. 2. P. 350–370.

21. *Balashov M.V., Polyak B.T., Tremba A.A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numer. Funct. Anal. Optim. 2020. V. 41. No. 7. P. 822–849.
22. *Балашов М.В.* Сильная выпуклость множеств достижимости линейных систем // Матем. сб. 2022. Т. 213. № 5. С. 30–49.
23. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. Наука, 1969.
24. *Тремба А.А.* Вычисление множества достижимости линейных стационарных систем с помощью опорной функции и опорных элементов // Материалы XVI Международной научной конференции Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). ИПУ РАН, Москва, 2022. С. 437–441.
25. *Половинкин Е.С.* Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 259–286.
26. *Bolte J., Sabach Sh., Teboulle M.* Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problems // Math. Program. 2014. V. 146. P. 459–494.
27. *Balashov M.V., Tremba A.A.* Error bound conditions and convergence of optimization methods on smooth and proximally smooth manifolds // Optimization. 2022. V. 71. No. 3. P. 711–735.
28. *Ivanov G.E., Goncharov V.V.* Strong and weak convexity of closed sets in a Hilbert space / Operations Research, Engineering, and Cyber Security. Springer Optimization and Its Applications. Springer, 2017. Vol. 113. P. 259–297.
29. *Балашов М.В., Камалов Р.А.* Метод проекции градиента с шагом Армихо на многообразиях // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1776–1786.
30. *Tremba A.* Computing reachability set with support function and support points: Python code repository. <https://github.com/atremba/lti-reachability-set>

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К АДАПТИВНОМУ УПРАВЛЕНИЮ ЛИНЕЙНЫМИ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ¹

Предлагается адаптивная система управления по вектору состояний классом нестационарных линейных систем. Задача адаптации сведена к задаче идентификации кусочно-постоянных приближений нестационарных параметров идеального сигнала управления. При выполнении условия неисчезающего возбуждения регрессора с достаточно малым периодом обеспечена экспоненциальная сходимость ошибки идентификации приближений и ошибки слежения за эталонной моделью к произвольно малой окрестности положения равновесия. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы математическим моделированием.

Ключевые слова: адаптивное управление, нестационарные параметры, параметрическая ошибка, неисчезающее возбуждение, идентификация.

DOI: 10.31857/S0005231024050039, EDN: YQFACM

1. Введение

Начиная с 1960-х гг. тематика, связанная с адаптивным управлением, остается одной из центральных для лаборатории № 7 ИПУ РАН. Ее основатель, академик Яков Залманович Цыпкин, внес весомый вклад в изучение проблем адаптации и обучения и предложил единый подход к их решению, основанный на методах стохастической аппроксимации. В рамках такого подхода, в частности, были успешно решены задачи идентификации и оценки параметров. В дальнейшем Борисом Теодоровичем Поляком были предложены оптимальные и робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации и строго исследована их скорость сходимости [1, 2]. Эти исследования во многом легли в основу теории адаптивного управления как науки, которая, начав с линейных систем с постоянными параметрами, в дальнейшем постепенно обобщается на более широкие классы объектов. Об одном таком классе и пойдет речь в данной работе.

Одним из предметов теории адаптивного управления является задача слежения нестационарным объектом за стационарной эталонной моделью с нулевой установившейся ошибкой. Несмотря на более чем 65-летнюю историю, сегодня эта задача все еще не имеет универсального практического решения, что мотивирует исследователей по всему миру к разработке новых подходов и инструментариев.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

Стандартные алгоритмы адаптивного управления предназначены для линейных систем с квазипостоянными параметрами. При их применении для управления линейными нестационарными системами, ввиду появления в производной функции Ляпунова некомпенсируемого слагаемого, пропорционального скорости изменения неизвестных параметров, вместо сходимости ошибки слежения к нулю обеспечивается только ее ограниченность в некоторой области с нерегулируемой границей [3, с. 552]. В [4] на основе метода скоростного градиента эти результаты обобщены на задачу слежения нелинейной нестационарной системой за нестационарной эталонной моделью. В [5, 6] предложены различные комбинированные законы адаптации, как утверждается, позволяющие при выполнении условия неистощающего возбуждения регрессора уменьшить величину установившейся ошибки. В [7] предложен метод *congelation of variables* – *заморозки переменных*, позволяющий с помощью специальной и не всегда подходящей для практики силовой обратной связи демпфировать влияние возмущающего слагаемого, благодаря чему обеспечить асимптотическую сходимость ошибки слежения к нулю. Альтернативный подход [8] также обеспечивает асимптотическую устойчивость, но использует большой коэффициент усиления уже не в законе управления, а в законе адаптации. В методе мажорирующих функций [9, 10] предлагается использовать закон адаптации с большим коэффициентом усиления, но в отличие от [8] гарантируется только диссипативность замкнутой системы. В [11] предложена адаптивная система управления, обеспечивающая экспоненциальную сходимость ошибки слежения к нулю для систем в канонической форме управляемости с нестационарными параметрами, описываемыми известными генераторами с неизвестными начальными условиями. В [12] предложено заменить задачу адаптивного управления нестационарными механическими системами на задачу идентификации кусочно-постоянных параметров полинома, полученного с помощью локального разложения нестационарных параметров системы в ряд Тейлора произвольного порядка. В [13, 14] на базе методов параметрической идентификации развит подход к адаптивно-оптимальному управлению по выходу нестационарными линейными системами в предположении, что параметры объекта являются известными нестационарными функциями времени.

Недостатки описанных выше и других известных подходов к решению задач адаптивного управления нестационарными системами могут быть классифицированы следующим образом:

- 1) использование силовых обратных связей в законе управления или настройки (разрывных управлений, больших коэффициентов, нелинейных демпфирующих сигналов и пр.) [7–10, 12];
- 2) необходимость удовлетворения условий параметрической идентифицируемости [5, 6, 11, 13, 14];
- 3) увеличение размерности решаемой задачи идентификации/адаптации путем учета коэффициентов физических законов изменения параметров системы или аппроксимационных полиномов [11–14].

Более полное представление о текущем состоянии проблемы адаптивного управления нестационарными системами возможно составить из постановочных частей цитируемых работ [4–15]. В этой же работе предлагается новый метод аппроксимационного адаптивного управления нестационарными системами на основе теории параметрической идентификации.

Мотивация заключается в исследовании условий применимости недавно предложенного [16] алгоритма идентификации нестационарных параметров линейного регрессионного уравнения в задаче управления нестационарной линейной системой. В соответствии с подходом [16] задача идентификации нестационарных параметров сводится к задаче идентификации их кусочно-постоянной аппроксимации. Как следует из теоретических выводов [16], в отличие от многих существующих методов идентификации нестационарных параметров, алгоритм [16] позволяет гарантировать сходимость ошибки идентификации нестационарных параметров в область, которая при исчезающем возбуждении регрессора с достаточно малым периодом T_s может быть произвольно уменьшена путем уменьшения длины интервала разложения в ряд Тейлора. В данной работе этот подход предлагается использовать при управлении классом линейных систем с нестационарными параметрами. Для этого:

- 1) предложен неадаптивный закон управления нестационарной системой, коэффициенты обратных и прямых связей которого вычисляются исключительно по первому (кусочно-постоянному) приближению нестационарных параметров системы;
- 2) сформулированы условия сходимости ошибки слежения в произвольно малую окрестность нуля при применении закона управления из 1);
- 3) на основе результатов [16] предложен закон идентификации параметров управления из 1), позволяющий при исчезающем возбуждении регрессора с достаточно малым периодом гарантировать сходимость ошибки слежения в произвольно малую окрестность нуля.

Полученный в результате аппроксимационный подход к адаптивному управлению нестационарными системами из цитируемой литературы наиболее близок к решению [12]. Однако в отличие от него, во-первых, нестационарные параметры аппроксимируются только первым слагаемым из ряда Тейлора, что снижает вычислительную сложность и не увеличивает размерность задачи идентификации [16], а во-вторых, этап интерполяции полученных оценок не используется. В сравнении с другими существующими решениями [4–14] предложенный алгоритм адаптивного управления нестационарными линейными системами характеризуется следующими достоинствами (+) и недостатками (–):

- (+) силовые и демпфирующие обратные связи в законах управления и адаптации не используются;
- (+) знание функций изменения параметров системы не требуется;
- (+) априорная информация о параметрах системы не используется;

- (–) для достижения даже асимптотической сходимости ошибки слежения к окрестности нуля требуется выполнение условия неисчезающего возбуждения регрессора;
- (–) значение установившейся ошибки слежения может быть уменьшено только при достаточно малом периоде T_s неисчезающего возбуждения регрессора;
- (–) невыполнение условия параметрической идентифицируемости (неисчезающего возбуждения регрессора) может привести к неустойчивости замкнутой системы.

В целом предлагаемое решение хоть и не устраняет все недостатки существующих подходов, но расширяет набор методов адаптивного управления нестационарными системами, а поэтому, по мнению авторов, представляет интерес.

Основные определения

В работе приняты следующие соглашения: запись $f(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ означает значение функции $f: [t_0^+, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ в момент времени t , где $t_0^+ \geq 0$ начальный момент времени; для вектора $a \in \mathbb{R}^n$ запись $\|a\|$ обозначает евклидову норму; минимальное и максимальное собственное число матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обозначается соответственно $\lambda_{\min}(A)$ и $\lambda_{\max}(A)$. Для обозначения экспоненциальной скорости сходимости используется латинская аббревиатура *exp*.

При доказательстве теорем и утверждений будет использовано определение конечного и неисчезающего (постоянного) возбуждения.

Определение 1. Сигнал $\omega(t) \in \mathbb{R}^n$ возбужден на конечном отрезке $[t_1, t_2] \subset [t_0^+, \infty)$, если существует $\alpha > 0$, такое, что верно неравенство

$$(1.1) \quad \int_{t_1}^{t_2} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n.$$

Определение 2. Сигнал $\omega(t) \in \mathbb{R}^n$ возбуждается постоянно, если для всех $t \geq t_0^+ \geq 0$ существует $T_s > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что верно неравенство

$$(1.2) \quad \int_t^{t+T_s} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n.$$

Множества сигналов для которых выполняются условия (1.1) или (1.2) обозначим FE и PE соответственно. Будем называть сигнал $\omega(t)$ постоянно возбужденным, если $\omega \in PE$, и возбужденным на конечном отрезке времени, если $\omega \in FE$.

В основном результате работы используется формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Условия существования этой формулы определены в следующей лемме [17].

Лемма 1. Пусть $f(t) \in \mathbb{R}$ имеет непрерывную производную порядка p на интервале (t_1, t_2) , тогда для любой пары точек t и a из (t_1, t_2) верно

$$(1.3) \quad f(t) = f(a) + \frac{t-a}{1!} f^{(1)}(a) + \dots + \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \\ + \int_a^t \frac{(t-\zeta)^p}{p!} f^{(p+1)}(\zeta) d\zeta.$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим непрерывные линейные системы с нестационарными параметрами

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) = A_0x(t) + e_n(a^T(t)x(t) + b(t)u(t)) = \\ = A_0x(t) + e_n\Phi^T(t)\Theta(t), \quad x(t_0^+) = x_0,$$

где

$$A(t) = A_0 + e_na^T(t), \quad B(t) = e_nb(t), \\ A_0 = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ 0_{1 \times n} \end{bmatrix}, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi^T(t) = [x^T(t) \quad u(t)], \\ \Theta(t) = [a^T(t) \quad b(t)]^T,$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояния с неизвестными начальными условиями x_0 , $u(t) \in \mathbb{R}$ – управляющее воздействие, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – неизвестная матрица системы, $B(t) \in \mathbb{R}^n$, $\Theta(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ – неизвестные векторы, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица Фробениуса, $e_n \in \mathbb{R}^n$ – координатный вектор с единицей на n -ой позиции. Пара $(A(t), B(t))$ полностью управляема для всех $t \geq t_0^+$. Проверка управляемости системы (2.1) может быть выполнена, например, с помощью критерия, приведенного в [18].

Характерной особенностью класса систем (2.1) является действие управления и неопределенности на одно уравнение. Такие системы называются системами с согласованной неопределенностью и часто встречаются на практике. Например, уравнения динамики углов Эйлера твердого тела при допущении его симметричности описываются звеном второго порядка с согласованной неопределенностью. Другим хорошим примером задачи управления при согласованных неопределенностях является регулирование координат манипулятора в формализме Эйлера–Лагранжа.

Относительно неизвестных параметров $\Theta(t)$ принимается следующее допущение.

Допущение 1. Параметры $\Theta(t)$ и их первая и вторая производные непрерывны и ограничены

$$\|\Theta(t)\| \leq \Theta_{\max}, \quad \|\dot{\Theta}(t)\| \leq \dot{\Theta}_{\max}, \quad \|\ddot{\Theta}(t)\| \leq \ddot{\Theta}_{\max},$$

где оценки сверху $\Theta_{\max}$, $\dot{\Theta}_{\max}$ и $\ddot{\Theta}_{\max}$ существуют, но неизвестны.

Требуемое качество управления в замкнутой управлением $u(t)$ системе (2.1) зададим эталонной моделью с постоянными параметрами

$$(2.2) \quad \dot{x}_{ref}(t) = A_0 x_{ref}(t) + e_n (b_{ref} r(t) + a_{ref}^T x_{ref}(t)), \quad x_{ref}(t_0^+) = x_{0ref},$$

где $x_{ref}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор координат состояния эталонной модели с известными начальными условиями x_{0ref} , $r(t) \in \mathbb{R}$ – сигнал задания, $A_{ref} = A_0 + e_n a_{ref}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – гурвицева матрица состояний эталонной модели, b_{ref} – коэффициент усиления эталонной модели.

Предположим, что эталонная модель (2.2) выбрана так, что выполняются условия идеального отслеживания системой (2.1) вектора состояний (2.2).

Допущение 2. Существуют параметры $k_x(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ и $k_r(t) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям

$$a_{ref}^T - a^T(t) = b(t) k_x(t), \quad b_{ref} = b(t) k_r(t).$$

Принятое допущение необходимо и достаточно для существования сигнала управления $u(t)$, доставляющего для всех $t \geq t_0^+$ совпадение уравнений системы (2.1) с уравнениями выбранной эталонной модели (2.2). Выполнение допущения обеспечивается выбором эталонной модели в виде (2.2), рассмотрением класса систем с постоянным знаком коэффициента усиления $b(t)$ и полностью управляемой парой $(A(t), B(t))$. Заметим что допущение 2 накладывает на систему (2.1) ограничение $\text{sgn}(b(t)) = \text{const}^2$, а значит совместно допущения 1 и 2 требуют двухсторонней ограниченности $b_{\max} \geq |b(t)| \geq b_{\min} > 0$.

Необходимо построить адаптивный закон управления $u(t)$, гарантирующий при $\Phi \in \text{PE}$ экспоненциальную сходимость (exp) ошибки $e_{ref}(t) = x(t) - x_{ref}(t)$ в целевое множество

$$(2.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{ref}(t)\| \leq \Delta_{e_{ref}} \text{ (exp)},$$

таким образом, что существует некоторый параметр процедуры адаптивного управления, от выбора значения которого зависит установившаяся ошибка $\Delta_{e_{ref}} > 0$.

3. Предварительные результаты и преобразования

Недавно было получено эффективное решение [19] задачи управления линейными системами с неизвестными кусочно-постоянными параметрами. В этом разделе преобразуем задачу адаптивного управления системой (2.1) с нестационарными параметрами к задаче управления системой с кусочно-постоянными параметрами. С этой целью сначала покажем достижимость поставленной цели (2.3) с помощью неадаптивного закона управления с известными идеальными параметрами, использующего в цепях обратных/прямых

² Иначе существует момент времени $t_a \geq t_0^+$, в который $b(t_a) = 0$, а уравнения из допущения 2 в общем случае ($b_{ref} \neq 0$, $a_{ref} - a(t_a) \neq 0_n$) не имеют решения.

связей только кусочно-постоянные приближения нестационарных параметров системы (2.1).

С учетом допущения 1, уравнение в отклонениях между уравнением объекта (2.1) и эталонной модели (2.2) принимает вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref}(t) &= A_{ref} e_{ref}(t) + e_n b(t) [u(t) - k_x(t) x(t) - k_r(t) r(t)] = \\ &= A_{ref} e_{ref}(t) + e_n b(t) [u(t) - \mathcal{K}^T(t) \omega(t)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} e_{ref}(t) &= x(t) - x_{ref}(t), \quad \omega(t) = [x^T(t) \quad r^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \mathcal{K}(t) &= [k_x(t) \quad k_r(t)]^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}. \end{aligned}$$

Представим возмущение $\mathcal{K}^T(t) \omega(t)$ в виде суммы двух слагаемых: с кусочно-постоянными и с нестационарными параметрами. Для этого зададим возрастающую последовательность

$$t_i^+ = T \left\lfloor \frac{t - t_0^+}{T} \right\rfloor, \quad i \in \mathbb{N},$$

где $t_{i+1}^+ - t_i^+ = T > 0$, $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ – функция округления до ближайшего меньшего целого.

Поскольку по допущениям 1 и 2 параметры $\mathcal{K}(t)$ дифференцируемы, то в T окрестности момента времени t_i^+ по формуле Тейлора (1.3) имеем право записать

$$(3.2) \quad \mathcal{K}(t) = \underbrace{\mathcal{K}(t_i^+)}_{\delta_{\mathcal{K}0}(t)} + \int_{t_i^+}^t \dot{\mathcal{K}}(\zeta) d\zeta,$$

где $\mathcal{K}(t_i^+) = \mathcal{K}_i$ – значение параметров $\mathcal{K}(t)$ в момент времени t_i^+ , $\|\delta_{\mathcal{K}0}(t)\| \leq \dot{\mathcal{K}}_{\max} T$ – остаточный член нулевого порядка ($p = 0$, см. (1.3)).

В соответствии с выражением (3.2) на каждом промежутке $[t_i^+, t_i^+ + T)$ нестационарные параметры $\mathcal{K}(t)$ могут быть аппроксимированы их значением $\mathcal{K}_i$ в начале промежутка. Тогда последовательностью этих значений $\{\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_i\}$ вместе с последовательностью моментов времени переключений между ними $\{t_0^+, t_1^+, \dots, t_i^+\}$ задается кусочно-постоянный сигнал, являющийся для всех $t \geq t_0^+$ первым приближением нестационарных параметров $\mathcal{K}(t)$

$$(3.3) \quad \theta(t) = \mathcal{K}_i = \mathcal{K}_0 + \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta h(t - t_q^+),$$

где $\Delta_q^\theta = \mathcal{K}_q - \mathcal{K}_{q-1}$ – величина изменения параметров $\mathcal{K}(t)$ за отрезок $[t_i^+, t_{i+1}^+]$, $h : [t_0^+, \infty) \rightarrow \{0, 1\}$ – функция Хевисайда.

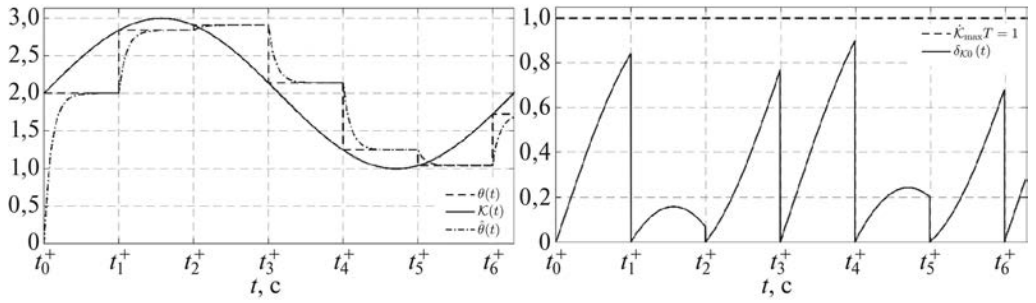


Рис. 1. Графическая иллюстрация взаимосвязи между $K(t)$, $\theta(t)$ и $\hat{\theta}(t)$.

Выражение (3.3) позволяет уже для всех $t \geq t_0^+$ записать нестационарные параметры в виде суммы $K(t) = \theta(t) + \delta_{K0}(t)$, что приводит к искомому представлению возмущения

$$(3.4) \quad \dot{e}_{ref}(t) = A_{ref}e_{ref}(t) + e_nb(t) [u(t) - \theta^T(t)\omega(t) - \delta_{K0}^T(t)\omega(t)].$$

Выражение (3.4) мотивирует рассмотрение технически реализуемого непрерывного и неадаптивного закона управления

$$(3.5a) \quad u(t) = \hat{\theta}^T(t)\omega(t),$$

$$(3.5b) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma_1 (\hat{\theta}(t) - \theta(t)) = -\gamma_1 \tilde{\theta}(t), \quad \hat{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0,$$

где $\hat{\theta}(t)$ результат фильтрации параметров $\theta(t)$, а $\gamma_1 > 0$ параметр фильтра.

Для частного случая $K(t) = \sin(t) + 2$ и $T = 1$ взаимосвязь между параметрами $K(t)$, $\theta(t)$ и $\hat{\theta}(t)$ поясняется на рис. 1,а и рис. 1,б. На рис. 1,б для этого примера также приведена ошибка аппроксимации $\delta_{K0}(t)$ и оценка сверху на нее $\dot{K}_{\max}T = 1$.

Условия достижения цели при использовании закона (3.5a) + (3.5b) описем в следующем утверждении.

Утверждение 1. При выполнении условия $i \leq i_{\max} < \infty$ найдется $T_{\min} > 0$, такое, что для всех $0 < T < T_{\min}$ закон управления (3.5) гарантирует достижение поставленной цели (2.3).

Доказательство Утверждения приведено в Приложении.

В соответствии с утверждением 1, при решении поставленной задачи (2.3) для расчета параметров закона управления (3.5a) достаточно использовать кусочно-постоянные приближения $\theta(t)$ нестационарных параметров возмущения $K^T(t)\omega(t)$. Поэтому задача адаптивного управления классом систем с неизвестными нестационарными параметрами (2.1) сводится к задаче идентификации неизвестных кусочно-постоянных параметров $\theta(t)$. Для решения этой задачи естественно основываться совместно на подходах, ранее развитых в [16, 19].

Замечание 1. Условие $i \leq i_{\max} < \infty$ необходимо для формального доказательства утверждения 1 и не является ограничительным для практических задач.

4. Основной результат

Следуя методу адаптивного управления с гарантией экспоненциальной устойчивости системами с кусочно-постоянными параметрами [19], для косвенной реализации (3.5) сначала получим регрессионное уравнение, связывающие параметры $\theta(t)$ с сигналами, вычисляемыми на основе измеряемого вектора $\Phi(t)$. Результат такой параметризации оформим в виде утверждения.

Утверждение 2. На основании состояний устойчивого фильтра ($l > 0$) с реинициализацией состояний в момент времени t_i^+

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}}(t) &= -l\bar{\Phi}(t) + \Lambda^T(t, t_i^+) \Phi(t), \quad \bar{\Phi}(t_i^+) = 0_{2(n+1)}, \\ \Lambda(t, t_i^+) &= [I_{n+1} \quad (t - t_i^+) I_{n+1}] \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 2(n+1)}, \end{aligned}$$

процедур нормализации

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{z}_n(t) &= n_s(t) e_n^T [x(t) - l\bar{x}(t) - A_0\bar{x}(t)], \\ \bar{\varphi}_n^T(t) &= n_s(t) \bar{\varphi}(t) = n_s(t) \left[\bar{\Phi}^T(t) \quad e^{-l(t-t_i^+)} \right], \\ n_s(t) &= \frac{1}{1 + \bar{\varphi}^T(t) \bar{\varphi}(t)}, \quad \bar{x}(t) = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times (n+2)}] \bar{\Phi}(t), \end{aligned}$$

расширения ($\sigma > 0$)

$$(4.3a) \quad \dot{z}(t) = e^{-\sigma(t-t_i^+)} \bar{\varphi}_n(t) \bar{z}_n^T(t), \quad z(t_i^+) = 0_{2n+3},$$

$$(4.3b) \quad \dot{\varphi}(t) = e^{-\sigma(t-t_i^+)} \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t), \quad \varphi(t_i^+) = 0_{(2n+3) \times (2n+3)},$$

смешивания

$$(4.4) \quad Y(t) := \text{adj} \{ \varphi(t) \} z(t), \quad \Delta(t) := \det \{ \varphi(t) \},$$

исключения

$$(4.5) \quad \begin{aligned} z_a(t) &= Y^T(t) \mathfrak{L}_a, \quad z_b(t) = Y^T(t) \mathfrak{L}_b, \\ \mathfrak{L}_a &= [I_{n \times n} \quad 0_{n \times (n+3)}]^T \in \mathbb{R}^{(2n+3) \times n}, \quad \mathfrak{L}_b = [0_{1 \times n} \quad 1 \quad 0_{1 \times (n+2)}]^T \in \mathbb{R}^{(2n+3) \times 1}, \end{aligned}$$

подстановки

$$(4.6) \quad \mathcal{Y}(t) := [\Delta(t) a_{ref}^T - z_a(t) \quad \Delta(t) b_{ref}]^T, \quad \mathcal{M}(t) := z_b(t),$$

и сглаживания ($k > 0$)

$$(4.7a) \quad \dot{\Upsilon}(t) = -k(\Upsilon(t) - \mathcal{Y}(t)), \quad \Upsilon(t_0^+) = 0_{n+1},$$

$$(4.7b) \quad \dot{\Omega}(t) = -k(\Omega(t) - \mathcal{M}(t)), \quad \Omega(t_0^+) = 0,$$

имеем возмущенное регрессионное уравнение

$$(4.8) \quad \Upsilon(t) = \Omega(t)\theta(t) + w(t),$$

где сигналы $\Upsilon(t)$, $\Omega(t)$ вычисляются по $\Phi(t)$ и дополнительно верно:

- а) если $\Phi \in \text{PE} \Rightarrow \bar{\varphi}_n \in \text{PE}$ с периодом $T_s < T$, то найдется $T_{\min} > 0$, такое, что для всех $0 < T < T_{\min}$ и $t \geq t_0^+ + T_s$ верно

$$0 < \Omega_{\text{LB}} \leq \Omega(t) \leq \Omega_{\text{UB}}.$$

- б) если $i \leq i_{\max} < \infty$, то для всех $t \geq t_0^+ + T_s$ верно

$$\|w(t)\| \leq w_{1\max} e^{-\gamma_1(t-t_0^+-T_s)} + w_{2\max}(T),$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} w_{2\max}(T) = 0.$$

Доказательство утверждения и определение $w(t)$ приведены в Приложении.

Параметризация (4.1)–(4.8) использует процедуры, предложенные при решении задачи адаптивного управления системами с кусочно-постоянными параметрами [19]. Отличие заключается в использовании нестационарной матрицы $\Lambda(t, t_i^+)$ в (4.1) и реинициализация состояний фильтров (4.1) и (4.3) в известные, а не алгоритмически детектируемые моменты времени.

Кратко поясним назначение используемых процедур. Применение фильтра (4.1) позволяет по измеряемым сигналам $\Phi(t)$ получить регрессионное уравнение с измеряемыми регрессором и выходом относительно параметров $\bar{\vartheta}(t) = [\Theta_i^T \quad \dot{\Theta}_i^T \quad e_n^T x(t_i^+)]^T$, где $\Theta(t_i^+) = \Theta_i$, $\dot{\Theta}(t_i^+) = \dot{\Theta}_i$ – это значения параметров системы $\Theta(t)$ и скорости их изменения в момент времени t_i^+ . Нормализация (4.2) обеспечивает принадлежность пространству L_∞ всех используемых в дальнейших процедурах сигналов. Процедуры расширения и смешивания (4.3), (4.4) позволяют преобразовать векторный регрессор $\bar{\varphi}_n(t) \in \mathbb{R}^{2n+3}$ в скалярный $\Delta(t) \in \mathbb{R}$. Исключение (4.5), в силу $\Delta(t) \in \mathbb{R}$, реализует переход к отдельному рассмотрению регрессионных уравнений относительно параметров кусочно-постоянной аппроксимации параметров $a(t)$ и $b(t)$. С помощью подстановки (4.6) выражений (4.5) в условие согласованности (см. допущение 2) выполняется переход от уравнений относительно аппроксимаций параметров системы к уравнениям относительно аппроксимаций $\theta(t)$ параметров возмущения. Сглаживание (4.7a), (4.7b) позволяет обеспечить достаточную гладкость сигналов $\Upsilon(t)$ и $\Omega(t)$.

Имея в распоряжении регрессионное уравнение (4.8), вычисленное исключительно по измеряемым сигналам $\Phi(t)$, можно косвенно реализовать закон (3.5) и гарантировать достижение поставленной цели (2.3).

Теорема 1. Пусть $\Phi \in \text{PE} \Rightarrow \bar{\varphi}_n \in \text{PE}$ с периодом $T_s < T$, выполнены допущения 1–2, тогда найдется $T_{\min} > 0$, такое, что для всех $0 < T < T_{\min}$

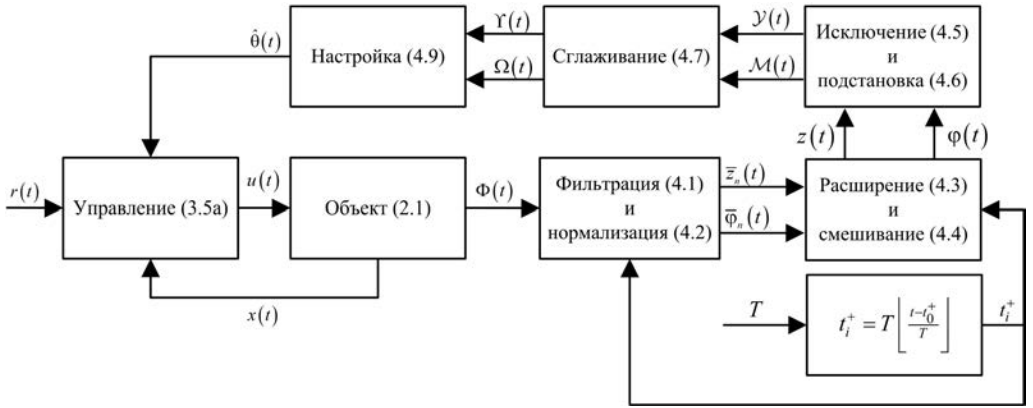


Рис. 2. Структурная схема разработанной адаптивной системы.

закон управления (3.5a) с законом настройки

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\gamma(t) \Omega(t) \left(\Omega(t) \hat{\theta}(t) - \Upsilon(t) \right) = \\
 &= -\gamma(t) \Omega^2(t) \tilde{\theta}(t) + \gamma(t) \Omega(t) w(t), \quad \hat{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0, \\
 \gamma(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega(t) < \rho \in (0, \Omega_{LB}], \\ \frac{\gamma_1}{\Omega^2(t)} & \text{иначе,} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

при $i \leq i_{\max} < \infty$ для $\xi(t) = \left[e_{ref}^T(t) \text{ vec}^T(\tilde{\theta}(t)) \right]^T$ гарантирует:

- 1) $\forall t \geq t_0^+ \quad \xi(t) \in L_\infty$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| \leq \Delta_\xi(T) \quad (\exp) \lim_{T \rightarrow 0} \Delta_\xi(T) = 0$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Структурная схема полученного алгоритма адаптивного управления системами с нестационарными неизвестными параметрами (2.1) представлена на рис. 2.

Таким образом, разработанная система управления состоит из закона управления (3.5a), закона адаптации (4.9), набора процедур (4.1)–(4.7) обработки измеряемых сигналов. В отличие от существующих методов адаптивного управления [4–14] предложенный подход не требует какой-либо априорной информации о параметрах системы $a(t)$ и $b(t)$, не использует управление с сильной обратной связью или большой коэффициент усиления закона идентификации, гарантирует глобальную экспоненциальную сходимость ошибки $\xi(t)$ к регулируемой с помощью параметра T ограниченной окрестности положения равновесия.

Замечание 2. Особенностью предложенного решения является взаимосвязь установившейся ошибки $\Delta_\xi(T)$, длины интервала разложения в ряд Тейлора T и периода постоянного возбуждения регрессора T_s . Проблема состоит в невозможности уменьшения параметра T меньше величины перио-

да возбуждения регрессора T_s . Однако при фиксированном периоде T_s и минимально возможном $T < T_{\min}$, таком что $T - T_s > 0$, ошибка $\xi(t)$ может быть ограничена в неприемлемо большой окрестности положения равновесия $\Delta_\xi(T)$. Поэтому для уменьшения установившейся ошибки требуется прежде всего обеспечить постоянное возбуждение регрессора с достаточно малым периодом T_s , что на практике может быть достигнуто с помощью внесения в задание $r(t)$ высокочастотного или случайного тестового сигнала.

5. Численное моделирование

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенной адаптивной системы. Численное интегрирование будем проводить явным методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-3}$ с.

Рассмотрим систему (2.1) при $n = 2$. Начальные условия, параметры системы и эталонной модели (2.2) зададим выражением

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x_0 &= [-1 \ 1]^T, \quad b(t) = 3 + \cos(0,4t) \sin(0,1t), \quad a_{ref}^T(t) = [-8 \ -4], \\ a^T(t) &= \left[2 + \sin(0,1t) \quad 1 + 5 \left(1 - e^{\frac{-1}{25}t} \right) \right], \quad b_{ref} = 8. \end{aligned}$$

Сперва удостоверимся в предварительных выводах, сделанных в утверждении 1. Установим $\gamma_1 = 50$ в качестве постоянной фильтра (3.5b), а задание определим как $r(t) = 10$. На рис. 3 приведено сравнение ошибки $e_{1ref}(t)$ при различных T .

Полученные результаты подтверждают выводы, сделанные в утверждении 1. Действительно, уменьшение T приводит к уменьшению установивше-

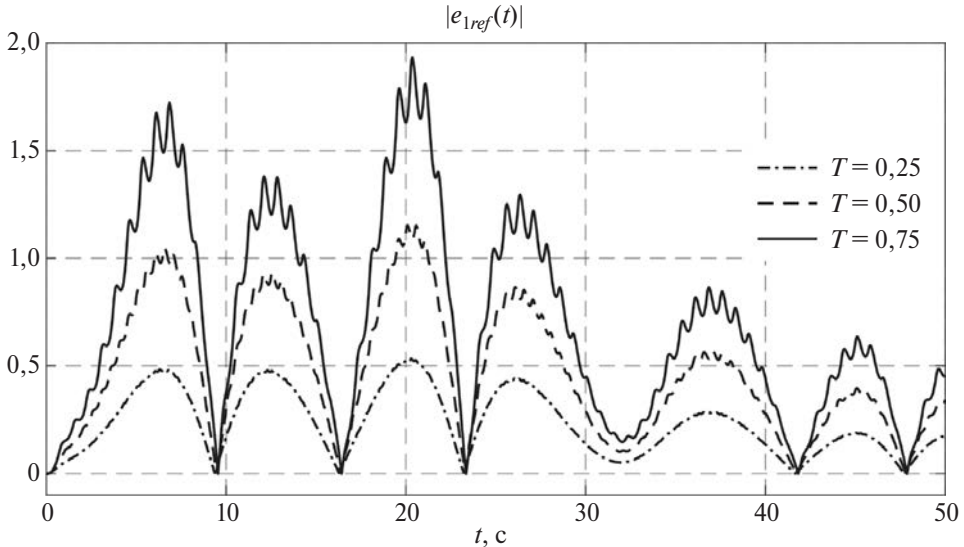


Рис. 3. Переходные процессы по $|e_{1ref}(t)|$ при различных T .

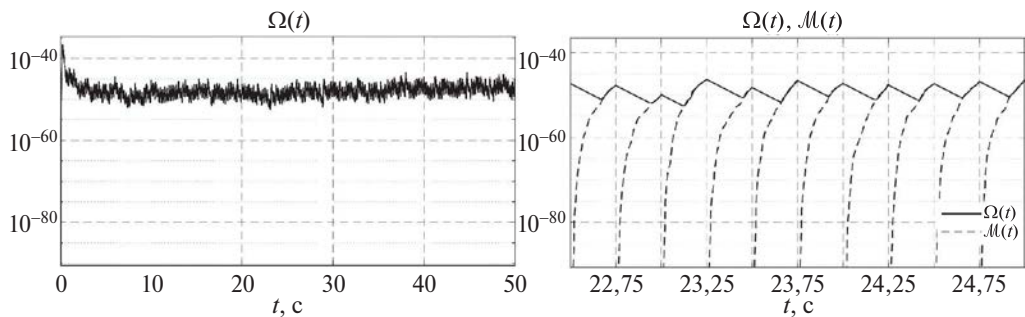


Рис. 4. Переходные процессы по регрессорам $M(t)$ и $\Omega(t)$.

гося значения ошибки слежения $e_{ref}(t)$ при использовании закона управления (3.5a) с (3.5b). Удостоверившись в справедливости результатов утверждения 1, перейдем к проверке основного результата.

Параметры фильтров (4.1), (4.3), (4.7) и закона настройки (4.9) установим в соответствии с выражением

$$l = 10, \quad \sigma = \frac{0,05}{T}, \quad k = 50, \quad \rho = 10^{-72}, \quad \gamma_1 = 100, \quad T = 0,25,$$

а задание зададим согласно $r(t) = 1 + r_d(t)$ при $r_d(t) \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$. Случайный сигнал $r_d(t)$ добавлен к постоянному единичному заданию с целью выполнения в замкнутой системе (3.1) условия $\bar{\varphi}_n \in \text{PE}$.

На рис. 4 в логарифмическом масштабе приведены переходные процессы по регрессорам $M(t)$ и $\Omega(t)$.

Из полученных графиков следует, что несмотря на реинициализацию каждые T секунд состояний фильтров (4.1) и (4.3), регрессор $\Omega(t)$ (в отличие от $M(t)$) глобально отделен от нуля, начиная с некоторого момента времени, что подтверждает теоретические выводы, сделанные в части (а) утверждения 2. Рисунок 4 демонстрирует значение процедуры сглаживания (4.7), которая, как видно, позволяет, во-первых, усреднить значения регрессора $M(t)$ на периоде T , а во-вторых, устранить разрывы, вызванные реинициализацией фильтров (4.1) и (4.3).

На рис. 5 приведены переходные процессы по а) состояниям $x(t)$ при применении закона управления (3.5a) с (3.5b) и с (4.9), б) оценкам $\hat{\theta}_i(t)$ и смещенным для наглядности истинным параметрам $\theta_i(t) + 1$, в) управлению (3.5a) с (4.9).

На рис. 6 приведено сравнение интегральных критериев качества ошибки слежения $e_{ref}(t)$ и параметрической ошибки $\hat{\theta}(t)$ при различных значениях T .

Результаты моделирования иллюстрируют выводы, сделанные в утверждениях 1, 2 и теореме. Поставленная цель (2.3) выполнена, а установившиеся значения ошибок $e_{ref}(t)$ и $\hat{\theta}(t)$ прямо-пропорциональны параметру T .

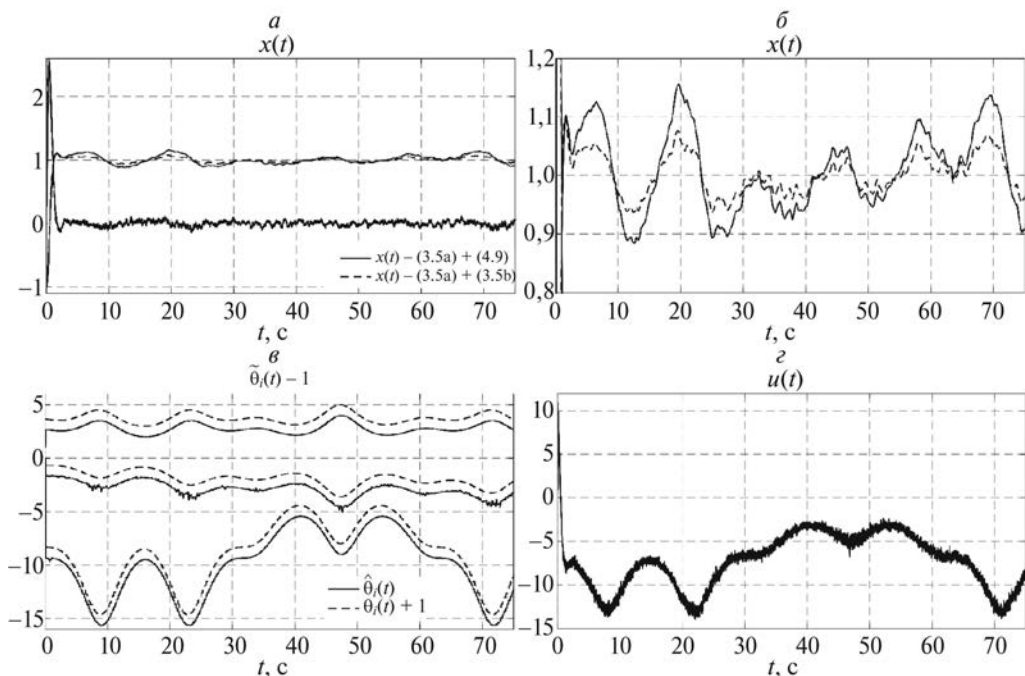


Рис. 5. Переходные процессы по (а)–(б) состояниям $x(t)$ при применении закона управления (3.5а) с (3.5б) и с (4.9), (в) оценкам $\hat{\theta}_i(t)$ и смещенным для наглядности истинным параметрам $\theta_i(t) + 1$, (г) управлению (3.5а) с (4.9).

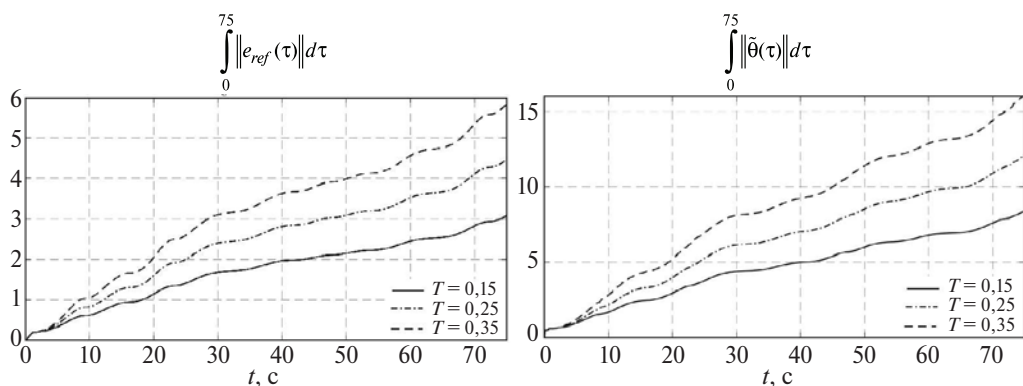


Рис. 6. Сравнение интегральных критериев качества.

6. Заключение

В работе получено решение задачи слежения линейной нестационарной системой за линейной стационарной эталонной моделью. Предложено аппроксимировать неизвестные нестационарные параметры идеального закона управления кусочно-постоянными параметрами. Для идентификации этих кусочно-постоянных параметров объединены методы параметрической иден-

тификации, развитые в [16, 19]. Полученная в результате система адаптивного управления для достижения цели регулирования требует неисчезающего возбуждения регрессора с достаточно малым периодом, но при этом не требует априорной информации о неизвестных параметрах системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Доказательство утверждения разделим на два шага. На первом шаге проанализируем свойства параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t)$, а на втором – свойства ошибки слежения $e_{ref}(t)$.

Шаг 1. По доказанному в утверждении 1 из [19] при выполнении условия $i \leq i_{\max} < \infty$ для решения дифференциального уравнения

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma_1 \tilde{\theta}(t) - \dot{\theta}(t), \quad \tilde{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0 - \theta(t_0^+),$$

верна оценка сверху

$$(П.1) \quad \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| \leq \beta_{\max} e^{-\gamma_1(t-t_0^+)}, \quad \beta_{\max} > 0,$$

где $\dot{\theta}(t) = \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta \delta(t - t_q^+)$, а $\delta: [t_0^+; \infty) \rightarrow \{0, \infty\}$ – функция Дирака.

Шаг 2. Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$(П.2) \quad \begin{aligned} V_{eref} &= e_{ref}^T P e_{ref} + \frac{a_0^2}{\gamma_1} e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)}, \quad H = \text{blockdiag} \left\{ P, \frac{a_0^2}{\gamma_1} \right\}, \\ &\underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\bar{e}_{ref}\|^2 \leq V(\|\bar{e}_{ref}\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\bar{e}_{ref}\|^2, \end{aligned}$$

где $\bar{e}_{ref}(t) = \begin{bmatrix} e_{ref}^T(t) & e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} \end{bmatrix}^T$, $P = P^T > 0$ является решением при $\lambda_{\min}(Q) > 2$ уравнения Ляпунова

$$A_{ref}^T P + P A_{ref} = -Q, \quad Q = Q^T > 0.$$

Производная квадратичной формы (П.2) может быть записана в следующем виде:

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{eref} &= e_{ref}^T (A_{ref}^T P + P A_{ref}) e_{ref} - 2a_0^2 e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &+ 2e_{ref}^T P e_n b \tilde{\theta}^T \omega + 2e_{ref}^T P e_n b \delta_{\theta_0}^T \omega = \\ &= -e_{ref}^T Q e_{ref} - 2a_0^2 e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &+ 2e_{ref}^T P e_n b \tilde{\theta}^T (\omega_{eref} + \omega_r) + 2e_{ref}^T P e_n b \delta_{\theta_0}^T (\omega_{eref} + \omega_r) \leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|e_{ref}\|^2 - 2a_0^2 e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &+ 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \|e_{ref}\|^2 \|\tilde{\theta}\| + 2\lambda_{\max}(P) \bar{\omega}_r b_{\max} \|e_{ref}\| \|\tilde{\theta}\| + \\ &+ 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \dot{\mathcal{K}}_{\max} T \|e_{ref}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \bar{\omega}_r \dot{\mathcal{K}}_{\max} T \|e_{ref}\|, \end{aligned}$$

где

$$\|\omega(t)\| \leq \underbrace{\| [e_{ref}(t) \ 0] \|}_{\|\omega_{e_{ref}}(t)\| = \|e_{ref}(t)\|} + \underbrace{\| [x_{ref}(t) \ r(t)] \|}_{\|\omega_r(t)\| \leq \bar{\omega}_r} \leq \|e_{ref}(t)\| + \bar{\omega}_r.$$

Дважды воспользовавшись неравенством Юнга

$$(II.4) \quad \begin{aligned} 2\lambda_{\max}(P) \bar{\omega}_r b_{\max} \|e_{ref}\| \|\tilde{\theta}\| &\leq \|e_{ref}\|^2 + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \|\tilde{\theta}\|^2, \\ 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \bar{\omega}_r \dot{\kappa}_{\max} T \|e_{ref}\| &\leq \lambda_{\max}^2(P) b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\kappa}_{\max}^2 T^2 + \|e_{ref}\|^2, \end{aligned}$$

можем переписать (II.3) в следующем виде:

$$(II.5) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} &\leq \left[-\lambda_{\min}(Q) + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \left(\|\tilde{\theta}\| + \dot{\kappa}_{\max} T \right) + 2 \right] \|e_{ref}\|^2 - \\ &- 2a_0^2 e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)} + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \|\tilde{\theta}\|^2 + \lambda_{\max}^2(P) b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\kappa}_{\max}^2 T^2. \end{aligned}$$

Поскольку параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$ экспоненциально сходится к нулю (II.2), то при $\lambda_{\min}(Q) > 2$ обязательно найдется момент времени $t_{e_{ref}} \geq t_0^+$ и постоянные $T_{\min} > 0$, $a_0 > \lambda_{\max}(P) \bar{\omega}_r b_{\max} \beta_{\max}$ такие, что для всех $t \geq t_{e_{ref}}$ и $0 < T < T_{\min}$ верно

$$(II.6) \quad \begin{aligned} -\lambda_{\min}(Q) + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \left(\beta_{\max} e^{-\gamma_1(t_{e_{ref}}-t_0^+)} + \dot{\kappa}_{\max} T \right) + 2 &= -c_1 < 0, \\ \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \beta_{\max}^2 - 2a_0^2 &= -c_2 < 0. \end{aligned}$$

Тогда оценка сверху на производную (II.5) для всех $t \geq t_{e_{ref}}$ может быть записана в виде

$$(II.7) \quad \dot{V}_{e_{ref}} \leq -\eta_{\bar{e}_{ref}} V_{e_{ref}} + \lambda_{\max}^2(P) b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\kappa}_{\max}^2 T^2,$$

где

$$\eta_{\bar{e}_{ref}} = \min \left\{ \frac{c_1}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{c_2 \gamma_1}{a_0^2} \right\}.$$

Решение дифференциального неравенства (II.7) для всех $t \geq t_{e_{ref}}$ позволяет получить

$$(II.8) \quad V_{e_{ref}}(t) \leq e^{-\eta_{\bar{e}_{ref}}(t-t_{e_{ref}})} V_{e_{ref}}(t_{e_{ref}}) + \frac{\lambda_{\max}^2(P) b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\kappa}_{\max}^2 T^2}{\eta_{\bar{e}_{ref}}}.$$

Взятие предела по времени от выражения (II.8) и учет определения $V_{e_{ref}}$ позволяет установить существование предела (2.3), что завершает доказательство утверждения.

Доказательство утверждения 2. В силу допущения 2 аналогично (3.2)–(3.3) с помощью формулы Тейлора (1.3) для параметров $\Theta(t)$ запишем следующее:

$$(II.9) \quad \Theta(t) = \overbrace{\Theta(t_i^+) + \dot{\Theta}(t_i^+)(t - t_i^+) + \underbrace{\int_{t_i^+}^t (t - \zeta)\ddot{\Theta}(\zeta) d\zeta}_{\delta_1(t)}}^{\delta_0(t)},$$

где $\Theta(t_i^+) = \Theta_i$, $\dot{\Theta}(t_i^+) = \dot{\Theta}_i$ – значение параметров системы $\Theta(t)$ и скорости их изменения в момент времени t_i^+ , $\|\delta_1(t)\| \leq 0,5\ddot{\Theta}_{\max}T^2$ – ограниченный остаточный член первого порядка ($p = 1$), $\|\delta_0(t)\| \leq \dot{\Theta}_{\max}T$ – ограниченный остаточный член нулевого порядка ($p = 0$).

Запишем (II.9) в матричной форме

$$(II.10) \quad \Theta(t) = \Lambda(t, t_i^+) \vartheta(t) + \delta_1(t),$$

где

$$\vartheta(t) = [\Theta_i^T \quad \dot{\Theta}_i^T]^T \in \mathbb{R}^{2(n+1)}.$$

Подстановка (II.10) в уравнение системы (2.1) позволяет получить

$$(II.11) \quad \dot{x}(t) = A_0x + e_n(\Phi^T(t) \Lambda(t, t_i^+) \vartheta(t) + \Phi^T(t) \delta_1(t)).$$

Продифференцируем $x(t) - l\bar{x}(t)$

$$(II.12) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) - l\dot{\bar{x}}(t) &= -l(x(t) - l\bar{x}(t)) + \\ &+ A_0x + e_n(\Phi^T(t) \Lambda(t, t_i^+) \vartheta(t) + \Phi^T(t) \delta_1(t)). \end{aligned}$$

Решив дифференциальное уравнение (II.12), имеем

$$(II.13) \quad \begin{aligned} x(t) - l\bar{x}(t) &= e^{-l(t-t_i^+)}x(t_i) + A_0\bar{x}(t) + \int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)}e_n\Phi^T(\tau)\Lambda(\tau, t_i^+)\vartheta(\tau)d\tau + \\ &+ \int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)}e_n\Phi^T(\tau)\delta_1(\tau)d\tau = \\ &= A_0\bar{x}(t) + e_n\bar{\varphi}(t)\bar{\vartheta}(t) + e_n\underbrace{\int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)}\Phi^T(\tau)\delta_1(\tau)d\tau}_{\varepsilon_0(t)}, \end{aligned}$$

где $\bar{\vartheta}(t) = [\vartheta^T(t) \ e_n^T x(t_i^+)]^T \in \mathbb{R}^{2n+3}$, а третье равенство не нарушается, поскольку реинициализация состояний фильтра (4.1) и изменение параметров происходит синхронно в известный момент времени t_i^+ , то есть $\bar{\vartheta}(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t_i^+, t_i^+ + T)$.

Подставив (П.13) в (4.2), имеем

$$(П.14) \quad \bar{z}_n(t) = n_s(t) e_n^T [x(t) - l\bar{x}(t) - A_0\bar{x}(t)] = \bar{\varphi}_n^T(t) \bar{\vartheta}(t) + \bar{\varepsilon}_0(t),$$

где $\bar{z}_n(t) \in \mathbb{R}$, $\bar{\varphi}_n(t) \in \mathbb{R}^{2n+3}$ и возмущение $\bar{\varepsilon}_0(t) \in \mathbb{R}$ ограничено следующим образом (см. определения $\Phi(t)$ и $\bar{\varphi}_n(t)$):

$$(П.15) \quad \|\bar{\varepsilon}_0(t)\| = \left\| n_s(t) \int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \Phi^T(\tau) \delta_1(\tau) d\tau \right\| \leq \|\bar{\varphi}_n^T(t)\| 0,5\ddot{\Theta}_{\max} T^2.$$

Благодаря домножению на коэффициент $n_s(t)$ в регрессионном уравнении (П.14) регрессор $\bar{\varphi}_n^T(t)$, регрессионная функция $\bar{z}_n(t)$ и возмущение $\bar{\varepsilon}_0(t)$ ограничены. Кроме того, согласно оценке сверху (П.15) возмущение $\bar{\varepsilon}_0(t)$ может быть уменьшено с помощью уменьшения параметра T . Поэтому далее при учете распространения этого возмущения в параметризации будем использовать определение $\bar{\varepsilon}_0(t) := \bar{\varepsilon}_0(t, T)$ и подразумевать, что любое возмущение, полученное обработкой $\bar{\varepsilon}_0(t, T)$, также может быть уменьшено с помощью уменьшения T .

Используя (4.3) и умножив $z(t)$ на $\text{adj}\{\varphi(t)\}$, имеем (коммутативность фильтра (4.3а) не нарушается, поскольку его реинициализация и изменение параметров происходит синхронно в известный момент времени t_i^+ , то есть $\bar{\vartheta}(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t_i^+, t_i^+ + T)$)

$$(П.16) \quad \begin{aligned} Y(t) &:= \text{adj}\{\varphi(t)\} z(t) = \Delta(t) \bar{\vartheta}(t) + \bar{\varepsilon}_1(t, T), \\ \text{adj}\{\varphi(t)\} \varphi(t) &= \det\{\varphi(t)\} I_{2(n+1)+1} = \Delta(t) I_{2(n+1)+1}, \\ \bar{\varepsilon}_1(t, T) &= \text{adj}\{\varphi(t)\} \int_{t_i^+}^t e^{-\sigma(\tau-t_i^+)} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varepsilon}_0(\tau, T) d\tau, \end{aligned}$$

где $Y(t) \in \mathbb{R}^{2n+3}$, $\Delta(t) \in \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon}_1(t, T) \in \mathbb{R}^{2n+3}$.

В силу $\Delta(t) \in \mathbb{R}$ исключение (4.5) позволяет из (П.16) записать

$$(П.17) \quad \begin{aligned} z_a(t) &= Y^T(t) \mathfrak{L}_a = \Delta(t) \vartheta_a^T(t) + \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_a, \\ z_b(t) &= Y^T(t) \mathfrak{L}_b = \Delta(t) \vartheta_b(t) + \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_b, \end{aligned}$$

где $z_a(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $z_b(t) \in \mathbb{R}$, а $\vartheta_a(t)$, $\vartheta_b(t)$ – первые приближения параметров $a(t)$ и $b(t)$ соответственно (составляющие вектора Θ_i).

При выполнении допущения 2, по определению сигнала $\mathcal{K}(t)$ первые приближения $\theta_x(t)$ и $\theta_r(t)$ параметров $k_x(t)$ и $k_r(t)$ соответственно удовлетворяют уравнениям

$$(П.18) \quad a_{ref}^T - \vartheta_a^T(t) = \vartheta_b(t) \theta_x(t), \quad b_{ref} = \vartheta_b(t) \theta_r(t),$$

где $\theta(t) = [\theta_x(t) \quad \theta_r(t)]^T$.

Умножим каждое уравнение из (П.18) на $\Delta(t)$. Подставив в результат умножения уравнения (П.17) и объединив полученные выражения, имеем уравнение (4.6)

$$(П.19) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}(t) &= \mathcal{M}(t) \theta(t) + d(t, T), \\ \mathcal{Y}(t) &:= [\Delta(t) a_{ref}^T - z_a(t) \quad \Delta(t) b_{ref}]^T, \\ \mathcal{M}(t) &:= z_b(t), \\ d(t, T) &:= -[\bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_a + \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_b \theta_r(t) \quad \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_b \theta_r(t)]^T, \end{aligned}$$

где $\mathcal{Y}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{M}(t) \in \mathbb{R}$, $d(t, T) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

С учетом (П.19) для решения уравнения (4.7a) имеет место соотношение

$$(П.20) \quad \begin{aligned} \Upsilon(t) &= \int_{t_0^+}^t e^{\int_t^\tau k d\tau} \mathcal{M}(\tau) \theta(\tau) d\tau + \int_{t_0^+}^t e^{\int_t^\tau k d\tau} d(\tau, T) d\tau \pm \Omega(t) \theta(t) = \\ &= \Omega(t) \theta(t) + w(t), \end{aligned}$$

где

$$w(t) = \Upsilon(t) - \Omega(t) \theta(t).$$

Выражение (П.20) завершает доказательство возможности получения уравнения (4.8) с помощью процедур (4.1)–(4.7).

Для доказательства части (а) представим регрессор $\Omega(t)$ в следующем виде:

$$(П.21) \quad \begin{aligned} \Omega(t) &= \Omega_1(t) + \Omega_2(t), \\ \dot{\Omega}_1(t) &= -k(\Omega_1(t) - \Delta(t) \vartheta_b(t)), \quad \Omega_1(t_0^+) = 0, \\ \dot{\Omega}_2(t) &= -k(\Omega_2(t) - \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_b), \quad \Omega_2(t_0^+) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $k > 0$, а возмущение $\bar{\varepsilon}_1(t, T)$ ограничено, то $\Omega_2(t)$ ограничено причем для всех $t \geq t_0^+$ верно неравенство

$$(П.22) \quad |\Omega_2(t)| \leq \Omega_{2\max}(T),$$

а для оценки сверху существует предел $\lim_{T \rightarrow 0} \Omega_{2\max}(T) = 0$, так как величина $\bar{\varepsilon}_1(t, T)$, в соответствии с (П.15)–(П.19), может быть произвольно уменьшена с помощью уменьшения T .

Перейдем к анализу составляющей $\Omega_1(t)$. Запишем для всех $t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+)$ решение первого дифференциального уравнения из (П.21)

$$(П.23) \quad \Omega_1(t) = \phi(t, t_i^+ + T_s) \Omega_1(t_i^+ + T_s) + \int_{t_i^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) \Delta(\tau) \vartheta_b(\tau) d\tau,$$

где

$$\phi(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t k d\tau}.$$

Получим оценки сверху на сигнал $\Omega_1(t)$ на рассматриваемом промежутке. Для этого необходимо оценить $\Delta(t)$, что в свою очередь требует оценки $\varphi(t)$.

Поскольку по условию утверждения $\bar{\varphi}_n \in \text{PE}$ с $T_s < T$, то $\bar{\varphi}_n \in \text{FE}$ на $[t_i^+, t_i^+ + T_s]$ (проверяется подстановкой $t = t_i^+$ в (1.2)). Тогда для всех $t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+)$ верна оценка снизу на регрессор $\varphi(t)$

$$(П.24) \quad \begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{t_i^+}^t e^{-\sigma(\tau - t_i^+)} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \geq \int_{t_i^+}^{t_i^+ + T_s} e^{-\sigma(\tau - t_i^+)} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \geq \\ &\geq e^{-\sigma(t_{i+1}^+ - t_i^+)} \int_{t_i^+}^{t_i^+ + T_s} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \geq \alpha e^{-\sigma(t_{i+1}^+ - t_i^+)} I_{n+1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $\|\bar{\varphi}_n(t)\|^2 \leq \bar{\varphi}_n^{\max}$, то существует оценка сверху

$$(П.25) \quad \varphi(t) \leq \bar{\varphi}_n^{\max} \int_{t_i^+}^t e^{-\sigma(\tau - t_i^+)} d\tau \leq \bar{\varphi}_n^{\max} \frac{1 - e^{-\sigma(t - t_i^+)}}{\sigma} \leq \sigma^{-1} \bar{\varphi}_n^{\max},$$

а значит для всех $t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+)$ верно $\Delta_{UB} \geq \Delta(t) \geq \Delta_{LB} > 0$.

Тогда для произведения $\Delta(t) \vartheta_b(t)$, с учетом того, что по допущениям 1 и 2 $b_{\max} \geq |b(t)| \geq b_{\min} > 0$, а $\vartheta_b(t)$ есть первое приближение коэффициента $b(t)$, оказывается верно

$$(П.26) \quad \forall t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+) \quad \Delta_{UB} b_{\max} \geq |\Delta(t) \vartheta_b(t)| \geq \Delta_{LB} b_{\min} > 0.$$

Используя (П.21) и (П.26), учитывая $0 \leq \phi(t, \tau) \leq 1$, имеем оценки на $\Omega_1(t)$

$$(П.27) \quad \begin{aligned} \forall t \in [t_0^+, t_0^+ + T_s] \quad \Omega_1(t) &\equiv 0, \\ \forall i \geq 1 \quad \forall t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+] \quad \Omega_1(t_i^+ + T_s) &+ (t_{i+1}^+ - t_i^+ - T_s) \Delta_{UB} b_{\max} \geq \\ &\geq \Omega_1(t) \geq \phi(t_{i+1}^+, t_i^+ + T_s) (\Omega_1(t_i^+ + T_s) + (t_{i+1}^+ - t_i^+ - T_s) \Delta_{LB} b_{\min}) > 0, \end{aligned}$$

откуда получим

$$\begin{aligned}
(П.28) \quad & \forall t \geq t_0 + T_s \quad \Omega_{1\max} \geq \Omega_1(t) \geq \Omega_{1\min} > 0, \\
& \Omega_{1\max} = \min_{\forall i \geq 1} \left\{ \phi(t_{i+1}^+, t_i^+ + T_s) (\Omega_1(t_i^+ + T_s) + (t_{i+1}^+ - t_i^+ - T_s) \Delta_{LB} b_{\min}) \right\}, \\
& \Omega_{1\min} = \max_{\forall i \geq 1} \left\{ \Omega_1(t_i^+ + T_s) + (t_{i+1}^+ - t_i^+ - T_s) \Delta_{UB} b_{\max} \right\}.
\end{aligned}$$

Тогда, с помощью (П.28) и (П.23), можем записать оценку на регрессор $\Omega(t)$

$$(П.29) \quad \forall t \geq t_0 + T_s \quad \Omega_{1\max} + \Omega_{2\max}(T) \geq |\Omega(t)| \geq \Omega_{1\min} - \Omega_{2\max}(T),$$

а значит в силу предельного равенства $\lim_{T \rightarrow 0} \Omega_{2\max}(T) = 0$, найдется $T_{\min} > 0$ такое, что для всех $0 < T < T_{\min}$ и $t \geq t_0 + T_s$ выполняется неравенство

$$(П.30) \quad \Omega_{UB} \geq \Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0,$$

что и требовалось доказать в части (а).

Для доказательства части (б) продифференцируем возмущение $w(t)$ в силу (П.20) и (4.7)

$$\begin{aligned}
(П.31) \quad & \dot{w}(t) = \dot{\Upsilon}(t) - \dot{\Omega}(t) \theta(t) - \Omega(t) \dot{\theta}(t) = \\
& = -k(\Upsilon(t) - \mathcal{Y}(t)) + k(\Omega(t) - \mathcal{M}(t)) \theta(t) - \Omega(t) \dot{\theta}(t) = \\
& = -k(\Upsilon(t) - \mathcal{M}(t) \theta(t) - d(t, T)) + k(\Omega(t) - \mathcal{M}(t)) \theta(t) - \Omega(t) \dot{\theta}(t) = \\
& = -k(\Upsilon(t) - \Omega(t) \theta(t)) - \Omega(t) \dot{\theta}(t) + kd(t, T) = \\
& = -kw(t) - \Omega(t) \dot{\theta}(t) + kd(t, T), \quad w(t_0^+) = 0_{n+1}.
\end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (П.31) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}
(П.32) \quad & w(t) = w_1(t) + w_2(t), \\
& \dot{w}_1(t) = -kw_1(t) - \Omega(t) \dot{\theta}(t), \quad w_1(t_0^+) = 0_{n+1}, \\
& \dot{w}_2(t) = -kw_2(t) + kd(t, T), \quad w_2(t_0^+) = 0_{n+1}.
\end{aligned}$$

Для первого дифференциального уравнения из (П.32) в утверждении 2 работы [19] доказано (с точностью до обозначений) выполнение неравенства

$$(П.33) \quad \|w_1(t)\| \leq w_{1\max} \phi(t, t_0^+ + T_s),$$

при $i \leq i_{\max} < \infty$.

Поскольку $k > 0$, а возмущение $d(t, T)$ ограничено, то $w_2(t)$ также ограничено, а следовательно верно неравенство

$$(П.34) \quad \|w_2(t)\| \leq w_{2\max}(T),$$

где предел $\lim_{T \rightarrow 0} w_{2\max}(T) = 0$ справедлив, поскольку вход второго дифференциального уравнения из (П.32) зависит исключительно от величины $d(t, T)$, которая, в свою очередь, в соответствии с (П.15)–(П.19), может быть произвольно уменьшена с помощью уменьшения T . Объединение на основании (П.32) неравенств (П.33) и (П.34) завершает доказательство утверждения.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы проведем аналогично доказательству утверждения 1.

Шаг 1. Для всех $t \geq t_0^+ + T_s$ решение дифференциального уравнения (4.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(t) = & \phi(t, t_0^+ + T_s) \tilde{\theta}(t_0^+ + T_s) + \int_{t_0^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) \frac{\gamma_1 w(\tau)}{\Omega(\tau)} d\tau - \\ & - \int_{t_0^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta \delta(\tau - t_q^+) d\tau, \end{aligned} \quad (\text{П.35})$$

где

$$\phi(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t \gamma_1 d\tau}.$$

Тогда, следуя доказательству теоремы 1 из [19], при $i \leq i_{\max} < \infty$ возможно показать следующую ограниченность параметрической ошибки (П.35):

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(t)\| \leq & \beta_{\max} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_0^+ - T_0)} + \frac{\gamma_1 w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \int_{t_0^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) \phi(\tau, t_0^+ + T_s) d\tau + \\ & + \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \int_{t_0^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) d\tau \leq \\ \leq & \left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_0^+ - T_0)} + \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}}. \end{aligned} \quad (\text{П.36})$$

Шаг 2. Введем для всех $t \geq t_0^+ + T_s$ в рассмотрение следующую квадратичную форму:

$$\begin{aligned} V_{eref} = & e_{eref}^T P e_{eref} + \frac{4a_0^2}{\gamma_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_0^+ - T_s)}, \quad H = \text{blockdiag} \left\{ P, \frac{4a_0^2}{\gamma_1} \right\}, \\ & \underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\bar{e}_{eref}\|^2 \leq V(\|\bar{e}_{eref}\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\bar{e}_{eref}\|^2, \end{aligned} \quad (\text{П.37})$$

$$\bar{e}_{eref}(t) = \begin{bmatrix} e_{eref}^T(t) & e^{-\frac{\gamma_1}{4}(t - t_0^+ - T_s)} \end{bmatrix}^T.$$

Аналогично доказательству утверждения 1 производная (П.37) может быть записана в виде

$$(П.38) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} \leq & \left[-\lambda_{\min}(Q) + 2\lambda_{\max}(P)b_{\max} \left(\|\tilde{\theta}\| + \dot{\kappa}_{\max}T \right) + 2 \right] \|e_{ref}\|^2 + \\ & + \lambda_{\max}^2(P)\bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \|\tilde{\theta}\|^2 + \lambda_{\max}^2(P)b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\kappa}_{\max}^2 T^2 - 2a_0^2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_s)}. \end{aligned}$$

Поскольку параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$ для всех $t \geq t_0^+ + T_s$ удовлетворяет неравенству (П.36), то оценка сверху на (П.38) с учетом

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(t)\|^2 & \leq \left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right)^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+-T_0)} + \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 + \\ & + 2 \left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)} \leq \\ & \leq \left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) \left(\beta_{\max} + \frac{2(w_{1\max} + \gamma_1 w_{2\max}(T))}{\Omega_{LB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)} + \\ & + \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 = \bar{\beta}_{\max} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)} + \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 \end{aligned}$$

может быть записана в следующем виде:

$$(П.39) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} \leq & \left[-\lambda_{\min}(Q) + 2 + 2\lambda_{\max}(P)b_{\max} \times \right. \\ & \times \left(\left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_s)} + \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} + \dot{\kappa}_{\max}T \right) \left. \right] \|e_{ref}\|^2 + \\ & + \lambda_{\max}^2(P)\bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \bar{\beta}_{\max} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_s)} + \lambda_{\max}^2(P)\bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 + \\ & + \lambda_{\max}^2(P)\bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \dot{\kappa}_{\max}^2 T^2 - 2a_0^2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_s)}. \end{aligned}$$

Обязательно найдется момент времени $t_{e_{ref}} \geq t_0^+ + T_s$ и постоянные $T \rightarrow 0$, $a_0 > \lambda_{\max}(P)\bar{\omega}_r b_{\max} \bar{\beta}_{\max}^{\frac{1}{2}}$, такие что для всех $t \geq t_{e_{ref}}$ верно

$$(П.40) \quad \begin{aligned} -\lambda_{\min}(Q) + 2 + 2\lambda_{\max}(P)b_{\max} \left(\left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_{e_{ref}}-t_0^+-T_s)} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} + \dot{\kappa}_{\max}T \right) = -c_1 < 0, \\ \lambda_{\max}^2(P)\bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \bar{\beta}_{\max} - 2a_0^2 = -c_2 < 0. \end{aligned}$$

Тогда оценка сверху на производную (П.39) для всех $t \geq t_{eref}$ может быть записана в виде

$$(П.41) \quad \dot{V}_{eref} \leq -\eta_{eref} V_{eref} + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 + \\ + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2,$$

где

$$\eta_{eref} = \min \left\{ \frac{c_1}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{c_2 \gamma_1}{4a_0^2} \right\}.$$

Решение дифференциального неравенства (П.7) для всех $t \geq t_{eref}$ позволяет получить

$$(П.42) \quad V_{eref}(t) \leq e^{-\eta_{eref}(t-t_{eref})} V_{eref}(t_{eref}) + \\ + \frac{1}{\eta_{eref}} \left(\lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 + \lambda_{\max}^2(P) b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2 \right),$$

что завершает доказательство (ii) части теоремы.

Шаг 3. По доказанному соответственно в (П.36) и (П.42) ошибка $\tilde{\theta}(t)$ ограничена для всех $t \geq t_0^+ + T_s$, а ошибка $e_{ref}(t)$ – для всех $t \geq t_{eref}$. Тогда для доказательства части (i) осталось доказать ограниченность $\tilde{\theta}(t)$ на промежутке $[t_0^+, t_0^+ + T_s)$, а $e_{ref}(t)$ соответственно – на $[t_0^+, t_{eref})$.

В консервативном случае на $[t_0^+, t_0^+ + T_s)$ выполняется неравенство $\Omega(t) \leq \Omega_{LB}$, откуда в силу $\dot{\tilde{\theta}}(t) = 0_{n+1}$ при выполнении допущения 1 следует ограниченность параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t_0^+) - \theta(t)$ на $[t_0^+, t_0^+ + T_s)$ и, как следствие, для всех $t \geq t_0^+$.

На промежутке $[t_0^+, t_{eref})$ с учетом обозначений из (П.3), (П.18) уравнение в отклонениях (3.1) может быть записано в следующем виде:

$$\dot{e}_{ref}(t) = \left(A_{ref} + e_n b(t) \left(\hat{\theta}_x(t) - k_x(t) \right) \right) e_{ref}(t) + \\ + e_n b(t) \left(\hat{\theta}^T(t) - \mathcal{K}^T(t) \right) \omega_r(t),$$

что в силу доказанной ограниченности $\tilde{\theta}(t)$ для всех $t \geq t_0^+$ и выполнении допущений 1 и 2 позволяет с помощью результатов Теоремы 3.2 из [20] сделать вывод об 1) ограниченности $e_{ref}(t)$ на $[t_0^+, t_{eref})$, 2) $\xi(t) \in L_\infty$ для всех $t \geq t_0^+$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // АиТ. 1980. № 8. С. 74–81.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Optimal pseudogradient adaptation algorithms // Autom. Remote Control. 1981. V. 41. P. 1101–1110.

2. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // *АиТ*. 1980. № 10. С. 91–97.
Polyak B.T., Tsyppkin Ya.Z. Robust Pseudogradient Adaptation Algorithms // *Autom. Remote Control*. 1981. V. 41. No. 10. P. 1404–1409.
3. Ioannou P., Sun J. Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
4. Fradkov A.L. Lyapunov–Bregman functions for speed-gradient adaptive control of nonlinear time-varying systems // *IFAC-PapersOnLine*. 2022. V. 55. No. 12. P. 544–548.
5. Goel R., Roy S.B. Composite adaptive control for time-varying systems with dual adaptation // *arXiv preprint arXiv:2206.01700*. 2022. P. 1–6.
6. Na J., Xing Y., Costa-Castello R. Adaptive estimation of time-varying parameters with application to roto-magnet plant // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. 2018. V. 51. No. 2. P. 731–741.
7. Chen K., Astolfi A. Adaptive control for systems with time-varying parameters // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020. V. 66. No. 5. P. 1986–2001.
8. Patil O.S., Sun R., Bhasin S., Dixon W.E. Adaptive control of time-varying parameter systems with asymptotic tracking // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2022. V. 67. No. 9. P. 4809–4815.
9. ПUTOV В.В. Методы построения адаптивных систем управления нелинейными нестационарными динамическими объектами с функционально-параметрической неопределенностью // *Дис. ... д-ра техн. наук, СПбГЭТУ «ЛЭТИ»*. СПб., 1993. 590 с.
10. ПUTOV В.В., ПОЛУШИН И.Г., ЛЕБЕДЕВ В.В., ПUTOV А.В. Обобщение метода мажорирующих функций в задачах адаптивного управления нелинейными динамическими объектами // *Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ*. 2013. № 8. С. 32–37.
11. ГЛУЩЕНКО А.И., ЛАСТОЧКИН К.А. Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть III. Объекты с переменными параметрами // *подана в АиТ*.
12. Pagilla P.R., Zhu Y. Adaptive control of mechanical systems with time-varying parameters and disturbances // *J. Dyn. Sys., Meas., Control*. 2004. V. 126. No. 3. P. 520–530.
13. КУОК Д.В., БОБЦОВ А.А., НИКОЛАЕВ Н.А., ПЫРКИН А.А. Стабилизация линейной нестационарной системы в условиях запаздывания и аддитивного синусоидального возмущения выхода // *Известия ВУЗов. Приборостроение*. 2021. Т. 64. № 2. С. 97–103.
14. ДАТ В.К., БОБЦОВ А.А. Управление по выходу линейными нестационарными системами с использованием методов параметрической идентификации // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2020. Т. 21. № 7. С. 387–393.
15. Григорьев В.В. Синтез управлений для систем с изменяющимися параметрами // *АиТ*. 1983. № 2. С. 64–70.
Grigoryev V.V. Design of control equations for variable parameter systems // *Autom. Remote Control*. 1983. V. 44. No. 2. P. 189–194.
16. Glushchenko A., Lastochkin K. Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // *IFAC-PapersOnLine*. 2022. V. 55. No. 12. P. 91–96.
17. Dieudonne J. Foundations of Modern Analysis, New York, Academic Press, 1960.

18. *Leiva H., Sigmund S.* A necessary algebraic condition for controllability and observability of linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2229–2232.
19. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть II. Объекты с кусочно-постоянными параметрами // АиТ. 2023. № 3. С. 65–105.
Glushchenko A.I., Lastochkin K.A. Exponentially Stable Adaptive Control. Part II. Switched Systems // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 3. P. 260–291.
20. *Khalil H.* Nonlinear Systems, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. **Е.Н. ГРЯЗИНА**, д-р комп. наук (E.Gryazina@skoltech.ru),
Д.Ю. БАЛУЕВ (Dmitrii.Baluev@skoltech.ru)
(Сколковский институт науки и технологий, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОПУСТИМЫХ И ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Статья посвящена анализу области допустимых режимов энергетических систем. Рассматриваются задачи вычисления допустимых и предельных режимов энергосистем, анализа геометрии области допустимых режимов и генерирования точек в этой области. Проводятся параллели с работами Б.Т. Поляка по анализу образа квадратичного отображения, модификации метода Ньютона и развитию методов генерации асимптотически равномерных выборок в областях со сложной геометрией. Особое внимание уделено методу Ньютона с условием трансверсальности и его применению для построения процедуры граничного оракула и генерации с его помощью точек в области допустимых режимов.

Ключевые слова: область допустимых режимов энергосистемы, уравнения установившегося режима, образ квадратичного отображения, метод Ньютона, сэмплирование.

DOI: 10.31857/S0005231024050047, **EDN:** YQDRMJ

1. Введение

Развитие теории, моделей и методов расчета оптимальных и предельных режимов работы энергосистемы не теряет актуальности ввиду широкого распространения распределенных возобновляемых источников энергии, изменения паттернов потребления электрической энергии и цифровой трансформации энергетической отрасли. Управление современными энергосистемами требует быстрых и надежных методов оценки запасов статической устойчивости, которые характеризуются расстоянием до границы допустимой области. Кроме того, нарастающее распространение распределенных возобновляемых источников энергии побуждает пересмотреть критерии оптимальности режимов работы сети, что сдвигает часто эксплуатируемые режимы ближе к границе. Общим во многих задачах энергетики является понятие области допустимых режимов энергосистемы – область в многомерном пространстве узловых мощностей (правых частей уравнений установившегося режима), таких что эта система уравнений имеет хотя бы одно вещественное решение.

Далее во введении проиллюстрирована связь задач по исследованию допустимых и предельных режимов работы энергосистемы с образом квадратичного отображения, D -разбиением, методом Ньютона и его модификациями,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-19-00773).

а также методами генерации асимптотически равномерных выборок в областях со сложной геометрией.

1.1. Образ квадратичного отображения

Система уравнений установившегося режима (далее УУР) представляет собой представление законов Ома и Кирхгофа, связывающих значения напряжений и мощностей в узлах энергосистемы (1)–(2). Нетрудно заметить, что эти уравнения квадратичны относительно переменной V . В работах Б.Т. Поляка [1, 2] предложены достаточные условия выпуклости образа квадратичного отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ при $m = 2, 3$, а позднее в [3] предложен рандомизированный подход к сертификации невыпуклости образа квадратичных отображений.

Действительно, область допустимых режимов энергосистемы имеет весьма причудливую форму, причем это проявляется для весьма низкоразмерных систем, состоящих из трех–пяти узлов. На рис. 1 представлено сечение области допустимых режимов системы из трех узлов. В настоящем случае область выпукла, однако в [4] показано, что при изменении вектора правой части сечение станет невыпуклым.

Примеры более экзотических форм области допустимых режимов можно найти в [5], одно из таких сечений для системы из пяти узлов представлено на рис. 2.

Глядя на рис. 1–2, нетрудно заметить сложную внутреннюю структуру области допустимых режимов. В силу нелинейности системы УУР существуют

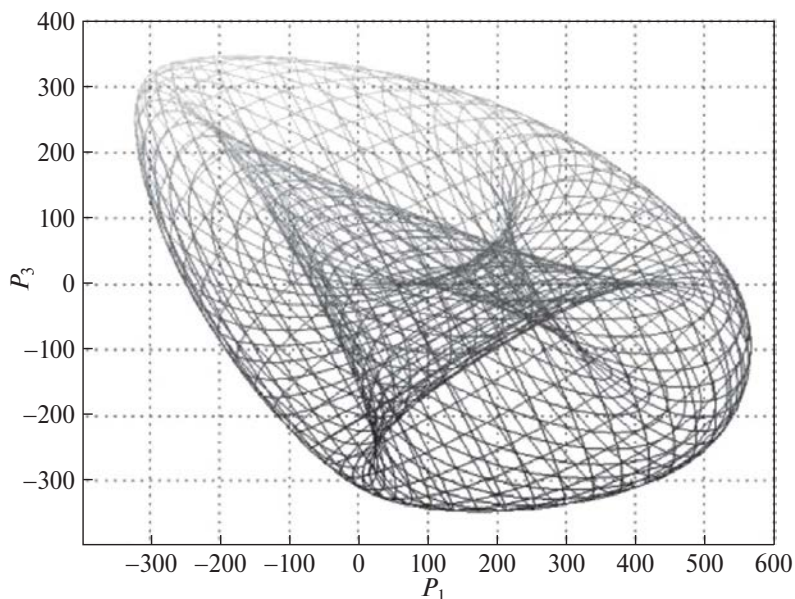


Рис. 1. Выпуклая область допустимых режимов из [4].

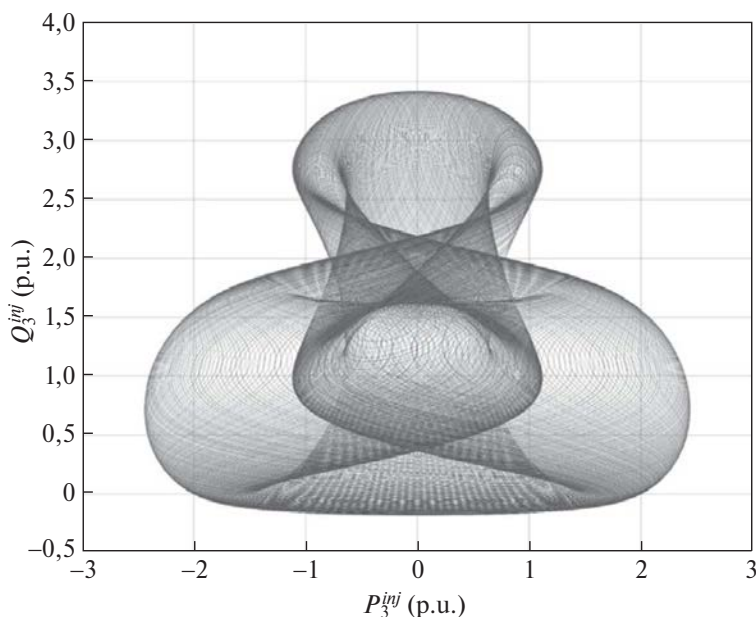


Рис. 2. Невыпуклая область допустимых режимов из [5].

внутренние бифуркационные кривые, переход через которые соответствует либо изменению количества решений, либо исчезновению решений, а следовательно и допустимого режима системы. Эти уравнения могут иметь несколько изолированных решений, представляющих либо устойчивое, либо неустойчивое равновесие динамической модели энергосистемы. Наличие нескольких решений ранее игнорировалась исследователями, их усилия были в основном сосредоточены на выявлении только одного вещественного решения УУР, а не на всех изолированных решениях. Работа [6] по-видимому является первой, где исследован феномен кратности решений УУР и предложен способ построения всех критических точек области допустимых режимов. Под критическими точками понимаются точки бифуркационных кривых, пересечение которых меняет количество решений системы УУР. Подобный анализ допустимой области идейно близок развитому в работах Б.Т. Поляка методу D -разбиения [7, 8]. Кривая D -разбиения делит пространство параметров на области с различным количеством устойчивых корней характеристического полинома линейной динамической системы, а бифуркационная кривая (поверхность в пространствах более высокой размерности) разделяет области с различным количеством решений в области допустимых режимов энергосистемы.

1.2. Роль метода Ньютона

Традиционно для расчета установившегося режима используется классический метод Ньютона. Ввод дополнительных переменных, характеризующих запасы устойчивости, делает систему недоопределенной. В этом случае

задача расчета режимов оказывается в контексте работ Б.Т. Поляка [9, 10]. Одним из наиболее перспективных методов для быстрого расчета режимов близких к предельным является метод Ньютона с условием трансверсальности (TENR, Transversality Enforced Newton-Raphson) [11], где помимо дополнительной переменной добавляется условие вырожденности матрицы Якоби.

Метод TENR концептуально подобен, но математически отличается от традиционных методов, базирующихся на стандартном методе Ньютона. В TENR стандартная система УУР дополняется условием трансверсальности. Это ограничение регуляризует исходно вырожденную систему в предельной точке и обеспечивает сходимость алгоритма Ньютона. В дополнение, TENR позволяет при расчете установившегося режима учитывать любые технические ограничения, которые могут быть представлены как в виде равенств, так и неравенств. С вычислительной точки зрения ключевым преимуществом TENR является простая форма записи условий трансверсальности, которая не требует явного отслеживания и инициализации нулевых собственных векторов якобиана. Это упрощение приводит к меньшему размеру системы нелинейных уравнений, а также позволяет упростить инициализацию алгоритма.

Метод TENR обладает рядом преимуществ: алгоритм численно устойчив в непосредственной близости к границе, а также на границе устойчивости; слабо зависит от начального приближения; реализована декомпозиция матрицы Якоби по сингулярным числам, которая позволяет провести анализ чувствительности энергосистемы и выявить наиболее «эффективные узлы» для применения управляющих воздействий. На основе TENR можно решать задачи оценки максимально допустимой передачи электроэнергии [12], а также онлайн-оценки запасов устойчивости по напряжению [13]. Работа метода протестирована на ряде базовых тестовых энергосистем IEEE и модели энергосистемы Дальнего Востока России [14].

1.3. Генерирование параметров допустимых режимов

Знание геометрии области допустимых режимов энергосистемы и ее границы позволяет быстро оценивать запасы устойчивости, вычислять оптимальные воздействия в задаче противоаварийного управления. Сложность задачи обеспечения надежной и безопасной работы энергосистем в режиме реального времени постоянно нарастает, поскольку текущий режим быстро меняется из-за неопределенностей, связанных с увеличением доли возобновляемой генерации, менее предсказуемыми нагрузками и различными непредвиденными обстоятельствами. Следовательно, во избежание любого нежелательного поведения системы или крупномасштабного отключения электроэнергии, требуется оценка запасов устойчивости по напряжению в режиме реального времени. Такая оценка не только сложна, но и требует значительных вычислительных ресурсов, в основном из-за постоянно меняющегося состояния сети. Как на этапе планирования режимов работы, так и на этапе эксплуатации сети, ее безопасная работа требует устойчивости по напряжению, которая

заключается в способности энергосистемы поддерживать приемлемые уровни напряжения на всех шинах после воздействия помех [15].

Современные энергосистемы более уязвимы с точки зрения устойчивости, поскольку функционируют вблизи границы допустимой области. В электрических сетях возникает неустойчивость по напряжению, когда режим работы приближается к точке коллапса или к точке седло-узловой бифуркации, после чего исчезает вещественное решение уравнений установившегося режима или меняется число решений системы уравнений установившегося режима. Уточнить представление об области допустимых режимов можно посредством сэмплирования, т.е. генерации параметров допустимых режимов. Такие наборы параметров также полезны для настройки алгоритмов машинного обучения. Одним из направлений исследования Поляка Б.Т. было развитие методов генерации асимптотически равномерно распределенных выборок в сложных областях [16, 17].

В настоящей статье представлено подробное описание метода TENR, как наиболее эффективного метода для расчета предельных режимов энергосистемы, а также показано, как использовать TENR для построения процедуры граничного оракула, чтобы с его помощью генерировать точки в области допустимых режимов.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 представлена формальная постановка задачи. В разделе 3 содержится описание метода TENR и обсуждается стратегия выбора оптимального размера шага при его реализации. Раздел 4 посвящен задаче генерирования точек в области допустимых режимов энергосистемы. В разделе 5 приведены численные примеры, иллюстрирующие эффективность метода TENR как для расчета предельных режимов (граничных точек области допустимых значений), так и для генерации точек.

2. Постановка задачи

Поиск предельного режима работы энергетической системы тесно связан с расчетом режима. Режим – состояние энергосистемы, которое может быть охарактеризовано количественными показателями: мощность, напряжение, ток, углы сдвига векторов ЭДС и другие. Различают переходные и установившиеся режимы в зависимости от скорости их изменения. Установившийся режим – режим, в котором параметры сохраняют свои значения на рассматриваемом промежутке времени или изменяются относительно медленно [18]. Поскольку режим обладает количественными характеристиками, его можно рассчитать и оценить. Расчет установившегося режима (расчет потокораспределения) – это определение всех параметров установившегося режима при известных параметрах системы (схемы соединения элементов, сопротивление линий и т.д.) и некоторых задаваемых параметрах режима [19]. Совокупность уравнений, сформированных на основе схем замещения энергосистемы, а также законов Ома и Кирхгофа есть не что иное, как математическая модель установившихся режимов энергосистем.

В теории электрических систем существует большое количество возможных математических моделей, каждая из которых обладает как положительными, так и отрицательными характеристиками. В настоящей работе в качестве модели использована система УУР в форме баланса мощностей, представленная в прямоугольной системе координат. Напряжение запишем в виде комплексной величины: $\hat{V}_i = V_i^r + jV_i^m \in \mathbb{C}$. G_{ij} и B_{ij} – действительные и мнимые части комплексного значения проводимости $\hat{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \in \mathbb{C}$. Система состоит из n узлов, где $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество узлов, за исключением балансирующего (базисного) узла $\mathcal{S}$; множество PQ-узлов (нагрузочных узлов) обозначим как $\mathcal{L}$; множество PV-узлов (генераторных узлов) обозначим как $\mathcal{G}$. Для каждого $i \in \mathcal{N}$, значения узловой активной мощности могут быть вычислены следующим образом [18, 20, 21]:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \left\{ V_i^r (G_{ik} V_k^r - B_{ik} V_k^m) + V_i^m (G_{ik} V_k^m + B_{ik} V_k^r) \right\} = \\ = P_i(x) - \lambda(P_{\text{gen},i} - P_{\text{load},i}),$$

где вектор $x \in \mathbb{R}^n$ – набор неизвестных (величина напряжений и фазовых углов узлов для каждого узла системы). Аналогичным образом для каждого $i \in \mathcal{L}$ запишем уравнение узловой реактивной мощности:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \left\{ V_i^m (G_{ik} V_k^r - B_{ik} V_k^m) - V_i^r (G_{ik} V_k^m + B_{ik} V_k^r) \right\} = \\ = Q_i(x) - \lambda(Q_{\text{gen},i} - Q_{\text{load},i}).$$

Подстрочные индексы «gen» и «load» обозначают уровень генерации и нагрузки в узлах соответственно. В свою очередь, λ – коэффициент, с помощью которого режим «утяжеляется», т.е. нагрузки постепенно увеличиваются, при $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ система находится в предельном режиме. В отличие от представления в полярных координатах, формулировка в декартовых координатах требует включения дополнительного набора уравнений, которые учитывают ограничения на напряжения в PV-узлах. Таким образом, для каждого $i \in \mathcal{G}$

$$(3) \quad (V_i^r)^2 + (V_i^m)^2 - |\hat{V}_i|_{\text{ref}}^2 = 0,$$

где $|\hat{V}_i|_{\text{ref}}$ модуль установленного значения напряжения на шине.

Стандартная система уравнений установившегося режима в общем виде может быть записана следующим образом:

$$(4) \quad \mathcal{F}(x, \lambda) = 0,$$

где $\mathcal{F}$ представляет собой k нелинейных уравнений, включающих в себя как уравнения небалансов мощности (например, в виде (1), (2)), так и различные технологические ограничения, представленные в виде равенств; λ – коэффициент утяжеления режима, который характеризует близость системы к границе разрешимости уравнений установившегося режима.

Задача поиска предельного режима сводится к нахождению $\lambda_{\max}$, что решение системы (4) существует при всех $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$, но при $\lambda > \lambda_{\max}$ – не существует.

С математической точки зрения, поиск предельного режима — это решение системы уравнений (4) при условии, что матрица Якоби вырождена:

$$(5) \quad g(x) = \det \nabla_x \mathcal{F}(x, \lambda) = 0.$$

Из чего следует, что для поиска предельного режима (границы устойчивости) необходимо совместно решить систему уравнений (4), дополнительную условием, которое учитывает вырожденность матрицы Якоби (5).

3. Метод Ньютона–Рафсона с условием трансверсальности

Для решения системы УУР необходимо применять численные итерационные методы, которые предполагают улучшение приближения исходных переменных на каждой итерации. Один из наиболее распространенных и доступных методов – метод Ньютона–Рафсона.

Следует отметить, что классический метод Ньютона–Рафсона имеет ряд негативных особенностей, среди которых следует отметить: зависимость сходимости от выбранных начальных условий, а также плохая сходимость метода на границе существования режима или в непосредственной близости к ней. Причина этого – плохая обусловленность матрицы Якоби. Таким образом, стандартный метод Ньютона дает заведомо заниженную оценку запаса статической устойчивости энергосистемы. В случае, если численный метод будет устойчив на границе существования режима, расстояние до предельного режима может быть получено более точно.

Существует метод, в котором решены указанные проблемы – метод TENR.

При анализе предельного режима, когда λ достигает максимального значения $\lambda_{\max}$, матрица Якоби системы УУР становится вырожденной. В этих обстоятельствах шаг вычисления по методу Ньютона $J^{-1}\mathcal{F}(x)$ увеличивается, что делает классический метод численно неустойчивым. В результате метод может не сойтись или потребовать слишком много итераций для получения результата. В методе TENR к базовой системе уравнений добавлено условие, учитывающее вырождение матрицы Якоби на границе ПР, λ при этом также рассматривается как переменная. Таким образом, области решений исходной и дополненной систем уравнений совпадают.

В рамках метода TENR, условие, учитывающее вырожденность Якоби на на границе устойчивости, принято называть условием трансверсальности. Доступно большое количество возможных вариаций записи условия $g(\mathbf{x})$, которые представлены в [11]. Наименее затратный (с точки зрения вычислительного времени) способ основан на сингулярном разложении.

В общем виде система уравнений для поиска предельных режимов может быть записана

$$(6) \quad \begin{aligned} F(x, \lambda) &= 0 \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Численно система (6) может быть решена с помощью стандартного метода Ньютона. Линеаризация системы уравнений с помощью ряда Тейлора первого порядка в пространстве x и λ

$$(7) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ g \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{F} & \nabla_{\lambda} \mathcal{F} \\ (\nabla_{\mathbf{x}} g)^{\top} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При использовании метода TENR в расчетах участвует так называемая расширенная матрица Якоби $\mathcal{J}(x, \lambda)$:

$$(8) \quad \mathcal{J}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{F} & \nabla_{\lambda} \mathcal{F} \\ (\nabla_{\mathbf{x}} g)^{\top} & 0 \end{pmatrix}.$$

Приращения неизвестных $\Delta x, \Delta \lambda$ определим следующим образом:

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{F} & \nabla_{\lambda} \mathcal{F} \\ (\nabla_{\mathbf{x}} g)^{\top} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ g \end{bmatrix}.$$

Используя найденные приращения переменных, определим значения переменных на следующем шаге следующим образом:

$$(10) \quad \mathcal{N}(x, \lambda) := \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} - \alpha \left[\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{F} & \nabla_{\lambda} \mathcal{F} \\ (\nabla_{\mathbf{x}} g)^{\top} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ g \end{bmatrix} \right].$$

Параметр α определяет размер шага в методе Ньютона, который необходимо выбирать достаточно малым. Расчет производится итеративно до тех пор, пока не будет достигнут установленный критерий сходимости:

$$(11) \quad \|\mathcal{N}^{(\kappa)}(x, \lambda) - \mathcal{N}^{(\kappa-1)}(x, \lambda)\| \leq \epsilon, \quad \kappa = 1, 2, \dots,$$

где индекс κ – счетчик итераций, ϵ – желаемая точность расчета.

Метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью в случае, если исходная расчетная точка выбрана в непосредственной близости к действительному решению. Однако возможен случай, когда метод Ньютона требует неадекватно большое количество итераций для сходимости. Для предотвращения таких ситуаций необходимо оптимальным образом выбирать размер шага ньютоновской итерации. Методология выбора оптимального размера шага представлена далее.

3.1. Стратегия выбора оптимального размера шага метода Ньютона–Рафсона

Метод Ньютона–Рафсона крайне чувствителен к исходному приближению. В некоторых случаях неправильный выбор стартовой точки может привести к большому количеству итераций, либо метод вовсе не сойдется. Для обеспечения более быстрой сходимости, а также глобальной сходимости при любом адекватном начальном приближении систему уравнений необходимо дополнить коэффициентом демпфирования α , который был представлен в (10). Один из наиболее эффективных и простых, с точки зрения вычислительного времени, метод – изменение α на каждой итерации расчета.

Запишем исходную систему уравнений в компактной форме:

$$(12) \quad \mathcal{H}(z) = \begin{cases} \mathcal{F}(x, \lambda) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Вектор z представляет собой набор переменных $z = [x, \lambda]^\top$. В декартовой формулировке уравнения, рассматриваемые в (4), являются набором квадратичных уравнений, а условие трансверсальности $g(x) = 0$ является просто линейным уравнением, особенно в случае, когда условие трансверсальности записано через сингулярное разложение якобиана. Следовательно, для точки $z^{(\kappa)}$ и вектора $\Delta z^{(\kappa)}$ систему (12) можно аппроксимировать разложением Тейлора второго порядка как

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(z^{(\kappa)} + \Delta z^{(\kappa)}) &\approx \mathcal{H}(z^{(\kappa)}) + \\ &+ [\nabla_z \mathcal{H}(z^{(\kappa)})] \Delta z^{(\kappa)} + \frac{1}{2} (\Delta z^{(\kappa)})^\top [\nabla_{zz} \mathcal{H}(z^{(\kappa)})] \Delta z^{(\kappa)}. \end{aligned}$$

Поскольку все уравнения в (4) – второго порядка, а $g(x)$ – линейное, то (13) выполняется строго. Оптимальный размер шага $\alpha^{(\kappa)}$ в направлении вектора $\Delta z^{(\kappa)}$ будем искать как решение следующей задачи минимизации:

$$(14) \quad \mathcal{H}(\alpha) = \left\{ \mathcal{H}(z^{(\kappa)}) + \alpha [\nabla_z \mathcal{H}(z^{(\kappa)})] \Delta z^{(\kappa)} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{2} (\Delta z^{(\kappa)})^\top [\nabla_{zz} \mathcal{H}(z^{(\kappa)})] \Delta z^{(\kappa)} \right\},$$

$$(15) \quad \alpha^{(\kappa)} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathcal{H}(\alpha)\|_2^2.$$

Задачу оптимизации (15) можно решить явно, применив условие оптимальности первого порядка.

На рис. 3 представлены значения $\alpha^{(\kappa)}$ на каждой итерации метода TENR для тестовых схем IEEE, состоящих из 14, 30, 118 и 300 узлов. Эти случаи тестирования включают в себя стандартную задачу определения предельного режима при исходных условиях, когда все амплитуды напряжений в узлах равны 1, а соответствующие углы – 0. Можно заметить, что изначально

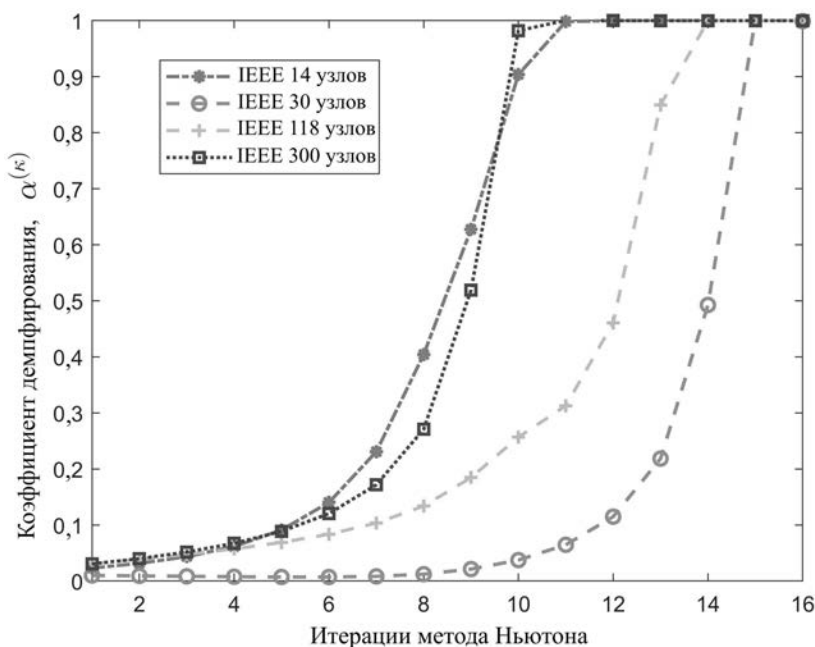


Рис. 3. Выбор оптимального размера шага $\alpha^{(\kappa)}$ для каждой итерации метода TENR на примере тестовых IEEE схем.

предложенная стратегия выбора шага приводит к небольшим значениям α . Однако по мере приближения алгоритма к решению, размер шага постепенно увеличивается. Это поведение можно объяснить тем, что на начальных итерациях аппроксимация уравнений в (12) первого порядка методом Тейлора слабо удовлетворяет равенству. По мере продвижения алгоритма эта аппроксимация становится более точной, что приводит к увеличению размера шага α .

4. Генерирование параметров допустимых режимов

Для областей со сложной геометрией (невыхуклых, представленных нелинейными уравнениями), к которым безусловно относится область допустимых режимов энергосистем, рабочий способ получения асимптотически равномерных выборок основывается на использовании версии метода Монте-Карло, а именно, Монте-Карло на основе Марковских цепей (МСМС) [22]. Одним из наиболее известных и эффективных алгоритмов типа МСМС является Hit-and-Run (HR), впервые предложенный в [23], а позднее переоткрытый и подробно проанализированный в [24]. К сожалению, даже для простых плохо обусловленных областей (например, множеств уровня плохо обусловленных функций), метод HR не работает или, по крайней мере, в вычислительном отношении неэффективен [25].

Разнообразие применений и недостатки существующих методов случайных блужданий открывают широкое поле для улучшения алгоритмов случайного блуждания. В частности, в работах Б.Т. Поляка были предприняты попытки использовать барьерные функции, распространенные в анализе методов внутренней точки для выпуклой оптимизации, и совместить их со случайными блужданиями на основе марковских цепей. В результате этих попыток был предложен барьерный метод Монте-Карло [26], чьи свойства перемешивания в некоторых случаях оказались предпочтительнее метода HR. Однако сложность каждой итерации в целом оставалась достаточно высокой (в частности, на каждой итерации требуется вычисление $(\nabla^2 F(x))^{-1/2}$, где $F(x)$ – барьерная функция для области Q). Более того, такой подход не может ускорить сходимость распределения получаемых точек к равномерному для областей, подобных симплексам. Наконец, в [27] излагается идея метода бильярдного блуждания – Billiard Walk, доказываются теоремы об асимптотической равномерности генерируемых точек для выпуклого и невыпуклого случая. В отличие от метода Ball Walk, где каждая последующая точка выбирается случайно равномерно в пересечении шара с центром в текущей точке и рассматриваемой области, и метода Hit-and-Run, где следующая точка выбирается случайно равномерно на случайной хорде, проведенной через текущую точку, в основу метода Billiard Walk положена бильярдная траектория случайной длины, выпущенная из текущей точки в случайном направлении.

Метод Hit-and-Run и его усовершенствованная модификация – метод Billiard Walk – предоставляют полезную возможность для генерации точек в области допустимых режимов. Единственное требование к области состоит в том, что для нее должна существовать процедура граничного оракула и, в случае бильярдного блуждания, способа восстановления нормали к границе.

Опишем работу метода Hit-and-Run и необходимую для его реализации процедуру граничного оракула для области допустимых режимов энергосистемы. Генерируемые точки расположены в многомерном пространстве полных узловых мощностей $S_i = P_i + jQ_i$, $i = 1, \dots, n$, включающих в себя активную мощность P_i и реактивную мощность Q_i .

1. Выбрать начальную точку S^0 , $k = 0$. Это может быть любой допустимый режим или так называемый плоский старт: $V_i = 1$, $P_i = 0$, $Q_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.
2. Сгенерировать случайный профиль утяжеления d^k , равномерно распределенный на единичной сфере в R^{2n} . Компоненты вектора d отражают приращения активной и реактивной мощности в правой части уравнений (1)–(2).
3. Вычислить предельные режимы в направлениях утяжеления d^k и $-d^k$ и соответствующие им $\bar{\lambda}$, $\underline{\lambda}$ с помощью метода TENR.

4. Увеличить счетчик $k = k + 1$ и выбрать следующую допустимую точку $S^k = S^{k-1} + td$, где скаляр t выбран случайно равномерно на отрезке $[-\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$.
5. Сохранить S^k и значения, соответствующие предельным режимам, и перейти к шагу 2.

При реализации метода Billiard Walk в качестве нормали следует использовать собственный вектор матрицы Якоби, соответствующий нулевому собственному значению.

5. Численные примеры

Проиллюстрируем эффективность метода TENR и его модификаций для анализа предельных и генерирования допустимых режимов энергосистем. В качестве примера будут выбраны несколько модельных энергосистем из коллекции IEEE [28, 29], широко используемые в академических исследованиях. Метод TENR интегрирован в программный комплекс с открытым кодом – PESOL [30].

5.1. Вычисление предельных режимов

Сравнение точности оценки граничных режимов проводилось между TENR и тремя наиболее распространенными методами оценки предельных состояний, интегрированными в различные программные комплексы: Continuation Power Flow (CPF), Power System Analysis Toolbox (PSAT) и MATPOWER. Результаты сравнения значений λ , характеризующих запасы статической устойчивости, представлены в табл. 1.

Результаты сравнения метода TENR с прямыми конкурентами показывают, что запас устойчивости, рассчитанный с помощью TENR, во всех рассмотренных случаях не ниже, чем значения, полученные с помощью других методов. Также для некоторых случаев TENR указал действительный запас устойчивости чуть больше, чем другие методы. Главное преимущество TENR – скорость расчета и возможность масштабирования (расчет энергосистем размерностью в тысячи узлов). Подробное сравнение скорости расчета с помощью TENR с прямыми конкурентами представлено в [14].

Таблица 1. Сравнение запаса устойчивости, полученного с помощью метода TENR с аналогами (без учета ограничений по напряжению)

IEEE-схема	λ_{TENR}	λ_{CPF}	λ_{PSAT}	λ_{MAT}
9 узлов	1,486	1,486	1,481	1,483
14 узлов	3,061	3,061	3,059	3,056
30 узлов	1,958	1,957	1,959	1,838
57 узлов	0,893	0,892	0,891	0,890
118 узлов	2,188	2,187	2,187	2,184
300 узлов	0,430	0,430	0,429	0,425

5.2. Генерирование параметров допустимых режимов

В настоящей работе в качестве примера рассмотрена пятиузловая схема, которая представлена на рис. 4. Указанная система – модифицированный пример, впервые представленный в [31]: узел 1 – базисный узел с напряжением $\hat{V}_1 = 1,0$. Здесь используется принятое в электроэнергетике описание комплексного напряжения в полярной форме $|V|e^{j\delta}$, где фазовый угол записывается следом за модулем в форме $V\angle\delta$. Остальные узлы в системе – PV-узлы с фиксированным значением напряжения 1.0 (р.у.), за исключением узла 3, который является PQ-узлом с комплексным значением напряжения $\hat{V}_3 = |V_3|e^{j\delta_3}$. Также предполагается, что в узлах 4 и 5 установлены синхронные компенсаторы с нулевой активной мощностью. Следовательно, пространство решений ограничено параметрами P_2, P_3, Q_3 .

Рассмотрим сечение допустимой области плоскостью параметров $P_2 - P_3$, остальные параметры правой части УУР оставим фиксированными, как указано выше, $Q_3 = 2$. Результаты генерации 80 и 200 допустимых режимов представлены на рис. 5 и 6. Точки соответствуют внутренним точкам области допустимых режимов, а крестики – граничным режимам. Из рисунков видно, что 200 сгенерированных допустимых режимов уже достаточно для решения практических задач оптимизации режима, а предельные режимы довольно плотно покрывают границу допустимой области.

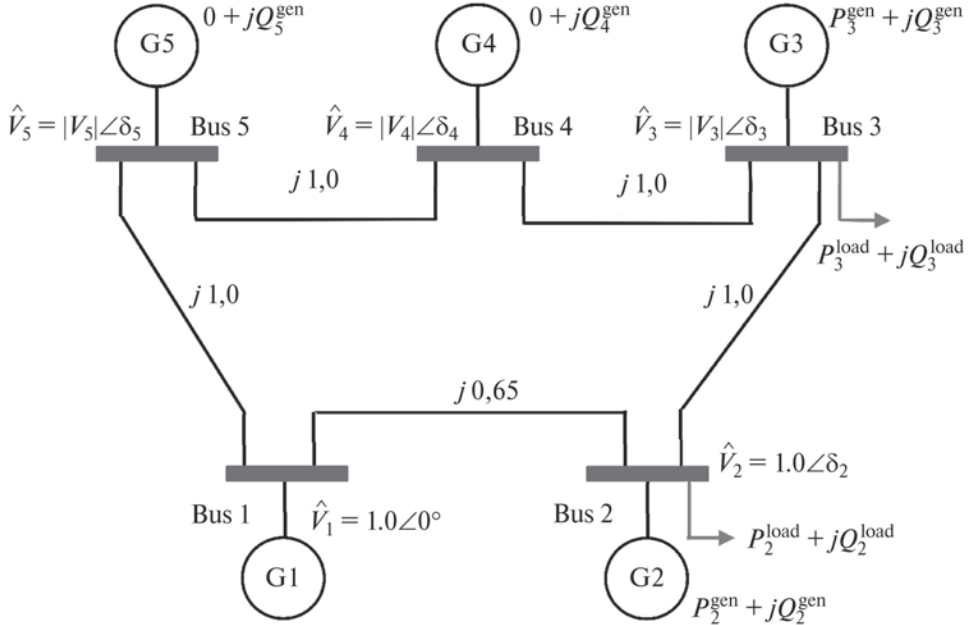


Рис. 4. Пятиузловая схема энергосистемы.

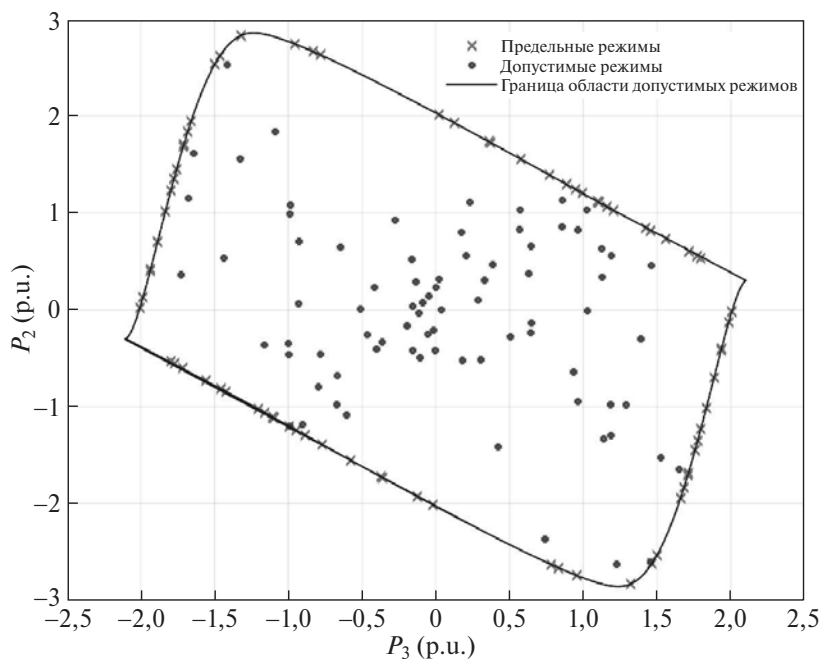


Рис. 5. Сечение области существования режима плоскостью параметров P_2 - P_3 с фиксированным значением $Q_3 = 2$ p.u. (80 допустимых точек).

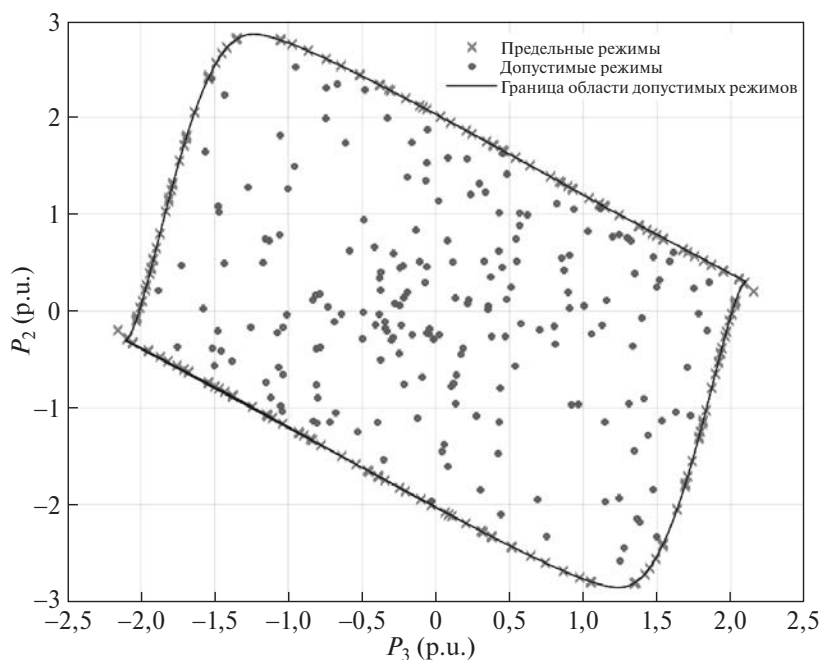


Рис. 6. Сечение области существования режима плоскостью параметров P_2 - P_3 с фиксированным значением $Q_3 = 2$ p.u. (200 допустимых точек).

6. Заключение

В данной статье описаны основные трудности, возникающие при вычислении параметров критических режимов энергосистем, а также представлен метод TENR, который на данный момент выглядит как наиболее эффективный метод для расчета предельных режимов. Более того, впервые представлено и протестировано использование метода TENR для построения процедуры граничного оракула и генерации с его помощью точек в области допустимых режимов.

Удивительным образом задачи анализа допустимых и предельных режимов энергосистем черпают свои решения в работах Б.Т. Поляка. Для энергетики оказались чрезвычайно полезны результаты по выпуклости образа квадратичного отображения, модификаций метода Ньютона и подробное описание схем случайных блужданий для генерации точек в областях со сложной геометрией. Авторы не сомневаются, что новые подобные связки и мосты исследователям еще предстоит обнаружить в будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Polyak B.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // *J. Optim. Theor. Appl.* 1998. V. 99. P. 553–583.
2. *Polyak B.* Convexity of nonlinear image of a small ball with applications to optimization // *Set-Valued Analysis*. 2021. V. 9. P. 159–168.
3. *Polyak B., Gryazina E.* Convexity/nonconvexity certificates for power flow analysis // *Advances in Energy System Optimization: Proceedings of the first International Symposium on Energy System Optimization*. 2017. P. 221–230.
4. *Ayuev B., Davydov V., Erokhin P.* Fast and reliable method of searching power system marginal states // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2016. V. 31. No. 6. P. 4525–4533.
5. *Ali M., Gryazina E., Dymarsky A., Vorobev P.* Calculating voltage feasibility boundaries for power system security assessment // *Int. J. Elect. Power & Energy Syst.* 2023. V. 146. P. 108739.
6. *Ali M., Ali M.H., Gryazina E., Terzija V.* Calculating multiple loadability points in the power flow solution space // *Int. J. Elect. Power & Energy Syst.* 2023. V. 148. P. 108915.
7. *Gryazina E., Polyak B.* On the root invariant regions structure for linear systems // *IFAC Proceedings Volumes*. 2005. V. 38. No. 1. P. 90–95.
8. *Gryazina E., Polyak B.* Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited // *Automatica*. 2006. V. 42. No. 1. P. 13–26.
9. *Polyak B., Tremba A.* Sparse solutions of optimal control via Newton method for under-determined systems // *J. Global Optim.* 2020. V. 76. No. 3. P. 613–623.
10. *Polyak B., Tremba A.* New versions of Newton method: step-size choice, convergence domain and under-determined equations // *Optim. Method. and Soft.* 2020. V. 35. No. 6. P. 1272–1303.

11. *Ali M., Dymarsky A., Turitsyn K.* Transversality enforced Newton–Raphson algorithm for fast calculation of maximum loadability // IET Generat. Transmis. Distribut. 2018. V. 12. No. 8. P. 1729–1737.
12. *Ali M., Gryazina E., Turitsyn K.* Fast calculation of the transfer capability margins // IEEE Milan PowerTech. 2019. P. 1–6.
13. *Ali M., Gryazina E., Khamisov O., Sayfutdinov T.* Online assessment of voltage stability using Newton–Corrector algorithm // IET Generat. Transmis. Distribut. V. 14. No. 19. P. 4207–4216.
14. *Baluev D., Ali M., Gryazina E.* State of the art approach for comprehensive power system security assessment–Real case study // Int. J. Elect. Power & Energy Syst. 2024. V. 155. P. 109594.
15. *Sauer P.W., Pai M.A.* Power system steady-state stability and the load-flow Jacobian // IEEE Transact. Power Syst. 1990. V. 5. No. 4. P. 1374–1383.
16. *Tremba A., Calafiore G., Dabbene F., Gryazina E., Polyak B., Shcherbakov P., Tempo R.* RACT: Randomized algorithms control toolbox for MATLAB // IFAC Proceedings Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 390–395.
17. *Polyak B., Gryazina E.* Randomized methods based on new Monte Carlo schemes for control and optimization // Ann. Oper. Res. 2011. V. 189. P. 343–356.
18. *Веников В.А.* Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высш. шк., 1985.
19. *Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М., Нейумин В.Г.* Вычислительные модели потокораспределения в электрических системах: монография. М.: Флинта, 2008.
20. *Жданов П.С.* Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1979.
21. *Идельчик В.И.* Электрические системы и сети. М.: Энергоатомиздат, 1989.
22. *Diaconis P.* The markov chain monte carlo revolution // Bull. Amer. Math. Soc. 2009. V. 46. No. 2. P. 179–205.
23. *Turchin V.F.* On the computation of multidimensional integrals by the monte-carlo method // Theor. Probab. Appl. 1971. V. 16. No. 4. P. 720–724.
24. *Smith R.* Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions // Oper. Res. 1984. V. 32. No. 6. P. 1296–1308.
25. *Polyak B., Shcherbakov P.* Why does Monte Carlo fail to work properly in high-dimensional optimization problems? // Theor. Probab. Appl. 2017. V. 173. P. 612–627.
26. *Polyak B., Gryazina E.* Markov Chain Monte Carlo method exploiting barrier functions with applications to control and optimization // 2010 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design. 2010. P. 1553–1557.
27. *Gryazina E., Polyak B.* Random sampling: Billiard walk algorithm // Eur. J. Oper. Res. 2014. V. 238. No. 2. P. 497–504.
28. *Vittal V., Martin D., Chu R., Fish J., Giri J.C., Tang C.K., Villaseca F.E., Farmer R.G.* Transient stability test systems for direct stability methods // IEEE Transact. Power Syst. 1992. V. 7. No. 1. P. 37.

29. *Working Group*. Common format for exchange of solved load flow data. // IEEE Transact. Power Appar. Syst. 1973. No. 6. P. 1916–1925.
30. *Ali M., Baluev D., Ali M.H., Gryazina E.* A Novel Open Source Power Systems Computational Toolbox // North American Power Symposium (NAPS). 2021. P. 1–6.
31. *Lesieutre B.C., Hiskens I.A.*, Convexity of the set of feasible injections and revenue adequacy in FTR markets // IEEE Transact. Power Syst. 2005. V. 20. No. 4. P. 1790–1798.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024

© 2024 г. Ю.С. ПОПКОВ, д-р техн. наук (popkov@isa.ru)
(Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН, Москва;
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ С САМООБУЧЕНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача решения системы нелинейных уравнений с произвольной, но непрерывной вектор-функцией в левой части, о которой можно иметь только значения ее компонент. Для определения приближенного решения используется какой-нибудь итерационный метод с параметрами, качественные свойства которого оцениваются квадратичным функционалом невязки. Предлагается самообучающаяся процедура (подкрепления), основанная на вспомогательных МК-испытаниях, на функции полезности экспоненциального класса и функции выигрыша, реализующей принцип оптимальности Беллмана. Доказана теорема о строгом монотонном убывании функционала невязки.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, итерационные методы, подкрепление, Монте-Карло.

DOI: 10.31857/S0005231024050058, EDN: YQBWNO

1. Введение

Подавляющее большинство прикладных задач сводятся к необходимости решать нелинейные уравнения. Параметризованные итерационные методы являются классическим инструментом, позволяющим при определенных условиях получать приближенные решения [1–4] нелинейных уравнений. Этими условиями являются определенные свойства функций (выпуклость, вогнутость, дифференцируемость и др.), входящих в уравнения, и интервальные *достаточные* параметрические условия, при которых обеспечивается сходимость соответствующего итерационного метода.

Возрастающая сложность функций сужает множество классов тех из них, для которых удается проверять эти свойства и использовать результаты проверки в подходящих итерационных методах. Что касается интервальных условий на параметры итерационных методов, то они существенно зависят от свойств функций, которые в общем случае непроверяемы.

Для выхода из этой ситуации предлагается использовать идеи машинного обучения с подкреплением (reinforcement learning), примененных к итерационному вычислительному процессу, а именно к определению значений его параметров с помощью статистического МК-эксперимента и игровой математической модели. Суть этой ветви машинного обучения состоит в том,

чтобы обучать объект (модель, алгоритм, и т.д.) путем взаимодействия не с «учителем», а со «средой», используя метод проб и ошибок, сопровождаемый награждением или наказанием его результатов.

Этот подход применялся к задачам кластеризации и распознавания, по-видимому, потому, что в них удалось вычислять так называемые признаковые характеристики в виде «расстояний» между объектами. Именно на базе матрицы расстояний устраивались некие «поощрения» или «наказания» в настройках параметров алгоритма. В качестве последнего использовались нейронные сети [7] и игровые модели, реализующие принцип конкуренции узлов нейронной сети: преимуществом обладали узлы, для которых расстояние между объектами на каждом шаге алгоритма оказывалось минимальным [8].

В дальнейшем обучение с подкреплением, базирующееся на автоматных моделях взаимодействия объекта (агента) с окружением (средой), имитировалось в игровых терминах (стратегии, функции полезности, выигрыш, проигрыш) и активно развивалось [9]. Появилось множество алгоритмов, которые различались моделями и объемами априорных сведений об окружении (среде), алгоритмами выбора стратегий и процедурами формирования функций полезности [10–13].

Важной компонентой процедур обучения с подкреплением являются МК-испытания, с помощью которых имитируются стратегии агента [14]. Они используются для осреднения фиксированного количества текущих наград с учетом их дисконтирования. Полученная таким образом функция, зависящая от состояния среды и стратегии агента, принималась за функцию полезности (аналог целевой функции в процедурах обучения с учителем), которая в процессе обучения последовательно максимизировалась [15, 16], с использованием принципа оптимальности Беллмана [17] в сочетании с методом стохастической аппроксимации [18].

В данной работе рассматривается задачи численного решения системы нелинейных уравнений с помощью параметризованной итерационной процедуры, сходимость которой зависит от значений этих параметров. Для определения последних развивается обучающая процедура с подкреплением, основанная на игровой модели.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное уравнение в виде

$$(2.1) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{1}) \in R^n.$$

Про функцию $\mathbf{f}$ известно, что доступны только значения ее компонент $f_i(\mathbf{x}^{(k)})$, $i = \overline{1, n}$; $k = 1, \dots$

Определим функционал невязки в следующем виде:

$$(2.2) \quad J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{1}\|^2 \geq 0.$$

Абсолютный минимум этого функционала равен нулю. В общем случае он не единственный, т.е. существует конечное множество точек $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}_*^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_*^{(r)}\}$, в которых функционал невязки равен нулю. В этой ситуации будем считать подходящим любое решение из множества $\mathbb{X}$.

Поиск приближенного решения указанного уравнения осуществляется итерационной процедурой марковского типа. В ней приближенное решение $\mathbf{x}^{(p+1)}$ на $(p+1)$ -м шаге процедуры приравнивается значению оператора $\mathcal{B}[\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{a}^{(p)}]$ итерационной процедуры на p -м шаге, зависящего от значений компонент функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(p)})$ и вектора параметров этой процедуры $\mathbf{a}^{(p)} \in \mathcal{A} \subset R^r$, управляющих качественными свойствами итерационного процесса:

$$(2.3) \quad \mathbf{x}^{(p+1)} = \mathcal{B}[\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(p)}), \mathbf{a}^{(p)}].$$

Под качественными свойствами обычно понимается *сходимость*, *скорость сходимости*, *точность*. Условия их выполнения формулируются в терминах вектора $\mathbf{a}$ и интервальных неравенств, зависящих от свойств оператора $\mathcal{B}$ и от свойств функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Однако поскольку функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ может иметь произвольную структуру, которая не позволяет постулировать или обнаруживать какие-либо ее свойства, то аналитическая проверка этих неравенств оказывается невозможной.

Для преодоления этой ситуации воспользуемся идеями *подкрепления*, активно применяемыми в различных конкретных реализациях в современных процедурах машинного обучения. В данном случае подкрепление предназначено для определения на каждом шаге итерационной процедуры подходящего вектора параметров $\mathbf{a}$ путем соответствующей самообучающейся процедуры.

Предлагается для определения подходящих параметров $\mathbf{a}$ итерационной процедуры (2.3) игровая модель, функционирующая в интервалах между p -м и $(p+1)$ -м шагами, которая имитирует поведение *агента* – стратегию изменения параметров $\mathbf{a}$ в зависимости от качества реакции *среды*. Последнее характеризуется условным *выигрышем* – функцией, зависящий от значений функционала невязки и его декремента.

3. Структура процедуры подкрепления

Рассмотрим исходную задачу (2.1), решение которой будем искать путем минимизации функционала невязки

$$(3.1) \quad J(\mathbf{x}) \Rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in R^n.$$

В некоторых задачах может оказаться полезным преобразование задачи (2.1). Введем новые переменные

$$z_i = \frac{1}{1 + \exp(-b_i x_i)}, \quad x_i = \frac{1}{b_i} \ln \frac{z_i}{1 - z_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда задача (2.1) приобретает следующий вид:

$$J(\mathbf{z}) = \|\Psi(\mathbf{z})\| \Rightarrow \min, \quad \mathbf{z} \in Z_+^n = [0, 1], \quad \Psi(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{1}.$$

Решение задачи (2.1) будем искать, воспользовавшись итерационной процедурой (2.3), полагая, что параметры $\mathbf{a}$ интервального типа: $\mathbf{a} \in [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+]$.

Для определения значений компонент вектора $\mathbf{a}$ в процедуре (2.3) воспользуемся технологией *подкрепления*, реализуя ее в интервале между p -м и $(p+1)$ -м шагами итерационной процедуры (2.3).

Основу этой технологии составляет игровая модель, в которой имитируется игра *агента со средой*. Агент генерирует *стратегии* (действия), приводящие к изменениям среды. Ценность этих изменений характеризуется *функцией полезности*. От успешности стратегии агента и полезности ее для среды зависит значение *функции выигрыша*.

В промежутке между шагами итерационной процедуры производится статистический имитационный эксперимент посредством заданного количества Монте-Карло (МК-) испытаний M , которые имитируют стратегии агента, т.е. значения компонент вектора $\mathbf{a}^{(p,k)}$, где $k = \overline{1, M}$.

В качестве действий агента будем рассматривать вектор $\mathbf{x}^{(p,k+1)}$, который имеет вид

$$(3.2) \quad \mathbf{x}^{(p,k+1)} = \mathcal{B}[\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(p,k)}), \mathbf{a}^{(p,k)}], \quad p = \text{fix}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Средой в этой задаче является функционал невязки $J(\mathbf{x} | \mathbf{a})$. В результате МК-имитируемых действий агента возникает последовательность из M невязок

$$(3.3) \quad J(\mathbf{x}^{(p,1)} | \mathbf{a}^{(p,1)}), \dots, J(\mathbf{x}^{(p,M)} | \mathbf{a}^{(p,M)})$$

и их декрементов

$$(3.4) \quad u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)}) = J(\mathbf{x}^{(p,k+1)} | \mathbf{a}^{(p,k)}) - J(\mathbf{x}^{(p,k)} | \mathbf{a}^{(p,k-1)}), \quad k = \overline{1, M}.$$

Введем *функцию полезности*, которая характеризует качество реакции среды, измеряемое величиной декремента:

$$(3.5) \quad \varphi(u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)})) = \alpha \exp[u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)})].$$

Качество стратегий агента оценивается в терминах *выигрыша*, т.е. соответствующей функции, которая характеризует зависимость величины выигрыша от стратегии агента. Выбор подходящей функции выигрыша представляется творческой задачей [2], связанной с некоторым перебором. Некоторые общие свойства этой функции можно декларировать. Это – непрерывная, ограниченная функция следующего вида:

$$(3.6) \quad Q(\mathbf{a}^{(p,k)}) = \begin{cases} l(u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)})), & \varphi(u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)})) \leq 1 \\ 0, & \varphi(u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)})) > 1. \end{cases}$$

Здесь функция

$$(3.7) \quad l(u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)})) = \begin{cases} \alpha \varphi(u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)})), & 0 \geq u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)}) \geq -U, \\ 0, & u^{(p,k)}(\mathbf{a}^{(p,k)}) \geq 0, \end{cases}$$

где U – предельное значение модуля декремента.

В результате применения МК-испытаний получаем набор значений функций выигрыша. По концепции подкрепления применительно к итерационной процедуре (2.3) оптимальное значение параметра $\mathbf{a}^{(p+1)}$ определяется по следующему правилу:

$$(3.8) \quad \mathbf{a}^{(p+1)} = \mathbf{a}^{(p)} + \beta \arg \max_{1 \leq j \leq M} Q(\mathbf{a}^{(p,k_j)}).$$

Если агент выбирает стратегию по правилу (3.8), то учитывая (3.6), будем иметь:

$$(3.9) \quad J(\mathbf{a}^{(p+1)}) < J(\mathbf{a}^{(p)}).$$

Таким образом, доказана следующая теорема о свойствах последовательности невязок при использовании итерационной процедуры с подкреплением (3.5)–(3.8)

Теорема 1. Пусть:

а) для функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в (2.1) доступны только значения ее компонент $f_i(\mathbf{x}^{(k)})$, $i = \overline{1, n}$;

б) параметры итерационной процедуры $\mathbf{a}$ выбираются по правилу (3.9), (3.8), (3.6).

Тогда итерационная процедура (3.2) с подкреплением (3.5)–(3.8) генерируют строго монотонно убывающую последовательность функционалов невязки $J(\mathbf{x})$ (3.1).

Данная теорема не есть теорема сходимости итерационной процедуры в математическом смысле, т.е. сходимости к одному из решений. Однако известно, что этому решению соответствует нулевое значение невязки. Теорема утверждает, что последовательность невязок является строго монотонно убывающей. Поэтому с учетом того, что погрешность вычислений конечна и может быть задана, полученное при ее достижении значение параметров $\mathbf{a}$ может быть принято за решение.

4. Заключение

Рассмотрена задача поиска решения системы нелинейных уравнений с непрерывными функциями в левых частях. Доступной априорной информацией об этих функциях являются только их значения. Для поиска решений при таких условиях используется итерационная процедура с параметрами, с

помощью управления значениями которых можно обеспечить ее сходимость в каком-либо смысле.

Предлагается использовать идеи подкрепления, достаточно активно развиваемые в теории и практике машинного обучения. Разработана самообучающаяся процедура, в которой на каждом шаге итераций производится заданное количество МК-испытаний, имитирующих стратегии агента, которыми в данном случае являются значения параметров итерационной процедуры. Функции среды в данной процедуре выполняет функционал невязки (3.2), а его реакцией на действия агента является декремент (3.3) этого функционала. Для приемлемого течения итерационного процесса необходимо, чтобы декремент уменьшался. Величина декремента характеризуется функцией полезности экспоненциального типа, в терминах которой меньшим (с учетом знака) значениям декремента соответствуют большие значения функции полезности. Действия агента, т.е. реализованные параметры итерационной процедуры, оцениваются функцией выигрыша, морфология которой учитывает как состояние среды, так и степень успешности действий агента.

Доказано, что в результате применения указанной процедуры самообучения итерационный алгоритм с подкреплением генерирует строго монотонно убывающую последовательность функционалов невязки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином, 2003.
3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
4. *Стрекаловский А.С.* Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск, Наука, 2003.
5. *Lyle C., Rowland M., Dabney W., Kwiatkowska M., Gal Y.* Learning dynamics and generalization in deep reinforcement learning // Int. Conf. on Machin. Learning. PMLR. 2022. P. 14560–14581.
6. *Che Wang, Shushan Yaun, Keit W. Ross.* On the Convergence of the Monte Carlo Exploring Starts Algorithm for Reinforcement Learning. ICLR. 2022.
7. *Уоссерман Ф.* Нейрокомпьютерная техника. Теория и практика. М.: Мир, 1992.
8. *Kohonen T.* Self-organizing Maps. Springer Berlin, Heidelberg, 1995.
9. *Mnih V., Kavukcuoglu K., Silver D., Rusu A.A., Veness J., Bellemare M.G., Graves A., Riedmiller M., Fiedjeland A.* Human-level control through deep reinforcement learning // Nature. 2015. Vol. 518. No. 7540. P. 529–533.
10. *Sutton R.S., Barto A.G.* Introduction to reinforcement Learning. Cambridge, MIT press, 1998.
11. *Russel S.J., Norvig P.* Artificial Intelligence: A Modern Approach (Third Ed.) Prentice Hall, Upper Saddle River, 2010.

12. *van Hasselt H.* Reinforcement Learning in Continuous State and Action Spaces. In: Wiering M., van Otterio M.(eds.) Reinforcement Learning: State-of-the-Art, 2012. Springer Sciences & Business Media, P. 207–257.
13. *Ivanov S.* Reinforcement Learning Textbook // ArXiv, 2022.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.09746>
14. *Bozinovski S.* Crossbar Adaptive Array: The first connectionist network that solved the delayed reinforcement learning problem. In: Dobnikar A., Steele N.C., Pearson D.W., Albrecht R.F. (eds.) Artificial Neural Nets and Genetic Algorithms // Proc. Int. Conf. Portoroz, Slovenia, Springer Science & Business Media, 1999, P. 320–325.
15. *Watkins C., Dayan P.* Q-learning // Machine Learning. 1992. Vol. 8. No. 3–4. P. 279–292.
16. *van Hasselt H., Guez A., Silver D.* Deep reinforcement learning with double Q-learning // Proc. AAAI Conf. Artificial Intelligence. 2016. Vol. 30. No. 1. P. 2094–2100.
17. *Bellman R.* Dynamic Programming. Princeton University Press, 1957.
18. *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // The Annals of Mathematical Statistics. 1951. P. 400–407.

Статъя представена к публикации членом редколлегии Д.В. Виноградовым.

Поступила в редакцию 10.01.2024

После доработки 21.03.2024

Принята к публикации 30.03.2024

СОДЕРЖАНИЕ

Тематический выпуск

Вступительное слово	3
Борис Теодорович Поляк: список научных трудов	5
Александров В.А. Оптимизация выбора корней характеристического полинома при синтезе регулятора методом размещения полюсов	42
Балашов М.В., Биглов К.З., Тремба А.А. О некоторых задачах с многозначными отображениями	58
Глушченко А.И., Ласточкин К.А. Аппроксимационный подход к адаптивному управлению линейными нестационарными системами	86
Грязина Е.Н., Балуев Д.Ю. Исследование допустимых и предельных режимов работы энергетических систем	112
Попков Ю.С. Итерационные методы с самообучением для решения нелинейных уравнений	129

CONTENTS

Topical issue

Opening Remarks	3
Boris Polyak: The List of Research Works	5
Alexandrov V.A. Optimization of the Characteristic Polynomial Roots Choice for the Pole Placement Control Design	42
Balashov M.V., Biglov K.Z., Tremba A.A. On Some Problems with Multivalued Mappings	58
Glushchenko A.I., Lastochkin K.A. Approximation-Based Approach to Adaptive Control of Linear Time-Varying Systems	86
Gryazina E.N., Baluev D.Yu. Investigation of Feasible and Limiting Operating Regimes of Electric Power Systems	112
Popkov Y.S. Iterative Self-learning Methods for Solving Nonlinear Equations	129