



Российская Академия Наук

А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

7

И Ю Л Ъ

Москва

2024

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишнеvский В.М.,
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,
Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В.,
Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В.,
Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,
Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2024 г. В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ КВАДРАТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ МЕЖДУ ТРЕМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ПОДСИСТЕМАМИ

Для связанных систем с переключениями между тремя линейными дискретными подсистемами предлагается новый частотный критерий существования квадратичной функции Ляпунова, обеспечивающей устойчивость системы при произвольных переключениях. Применение критерия демонстрируется на примере системы третьего порядка.

Ключевые слова: дискретные системы с переключениями, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024070014, EDN: XSEHQE

1. Введение

Теория систем с дискретным временем активно развивается в последнее время. Различные аспекты этой теории рассматриваются в относительно недавних публикациях [1–7] (см. также приведенную в них библиографию). Здесь решается задача квадратичной устойчивости связанных [3] дискретных систем с переключениями между тремя линейными стационарными подсистемами при любых законах переключения. Термин «связная система» будет ясен из дальнейшего. Под квадратичной устойчивостью понимается устойчивость системы, которую можно установить с помощью функции Ляпунова из класса квадратичных форм или квадратичной функции Ляпунова (КФЛ). Для связанной системы с переключениями между двумя подсистемами эта задача эквивалентна [3] задаче абсолютной устойчивости дискретной системы с одной нелинейностью, и критерием квадратичной устойчивости такой системы является известный критерий Цыпкина [8]. В случае переключений между двумя подсистемами связность означает, что ранг разности матриц, определяющих переключаемые подсистемы, равен единице.

Частотный критерий существования КФЛ для связанных дискретных систем с переключениями между тремя линейными подсистемами получен в [3]. Недостатком этого критерия является избыточная громоздкость при его получении и избыточная громоздкость конечного результата. Эта громоздкость объясняется следующим. Квадратичная устойчивость системы с переключениями следует из существования общей квадратичной функции Ляпунова (ОКФЛ). В рассматриваемом случае существование ОКФЛ определяется

разрешимостью системы из трех линейных матричных неравенств (ЛМН) Ляпунова для дискретных систем. Эта система ЛМН является связной, и в [3] получено одно эквивалентное ей результирующее матричное неравенство (МН). Однако (а) это МН не является ЛМН и (б) частотные условия его разрешимости не удается получить на основании обобщенной леммы Калмана–Сеге–Попова [9, 10], как это было сделано в [3] в случае критерия Цыпкина. Чтобы преодолеть неудобство (б) в [3] с помощью дробно-линейного преобразования от системы ЛМН для дискретных систем делается переход к эквивалентной системе ЛМН Ляпунова для непрерывных систем. Результирующее МН для этой системы снова не является ЛМН, но условия его разрешимости установлены в [3] в форме частотного критерия на основании частотной теоремы [11, с. 54] (Курь лемма). Условия этого критерия выражаются через элементы «передаточной матрицы» для непрерывной системы, полученной в результате преобразования. После этого достаточно трудоемко эти элементы выражаются через элементы «передаточной матрицы» исходной дискретной системы.

Здесь с использованием нового результата (теорема 2 из [12]) для исходной системы из трех ЛМН Ляпуновского типа для дискретных систем удается получить эквивалентное ей результирующее МН, которое является ЛМН. Далее показывается, что разрешимость этого ЛМН устанавливается с помощью обобщенной леммы Калмана–Сеге–Попова в виде частотного критерия. В результате получен новый частотный критерий квадратичной устойчивости для рассматриваемых систем, что и является основной целью работы.

В разделе 2 приводится система из трех ЛМН Ляпунова для дискретных систем, к вопросу о разрешимости которой сводится задача квадратичной устойчивости рассматриваемых систем. Основной результат – частотный критерий квадратичной устойчивости – излагается в разделе 3. В разделе 4 приводится численный пример системы третьего порядка, для которой с помощью предлагаемого критерия аналитически найдена полная (по параметру) область квадратичной устойчивости.

2. Постановка задачи

В статье исследуется линейная дискретная система с переключениями

$$(1) \quad x(t+1) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \bar{A} = \{A_1, A_2, A_3\},$$

где $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $A(t) : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \bar{A}$ – отображение из множества \mathbb{Z}_+ неотрицательных целых чисел в \bar{A} . Матрицы A_s предполагаются устойчивыми (шуровыми, см. [13]), т.е. $r(A_s) = \max_{\nu} |\mu_{\nu}(A_s)| < 1$ при $s = \overline{1, 3}$, μ_{ν} – собственные числа матрицы A_s . Для исследования устойчивости системы с переключениями (1) будут использоваться КФЛ следующего вида (символ $\{\cdot\}^{\top}$ означает транспонирование):

$$(2) \quad v(x) = x^{\top} Lx, \quad L = L^{\top} = \|l_{ij}\|_{i,j=1}^n.$$

Известно [3], что существование КФЛ (2) определяется разрешимостью системы ЛМН

$$(3) \quad I_s = A_s^\top L A_s - L < 0, \quad s = \overline{1, 3}.$$

Система (1) является связной (см. [3]), если матрицы $\{A_1, A_2, A_3\}$ можно представить в виде

$$(4) \quad \begin{aligned} A_1 &= A, \\ A_2 &= A + b_1 c_1^\top, \\ A_3 &= A + b_2 c_2^\top, \end{aligned} \quad b_i, c_i \in \mathbb{R}^n.$$

В этом случае система (3) представима в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} I_1 &= A^\top L A - L < 0, \\ I_2 &= (A + b_1 c_1^\top)^\top L (A + b_1 c_1^\top) - L < 0, \\ I_3 &= (A + b_2 c_2^\top)^\top L (A + b_2 c_2^\top) - L < 0. \end{aligned}$$

Задачей является получение частотного критерия разрешимости системы ЛМН (5).

3. Системы с переключениями между тремя линейными дискретными системами

Для исследования разрешимости системы (5) используем теорему 2 из [12]. Далее символы « \bullet » обозначают элементы под главной диагональю симметрической матрицы, которые совпадают с соответствующими элементами над главной диагональю.

Теорема 1. Пусть в системе

$$(6) \quad I_1 < 0, \quad I_2 = I_1 + Q_1 < 0, \quad I_3 = I_1 + Q_2 < 0$$

неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной ν , т.е. $I_s = I_s(\nu)$, $s = \overline{1, 3}$, и $Q_j(\nu) = p_j(\nu)q_j^\top + q_j p_j^\top(\nu)$, где $p_j = p_j(\nu)$ зависит от ν линейно, а q_j от ν не зависит, $j = 1, 2$. Тогда система (6) эквивалентна одному МН

$$(7) \quad \widehat{I} = \begin{pmatrix} I_1(\nu) & p_1(\nu) + \frac{\tau_1}{2}q_1 & p_2(\nu) - p_1(\nu) + \frac{\tau_2}{2}q_2 - \frac{\tau_1}{2}q_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & \frac{\tau_1 - \tau_2 + \tau_3}{2} \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно $(\nu, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Применяя теорему 1 к системе (5), получим, что разрешимость системы (5) эквивалентна разрешимости одного МН относительно элементов матрицы L и трех дополнительных параметров τ_1, τ_2, τ_3 . Возможность применения теоремы 1 к системе (5) и вид получаемого в результате МН определяется из следующих соотношений. Матрице $I_1(\nu)$ соответствует матрица $A^\top LA - L$ из системы (5), т.е. $I_1(\nu) = I_1(L) = A^\top LA - L$ (роль параметра ν выполняет матрица L). Разница матриц $I_2 - I_1$ из (5) представима в виде $p_1 q_1^\top + q_1 p_1^\top$:

$$(8) \quad \begin{aligned} I_2 - I_1 &= A_2^\top LA_2 - A_1^\top LA_1 = (A + b_1 c_1^\top)^\top L(A + b_1 c_1^\top) - A^\top LA = \\ &= (A^\top L + c_1 b_1^\top L)(A + b_1 c_1^\top) - A^\top LA = \\ &= A^\top L b_1 c_1^\top + c_1 b_1^\top LA + c_1 b_1^\top L b_1 c_1^\top. \end{aligned}$$

Введем обозначения $p_1^0 = p_1^0(L) = A^\top L b_1$ и $\delta_{11} = \delta_{11}(L) = b_1^\top L b_1$, тогда

$$(9) \quad I_2 - I_1 = p_1^0 c_1^\top + c_1 (p_1^0)^\top + \delta_{11} c_1 c_1^\top = p_1 q_1^\top + q_1 p_1^\top,$$

где $p_1 = p_1(L) = A^\top L b_1 + \left(\frac{\delta_{11}(L)}{2}\right) c_1$, $q_1 = c_1$.

Аналогично, пусть $p_2^0 = p_2^0(L) = A^\top L b_2$ и $\delta_{22} = \delta_{22}(L) = b_2^\top L b_2$, тогда

$$(10) \quad I_3 - I_1 = p_2^0 c_2^\top + c_2 (p_2^0)^\top + \delta_{22} c_2 c_2^\top = p_2 q_2^\top + q_2 p_2^\top,$$

где $p_2 = p_2(L) = A^\top L b_2 + \left(\frac{\delta_{22}(L)}{2}\right) c_2$, $q_2 = c_2$.

Таким образом, в соответствии с теоремой 1 система (5) эквивалентна одному МН

$$(11) \quad \widehat{I} = \begin{pmatrix} A^\top LA - L & p_1(L) + \frac{\tau_1}{2} c_1 & p_2(L) - p_1(L) + \frac{\tau_2}{2} c_2 - \frac{\tau_1}{2} c_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & \frac{\tau_1 - \tau_2 + \tau_3}{2} \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно $(L, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Покажем, что разрешимость ЛМН (11) определяется на основании обобщенной леммы Калмана–Сеге–Попова [10].

Лемма 1. ЛМН (11) эквивалентно ЛМН

$$(12) \quad \begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top L \widehat{B} + \frac{\widehat{C} \tau}{2} \\ \widehat{B}^\top LA + \frac{\tau \widehat{C}^\top}{2} & \widehat{B}^\top L \widehat{B} - \Gamma \end{pmatrix} < 0,$$

где

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} \widehat{B}_1 & \widehat{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{C} = \begin{pmatrix} \widehat{C}_1 & \widehat{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 - \frac{\widehat{\tau}_1}{\widehat{\tau}_2} c_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{\tau}_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_1 & \frac{-\widehat{\tau}_1 + \widehat{\tau}_2 - \widehat{\tau}_3}{2} \\ \bullet & \widehat{\tau}_3 \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Необходимые и достаточные условия разрешимости ЛМН (12) определяются в форме частотного неравенства из обобщенной леммы Калмана–Сеге–Попова [9, 10]. В результате получаем следующий критерий квадратичной устойчивости системы (1).

Теорема 2. Пусть матрица A шурова ($r(A) < 1$) и существуют числа $\widehat{\tau}_s > 0$, $s = \overline{1, 3}$, такие что $\Gamma > 0$ и частотное неравенство

$$(13) \quad D(\lambda) = \Gamma + \operatorname{Re} [\tau \widehat{C}^\top (A - \lambda E_n)^{-1} \widehat{B}] > 0$$

выполняется при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, где E_n – единичная ($n \times n$)-матрица ($\operatorname{Re} W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ – эрмитово сопряженная к W , здесь и далее символ $\{\overline{\cdot}\}$ означает комплексное сопряжение, знак неравенства означает положительную определенность эрмитовой формы). Тогда связанная система (1) имеет ОКФЛ (система (5) разрешима, система (1) устойчива). Если система (5) разрешима, то такой набор чисел $\widehat{\tau}_s > 0$, $s = \overline{1, 3}$, существует.

Выпишем частотное условие (13) более детально. Логично считать $W(p) = C^\top (A - pE_n)^{-1} B$, $p \in \mathbb{C}$, аналогом передаточной матрицы для системы (1). Здесь $C = (c_1 \ c_2)$, $B = (b_1 \ b_2)$. Введем обозначение $\Delta(p) = (A - pE_n)^{-1}$, тогда

$$(14) \quad W(p) = C^\top \Delta(p) B = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где } w_{ij}(p) = c_i^\top \Delta(p) b_j.$$

Далее для простоты уберем «крышки» и вместо $\widehat{\tau}_s$ будем использовать τ_s . Для матрицы $D(\lambda)$ из (13) имеем

$$D(\lambda) = \Gamma + \operatorname{Re} \tau \widehat{W}(\lambda) = \Gamma + 1/2 \left[\tau \widehat{W}(\lambda) + \widehat{W}^*(\lambda) \tau^\top \right],$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\lambda) &= \widehat{C}^\top \Delta(\lambda) \widehat{B} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 - \frac{\tau_1}{\tau_2} c_1 \end{pmatrix}^\top \Delta(\lambda) \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) - w_{11}(\lambda) \\ w_{21}(\lambda) - \frac{\tau_1}{\tau_2} w_{11}(\lambda) & w_{22}(\lambda) - \frac{\tau_1}{\tau_2} w_{12}(\lambda) - w_{21}(\lambda) + \frac{\tau_1}{\tau_2} w_{11}(\lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Окончательно неравенство $D(\lambda) > 0$ из (13) перепишем в виде (для краткости используем w_{ij} вместо $w_{ij}(\lambda)$)

$$(15) \quad D(\lambda) = \Gamma + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\tau_1 \operatorname{Re} w_{11} & \tau_1 w_{12} + \tau_2 \overline{w_{21}} - 2\tau_1 \operatorname{Re} w_{11} \\ \overline{(\bullet)} & 2\tau_1 \operatorname{Re} (w_{11} - w_{12}) + 2\tau_2 \operatorname{Re} (w_{22} - w_{21}) \end{pmatrix} > 0.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 справедливо, если в ее формулировке неравенство (13) заменить неравенством (15), где $w_{ij} = w_{ij}(\lambda) = c_i^\top \Delta(\lambda) b_j$, $i, j = 1, 2$.

Если система (1) является системой с переключениями треугольного типа (см. [3]), т.е. $c_1 = c_2 \triangleq c$, тогда $w_{11} = w_{21} \triangleq W_1 = c^\top \Delta(\lambda) b_1$, $w_{22} = w_{12} \triangleq W_2 = c^\top \Delta(\lambda) b_2$. В этом случае неравенство (15) можно переписать в виде

$$(16) \quad D(\lambda) = \begin{pmatrix} \tau_1(1 + \operatorname{Re} W_1) & \frac{-\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_1 W_2 + \tau_2 \overline{W_1}}{2} - \tau_1 \operatorname{Re} W_1 \\ \overline{(\bullet)} & \tau_3 + (\tau_2 - \tau_1)(\operatorname{Re} W_2 - \operatorname{Re} W_1) \end{pmatrix} > 0.$$

Замечание 2. Для системы (1) треугольного типа, т.е. при $c_1 = c_2 = c$, утверждение теоремы 2 справедливо, если в ее формулировке неравенство (13) заменить неравенством (16), где $W_j = W_j(\lambda) = c^\top \Delta(\lambda) b_j$, $j = 1, 2$.

Сравните условия (15) и (16) критерия теоремы 2 для связанных систем с переключениями и систем с переключенными треугольного типа с условиями теоремы 2 из [3] и их модификацией для систем треугольного типа (формулы (6.3)–(6.5) из [3]). Значительный прогресс очевиден.

Замечание 3. Неравенства (13), (15) и (16) линейны по параметру τ , поэтому, не ограничивая общности, в этих неравенствах можно положить $\tau_3 = 1$. Таким образом, в этих неравенствах останется только по два дополнительных параметра $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$.

Известный критерий Цыпкина [8] является критерием квадратичной устойчивости при переключениях между двумя подсистемами. Критерий теоремы 2 можно считать аналогом критерия Цыпкина при переключениях между тремя подсистемами.

4. Численное решение

Численное решение задачи о квадратичной устойчивости системы (1) состоит в применении стандартных программных средств для проверки разрешимости системы ЛМН (5) размерности $3n$ относительно $n(n+1)/2$ неизвестных. Использование результата леммы 1 позволяет вместо проверки системы (5) проверять разрешимость одного ЛМН (12) размерности $n+2$ относительно $n(n+1)/2 + 3$ неизвестных. Такой переход позволяет существенно упростить задачу, особенно при больших n .

5. Пример

Рассмотрим связную систему с переключениями вида (1) из примера в [3]. В этом примере матрицы A_s в (1) задаются соотношением (4), в котором

$$(17) \quad A_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & -1,5 \\ 0 & 0,5 & -1,5 \end{pmatrix}, \quad b_1 = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = c_2 = c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $k_i \geq 0$ – параметры, определяющие область устойчивости системы с переключениями. Тогда матрицы A_2 и A_3 имеют вид

$$(18) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & -1,5 \\ 0 & 0,5 & -1,5 + k_1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & -1,5 + k_2 \\ 0 & 0,5 & -1,5 \end{pmatrix}.$$

Далее на систему (1) с матрицами A_s из (17) и (18) будем ссылаться как на систему (1;17).

Повторное рассмотрение примера из [3] объясняется следующим. В примере из [3] при условии $k_1 = k_2 = k$ найдена полная область квадратичной устойчивости по параметру k . Этот результат получен с использованием необходимых (отдельно) и достаточных (отдельно) условий разрешимости системы ЛМН (5). Оказалось, что оценки по этим условиям совпадают. Это позволило сделать вывод о том, что найдена полная область. Заметим, что условия из [3] существенно используют то, что рассматривается система треугольного типа, т.е. при $c_1 = c_2 = c$.

Задачей настоящего раздела является повторение результата из [3] на основании критерия теоремы 2. Хотя далее будет использоваться вариант теоремы 2 из замечания 2, но в самой теореме 2 требование «треугольности» не фигурирует.

Ниже используются вспомогательные выкладки из [3]. Матрица A_1 очевидно шурова, $|\mu_i(A_1)| < 1$, так как $\mu_i(A_1) = -0,5$, $i = \overline{1,3}$. Матрица A_2 шурова при $k_1 \in [0; 3,375]$, а матрица A_3 шурова при $k_2 \in [0; 0,25]$.

Функции $W_j(\lambda) = c^T(A - \lambda E_n)^{-1}b_j$ из (16) имеют вид

$$W_1(\lambda) = -8k_1\lambda^2/(2\lambda + 1)^3 \quad \text{и} \quad W_2(\lambda) = -4k_2\lambda/(2\lambda + 1)^3,$$

$\det(A - \lambda E) = -(0,5 + \lambda)^3$. Проверку неравенства (16) нужно проводить при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, таких что $|\lambda| = 1$. Для множества $|\lambda| = 1$ используем параметризацию $\lambda = \frac{1-i\omega}{1+i\omega}$ при всех $\omega \in [-\infty, \infty]$. Вычислим $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ при $\lambda = \frac{1-i\omega}{1+i\omega}$. Выпишем отдельно действительную и мнимую части $W_j\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right)$,

одновременно вводя упрощающие обозначения $\operatorname{Re} W_j \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega} \right) = R_j(\omega) = R_j$ и $\operatorname{Im} W_j \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega} \right) = I_j(\omega) = I_j$ (см. [3]):

$$(19) \quad \begin{aligned} R_1 &= R_1(\omega) = \operatorname{Re} W_1 \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega} \right) = \frac{-8k_1(1+\omega^2)(27+18\omega^2-\omega^4)}{(9+\omega^2)^3}, \\ I_1 &= I_1(\omega) = \operatorname{Im} W_1 \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega} \right) = \frac{-64k_1\omega^3(1+\omega^2)}{(9+\omega^2)^3}, \\ R_2 &= R_2(\omega) = \operatorname{Re} W_2 \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega} \right) = \frac{-4k_2(1+\omega^2)(27-36\omega^2+\omega^4)}{(9+\omega^2)^3}, \\ I_2 &= I_2(\omega) = \operatorname{Im} W_2 \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega} \right) = \frac{-4k_2(1+\omega^2)(54\omega-10\omega^3)}{(9+\omega^2)^3}. \end{aligned}$$

В терминах (19) неравенство (16) примет вид

$$D(\omega) = \begin{pmatrix} \tau_1(1+R_1) & \frac{-\tau_1+\tau_2-\tau_3+\tau_1R_2+\tau_2R_1-2\tau_1R_1}{2} + i\frac{\tau_1I_2-\tau_2I_1}{2} \\ \overline{(\bullet)} & \tau_3+(\tau_2-\tau_1)(R_2-R_1) \end{pmatrix} > 0.$$

Считаем далее $k_2 = k_1 = k$ и сделаем замену $\omega^2 = y \geq 0$. Требуется определить наибольшую область $[0, k^*)$, для которой существует набор параметров $\tau_i > 0$, $j = 1, 2, 3$, таких, что при $k \in [0, k^*)$ неравенство $D(\omega) \cong D(y) > 0$ выполняется при всех $y \geq 0$. Проверка неравенства $D(y) > 0$ сводится к проверке неравенств (достаточно А и С):

$$A: D_{11} = \tau_1(1+R_1) > 0, \quad B: D_{22} = \tau_3+(\tau_2-\tau_1)(R_2-R_1) > 0, \quad C: \det D(y) > 0,$$

где $D_{ij} = D_{ij}(y)$, $i, j = 1, 2$, – элементы матрицы $D(y)$. Неравенство А эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} P_1(y) &= (9+y)^3 D_{11}(y) = \tau_1(1+R_1) = \\ &= \tau_1(9+y)^3 - 8\tau_1k(1+y)(27+18y-y^2) = \\ &= \tau_1(1+8k)y^3 + \tau_1(27-136k)y^2 + \tau_1(243-360k)y + \tau_1 27(27-8k) > 0. \end{aligned}$$

Проверка неравенства А совпадает с проверкой неравенств (7.4) и (7.5) из [3]. В [3] показано, что при $k < 0,44$ неравенство $P_1(y) > 0$ выполнено при всех $y \geq 0$.

В соответствии с замечанием 3 далее считаем $\tau_3 = 1$ и пусть для краткости $\tau_2 - \tau_1 \triangleq \delta$. Тогда проверка неравенства В сводится к проверке неравенства

$$\begin{aligned} P_2(y) &= (9+y)^3 D_{22}(y) = (9+y)^3 + 4k\delta(1+y)(27+72y-3y^2) = \\ &= (1-12k\delta)y^3 + (27+276k\delta)y^2 + (243+396k\delta)y + 729+108k\delta > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство С:

$$\det D = D_{11}D_{22} - D_{12}\overline{D_{12}} = D_{11}D_{22} - (\operatorname{Re}D_{12})^2 - (\operatorname{Im}D_{12})^2 > 0.$$

Введем обозначения $P_3(y) \triangleq 2(9+y)^3 \operatorname{Re} D_{12}$ и $P_4(y) \triangleq 2(9+y)^3 \operatorname{Im} D_{12}$, тогда

$$\begin{aligned} P_3(y) &= 2(9+y)^3 \operatorname{Re} D_{12}(y) = 2(\tau_1(R_2 - R_1) + \delta R_1 + \delta - 1)(9+y)^3, \\ P_4(y) &= 2(9+y)^3 \operatorname{Im} D_{12}(y) = 2(\tau_1 I_2 - \tau_2 I_1)(9+y)^3. \end{aligned}$$

Используя выражения из (19), получаем

$$\begin{aligned} P_3(y) &= y^3[4k(2\delta - 3\tau_1) + \delta - 1] + y^2[27(\delta - 1) + 4k(69\tau_1 - 34\delta)] + \\ &\quad + y[9(27(\delta - 1) - 40k\delta + 44k\tau_1)] + [27(27(\delta - 1) - 4k(2\delta - \tau_1))], \\ P_4(y) &= 4k\tau_1\sqrt{y}(1+y)(10y - 54) + 64k\tau_2y\sqrt{y}(1+y) = \\ &= 4k\sqrt{y}(1+y)(\tau_1(10y - 54) + 16\tau_2y). \end{aligned}$$

Неравенство С эквивалентно неравенству

$$(20) \quad P(y) \triangleq (9+y)^6 \det D(y) = P_1(y)P_2(y) - \frac{1}{4}P_3(y)^2 - \frac{1}{4}P_4(y)^2 > 0.$$

Многочлен $P(y)$ – многочлен шестой степени по переменной y . Коэффициенты этого многочлена $f_s = f_s(k)$ при y^s считаем функциями k , зависящими от дополнительных параметров τ_1 и τ_2 . Коэффициент $f_6(k)$ этого многочлена при y^6 равен

$$f_6(k) = \tau_1(1 + 8k)(1 - 12k\delta) - (1/4)[4k(2\delta - 3\tau_1) + \delta - 1]^2.$$

Необходимым условием выполнения $P(y) > 0$ при всех $y \geq 0$ будет $f_6(k) \geq 0$. Функция $f_6(k)$ представляет собой многочлен второй степени по переменной k . Коэффициент этого многочлена при k^2 равен $a_6 = -96\tau_1\delta - 4(2\delta - 3\tau_1)^2 = -4(2\tau_2 + \tau_1)^2$, т.е. $a_6 < 0$ всегда, так как $\tau_j > 0$. Из этого следует, что $f_6(k)$ является вогнутой функцией. Оценкой сверху для искомой области $[0, k^*)$ является полуинтервал $[0; 0,25)$ – область шуровости матрицы A_3 . Проверим значения $f_6(0)$ и $f_6(0,25)$:

$$\begin{aligned} f_6(0) &= \tau_1 - (1/4)(\delta - 1)^2, \\ f_6(0,25) &= \tau_1(1 + 2)(1 - 3\delta) - (1/4)((2\delta - 3\tau_1) + \delta - 1)^2. \end{aligned}$$

Условие $f_6(0) > 0$ дает оценку на параметры $4\tau_1 > (\delta - 1)^2$. Преобразуем выражение для $f_6(0,25)$:

$$f_6(0,25) = 3\tau_1(1 - 3\delta) - \frac{1}{4}(3\delta - 3\tau_1 - 1)^2 = -\frac{1}{4}(3\delta + 3\tau_1 - 1)^2 = -\frac{1}{4}(3\tau_2 - 1)^2.$$

Из этого следует, что $f_6(0,25) < 0$ при всех значениях параметров, кроме $\tau_2 = 1/3$. Таким образом, единственной возможностью получить наибольшую область $[0, k^*)$, в которой $f_6(0,25) > 0$, это положить $\tau_2 = 1/3$. Если взять $\tau_2 = 1/3$ и определить τ_1 так, чтобы $f_6(0) > 0$, то из вогнутости $f_6(k)$ следует, что $f_6(k) > 0$ при всех $k \in [0; 0,25)$. Отчасти наугад, отчасти чтобы получить $\delta = 0$, положим $\tau_1 = \tau_2 = 1/3$. В этом случае $f_6(0) = 1/12 > 0$.

Оказывается, что при $\tau_1 = \tau_2 = 1/3$ все оставшиеся коэффициенты $f_s(k)$, $s = 0, \dots, 5$, многочлена $P(y) = \sum_{s=0}^6 f_s(k)y^s$ из (20) являются вогнутыми функциями по k . Кроме этого, для значений этих функций в крайних точках полуинтервала $[0; 0,25)$ выполнены неравенства $f_s(0) > 0$ и $f_s(0,25) > 0$, $s = 0, \dots, 5$. Утомительную проверку этого факта средствами элементарной алгебры здесь опустим. Таким образом, получаем, что $f_s(k) > 0$ при всех $k \in [0; 0,25)$, $s = 0, \dots, 6$. Следовательно, неравенство (20) выполнено при всех $y \geq 0$. На основании теоремы 2 заключаем, что область квадратичной устойчивости системы (1;17) исчерпывается множеством $[0; 0,25)$. Поскольку эта область совпадает с областью шуровости определяющих систему (1;17) матриц $\{A_1, A_2, A_3\}$ по параметру $k_1 = k_2 = k$, то найденная область является полной областью устойчивости системы (1;17) при произвольных переклчениях.

6. Заключение

Для связной системы с переключениями между тремя линейными дискретными подсистемами получен критерий существования КФЛ как в форме частотного условия, так и в форме условий разрешимости одного ЛМН. Приведен пример системы третьего порядка, для которой с помощью предлагаемого частотного критерия аналитически найдена полная область (по параметру k) квадратичной устойчивости, которая в рассматриваемом случае совпадает с полной областью устойчивости системы (1;17) при произвольных переключениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Определим новые параметры

$$\hat{\tau}_1 \triangleq \delta_{11} + \tau_1, \quad \hat{\tau}_2 \triangleq \delta_{22} + \tau_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} p_1(L) + \frac{\tau_1}{2}c_1 &= A^\top Lb_1 + \frac{\delta_{11}}{2}c_1 + \frac{\tau_1}{2}c_1 = A^\top L\hat{B}_1 + \frac{\hat{\tau}_1}{2}\hat{C}_1, \\ p_2(L) - p_1(L) + \frac{\tau_2}{2}c_2 - \frac{\tau_1}{2}c_1 &= \\ \text{(П.1)} \quad &= A^\top Lb_2 - A^\top Lb_1 + \frac{\delta_{22} + \tau_2}{2}c_2 - \frac{\delta_{11} + \tau_1}{2}c_1 = \\ &= A^\top L(b_2 - b_1) + \frac{\hat{\tau}_2}{2}c_2 - \frac{\hat{\tau}_1}{2}c_1 = A^\top L\hat{B}_2 + \frac{\hat{\tau}_2}{2}\hat{C}_2. \end{aligned}$$

Осталось представить матрицу $\begin{pmatrix} -\tau_1 & \frac{\tau_1 - \tau_2 + \tau_3}{2} \\ \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix}$ в виде $(\widehat{B}^\top L \widehat{B} - \Gamma)$.

Учитывая $b_1^\top L b_2 \triangleq \delta_{12}$ и $b_2^\top L b_1 \triangleq \delta_{21}$, перепишем матрицу $\widehat{B}^\top L \widehat{B}$:

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \widehat{B}^\top L \widehat{B} &= \begin{pmatrix} b_1^\top & b_1^\top \\ b_2^\top & -b_1^\top \end{pmatrix} L \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^\top L & \\ b_2^\top L - b_1^\top L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} - \delta_{11} \\ \delta_{21} - \delta_{11} & \delta_{22} - 2\delta_{12} + \delta_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, требуется определить элементы матрицы $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_{i,j=1}^n$ так, чтобы

$$(II.3) \quad \begin{pmatrix} -\tau_1 & \frac{\tau_1 - \tau_2 + \tau_3}{2} \\ \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} - \gamma_{11} & \delta_{12} - \delta_{11} - \gamma_{12} \\ \delta_{21} - \delta_{11} - \gamma_{21} & \delta_{22} - 2\delta_{12} + \delta_{11} - \gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как $-\tau_1 = \delta_{11} - \widehat{\tau}_1$, то из равенства между элементами $\{\cdot\}_{11}$ матриц из (II.3) следует $\gamma_{11} = \widehat{\tau}_1$. Учтем $-\tau_2 = \delta_{22} - \widehat{\tau}_2$, из равенства между элементами $\{\cdot\}_{12}$ получим

$$\frac{\tau_1 - \tau_2 + \tau_3}{2} = \frac{-\delta_{11} + \widehat{\tau}_1 + \delta_{22} - \widehat{\tau}_2 + \tau_3}{2} = \delta_{12} - \delta_{11} - \gamma_{12}.$$

Тогда

$$\delta_{11} + \delta_{22} + \widehat{\tau}_1 - \widehat{\tau}_2 + \tau_3 = 2\delta_{12} - 2\gamma_{12}.$$

Из равенства между элементами $\{\cdot\}_{22}$ имеем

$$-\tau_3 = \delta_{22} - 2\delta_{12} + \delta_{11} - \gamma_{22}.$$

Складывая два последних равенства, получаем

$$\widehat{\tau}_1 - \widehat{\tau}_2 = -2\gamma_{12} - \gamma_{22}.$$

Положим $\gamma_{22} = \widehat{\tau}_3$, тогда

$$\gamma_{12} = (-\widehat{\tau}_1 + \widehat{\tau}_2 - \widehat{\tau}_3)/2.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{pmatrix} -\tau_1 & \frac{\tau_1 - \tau_2 + \tau_3}{2} \\ \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} = (\widehat{B}^\top L \widehat{B} - \Gamma),$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_1 & \frac{-\widehat{\tau}_1 + \widehat{\tau}_2 - \widehat{\tau}_3}{2} \\ \bullet & \widehat{\tau}_3 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay // IET Control Theory Appl. 2018. V. 12. No. 6. P. 812–818.
2. *Проскурников А.В., Матвеев А.С.* Критерии Цыпкина и Джури-Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем // *АиТ.* 2018. № 6. С. 119–139.
3. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // *АиТ.* 2018. № 8. С. 3–26.
4. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // *АиТ.* 2019. № 11. С. 59–82.
5. *Александров А.Ю., Семенов А.Д., Фрадков А.Л.* Запаздывания и переключения не мешают размещать агентов на отрезке: дискретное время // *АиТ.* 2020. № 4. С. 79–93.
6. *Пакилин П.В., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями // *АиТ.* 2020. № 11. С. 93–111.
7. *Каменецкий В.А.* Дискретные попарно связные системы с переключениями и системы Лурье, критерий Цыпкина для систем с двумя нелинейностями // *АиТ.* 2022. № 9. С. 55–80.
8. *Цыпкин Я.З.* Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 1. С. 52–65.
9. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I, II // *АиТ.* 1967. № 9. С. 59–72; 1968. № 2. С. 81–101.
10. *Шепелявый А.И.* Абсолютная неустойчивость нелинейных амплитудно-импульсных систем управления. Частотные критерии // *АиТ.* 1972. № 6. 49–56.
11. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
12. *Каменецкий В.А.* Матричные неравенства в теории устойчивости: новые результаты на основе теоремы о свертывании // *АиТ.* 2023. №2. С. 103–121.
13. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 506 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакилиным.

Поступила в редакцию 14.03.2024

После доработки 21.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024

© 2024 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
В.Ф. ФИЛАРЕТОВ, д-р техн. наук (filaretov@inox.ru)
(Институт автоматика и процессор управления ДВО РАН, Владивосток),
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (zuev@dvo.ru)
(Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.com)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

МЕТОД ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛНОЙ ИЛИ ЧАСТИЧНОЙ РАЗВЯЗКОЙ ОТ ДЕФЕКТОВ¹

Рассматривается задача получения свойства отказоустойчивости в технических системах, описываемых нелинейными динамическими моделями, за счет введения обратной связи, обеспечивающей полную или частичную развязку от дефектов. Решение основано на выделении подсистемы, нечувствительной или малочувствительной к дефектам, и последующем ее анализе. Для решения используется логико-динамический подход, оперирующий только методами линейной алгебры. Изложенное иллюстрируется практическим примером.

Ключевые слова: нелинейные системы, дефекты, развязка, обратная связь, сингулярное разложение.

DOI: 10.31857/S0005231024070026, **EDN:** XSBNVL

1. Введение

Современные технические системы (роботы, системы управления) подвержены действию различных дефектов, возникающих в их составных частях. Одним из способов устранения влияния таких дефектов является резервирование [1], что, однако, связано с введением значительной избыточности и не всегда реализуемо на практике. Более перспективным подходом к повышению надежности, безопасности и эффективности таких систем является использование методов технической диагностики, которые в реальном масштабе времени должны обеспечить обнаружение возникающих дефектов, а также определение величин изменившихся параметров системы и ошибок в показаниях их датчиков, после чего обеспечивается оперативное парирование всех идентифицированных изменений, приводящих к нежелательным последствиям.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект FZNS-2023-0011).

Различные методы технической диагностики обстоятельно изложены в [2], где также приведена основная терминология в этой области вместе с соответствующими англоязычными терминами. Согласно [2] под дефектом понимается недопустимое отклонение по крайней мере одного из характеристических свойств или переменных системы от стандартного (номинального) поведения. В настоящей работе это отклонение представлено неизвестной ограниченной функцией времени $d(t)$, добавляемой к тем или иным компонентам вектора состояния системы в зависимости от места появления дефекта.

Известно [3], что адаптивные системы, предназначенные для парирования последствий дефектов и изменений параметров объектов управления, можно разделить на две большие группы: системы с самонастройкой структуры (самоорганизующиеся системы) и системы с самонастройкой параметров (собственно самонастраивающиеся системы). В системах с самонастройкой структуры производится внесение определенных структурных изменений в диагностируемую систему, т.е. выполняется ее реконфигурация с целью удаления отказавших элементов и использования резервных. В самонастраивающихся системах, отнесенных ко второй группе, в зависимости от изменения параметров объекта управления, возникающих дефектах или внешних воздействий настраиваются только те или иные параметры используемого регулятора по некоторому алгоритму, заложенному в устройстве самонастройки. При этом система с дефектами и изменившимися параметрами должна продолжить свое функционирование, сохраняя свои важнейшие характеристики в допустимых пределах.

Каждый из перечисленных подходов имеет свои особенности, которые в определенной степени ограничивают область их практического применения. В частности, возможность привлечения резервных элементов ограничивается предельно допустимыми конструктивными и эксплуатационными (массогабаритными, энергетическими и т.п.) характеристиками конкретных роботов.

Примерами реализации такого подхода могут служить работы [4, 5]. В первой авторами решена задача отказоустойчивого управления подводными роботами при выходе из строя одного из двигателей, во второй – при неисправностях электроприводов, установленных в сочленениях манипулятора. В обоих случаях предполагается отключение неисправного исполнительного привода и последующее распределение его управляющих воздействий между остальными с дополнительным подключением резервных. Недостатком таких систем является необходимость наличия избыточного количества исполнительных элементов у роботов, что усложняет конструкцию и значительно увеличивает стоимость роботов. Кроме того, целесообразность использования резерва должна обосноваться дополнительными расчетами показателей надежности. Это связано с тем, что резервные элементы, как правило, имеют такую же надежность, что и замещаемые. В результате возможность повышения надежности роботов за счет резервирования существенно ограничена. Методы адаптации к дефектам, основанные на самонастройке, позволяют избежать дополнительных аппаратурных затрат, но использование

этих методов допускает деградацию некоторых (обычно второстепенных) показателей функционирования роботов, что может отразиться на их тактико-технических характеристиках, а в ряде случаев даже потребовать корректировки выполняемой миссии.

Известны отказоустойчивые самонастраивающиеся системы с эталонной моделью, принципы построения которых приведены в [6, 7]. Основной особенностью систем этого типа является наличие в явном виде технического устройства (модели), которое обладает заданными динамическими свойствами. При этом динамику всей системы в целом сводят к желаемой динамике модели. Такие системы адаптации к дефектам и переменным параметрам нашли применение как в наземной, так и в подводной робототехнике [8–10], обеспечивая качественное управление роботами с помощью достаточно простых средств без идентификации параметров, обусловленных появлением дефектов или другими внешними факторами, в процессе их работы. В качестве основного недостатка таких систем следует отметить наличие высокочастотных колебаний в контуре самонастройки, что в некоторых случаях может значительно снизить качество адаптации к возникающим дефектам и переменным параметрам. Кроме того, при работе таких систем не производится определение отклонений параметров от своих номинальных значений, что при появлении критических дефектов (например, замыкании части витков обмотки якорных цепей электродвигателей, появлении существенных внешних моментов на валах двигателей) не позволит провести своевременную остановку работы роботов, и тем самым предотвратит их дальнейшую поломку. Указанные системы также не позволяют учитывать возникающие ошибки в показаниях датчиков роботов.

Часто для компенсации последствий возникающих дефектов и отклонений параметров от номинальных значений в технике используют оптимально-робастные [11–13] принципы построения адаптивных систем. Преимуществом таких систем является достаточно высокая робастность к неопределенным параметрам роботов, однако их синтез проводится по линеаризованной модели, что ограничивает их использование для отказоустойчивого управления пространственным движением сложных динамических объектов.

В настоящее время одним из наиболее распространенных видов робастных систем управления являются системы с переменной структурой, работающие в скользящем режиме. Примеры их использования для отказоустойчивого управления роботами приведены в [14–17]. Несмотря на то, что системы управления с адаптацией к возникающим дефектам и отклонениям параметров на основе систем с переменной структурой обладают рядом существенных преимуществ по сравнению с другими видами отказоустойчивых систем, они обладают также и недостатком, который заключается в том, что для обеспечения работоспособности системы с переменной структурой во всем диапазоне изменения параметров роботов эти системы синтезируются с учетом «наихудшего» случая, когда эти параметры обеспечивают наименьшее быстроедействие системы. В результате даже при отсутствии дефектов будут

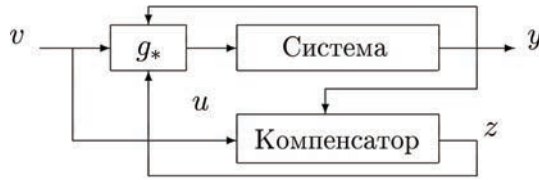


Рис. 1. Схема реализации предлагаемого решения.

формироваться дополнительные сигналы управления, что увеличит амплитуду формируемых сигналов управления, расход энергии и, следовательно, снизит время автономной работы. То есть отказоустойчивые системы управления данного типа обладают заведомо заниженным быстродействием.

Рассмотренные выше подходы и методы проиллюстрированы в основном примерами роботов, однако их особенности справедливы и для многих современных технических систем.

Определенной альтернативой рассмотренным методам являются подходы на основе полной или частичной развязки от дефектов, когда дефект обнаруживается, но величины изменившихся параметров системы не определяются, а управляющее воздействие на систему корректируется за счет использования специально построенного компенсатора и нового управления, что позволяет системе выполнять свои основные операции с прежним или допустимо пониженным качеством. Предполагается, что выполнение этих операций зависит не от всех компонент вектора состояния системы, а только от определенной их части, которая задается известной функцией, и эти компоненты требуется полностью или частично развязать от дефектов, возможных в системе.

Схема реализации предлагаемого решения представлена на рис. 1, где $u(t)$ и $y(t)$ – векторы управления и выхода системы, $z(t)$ – вектор состояния компенсатора, $v(t)$ – новое управление, g_* – функция, определяемая ниже. Если управление $u(t)$ было построено для выполнения системой определенных операций, то новое управление $v(t)$ должно быть построено для выполнения этих же операций в системе с компенсатором с прежним или допустимо пониженным качеством.

Подход имеет определенные ограничения, образно можно сказать, что он может быть реализован тогда, когда между местом, где возникает дефект, и переменными системы, которые требуется развязать от этого дефекта, имеется управляющий сигнал, с использованием которого и осуществляется развязка.

Такой подход для систем, описываемых нелинейными разностными уравнениями, был реализован в [18, 19] на основе полной развязки с использованием достаточно сложного математического аппарата алгебры функций. В отличие от этого, в настоящей работе рассматриваются системы, заданные нелинейными дифференциальными уравнениями, подверженные дефектам. Для такой системы требуется найти описание компенсатора и функцию g_* ,

которые позволяют полностью или частично развязать от дефектов заданные компоненты вектора состояния системы.

Проблема определения нового управления $v(t)$ в работе не рассматривается, поскольку это управление зависит от задач, решаемых системой, и может быть определено при конкретизации этих задач. После построения компенсатора новое управление может быть определено известными методами [20], сам компенсатор зависит от заданных компонент вектора состояния системы, места появления дефекта и не зависит от задач, решаемых системой.

Отметим, что для аффинных систем подобная задача решалась в [21] на основе полной развязки достаточно сложными методами дифференциальной геометрии. Новизна настоящей работы состоит в том, что рассматриваемые системы могут содержать негладкие нелинейности; для решения задачи используется логико-динамический подход [22], позволяющий при определенных ограничениях на класс решений анализировать нелинейные системы методами линейной алгебры. Кроме того, дополнительно к полной рассматривается и частичная развязка от дефектов.

Остальная часть работы построена следующим образом. В разделе 2 рассматриваются основные модели: приводятся описания заданной нелинейной системы и ее подмодели, на основе которой далее строится компенсатор. В разделе 3 строится подмодель, нечувствительная к дефектам, а разделе 4 – минимально чувствительная к ним. Раздел 5 посвящен построению компенсатора. Пример рассматривается в разделе 6, седьмой раздел завершает работу.

2. Основные модели

Рассматриваются системы, описываемые нелинейной моделью

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Dd(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F и G – известные постоянные матрицы, описывающие линейную динамику; H , C и D – известные постоянные матрицы, $d(t)$ – скалярная функция, описывающая дефекты: если они отсутствуют, то $d(t) = 0$, при их появлении $d(t)$ становится неизвестной ограниченной функцией времени; $\Psi(x, u)$ – нелинейная составляющая, представленная в виде

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1x, u) \\ \dots \\ \varphi_q(A_qx, u) \end{pmatrix},$$

A_1, \dots, A_q – известные постоянные матрицы-строки, $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ – произвольные нелинейные функции.

Замечание 1. Если в системе возможны несколько дефектов, то в общем случае для развязки от них требуется построить банк из нескольких компенсаторов. От дефектов в датчиках рассмотренным методом развязать

ся невозможно; если величина такого дефекта неизвестна, то необходимо исключить из системы управления показания соответствующего датчика или использовать вместо него виртуальный датчик [23].

Отметим, что нелинейная система (2.1) может быть получена из нелинейной системы общего вида

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), d(t)), \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

за счет выполнения ряда преобразований [22].

Предполагается, что дефекты в системе приводят к изменению значения ее некоторого параметра, в результате чего $d(t)$ представляет собой произведение этого изменения на некоторую компоненту вектора $x(t)$ или $u(t)$ и является неизвестной ограниченной функцией времени; место появления дефекта указывает матрица D . Дефект может быть обнаружен и локализован известными методами технической диагностики (см., например, [2]), но функция $d(t)$ остается неизвестной.

Предполагается также, что функция от компонент вектора состояния $x(t)$ системы, для которой требуется обеспечить полную или частичную развязку от дефектов, задана известной матрицей H_0 , определяющей переменную $y_0(t) = H_0 x(t)$. Такая развязка обеспечивается за счет введения в систему динамической обратной связи, которая реализуется с помощью компенсатора, в общем случае описываемого нелинейными уравнениями

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= \varphi(z(t), v(t), y(t)), \\ u(t) &= g_*(z(t), v(t), y(t)), \end{aligned}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^k$ – вектор состояния компенсатора размерности $k < n$, $v(t)$ – новое управление, функции φ и g_* подлежат определению. При этом переменная $y_0(t)$ должна выражаться через вектор состояния $z(t)$.

Для дискретного аналога системы (2.2) задача нечувствительности (или полной развязки) к возмущениям и дефектам с помощью обратной связи была решена в общем виде в [18, 19] на основе достаточно сложного математического аппарата алгебры функций. В настоящей работе задача полной или частичной развязки, обеспечивающей нечувствительность или минимальную чувствительность к дефектам, решается для системы (2.1) на основе логико-динамического подхода [22], оперирующего только методами линейной алгебры.

Решение поставленной задачи основывается на подмодели системы (2.1), не чувствительной или минимально чувствительной к появлению дефектов, и последующем построении на ее основе компенсатора. Отметим, что в [24] для решения задач построения интервальных наблюдателей строится подмодель минимальной размерности. В отличие от этого компенсатор, поставляющий обратную связь, строится на основе подмодели максимальной размерности $k < n$, что обеспечивает наилучшие условия выполнения равенства

$y_0(t) = H_0x(t)$. Такая подмодель описывается уравнением

$$(2.4) \quad \dot{x}_*(t) = F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + C_*\Psi_*(x_*(t), y(t), u(t)),$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ – вектор состояния подмодели размерности $k < n$, F_* , G_* , J_* , H_* и C_* – матрицы, подлежащие определению,

$$(2.5) \quad C_*\Psi_*(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{i_1}(A_{*1,i_1}x_* + A_{*2,i_1}y, u) \\ \dots \\ \varphi_{i_k}(A_{*1,i_k}x_* + A_{*2,i_k}y, u) \end{pmatrix},$$

A_{*1,i_1} , A_{*2,i_1} , \dots , A_{*1,i_k} , A_{*2,i_k} – матрицы, подлежащие определению; через $C_*\Psi_*$ обозначена функция $C_*\Psi$, в которой вектор x заменен на x_* и y на основе соотношения $A_i x = A_{*1,i}x_* + A_{*2,i}y$, $i = i_1, \dots, i_k$ – номера ненулевых столбцов матрицы C_* .

3. Построение подмодели, нечувствительной к дефектам

Уточним, что подмодель (2.4), на основе которой будет строиться компенсатор, – это виртуальный объект, фактически она представляет собой часть системы (2.1), динамика которой определяется вектором состояния x_* , связанным с вектором x соотношением $x_*(t) = \Phi x(t)$, где Φ – некоторая постоянная матрица. Отметим, что в общем случае эти векторы могут быть связаны нелинейной функцией, предположение о ее линейности – это ограничение на класс решений, характерное для логико-динамического подхода, который используется для решения задачи.

Известно [22, 24], что эта матрица удовлетворяет уравнениям

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Phi F &= F_*\Phi + J_*H, & \Phi G &= G_*, & \Phi C &= C_*, & \Phi D &= D_* \\ A_i &= (A_{*1,i} \ A_{*2,i}) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, & i &= i_1, \dots, i_k. \end{aligned}$$

Последнее равенство в (3.1) справедливо в том случае, когда

$$(3.2) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A' \end{pmatrix},$$

где матрица A' составлена из строк A_{i_1}, \dots, A_{i_k} .

Для решения поставленной задачи вводится дополнительное условие $y_0(t) = H_*x_*(t)$ для некоторой матрицы H_* , т.е. переменная $y_0(t) = H_0x(t)$ должна выражаться через вектор состояния компенсатора. Из $x_*(t) = \Phi x(t)$ отсюда следует условие

$$(3.3) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix}.$$

Если оно не выполняется, задача решения не имеет. При его выполнении матрица H_* определяется из уравнения $H_*\Phi = H_0$.

Чтобы обеспечить условие $\Phi D = D_* = 0$ нечувствительности к дефектам, введем матрицу D_0 максимального ранга такую, что $D_0 D = 0$. Тогда из $\Phi D = 0$ следует равенство $\Phi = N D_0$ для некоторой матрицы N . Заменяем в соотношении $\Phi F = F_* \Phi + J_* H$ матрицу Φ на $N D_0$: $N D_0 F = F_* N D_0 + J_* H$ и запишем полученное выражение в следующем виде, отделив неизвестные матрицы от известных:

$$(3.4) \quad \left(\begin{array}{ccc} N & -F_* N & -J_* \end{array} \right) \begin{pmatrix} D_0 F \\ D_0 \\ H \end{pmatrix} = 0.$$

Решение уравнения (3.4) позволяет определить матрицы F_* , J_* и N , что, в свою очередь, позволит найти матрицу Φ . Пусть составная матрица $(X \ Y \ Z)$ содержит все линейно независимые решения уравнения (3.4), т.е.

$$(3.5) \quad \left(\begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \right) \begin{pmatrix} D_0 F \\ D_0 \\ H \end{pmatrix} = 0.$$

Из сопоставления уравнений (3.4) и (3.5) следует равенство $Y = -F_* X$, из которого ясно, что матрицы Y и X не могут быть произвольными: строки матрицы Y должны линейно выражаться через строки матрицы X . Для учета последнего факта строки матрицы Y , линейно независимые от строк матрицы X , необходимо из нее удалить. Эта процедура реализуется с помощью алгоритма 1, где Y_j – j -я строка матрицы Y , $j = 1, \dots, p$, p – число строк матрицы Y .

Алгоритм 1.

1. Принять $j = 1$.
2. Если $\text{rank}(X) = \text{rank} \begin{pmatrix} X \\ Y_j \end{pmatrix}$, перейти к п. 4, в противном случае – к п. 3.
3. Удалить j -ю строку из матрицы $(X \ Y \ Z)$, принять $p := p - 1$ и перейти к п. 1.
4. Если $j < p$, принять $j := j + 1$ и перейти к п. 2, в противном случае конец процедуры.

Полученную в результате выполнения алгоритма матрицу обозначим $(X_0 \ Y_0 \ Z_0)$, для нее строки матрицы Y_0 линейно выражаются через строки матрицы X_0 . Примем $\Phi := X_0 D_0$, $C_* := \Phi C$ и построим матрицу A' ; если матрица Φ удовлетворяет условию (3.2), то нелинейный компенсатор, не чувствительный к дефекту, может быть построен. В противном случае полная развязка от влияния дефектов недостижима, необходимо обратиться к робастным методам. Если для этой матрицы не выполняется условие (3.3), задача решения не имеет.

Примем $J_* = -Z_0$ и $G_* = \Phi G$, матрица F_* определяется из алгебраического уравнения $Y_0 = -F_* X_0$, которое заведомо имеет решение, поскольку согласно алгоритму 1 Y_0 линейно выражаются через строки матрицы X_0 . Таким образом, матрицы, описывающие линейную часть подмодели, найдены.

Для построения нелинейной части принимаем $C_* = \Phi C$ и из уравнения (3.1) определяем матрицы $A_{*1,i}, A_{*2,i}, i = i_1, \dots, i_k$, что дает нелинейную составляющую (2.5) и в результате – подмодель (2.4).

4. Построение робастной подмодели

Если $(X_0 \ Y_0 \ Z_0) = 0$ или матрица Φ не удовлетворяет условию (3.2), то компенсатор, не чувствительный к дефектам, не может быть построен. В этом случае необходимо обратиться к робастным методам, позволяющим минимизировать вклад дефекта в модель (2.4). Для этого запишем соотношение $\Phi F = F_* \Phi + J_* H$ в виде, аналогичном (3.3), сняв ограничение $\Phi D = D_* = 0$ нечувствительности к дефектам и отделив неизвестные матрицы от известных:

$$(4.1) \quad (\Phi \ -F_* \Phi \ -J_*) \begin{pmatrix} F \\ E \\ H \end{pmatrix} = 0,$$

где E – единичная матрица. Теперь уравнение (4.1) может иметь решения, допускающие чувствительность модели к дефектам.

Как и выше, рассмотрим составную матрицу $(X \ Y \ Z)$, содержащую все линейно независимые решения уравнения (4.1), т.е.

$$(X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} F \\ E \\ H \end{pmatrix} = 0.$$

Применяя к матрице $(X \ Y \ Z)$ алгоритм 1, получим в результате матрицу $(X_* \ Y_* \ Z_*)$, для которой $Y_* = -MX_*$ с некоторой матрицей M . Если это уравнение имеет несколько решений, им будет соответствовать несколько матриц Φ : $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(s)}$. Определяя для каждой из них норму $\|\Phi^{(i)} D\|$, соответствующую вкладу дефекта в компенсатор, можно выбрать вариант с наименьшей нормой, соответствующей минимальному вкладу дефектов в подмодель.

Лучший результат можно получить, задавая матрицу Φ в виде $\Phi = \sum_{i=1}^s v_i \Phi^{(i)}$ и выбирая весовые коэффициенты v_1, \dots, v_s исходя из минимума нормы $\|\Phi D\|$. Такой подход, однако, возможен только в том случае, когда матрица F_* в выражении $\Phi F = F_* \Phi + J_* H$ остается неизменной для разных Φ . Реализуем этот подход, выбрав F_* в канонической форме

$$(4.2) \quad F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

что дополнительно позволит упростить процедуру синтеза. С учетом канонической формы (4.2) уравнения (3.1) принимают вид [22]

$$(4.3) \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \Phi_k F = J_{*k} H,$$

где Φ_i и J_{*i} – i -е строки матриц Φ и J_* , $i = 1, \dots, k$. Известно [22], что эти уравнения можно свернуть в одно:

$$(4.4) \quad (\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k})V^{(k)} = 0,$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \dots \\ H \end{pmatrix}.$$

Известно также [22], что задача минимизации вклада дефектов в подмодель сводится к минимизации нормы $\|\Phi D\| = \|(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k})D^{(k)}\|$ при выполнении условия (4.4), где

$$D^{(k)} = \begin{pmatrix} D & FD & F^2D & \dots & F^{k-1}D \\ 0 & HD & HFD & \dots & HF^{k-2}D \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

При решении этой задачи предлагается найти такое максимальное значение размерности $k < n$, при котором уравнение (4.4) имеет несколько (более одного) линейно независимых решений вида $(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k})$. Все эти решения в количестве s сводятся в матрицу W , каждая строка которой представляет некоторое решение уравнения (4.4):

$$W = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & -J_{*1}^{(1)} & -J_{*2}^{(1)} & \dots & -J_{*k}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_1^{(s)} & -J_{*1}^{(s)} & -J_{*2}^{(s)} & \dots & -J_{*k}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Из сказанного выше также следует, что решением является и произвольная линейная комбинация строк этой матрицы с вектором весовых коэффициентов $v = (v_1, \dots, v_s)$. Задача состоит в определении такого вектора v , который дает минимум нормы $\|vWD^{(k)}\|$.

Для решения этой задачи найдем сингулярное разложение матричного произведения $WD^{(k)}$, т.е. представим матрицу $WD^{(k)}$ в виде

$$WD^{(k)} = U_D \Sigma_D V_D,$$

где U_D и V_D – ортогональные матрицы, Σ_D в зависимости от соотношения чисел строк и столбцов матрицы $WD^{(k)}$ имеет вид

$$\Sigma_D = (\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_w) \quad 0)$$

или

$$\Sigma_D = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_w) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$w = \min(s, k)$, $0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_w$ – сингулярные числа матрицы $WD^{(k)}$ [22, 25]. Первый транспонированный столбец матрицы U_D выбирается в качестве

вектора весовых коэффициентов $v = (v_1, \dots, v_s)$. Из структуры сингулярного разложения и свойств ортогональных матриц следует, что норма матрицы $vWD^{(k)}$ равна минимальному сингулярному числу σ_1 [22], при этом $(\Phi_1 - J_{*1} - J_{*2} \dots - J_{*k}) = vW$. Далее из (4.3) определяются строки матрицы Φ и строится матрица A' ; если эта матрица удовлетворяет условиям (3.2) и (3.3), принимаем $G_* = \Phi G$, $C_* = \Phi C$ и из уравнения (3.1) определяем матрицы $A_{*1,i}$, $A_{*2,i}$, $i = i_1, \dots, i_k$, чем завершается синтез робастной модели. Отметим, что это решение будет оптимальным для выбранной размерности k ; ее изменение может дать лучший вариант решения задачи по критерию минимума нормы $\|(\Phi_1 - J_{*1} - J_{*2} \dots - J_{*k})D^{(k)}\|$. Если условие (3.2) или (3.3) не выполняется, нужно выбрать второй или последующие транспонированные столбцы матрицы U_D .

5. Построение компенсатора

Чтобы избежать путаницы в изложении, обозначим вектор состояния строящегося компенсатора как $z(t) := x_*(t)$, оставив обозначения для остальных элементов, в частности матрицы H_* и функции f_* , прежними.

Ниже предполагается, что условие (3.3) выполняется, т.е. $y_0 = H_*z$. Обозначим через X_y множество компонент вектора z , участвующих в формировании y_0 . Для построения компенсатора запишем модель (2.4) в компактном виде:

$$(5.1) \quad \dot{z}(t) = f_*(z(t), u(t), y(t)).$$

Если даже эта модель не содержит в явном виде неизвестную функцию $d(t)$ (когда достигается полная развязка), ее вектор состояния испытывает влияние дефектов из-за наличия в (5.1) вектора $y(t)$. Для построения компенсатора это влияние необходимо устранить путем корректировки вектора управления $u(t)$ за счет введения обратной связи с новым вектором управления $v(t)$. Приводимый ниже алгоритм производит необходимый анализ и формирует обратную связь, если это возможно. Обозначим через f_{*j} j -ю компоненту функции f_* .

Алгоритм 2.

1. Разбить компоненты вектора y на два непересекающиеся множества Y_g (*хорошие* – *good*) и Y_b (*плохие* – *bad*) по правилам: переменная y_i включается в Y_g , если она не входит в функцию f_* или y_i может быть выражена через компоненты вектора z ; в противном случае y_i включается в Y_b . Если $Y_b = \emptyset$, полная или частичная развязка от воздействия дефектов достигается без использования компенсатора, поскольку y_i в функции f_* можно заменить на функцию от вектора z .
2. Если $Y_b \neq \emptyset$, то для каждой $y_i \in Y_b$ найти такое z_j , что f_{*j} зависит от y_i и не зависит от u . Обозначим через X_b множество всех таких z_j , оно состоит из всех компонент вектора состояния, которые испытывают влияние дефекта из-за того, что в f_{*j} входит переменная y_i , не скомпенсированная за счет управления. Если $X_b = \emptyset$, перейти к п. 4.

3. Для каждого $z_j \in X_b$ найти функции f_{*i} , зависящие от z_j . Если все f_{*i} зависят от u , добавить z_j к Y_b и удалить его из X_b . Если для некоторого i это условие не выполняется, переменная z_i не может быть развязана от дефектов; если $z_i \in X_y$, т.е. эта переменная участвует в формировании переменной y_0 , задача решения не имеет. Если $z_i \notin X_y$, добавить z_i к X_b и продолжить выполнение п. 3 до тех пор, пока $X_b = \emptyset$ или X_b перестанет меняться. Итоговое множество Y_b содержит те переменные, которые будут участвовать в формировании обратной связи для компенсации влияния дефектов.
4. Найти в функции $f_*(z, u, y)$ все члены вида $\gamma_i(z, u, y)$, $i = 1, \dots, r$, зависящие от u и элементов из множества Y_b ; будем полагать, что $r \leq m$. Сформировать систему уравнений для нового вектора управления $v = (v_1 \dots v_m)^T$:

$$\begin{aligned} v_1 &= \gamma_1(z, u, y), \\ &\dots \\ v_r &= \gamma_r(z, u, y). \end{aligned}$$

Полагая, что эта система разрешима относительно переменных u_1, \dots, u_r , найти ее решение:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u_1 &= \gamma_1(z, u, y, v), \\ &\dots \\ u_r &= \gamma_r(z, u, y, v); \\ u_{r+1} &= v_{r+1}, \dots, u_m = v_m. \end{aligned}$$

Заменить в (5.1) вектор u вектором v согласно правилам (5.2), что дает динамическую часть компенсатора (2.3); его статическая часть совпадает с (5.2).

6. Пример

Рассмотрим нелинейную систему

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1/\vartheta_1 - a_1\sqrt{x_1 - x_2} - d, \\ \dot{x}_2 &= u_2/\vartheta_2 + a_1\sqrt{x_1 - x_2} - a_2\sqrt{x_2 - x_3}, \\ \dot{x}_3 &= a_2\sqrt{x_2 - x_3} - a_3\sqrt{x_3} - \vartheta_7, \\ y &= x_1, \end{aligned}$$

где $a_1 = \vartheta_4\sqrt{2\vartheta_8}/\vartheta_1$, $a_2 = \vartheta_5\sqrt{2\vartheta_8}/\vartheta_2$, и $a_3 = \vartheta_6\sqrt{2\vartheta_8}/\vartheta_3$. Приведенные уравнения описывают известную трехтанковую систему (рис. 2) [26], где $x_1, x_2,$

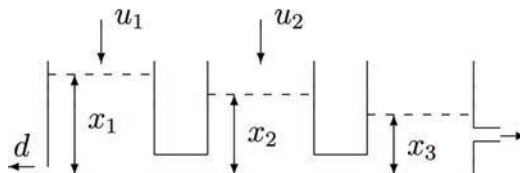


Рис. 2. Трехтанковая система.

x_3 – уровни жидкости в танках. Система состоит из трех танков сечением ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3 соответственно; танки соединяются трубами с сечениями ϑ_4 и ϑ_5 . Жидкость втекает в первый и второй танки и вытекает из третьего по трубе сечения ϑ_6 , расположенной на высоте ϑ_7 ; ϑ_8 – гравитационная постоянная. Управления u_1 и u_2 соответствуют поступающей извне жидкости. Ненулевое значение функции $d(t) > 0$ соответствует появлению утечки в первом танке, нечувствительной к ней должна быть переменная $y_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = x_3(t)$. Величина утечки предполагается неизвестной, поэтому ее нельзя компенсировать увеличением u_1 , необходимо использовать описанный выше метод.

Для простоты примем $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\vartheta_7 = 0$. Начальные условия и управление предполагаются таковыми, что $x_1(t) \geq x_2(t) \geq x_3(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$.

Ясно, что для (6.1) $F = 0$, и непосредственно применить рассмотренный подход невозможно. Для преодоления этой трудности преобразуем (6.1) введением формальных членов $-(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)$, $((x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)) - ((x_1 - x_2) - (x_2 - x_3))$ и $(x_2 - x_3 - x_3) - (x_2 - x_3 - x_3)$ в первое, второе и третье уравнения соответственно. Слагаемое $-(x_1 - x_2)$ добавляется к линейной части, $(x_1 - x_2)$ – к нелинейной; остальные члены рассматриваются аналогично. В результате система описывается следующими матрицами и нелинейностями:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = (1 \ 0 \ 0), \quad H_0 = (0 \ 0 \ 1),$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} -\sqrt{A_1 x} + A_1 x \\ -\sqrt{A_2 x} + A_2 x \\ -\sqrt{A_3 x} + A_3 x \end{pmatrix},$$

$$A_1 = (1 \ -1 \ 0), \quad A_2 = (0 \ 1 \ -1), \quad A_3 = (0 \ 0 \ 1).$$

Так как $D = (1 \ 0 \ 0)^T$, то $D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; уравнение (3.5) принимает вид

$$(X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

и имеет решение

$$(X \ Y \ Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что условие п. 2 алгоритма 1 выполняется для обеих строк матрицы Y , поэтому

$$(X_0 \ Y_0 \ Z_0) = (X \ Y \ Z),$$

откуда

$$J_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_* = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $H_0 = (0 \ 0 \ 1)$, условие (3.3) с очевидностью выполняется; матрица H_* определяется из уравнения $H_0 = H_*\Phi$ и имеет вид $H_* = (0 \ 1)$.

В результате линейная часть подмодели (2.4) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_{*1} &= u_2 - 2x_{*1} + x_{*2} + y, \\ \dot{x}_{*2} &= x_{*1} - 2x_{*2}, \end{aligned}$$

где $x_{*1} = \Phi_1 x = x_2$, $x_{*2} = \Phi_2 x = x_3$. Дополнительно $y_0 = H_* x_* = x_{*2}$, т.е. $X_y = \{x_{*2}\}$.

Поскольку в матрице $C_* = \Phi C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ все столбцы ненулевые, матрица A' содержит три строки A_1, A_2, A_3 ; условие (3.2) для нее выполняется. Решение уравнения (3.1) дает

$$A_{*1,1} = (-1 \ 0), \quad A_{*2,1} = 1, \quad A_{*1,2} = (1 \ -1), \quad A_{*2,2} = 0, \quad A_{*1,3} = (0 \ 1), \quad A_{*2,3} = 0.$$

В результате нелинейная составляющая (2.5) принимает вид

$$C_* \Psi_*(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \sqrt{y - x_{*1}} - (y - x_{*1}) - \sqrt{x_{*1} - x_{*2}} + (x_{*1} - x_{*2}), \\ \sqrt{x_{*1} - x_{*2}} - (x_{*1} - x_{*2}) - \sqrt{x_{*2}} + x_{*2} \end{pmatrix}.$$

Добавляя ее к линейной части, получаем в итоге описание нелинейной подмодели:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{*1} &= u_2 + \sqrt{y - x_{*1}} - \sqrt{x_{*1} - x_{*2}}, \\ \dot{x}_{*2} &= \sqrt{x_{*1} - x_{*2}} - \sqrt{x_{*2}}. \end{aligned}$$

Так как $y = x_1$ не выражается через вектор $z := x_*$, применение п. 1 алгоритма 2 дает $Y_g = \emptyset$, $Y_b = \{y\}$. Пункт 2 этого же алгоритма приводит к $X_b = \emptyset$, а п. 4 дает $r = 1$ и одно уравнение $v_2 = u_2 + \sqrt{y - z_1}$, которое с очевидностью разрешимо относительно u_2 :

$$u_2 = v_2 - \sqrt{y - z_1}.$$

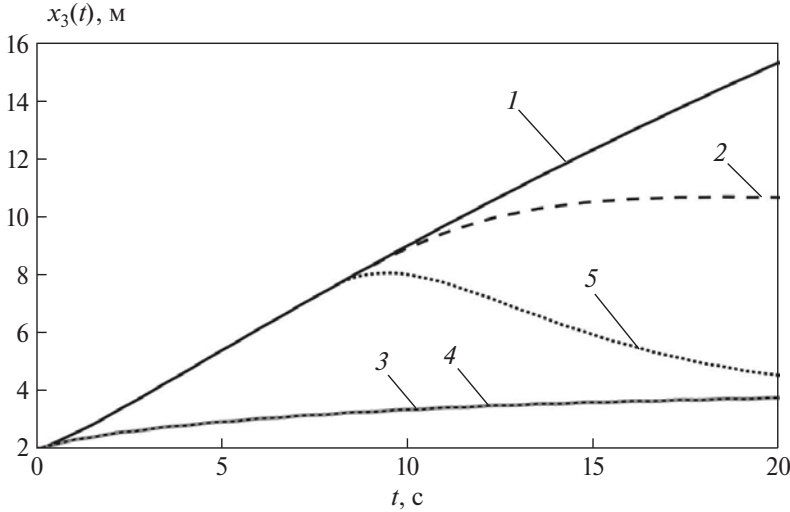


Рис. 3. Поведение переменной $x_3(t) = y_0(t)$.

Принимаем $v_1 = u_1$; подставляя в (6.2) вместо u_2 полученное выше выражение, получаем в итоге описание компенсатора:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_2 - \sqrt{z_1 - z_2}, \\ \dot{z}_2 &= \sqrt{z_1 - z_2} - \sqrt{z_2}, \\ u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - \sqrt{y - z_1}. \end{aligned}$$

При моделировании принято $u_1(t) = 5$, $u_2(t) = 2 \sin(5t)$. На рис. 3 представлены результаты поведения переменной $x_3(t) = y_0(t)$ системы (6.1) с начальным состоянием $x(0) = 0$ для пяти разных случаев. Кривая 1 отражает поведение этой переменной без дефекта и развязки; 2 – дефект $d = 4$ появляется в момент $t = 8$, но развязка от дефекта не вводилась, что отразилось в изменении этой переменной при $t > 8$. Кривые 3 и 4 соответствуют введению развязки с $v_2(t) = 2 + \sin(5t)$ в момент $t = 0$ в системе без дефекта и с дефектом соответственно; поскольку кривые 3 и 4 совпадают, дефект не проявляет себя. Кривая 5 соответствует системе с дефектом и развязкой с $v_2(t) = 2 + \sin(5t)$, вводимой в момент $t = 8$, до этого момента поведение переменной $y_0(t)$ совпадает с кривой 1.

Видно, что поведение кривых 3 и 4, когда развязка с $v_2(t) = 2 + \sin(5t)$ вводилась в момент $t = 0$, не совпадает с поведением переменной без дефекта (кривая 1). Чтобы достичь такого совпадения, нужно решать задачу управления для переменной $v_2(t)$ в системе (6.1) с компенсатором (6.3), что представляет собой самостоятельную задачу, решаемую известными методами. Аналогично в случае 5: чтобы поведение переменной $y_0(t)$, $t > 8$, при появлении дефекта и введении компенсатора совпадало с ее поведением без дефекта, нужно решать задачу управления для переменной $v_2(t)$.

7. Заключение

В работе была поставлена и решена задача получения свойства отказоустойчивости технических систем, описываемых нелинейными динамическими моделями, за счет введения обратной связи, обеспечивающей полную или частичную развязку от дефектов. Для решения задачи был использован логико-динамический подход, позволивший решить задачу используя только методы линейной алгебры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половко А.М., Гуров С.В.* Основы теории надежности. СПб.: ПХВ-Петербург, 2006.
2. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.-СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
3. *Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.* Diagnosis and fault-tolerant control (3rd ed.). Berlin: Springer, 2016.
4. *Sarkar N.* Fault-accommodating thruster force allocation of an AUV considering thruster redundancy and saturation // IEEE Trans. Robot. Autom. 2002. P. 223–233.
5. *Li Z., Li C., Li S., Cao X.* A fault-tolerant method for motion planning of industrial redundant manipulator // IEEE Trans. Indust. Inform. 2020. V. 16. P. 7469–7478.
6. *Tao G.* Adaptive control design and analysis. Virginia: John Wiley & Sons, 2001.
7. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
8. *Fan Q.-Y., Xu S., Deng C., Wang C.-C.* Event triggered fault tolerant control for nonlinear systems based on adaptive fault estimation // Proc. of the 16th Int. Conf. Control, Automation, Robotics and Vision. Shenzhen, China. 2020. P. 1236–1241.
9. *Joshi S., Talange D.* Fault tolerant control for autonomous underwater vehicle // Proc. of the IEEE Int. Conf. Mechatronics and Automation. Tianjin, China. 2014. P. 658–662.
10. *Rotondo D., Puig V., Nejjari F., Romera J.* A fault-hiding approach for the switching quasi-LPV fault-tolerant control of a four-wheeled omnidirectional mobile robot // IEEE Trans. Indust. Electronics. 2015. V. 62. P. 3932–3944.
11. *Ling Y., Sun X., Wu X., Liu J.* Robust H_∞ fault-tolerant control for uncertain linear system based on pole assignment // Proc. of the 2nd IEEE Conf. Indust. Electronics and Applications. Harbin, China. 2007. P. 2701–2706.
12. *Liu C., Jiang B., Zhang K.* Adaptive fault-tolerant H -infinity output feedback control for lead-wing close formation flight // IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet. Syst. 2020. V. 50. P. 2804–2814.
13. *Miguel A., Puig V., Alenya G.* Fault-tolerant control of a service robot using a LPV robust unknown input observer // Proc. of the 4th Conf. Control and Fault Tolerant Systems. Casablanca, Morocco. 2019. P. 207–212.
14. *Nair R., Karki H., Shukla A., Behera L., Jamshidi M.* Fault-tolerant formation control of nonholonomic robots using fast adaptive gain nonsingular terminal sliding mode control // IEEE Syst. J. 2019. V. 13. P. 1006–1017.

15. *Van M., Ge S., Ren H.* Robust fault-tolerant control for a class of second-order nonlinear systems using an adaptive third-order sliding mode control // *IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet. Syst.* 2017. V. 47. P. 221–228.
16. *Yin S., Yang H., Kaynak O.* Sliding mode observer-based FTC for markovian jump systems with actuator and sensor faults // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2017. V. 62. No. 7. P. 3551–3558.
17. *Chen C., Xu S., Liang Y.* Study of nonlinear integral sliding mode fault-tolerant control // *IEEE/ASME Trans. Mechatronics.* 2016. V. 21. P. 1160–1168.
18. *Kaldmae A., Kotta U., Shumsky A., Zhirabok A.* Measurement feedback disturbance decoupling in discrete-time nonlinear systems // *Automatica.* 2013. V. 49. P. 2887–2891.
19. *Kaldmae A., Kotta U., Jiang B., Shumsky A., Zhirabok A.* Faulty plant reconfiguration based on disturbance decoupling methods // *Asian J. Control.* 2016. V. 8. No. 3. P. 858–867.
20. *Справчник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского.* М.: Наука, 1987.
21. *Isidori A., Krener A., Gori-Giorgi C., Monaco S.* Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1981. V. AC-26. P. 331–345.
22. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю.* Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // *АиТ.* 2017. № 9. С. 34–48.
Zhirabok A., Shumsky A., Solyanik S., Suvorov A. Design of nonlinear robust diagnostic observers // *Autom. Remote Control.* 2017. No. 9. P. 1572–1584.
23. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Бобко Е.Ю.* Метод построения виртуальных датчиков для замены отказавших физических датчиков // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2023. Т. 24. № 10. С. 526–532.
24. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Ким Ч.И.* Интервальное оценивание в дискретных линейных системах с параметрическими неопределенностями // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2023. № 6. С. 116–125.
25. *Low X., Willsky A., Verghese G.* Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems // *Automatica.* 1996. V. 22. P. 333–344.
26. *Patton R., Chen J.* A review of parity space approach to fault diagnosis // *Proc. 1th IFAC Symp. Safeprocess, Baden-Baden, Germany, 1991.* P. 239–255.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 15.11.2023

После доработки 15.04.2024

Принята к публикации 20.04.2024

© 2024 г. А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (alexanderpesterev.ap@gmail.com),
Ю.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (tot1983@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Рассматривается задача стабилизации интегратора третьего порядка с фазовым ограничением на третью переменную состояния. Синтезировано непрерывное ограниченное управление в виде вложенных сигмоид, гарантирующее выполнение фазового ограничения. Построена функция Ляпунова, с помощью которой установлены условия на коэффициенты обратной связи, при выполнении которых замкнутая система глобально устойчива. Изложение иллюстрируется численными примерами.

Ключевые слова: стабилизация цепочки трех интеграторов, глобальная устойчивость, фазовое ограничение, вложенные сигмоиды, функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231024070032, EDN: XRVPFU

1. Введение

Рассматривается задача стабилизации цепочки трех интеграторов с помощью непрерывного управления при дополнительном условии выполнения фазового ограничения на переменные состояния. Стабилизация цепочек интеграторов – актуальная задача теории управления, широко обсуждающаяся в литературе в течение нескольких последних десятилетий (см., например, [1, 2] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике объясняется тем, что во многих приложениях исходные модели заданы в виде цепочек интеграторов, а управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем.

Среди множества стабилизирующих управлений, применяемых для решения этой задачи, можно выделить класс обратных связей в виде вложенных как гладких, так и негладких функций насыщения [2–14]. Интерес к обратным связям такого рода обусловлен тем, что они позволяют автоматически учесть ограниченность ресурса управления и при этом обеспечить выполнение определенных фазовых ограничений, что особенно важно вдали от положения равновесия, а также гарантируют экспоненциальную скорость убывания отклонения вблизи положения равновесия [3–7]. Отметим также использование таких обратных связей в задачах, связанных с настройкой коэффициентов в робастных законах управления [8].

Применение обратных связей в виде вложенных функций насыщения приводит к исследованию достаточно сложной нелинейной системы или, в случае негладкой функции насыщения – сатуратора, линейной системы с переключениями, анализ устойчивости которых представляет нетривиальную задачу. Доказать глобальную устойчивость удастся преимущественно для систем второго порядка с вложенными сатураторами [3, 5, 9] и вложенными сигмоидами [3, 10]. Практически во всех работах, где рассматриваются системы третьего или выше порядков, доказывается только локальная устойчивость [3, 4, 11, 12]. При отказе от требования непрерывности управления в редких случаях обратных связей специального вида удастся доказать глобальную устойчивость для систем третьего [12] (кусочно-непрерывное управление) или четвертого [13] (импульсное управление) порядков. Задача глобальной устойчивости для общего случая n вложенных сатураторов рассматривалась, насколько известно авторам, только в работах А. Тила [2, 14]. Однако доказать глобальную устойчивость А. Тилу удалось только для случая, когда предельные значения вложенных функций насыщения удовлетворяют определенным, на практике редко выполнимым, неравенствам [2, Theorem 2.1]. Авторам не известны работы (за исключением вышеупомянутых статей А. Тила), в которых доказывается глобальная устойчивость систем третьего или выше порядков, стабилизируемых с помощью непрерывного управления, гарантирующего выполнение фазового ограничения.

Функцией насыщения называют непрерывную неубывающую функцию $S(x)$ скалярной переменной, имеющую конечные пределы при $x \rightarrow \pm\infty$. Среди функций насыщения можно выделить класс гладких строго возрастающих функций, называемых сигмоидами [15]. В литературе можно найти различные, незначительно отличающиеся друг от друга определения сигмоид. Здесь будет использоваться следующее.

Определение 1. Сигмоидой называется гладкая строго возрастающая нечетная функция скалярной переменной $\sigma(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- а) $\sigma(x) \rightarrow \pm 1$, когда $x \rightarrow \pm\infty$;
- б) $\max_x \sigma'(x) = \sigma'(0)$;
- в) $\sigma'(0) = 1$.

Функции, удовлетворяющие вышеприведенному определению, но имеющие отличные от единицы пределы на бесконечности и производную в нуле, будем называть сигмоидными функциями. Любую сигмоидную функцию $S(x)$ можно получить из некоторой сигмоиды $\sigma(x)$, задав два коэффициента: $S(x) = k_2\sigma(k_1x)$, $k_1, k_2 > 0$. Нетрудно видеть, что для любых двух сигмоидных функций $S_1(x)$ и $S_2(x)$ функция $S(x) = S_1(S_2(x))$ также сигмоидная. При доказательстве теоремы о глобальной устойчивости понадобятся неравенства

$$(1) \quad S(x)x > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$(2) \quad [S(x + x_0) - S(x_0)]x > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \forall x_0,$$

непосредственно вытекающие из определения сигмоиды.

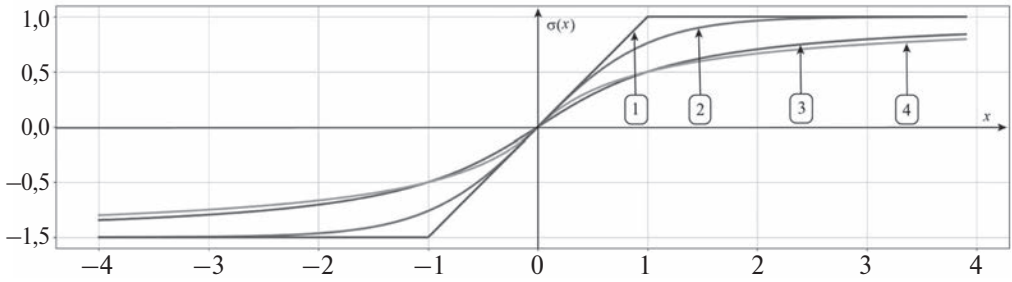


Рис. 1. Примеры функций насыщения: $\text{sat}(x)$ (1); $\tanh(x)$ (2); $2 \arctg(x)/\pi$ (3); $x/(1 + |x|)$ (4).

В семейство функций класса сигмоид входят такие функции, как функция ошибок, арктангенс, гиперболический тангенс и другие функции подобного вида. Предельным случаем сигмоиды является негладкая функция насыщения – сатуратор: $\text{sat}(x) = x$, когда $|x| \leq 1$, и $\text{sat}(x) = \text{sign}(x)$ при $|x| > 1$. Примеры функций насыщения – три сигмоиды и сатуратор – приведены на рис. 1. Другие примеры сигмоид с обсуждением их свойств можно найти в [15]. Чаще всего в задачах управления в качестве сигмоиды используется гиперболический тангенс, так как он лучше остальных гладких функций насыщения аппроксимирует сатуратор и, кроме того, его производные легко находятся через саму функцию. В рамках настоящей статьи не имеет значения, какие именно сигмоиды используются в обратной связи, так как доказательство глобальной устойчивости системы справедливо для любых функций, удовлетворяющих вышеприведенному определению.

В настоящей работе предлагается стабилизировать цепочку трех интеграторов с помощью специальной обратной связи, включающей две вложенные сигмоиды. Цель исследования – доказать глобальную устойчивость полученной замкнутой системы при некоторых необременительных условиях на коэффициенты обратной связи.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации в нуле интегратора третьего порядка

$$(3) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = U(x), \quad x \equiv [x_1, x_2, x_3]^T,$$

с помощью гладкой обратной связи $U(x)$, гарантирующей выполнение фазового ограничения

$$(4) \quad |x_3(t)| \leq X_3.$$

Такая постановка естественным образом возникает во многих приложениях, например при стабилизации механической системы [11], где переменными состояния служат позиция, скорость и тяга (ускорение), а в качестве управления берется скорость изменения тяги (например, с помощью шагового мо-

тора). Похожая система с фазовым ограничением на третью переменную, но с разрывным управлением, рассмотрена в [16]. Так как тяга в реальных системах ограничена, стабилизирующее управление не должно приводить к нарушению фазового ограничения (4), где X_3 – максимально возможная тяга.

В качестве стабилизирующего предлагается управление

$$(5) \quad U(x) = -k_5(x_3 + k_4\sigma_2(k_3(x_2 + k_2\sigma_1(k_1x_1))))),$$

где σ_1 и σ_2 – произвольные сигмоиды. Обратная связь такого вида гарантирует выполнение фазового ограничения (4) с $X_3 = k_4$ при условии $|x_3(0)| \leq k_4$. Действительно, допустим фазовое ограничение выполняется в начальный момент. Переменная $x_3(t)$ достигает локального экстремума на траектории при $U(x) = 0$; из формулы же (5) видно, что управление равно нулю, когда $x_3 = -k_4\sigma_2(\cdot)$. Следовательно, $|x_3(t)|$ не может быть больше k_4 , т.е. область $|x_3| \leq k_4$ является инвариантным множеством системы. Таким образом, если переменная x_3 физически не может превышать своего предельного значения (как, например, в вышеупомянутом случае механической системы), то при исследовании устойчивости достаточно ограничиться рассмотрением инвариантного множества. Однако рассмотрим задачу в более общей постановке и докажем устойчивость при любых начальных значениях в R^3 . При этом, если начальная точка принадлежит инвариантному множеству, фазовое ограничение (4) будет выполняться при любом t ; иначе, начиная с некоторого (зависящего от начальных условий) конечного момента времени.

К преимуществам управления (5) относятся также а) экспоненциальная скорость убывания отклонения вблизи положения равновесия и б) ограниченность при любых, сколь угодно больших отклонениях от положения равновесия при выполнении фазового ограничения в начальной точке.

Коэффициенты k_2 и k_4 , устанавливающие пределы изменения сигмоидных функций, называются модельными параметрами, так как их значения определяются моделью исследуемой физической системы и, в отличие от трех других коэффициентов, не могут выбираться произвольно. При заданных k_2 и k_4 параметры k_1 , k_3 и k_5 определяют характер переходного процесса [5, 7] и выбираются конструктором системы управления, например с целью оптимизации (в том или ином смысле) ее функционирования.

Без потери общности, модельные параметры можно положить равными единице, уменьшив таким образом количество параметров задачи до трех. Действительно, перейдем к безразмерной модели, применив ту же замену переменных и времени, что и в двумерном случае [5]: $\tilde{t} = k_4 t / k_2$, $\tilde{x}_1 = k_4 x_1 / k_2^2$, $\tilde{x}_2 = x_2 / k_2$, и определим третью безразмерную переменную как $\tilde{x}_3 = x_3 / k_4$. Подставляя новые переменные в систему (3), (5) и переходя к дифференцированию по безразмерному времени, получим безразмерную модель, в которой $\tilde{k}_4 = \tilde{k}_2 = 1$, а три других коэффициента определены формулами $\tilde{k}_1 = k_1 k_2^2 / k_4$, $\tilde{k}_3 = k_2 k_3 / k_4$ и $\tilde{k}_5 = k_2 k_5 / k_4$. Всюду далее будем полагать все переменные и параметры безразмерными и использовать для них прежние

обозначение (без тильды). В безразмерной модели обратная связь (5) принимает вид

$$(6) \quad U(x) = -k_5(x_3 + \sigma_2(k_3(x_2 + \sigma_1(k_1 x_1)))).$$

Задача исследования – найти условия на коэффициенты, при которых предлагаемая обратная связь является стабилизирующей во всем пространстве; т.е. установить условия глобальной устойчивости системы (3), (6). Приведенное в следующем разделе исследование устойчивости основано на построении интегральной функции Ляпунова замкнутой системы. Будет доказано, что выполнение необходимых условий устойчивости линеаризованной в окрестности нуля системы достаточно для того, чтобы функция Ляпунова и ее производная в силу системы были соответственно положительно и отрицательно определены во всем пространстве, что гарантирует глобальную устойчивость системы. При применении же других известных подходов к исследованию устойчивости, основанных, например, на построении функции Лурье–Постникова [17] или на погружении в класс линейных нестационарных систем с последующим применением методов абсолютной устойчивости [4, 18, 19], удается, как правило, доказать только локальную устойчивость (даже когда исследуемая система устойчива в целом) и ограничиться построением оценки инвариантной области притяжения.

3. Условия глобальной устойчивости

Теорема 1. Система (3), (6), где $\sigma_1(\cdot)$ и $\sigma_2(\cdot)$ – произвольные сигмоиды, глобально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все коэффициенты положительны и при этом $k_5 > k_1$.

Доказательство. Необходимость. Для того чтобы система была глобально устойчива, необходимо, чтобы была устойчива линеаризованная в окрестности нуля система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -k_5 x_3 - k_5 k_3 x_2 - k_5 k_3 k_1 x_1.$$

Применяя критерий Гурвица к системе, находим, что для устойчивости линеаризованной системы необходима положительность всех коэффициентов и выполнение условия $k_5 > k_1$.

Достаточность. Пусть коэффициенты k_1 , k_3 и k_5 положительны. Рассмотрим функцию

$$(7) \quad V(x) = k_5^2 \int_0^{x_1} \sigma_2(k_3 \sigma_1(k_1 s)) ds + k_5 \int_0^{x_2} \sigma_2(k_3(s + \sigma_1(k_1 x_1))) ds + \frac{1}{2}(x_3 + k_5 x_2)^2$$

и докажем, что она является функцией Ляпунова системы (3), (6).

Обозначим через Φ_1 и Φ_2 первое и второе соответственно интегральные слагаемые в (7) и докажем, что их сумма, а значит и вся функция $V(x)$,

положительна для всех $x \in R^3$. Преобразуем второе слагаемое Φ_2 , сделав замену $\tilde{s} = s + \sigma_1(k_1 x_1)$:

$$\Phi_2 = k_5 \int_{\sigma_1(k_1 x_1)}^{x_2 + \sigma_1(k_1 x_1)} \sigma_2(k_3 \tilde{s}) d\tilde{s} = k_5 \int_0^{x_2 + \sigma_1(k_1 x_1)} \sigma_2(k_3 \tilde{s}) d\tilde{s} - k_5 \int_0^{\sigma_1(k_1 x_1)} \sigma_2(k_3 \tilde{s}) d\tilde{s}.$$

Во втором слагаемом правой части последней формулы сделаем неявную (взаимно-однозначную в силу монотонности функции σ_1) замену переменной интегрирования $\tilde{s} = \sigma_1(k_1 s)$, откуда $d\tilde{s} = k_1 \sigma_1'(k_1 s) ds$, где штрих означает дифференцирование по аргументу. Найдем сумму Φ_1 и Φ_2 :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = k_5 \int_0^{x_1} \sigma_2(k_3 \sigma_1(k_1 s)) [k_5 - k_1 \sigma_1'(k_1 s)] ds + k_5 \int_0^{x_2 + \sigma_1(k_1 x_1)} \sigma_2(k_3 \tilde{s}) d\tilde{s}.$$

Второй интеграл в правой части формулы очевидно положителен в силу (1). Так как производная сигмоиды по аргументу удовлетворяет условию $\sigma'(s) \leq 1$ и по условию теоремы $k_5 > k_1$, то

$$(8) \quad k_5 - k_1 \sigma_1'(k_1 s) > 0,$$

откуда следует положительность первого интеграла и, следовательно, функции $V(x)$ при всех $x \neq 0$.

Очевидно также, что $V(x)$ стремится к бесконечности при $\|x\| \rightarrow \infty$. Далее, дифференцируя $V(x)$ в силу системы (3), (6) и опуская аргумент $k_1 x_1$ функций σ_1 и σ_1' для сокращения записи, получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_5^2 \sigma_2(k_3 \sigma_1(\cdot)) x_2 + k_5 x_2 \int_0^{x_2} \sigma_2'(k_3(s + \sigma_1(\cdot))) k_3 \sigma_1'(\cdot) k_1 ds + \\ &+ k_5 \sigma_2(k_3(x_2 + \sigma_1(\cdot))) x_3 + (x_3 + k_5 x_2) [-k_5(x_3 + \sigma_2(k_3(x_2 + \sigma_1(\cdot)))) + k_5 x_3] = \\ &= k_5^2 \sigma_2(k_3 \sigma_1(\cdot)) x_2 - k_5^2 \sigma_2(k_3(x_2 + \sigma_1(\cdot))) x_2 + \\ &+ k_1 k_3 k_5 \sigma_1'(\cdot) x_2 \int_0^{x_2} \sigma_2'(k_3(s + \sigma_1(\cdot))) ds. \end{aligned}$$

Преобразуем интеграл в правой части последнего выражения:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} \sigma_2'(k_3(s + \sigma_1(\cdot))) ds &= \int_{\sigma_1(\cdot)}^{x_2 + \sigma_1(\cdot)} \sigma_2'(k_3 \tilde{s}) d\tilde{s} = \\ &= \frac{1}{k_3} \sigma_2(k_3(x_2 + \sigma_1(\cdot))) - \frac{1}{k_3} \sigma_2(k_3 \sigma_1(\cdot)). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу для $\dot{V}(x)$, получим

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= k_5 \sigma_2(k_3 \sigma_1(\cdot)) x_2 (k_5 - k_1 \sigma_1'(\cdot)) - k_5 \sigma_2(k_3(x_2 + \sigma_1(\cdot))) x_2 (k_5 - k_1 \sigma_1'(\cdot)) = \\ &= -k_5 (k_5 - k_1 \sigma_1'(\cdot)) [\sigma_2(k_3(x_2 + \sigma_1(\cdot))) - \sigma_2(k_3 \sigma_1(\cdot))] x_2.\end{aligned}$$

Произведение выражения в квадратных скобках на x_2 положительно в силу (2), откуда с учетом (8) следует, что производная отрицательно определена для любых $x_2 \neq 0$. Производная обращается в ноль только на множестве $x_2 = 0$, которое не содержит ни одной целой траектории, кроме $x = 0$.

Таким образом, функция $V(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина–Красовского [20] и, следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (3), (6) в целом. Теорема доказана.

4. Численные примеры

В качестве иллюстрации приведены результаты численных расчетов для обратной связи (6) в виде вложенных гиперболических тангенсов с коэффициентами $k_1 = 1$, $k_3 = 3$ и $k_5 = 5$. На рис. 2 изображена инвариантная область системы, ограниченная поверхностью уровня функции Ляпунова (7) $V(x) = k_5^2$. Для большей наглядности на рис. 3 показаны проекции на плоскость (x_1, x_2) шести сечений поверхности уровня (на рис. 2, эти сечения выделены жирными линиями) плоскостями $x_3 = c_i$, $c_1 = -26$, $c_2 = -16$, $c_3 = -6$, $c_4 = 4$, $c_5 = 14$, $c_6 = 24$.

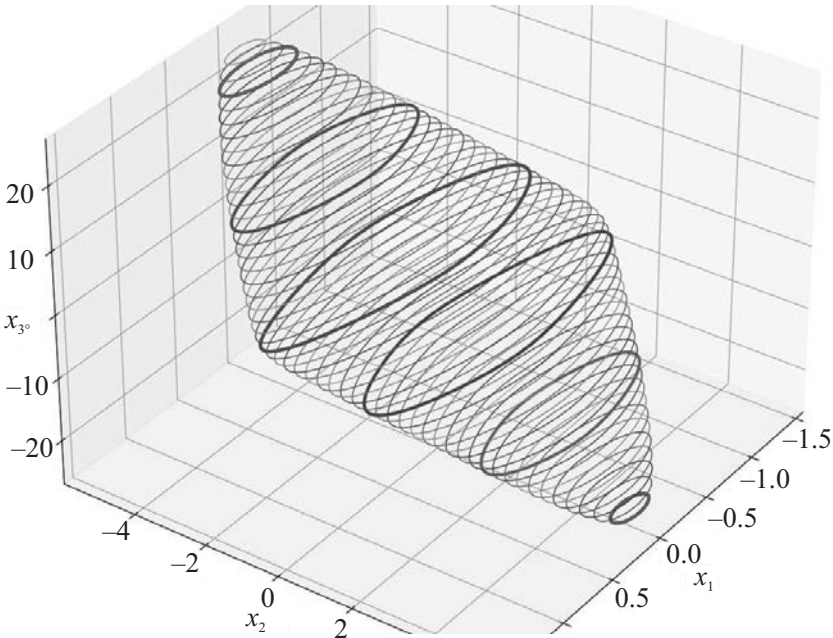


Рис. 2. Поверхность уровня функции Ляпунова (7).

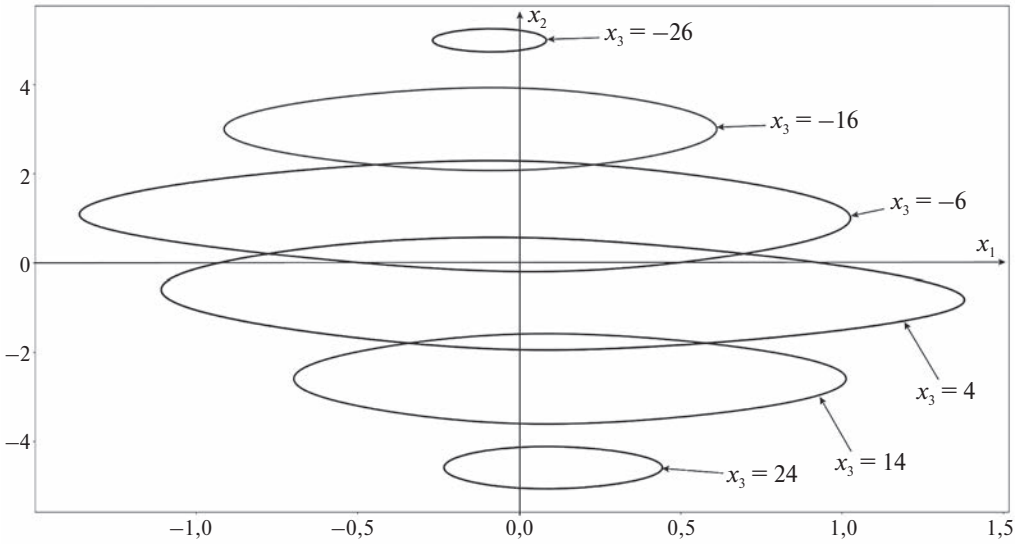


Рис. 3. Сечения инвариантной области плоскостями $x_3 = \text{const}$.

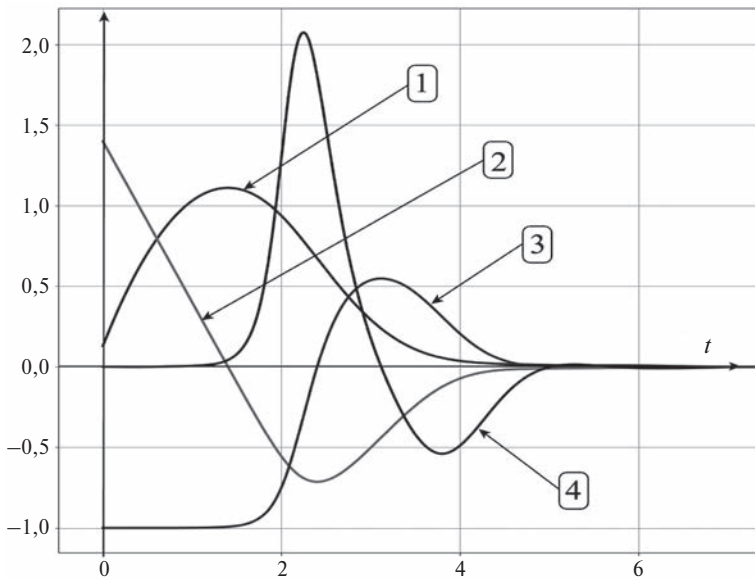


Рис. 4. Графики зависимостей от времени отклонения $x_1(t)$ (1), скорости $x_2(t)$ (2), ускорения $x_3(t)$ (3) и управления $U(t)$ (4).

Результаты решения задачи стабилизации системы для начальных условий $x_1(0) = 0,1$, $x_2(0) = 1,4$, $x_3(0) = -1$ представлены на рис. 4, демонстрирующем эффективность стабилизации. Кривые, помеченные цифрами 1, 2, 3 и 4, показывают графики зависимостей от времени отклонения x_1 , скорости x_2 , ускорения x_3 и управления U соответственно. Хотя в начальный момент времени система движется в противоположном от положения равно-

веса направления, величина отклонения после естественного роста на начальном этапе быстро (экспоненциально) убывает, фазовое ограничение выполняется для любого t , управление умеренно ограничено и не приводит к перегулированию.

5. Заключение

Рассмотрена задача стабилизации цепочки трех интеграторов с помощью непрерывного управления, гарантирующего выполнение фазового ограничения на третью переменную состояния. С помощью перехода к безразмерным переменным исходная зависящая от пяти коэффициентов обратной связи задача сведена к исследованию трехпараметрической системы. Обсуждаются преимущества предлагаемой обратной связи в виде вложенных сигмоидных функций. Главный результат работы – построение функции Ляпунова, с помощью которой установлены достаточные (совпадающие с необходимыми) условия глобальной устойчивости замкнутой системы. Приведены численные примеры, иллюстрирующие эффективность стабилизации с помощью предлагаемой обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurzbaniski A.B., Varaiya P.* Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
2. *Teel A.R.* Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls // Sys. Cont. Lett. 1992. V. 18. No. 3. P. 165–171.
3. *Olfati-Saber R.* Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles // Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
4. *Li Y., Lin Z.* Stability and Performance of Control Systems with Actuator Saturation. Basel: Birkhauser, 2018. P. 706.
5. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Глобальная стабилизация интегратора второго порядка обратной связью в виде вложенных сатураторов // АиТ. 2024. № 4. С. 55–60.
6. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Communicat. Comput. Inform. Sci. (CCIS). 2020. V. 1340. P. 236–249.
7. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Optimizing Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13078. Cham, Switzerland: Springer, 2021. P. 191–202.
8. *Antipov A., Kokunko J., Krasnova S.* Dynamic Models Design for Processing Motion Reference Signals for Mobile Robots // J. Intelligent Robot. Syst. 2022. V. 105. P. 1–16.
9. *Hua M.-D., Samson C.* Time Sub-optimal Nonlinear Pi and Pid Controllers Applied to Longitudinal Headway Car Control // Int. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.

10. *Морозов Ю.В., Пестерев А.В.* Глобальная стабилизация интегратора 2-го порядка обратной связью в виде вложенных сигмоид // Известия РАН. Теория и системы управления. 2024. № 3 (принята к публикации).
11. *Матюшкин В.И., Пятницкий Е.С.* Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной // АиТ. 2004. № 8. С. 14–38.
12. *Pesterev A. V., Morozov Yu. V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13781. Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 66–78.
13. *Морозов Ю.В., Пестерев А.В.* Глобальная устойчивость гибридной аффинной системы 4-го порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 5. С. 3–15.
14. *Teel A.R.* A Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation // Trans. Autom. Contr., IEEE, 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
15. *Mazhar N., Malik F.M., Raza A., Khan R.* Predefined-Time Control of Nonlinear Systems: A Sigmoid Function Based Sliding Manifold Design Approach // Alexandria Engineer. J. 2022. V. 61. P. 6831–6841.
16. *Utkin V.I., Jingxin Shi.* Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions // Proc. of 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996. V. 4. P. 4591–4596.
17. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. № 3. С. 246–248.
18. *Рапопорт Л.Б.* Оценка области притяжения в задаче управления колесным роботом // АиТ. 2006. № 9. С. 69–89.
19. *Generalov A., Rapoport L., Shavin M.* Attraction Domains in the Control Problem of a Wheeled Robot Following a Curvilinear Path over an Uneven Surface // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13078. Cham, Switzerland: Springer, 2021. pp. 176–190.
20. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. М.: Наука, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 04.03.2024

После доработки 07.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024

© 2024 г. Д.В. ТУНИЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук (dtunitsky@yahoo.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ
СБОРОМ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА,
РАСПРЕДЕЛЕННОГО НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ¹**

Работа посвящена оптимальному управлению смешанным сбором (стационарным и периодическим импульсным) возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли. Примерами такого ресурса служат биологические популяции, в том числе вирусы, химические примеси, пылевые частицы и тому подобное. Доказано, что при бесконечном горизонте планирования существует допустимое управление, обеспечивающее максимум временного среднего сбора.

Ключевые слова: уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, параболические уравнения второго порядка, полулинейные уравнения на сфере, слабые решения, стабилизация, оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0005231024070043, **EDN:** XRURUS

1. Введение

Обычно в качестве математической модели поверхности Земли используются двумерные многообразия, гомеоморфные сфере. Моделью эволюции возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли, может служить полулинейное эволюционное уравнение второго порядка на двумерной сфере, в локальных координатах имеющее вид

$$(1) \quad \frac{\partial q}{\partial t} - \sum_{l,m=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^l} \left(a^{l,m}(x) \frac{\partial q}{\partial x^m} \right) = A(x)q - B(x)q^2, \quad a^{l,m}(x) = a^{m,l}(x).$$

Здесь матрица a характеризует диффузию рассматриваемого ресурса, а коэффициенты A и B – темпы обновления и насыщения им среды. По сути, уравнение (1) объединяет две классические модели: логистическую модель Ферхюльста [1] и модель распространения тепла Фурье [2].

Уравнения вида (1) возникают при моделировании разнообразных процессов, связанных с реакцией-диффузией в распределенной среде. Пример – знаменитая модель А.Н. Колмогорова, Г.И. Петровского, Н.С. Пискунова [3] и

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

Р.А. Фишера [4]. Информацию о других моделях, истории и библиографии работ, посвященных этой тематике, можно найти в [5], а также монографии [6], освещающей ряд прикладных аспектов.

Полулинейные эволюционные уравнения второго порядка в областях евклидова пространства весьма досконально изучены, см., например, [7–9]. На замкнутых многообразиях, в частности на сферах, они изучены в меньшей степени. Уместно упомянуть статьи [5] и [10], в которых изучаются уравнения с периодическими по пространству коэффициентами – фактически, уравнения на торе. Этот важный с прикладной точки зрения случай встречается при моделировании периодических сред. Конечно, значительный интерес представляют также уравнения вида (1) на двумерной сфере, потому что это стандартная модель поверхности Земли, используемая при решении прикладных задач.

Заметим, что многие прикладные задачи приводят к уравнениям типа (1) с разрывными коэффициентами. В частности, это характерно для задач оптимального управления. Поэтому желательно выбрать класс допустимых решений, позволяющий построить удовлетворительную теорию соответствующих уравнений при минимальных требованиях к регулярности их коэффициентов. Таким классом в данной работе выступают слабые решения. В классе слабых решений удастся исследовать уравнения вида (1) на двумерной сфере при достаточно низких требованиях на регулярность их коэффициентов.

2. Функциональные пространства и эволюционные уравнения

2.1. Функциональные пространства

Пусть \mathbb{S}^2 – двумерная сфера единичного радиуса $\{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1\}$, стандартно вложенная в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . Стереографическая проекция

$$h : \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, 1) \ni (y^1, y^2, y^3) \mapsto \frac{(y^1, y^2)}{1 - y^3} \in \mathbb{R}^2$$

относительно полюса $(0, 0, 1)$ задает локальную систему координат, определенную на \mathbb{S}^2 всюду, кроме полюса [11] (лекция 6). Вложение в евклидово пространство \mathbb{R}^3 индуцирует на \mathbb{S}^2 риманову метрику g , обратный образ которой относительно h^{-1} имеет вид

$$(h^{-1})^* g = 4 \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2}.$$

Здесь h^{-1} – отображение, обратное к стереографической проекции, т.е.

$$(2) \quad h^{-1} : \mathbb{R}^2 \ni (x^1, x^2) \mapsto \frac{1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1} (2x^1, 2x^2, (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1) \in \mathbb{S}^2.$$

Метрика g , определенная на касательном расслоении TS^2 , допускает естественное продолжение на тензорные расслоения $(TS^2)^{\otimes m} \otimes (T^*S^2)^{\otimes l}$, $m, l = 0, 1, 2, \dots$, которое будет обозначаться той же буквой g . На $(TS^2)^{\otimes 0} \otimes (T^*S^2)^{\otimes 0} = S^2 \times \mathbb{R}$ метрика $g(r_1, r_2) = r_1 r_2$ для $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Также g порождает на S^2 структуру полного метрического пространства и меру $\mu = \mu_g$, образ которой относительно стереографической проекции имеет вид

$$(3) \quad d(\mu \circ h) = \frac{4dx^1 dx^2}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2}.$$

С помощью указанных структур конструируются пространства Лебега функций $L^p(S^2)$ и тензорных полей $L^p((TS^2)^{\otimes m} \otimes (T^*S^2)^{\otimes l})$, $p \geq 1$, $m, l = 0, 1, 2, \dots$, пространства Соболева $W^{1,p}(S^2)$ и $W^{1,p}((TS^2)^{\otimes m} \otimes (T^*S^2)^{\otimes l})$ [12, гл. 2] и Гельдера $C^\alpha(S^2)$ и $C^\alpha((TS^2)^{\otimes m} \otimes (T^*S^2)^{\otimes l})$, $0 < \alpha \leq 1$ [13, разд. 10.2.4; 14; 15; 16, §1]. Для этого можно использовать стереографические координаты (2). Например, пространства функций $L^p(S^2)$ на сфере и $L^p(\mathbb{R}^2, \mu \circ h)$ на плоскости с мерой (3) изометричны при $p \geq 1$.

Для заданных на S^2 вещественнозначных измеримых функций u и v положим

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{x \in S^2} u(x) &= \inf_{\substack{S \subseteq S^2 \\ \mu(S)=0}} \sup_{x \in S^2 \setminus S} u(x), \\ \operatorname{ess\,inf}_{x \in S^2} u(x) &= \sup_{\substack{S \subseteq S^2 \\ \mu(S)=0}} \inf_{x \in S^2 \setminus S} u(x), \quad \langle u, v \rangle = \int_{S^2} uv d\mu. \end{aligned}$$

Если \mathfrak{B} – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$, то для фиксированных $T_0 \in (0, +\infty)$ и $T_1 \in (0, +\infty]$, $T_0 < T_1$, пространства $L^p([T_0, T_1]; \mathfrak{B})$ с нормами

$$\|q\|_{L^p([T_0, T_1]; \mathfrak{B})} = \left(\int_{T_0}^{T_1} \|q(t)\|_{\mathfrak{B}}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

$$\|q\|_{L^\infty([T_0, T_1]; \mathfrak{B})} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [T_0, T_1]} \|q(t)\|_{\mathfrak{B}}$$

являются тоже банаховыми, см. [17, гл. III, §1; 18, гл. II, §2]. Пересечение

$$W([T_0, T_1]; X) = L^2((T_0, T_1); W^{p,1}(X)) \cap L^\infty([T_0, T_1]; L^2(X))$$

также является банаховым пространством с нормой

$$\|q\|_{W([T_0, T_1]; X)}^2 = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [T_0, T_1]} \langle q(t), q(t) \rangle + \int_{T_0}^{T_1} \langle g(dq(t), dq(t)), 1 \rangle dt.$$

Для краткости в дальнейшем будем использовать сокращение *n.в.*, когда речь идет о выполнении каких-либо свойств почти всюду по мере μ на S^2 , см. (3).

2.2. Эволюционные уравнения

Предположим, что наряду с g на сфере \mathbb{S}^2 задана еще одна метрика a . Пусть она измерима и существуют такие $a_0, a_1 \in (0, +\infty)$, что

$$(4) \quad a_0 g(\eta, \eta) \leq a(\eta, \eta) \leq a_1 g(\eta, \eta), \quad \eta \in T^*\mathbb{S}^2,$$

п.в. В стереографических координатах x^1 и x^2 (2) оценка (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{4a_0(\eta_1^2 + \eta_2^2)}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2} &\leq a^{1,1}(t)\eta_1^2 + 2a^{1,2}(t)\eta_1\eta_2 + a^{2,2}(t)\eta_2^2 \leq \\ &\leq \frac{4a_1(\eta_1^2 + \eta_2^2)}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $d_{a,g}^* : C^\infty(T^*\mathbb{S}^2) \ni w \mapsto d_{a,g}^* w \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, сопряженный с внешним дифференцированием d относительно метрик g и a , т.е.

$$\langle a(du, \omega), 1 \rangle_g = \langle u, d_{a,g}^* \omega \rangle_g, \quad u \in C^\infty(\mathbb{S}^2), \quad \omega \in C^\infty(T^*\mathbb{S}^2),$$

[19, гл. VIII, §1]. В системе стереографических координат x^1 и x^2 (2)

$$\begin{aligned} d_{a(t),g}^* \omega &= -(((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2) \times \\ &\times \sum_{l,m=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{a(dx^l, dx^m)}{(((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2)} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right) \right). \end{aligned}$$

Определим на функциях $u \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ *геометрический лапласиан* (оператор Лапласа-де Рама) – линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$(5) \quad \Delta = \Delta_{a,g} = d_{a,g}^* \circ d,$$

[20, гл. IV, §5]. В силу оценки (4) оператор (5) *равномерно эллиптивен* на \mathbb{S}^2 .

Следовательно, эволюционное уравнение второго порядка

$$(6) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \Delta q = (A(x) - u(x))q - B(x)q^2$$

параболично на \mathbb{S}^2 . В стереографических координатах x^1 и x^2 (2) оно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} - (((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2) \sum_{l,m=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{a(dx^l, dx^m)}{(((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2)} \frac{\partial u}{\partial x^m} \right) &= \\ &= (A(x) - u(x))q - B(x)q^2, \end{aligned}$$

ср. с (1). Неизвестная функция $q = q(t, x)$ соответствует плотности распределения рассматриваемого возобновляемого ресурса в точке x сферы \mathbb{S}^2 в момент времени t , метрика a характеризует диффузию ресурса, функция u – управление его стационарным (перманентным) сбором, а коэффициенты A и B – темпы обновления и насыщения им среды.

Обычным образом определяются слабые решения, субрешения и суперрешения [8, гл. VI, §1, 5] и [9, §1.5]. В частности, *слабым решением* уравнения (6) на полуинтервале $[T_0, T_1)$ называется такая функция $q \in W([T_0, T_1); \mathbb{S}^2)$, что $q^2 \in L^2([T_0, T_1) \times \mathbb{S}^2)$ и

$$\begin{aligned} \langle q, p \rangle(t) + \int_{T_0}^t \left(\langle dq, dp \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} - \langle q, p' \rangle \right)(\tau) d\tau = \\ = \langle q, p \rangle(0) + \int_{T_0}^t \langle (A - u)q - Bq^2, p \rangle(\tau) d\tau \end{aligned}$$

для всякого $p \in C^\infty([T_0, T_1); \mathbb{S}^2)$ и $t \in [T_0, T_1)$. Слабое решение q уравнения (1.5), принимающее заданное начальное значение плотности распределения ресурса

$$(7) \quad q(T_0) = q_0, \quad q_0 \in L^\infty(\mathbb{S}^2), \quad q_0 \geq 0 \text{ п.в.},$$

называется *слабым решением задачи Коши* (6), (7) на $[T_0, T_1)$.

В дальнейшем изложении все встречающиеся решения, субрешения и суперрешения предполагаются слабыми и прилагательное «слабое» для краткости опускается.

3. Периодический импульсный сбор и управляемые решения

3.1. Периодический импульсный сбор

Математической моделью периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса служат накладываемые на решение q задачи Коши (6), (7) дополнительные условия

$$(8) \quad q(kT) = sq(kT-), \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь $T \in (0, +\infty)$ – заданный период, а измеримый множитель s , $0 \leq s \leq 1$ п.в., характеризует интенсивность импульсного сбора. Решением задачи (6), (8) называется функция $q \in L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{S}^2)$, являющаяся решением уравнения (6) на $[kT, (k+1)T)$, обладающая левыми предельными значениями $q(kT-)$ и п.в. удовлетворяющая равенствам (8). Если при $T_0 = 0$ это решение п.в. принимает начальное значение (7), то оно – решение задачи (6)–(8). Решение задачи (6), (8) называется *периодическим*, если

$$(9) \quad q(t+T) = q(t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Определим *допустимые множества* \mathfrak{U} и \mathfrak{S} *стационарных и импульсных управлений*

$$(10) \quad \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \{u \in L^\infty(\mathbb{S}^2) \mid U_1 \leq u \leq U_2\}, \\ \mathfrak{S} &= \{e^{-\beta v} \mid v \in L^\infty(\mathbb{S}^2), V_1 \leq v \leq V_2, \langle 1, v \rangle \leq E\}, \end{aligned}$$

где $U_1, U_2, V_1, V_2, \beta \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $E \in [0, +\infty)$. Здесь U_1 и U_2 характеризуют ограничения на возможную плотность стационарного сбора ресурса, E – допустимое усилие сбора, а границы V_1 и V_2 – минимально технически реализуемую плотность импульсного сбора и его максимально возможную плотность при доступных физической емкости среды и экологических ограничениях. По сути $V_1(x)$ и $V_2(x)$ – это минимальное и максимальное усилия, которые допустимо приложить в точке x для достижения поставленных целей. Вид $s = e^{-\beta(x)v(x)}$ множителя импульсного воздействия в (8) происходит из теории поиска [21–23]. Множитель $\beta(x)$ в показателе экспоненты характеризует сложность обнаружения и извлечения ресурса в точке $x \in \mathbb{S}^2$, а $v(x)$ – величину прилагаемого усилия.

Замечание 1. Несложно проверить, что введенные выше множества допустимых стационарных и импульсных управлений \mathfrak{U} и \mathfrak{S} (10) выпуклы, замкнуты в $L^2(\mathbb{S}^2)$ и ограничены в $L^\infty(\mathbb{S}^2)$. Поскольку пространство $L^2(\mathbb{S}^2)$ рефлексивно, то по теореме Эберлейна–Шмульяна ограниченные в норме $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}$ множества секвенциально слабо предкомпактны [24, прилож. к гл. V, §4]. Кроме того, всякое выпуклое и замкнутое подмножество $L^2(\mathbb{S}^2)$ слабо замкнуто [25, п. 2.9]. Поэтому множества допустимых управлений \mathfrak{U} и \mathfrak{S} секвенциально слабо компактны. Подмножество в $L^2(\mathbb{S}^2)$ тогда и только тогда слабо компактно, когда оно секвенциально слабо компактно, и секвенциально слабо предкомпактные множества ограничены по норме [25, п. 2.9]. Следовательно, множества \mathfrak{U} и \mathfrak{S} слабо секвенциально компактны в $L^2(\mathbb{S}^2)$ [24, прилож. к гл. V, §4].

Замечание 2. Очевидно, что $q = 0$ является периодическим субрешением задачи (6)–(8). Согласно ограничениям, наложенным выше на уравнение (6) и допустимые управления, $B \geq B_0 > 0$ и $0 \leq s \leq 1$ п.в. Поэтому постоянная функция $q = c$ является периодическим суперрешением задачи (6)–(8) при $c \geq Q(\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)})$, где

$$(11) \quad Q: \mathbb{R} \ni r \mapsto \max \left\{ r, \frac{1}{B_0} (\|A\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \max\{\|U_1\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}, \|U_2\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\}) \right\} \in \mathbb{R}.$$

3.2. Управляемые решения

Решения $q = q(t; q_0, u, s)$ задачи (6)–(8) и периодические решения $q = q(t; u, s)$ задачи (6), (8) с допустимыми управлениями $u \in \mathfrak{U}$ и $s \in \mathfrak{S}$ будем называть *управляемыми*. Они обладают следующими свойствами.

Теорема 1. Пусть метрика a измерима и удовлетворяет оценке (4), коэффициенты $A, B \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $B \geq B_0$ п.в. при некотором $B_0 \in (0, +\infty)$. Справедливо следующее.

(а) Для любых $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathfrak{S}$ существует единственное управляемое решение $q = q(t; q_0, u, s)$. При этом $q \in C([(k-1)T, kT]; L^2(\mathbb{S}^2))$, $k = 0, 1, \dots$, выполняется оценка

$$(12) \quad 0 \leq q(t; q_0, u, s) \leq Q(\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}), \quad t \in [0, +\infty),$$

где Q – функция (11), и для любого $\varepsilon \in (0, T)$ найдется такое число α , $0 < \alpha \leq 1$, что

$$q \in C^\alpha \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [(k-1)T + \varepsilon, kT) \times \mathbb{S}^2 \right).$$

(б) Если последовательности $\{q_m\} \subseteq L^\infty(\mathbb{S}^2)$, $\{u_m\} \subseteq \mathfrak{U}$, $\{s_m\} \subseteq \mathfrak{S}$ слабо сходятся в $L^2(\mathbb{S}^2)$, $q_m \rightharpoonup q_0$, $u_m \rightharpoonup u_0$, $s_m \rightharpoonup s_0$ и $q_m \geq 0$, $q_m \neq 0$ п.в., то имеет место сходимость

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} q(\cdot; q_m, u_m, s_m) = q(\cdot; q_0, u_0, s_0),$$

слабая в пространствах $L^2([0, NT]; W^{1,2}(\mathbb{S}^2))$ при любом $N = 1, 2, \dots$ и в нормах $\|\cdot\|_{C(\cup_{k=1}^N [(k-1)T + \varepsilon, kT) \times \mathbb{S}^2)}$ при любом $\varepsilon \in (0, T)$.

(в) Для любых $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathfrak{S}$ существует такое единственное управляемое периодическое решение $q = q_\infty(t; u, s)$, что имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|q(t; q_0, u, s) - q_\infty(t; u, s)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} = 0, \quad \|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} > 0.$$

(г) Если последовательности $\{u_m\} \subseteq \mathfrak{U}$ и $\{s_m\} \subseteq \mathfrak{S}$ слабо сходятся в $L^2(\mathbb{S}^2)$, $u_m \rightharpoonup u_0$, $s_m \rightharpoonup s_0$, то для периодических решений из утверждения (с) имеет место сходимость

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} q_\infty(\cdot; u_m, s_m) = q_\infty(\cdot; u_0, s_0),$$

слабая в пространстве $L^2((0, T); W^{1,2}(\mathbb{S}^2))$ и в нормах $\|\cdot\|_{C([\varepsilon, T) \times \mathbb{S}^2)}$ при $\varepsilon \in (0, T)$.

Доказательство проведено в разделе 5 §4.

Замечание 3. Существует не более двух периодических решений q задачи (6), (8). Согласно замечанию 2, одним из них является тривиальное решение $q = 0$. Если $q_\infty = 0$, то по теореме 1 другого не существует, а если $q_\infty \neq 0$, то не существует третьего.

4. Постановка задачи, основной результат и выводы

4.1. Постановка задачи

По утверждению (а) теоремы 1 для множеств допустимых стационарных и импульсных управлений \mathfrak{U} и \mathfrak{S} (10) корректно определен функционал

$$(13) \quad F : \{q_0 \in L^\infty(\mathbb{S}^2) | q_0 \geq 0 \text{ п.в.}\} \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{S} \ni (q_0, u, s) \mapsto \\ \mapsto \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left(\int_0^t \langle q(\tau; q_0, u, s), u \rangle d\tau + \sum_{0 < kT \leq t} \langle q(kT-; q_0, u, s), 1 - s \rangle \right) \in \mathbb{R},$$

где $q = q(t; q_0, u, s)$ – управляемое решение. Его значение – усредненная по времени сумма стационарного (первое слагаемое) и импульсного (второе сла-

гаемое) сборов ресурса. Поставим следующую задачу: *установить существование допустимых стационарного и импульсного управлений $u_0 \in \mathfrak{U}$, $s_0 \in \mathfrak{S}$, доставляющих максимум функционалу F (13), и выяснить влияние начального значения q_0 (7) на величину $F(q_0, u_0, s_0)$, ср. с [26] и [27].*

4.2. Основной результат

С помощью теоремы 1 можно дать исчерпывающее решение поставленной задачи. А именно, справедливо следующее утверждение, ср. с [28].

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда справедливо следующее.

(а) *При любых начальных значениях q_0 (7), $\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} > 0$, и допустимых управлениях $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathfrak{S}$ имеет место равенство*

$$(14) \quad \begin{aligned} F(q_0, u, s) &= F(q_\infty(0; u, s), u, s) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^T \langle q_\infty(\tau; u, s), u \rangle d\tau + \langle q_\infty(T-; u, s), 1 - s \rangle \right). \end{aligned}$$

(б) *Если последовательности $\{u_m\} \subseteq \mathfrak{U}$ и $\{s_m\} \subseteq \mathfrak{S}$ слабо сходятся в $L^2(\mathbb{S}^2)$, $u_m \rightharpoonup u_0$ и $s_m \rightharpoonup s_0$, а последовательность $\{q_m\} \subseteq L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $q_m \geq 0$, $q_m \neq 0$ п.в., то*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} F(q_m, u_m, s_m) = F(q_\infty(0; u_0, s_0), u_0, s_0).$$

(в) *Функционал F (13) ограничен и его точная верхняя грань достигается на допустимых управлениях $u_0 \in \mathfrak{U}$ и $s_0 \in \mathfrak{S}$, так что справедливо равенство*

$$\sup F(q_0, u, s) = F(q_\infty(0; u_0, s_0), u_0, s_0).$$

Доказательство.

(а) Ясно, что величина функционала $F(q_0, u, s)$ не изменится при замене в его определении (13) нулевых нижних пределов интегрирования и суммирования на любое $T_0 \in [0, +\infty)$. Далее, для управляемых решений $q = q(t; q_0, u, s)$ задачи (6)–(8) и периодического решения $q = q_\infty(t; u, s)$ задачи (6), (8) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{T_0}^t \langle q(\tau) - q_\infty(\tau), u \rangle d\tau + \sum_{T_0 < kT \leq t} \langle q(kT-) - q_\infty(kT-), 1 - s \rangle \right| \leq \\ & \leq \left(t \|u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \sup_{\tau \geq T_0} \|q(\tau) - q_\infty(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \right. \\ & \quad \left. + [t] \|1 - s\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \sup_{kT \geq T_0} \|q(kT-) - q_\infty(kT-)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \right) \leq \\ & \leq t \left(\max\{\|U_1\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}, \|U_2\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\} + 1 \right) \sup_{\tau \geq T_0} \|q(\tau) - q_\infty(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}, \\ & \quad t \in [T_0, +\infty). \end{aligned}$$

Отсюда по утверждению (в) теоремы 1 заключаем, что $|F(q_0, u, s) - F(q_\infty(0; u, s), u, s)| = 0$. По определению (13) $F(q_\infty(0; u, s), u, s)$ равно правой части равенства (14).

(б) По утверждению (а) имеем

$$F(q_0, u_m, s_m) = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \langle q_\infty(\tau; u_m, s_m), u_m \rangle d\tau + \langle q_\infty(T-; u_m, s_m), 1 - s_m \rangle \right).$$

По утверждению (г) теоремы 1 в правой части этого равенства можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ [29, гл. 1, §5], в результате чего с учетом (14) получим доказываемое.

(в) Найдутся такие последовательности начальных значений $\{q_m\} \subseteq L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и допустимых управлений $\{u_m\} \subseteq \mathfrak{U}$ и $\{s_m\} \subseteq \mathfrak{S}$, что

$$\sup F(q_0, u, s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} F(q_m, u_m, s_m).$$

Согласно замечанию 1 множества допустимых управлений \mathfrak{U} и \mathfrak{S} секвенциально слабо компактны в $L^2(\mathbb{S}^2)$. Поэтому найдутся слабо сходящиеся в $L^2(\mathbb{S}^2)$ подпоследовательности $\{u_{m_i}\}$ и $\{s_{m_i}\}$, $u_{m_i} \rightharpoonup u_0 \in \mathfrak{U}$ и $s_{m_i} \rightharpoonup s_0 \in \mathfrak{S}$. Следовательно, по утверждению (б) получаем

$$\sup F(q_0, u, s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} F(q_m, u_m, s_m) = F(q_\infty(0; u_0, s_0), u_0, s_0).$$

Теорема доказана.

4.3. Выводы

По утверждению (в) теоремы 1 после выбора допустимых стационарного и импульсного управлений плотность распределения возобновляемого ресурса при любых ненулевых начальных значениях равномерно стремится к однозначно определенному предельному состоянию. По утверждению (в) теоремы 2 допустимые управления можно выбрать таким образом, чтобы за каждый цикл эксплуатации величина сбора ресурса совпадала с максимальной возможной усредненной по времени величиной сбора этого ресурса. Иными словами, выбор оптимального управления эксплуатацией возобновляемого ресурса обеспечивает выход любой ненулевой начальной плотности ресурса к предельному состоянию, обеспечивающему максимальный сбор ресурса за один цикл эксплуатации.

5. Доказательство теоремы 1

5.1. Вспомогательные утверждения

Согласно замечанию 1 субрешением задачи (6)–(8) является нулевая функция $q = 0$, а суперрешением – постоянная функция $q = Q(\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)})$. Поэтому из известных результатов для полулинейных параболических уравнений второго порядка на сфере [30–32] вытекает следующее.

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для всякого $u \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ на полуинтервале $[T_0, +\infty)$ существует единственное решение $q = q(\cdot; q_0, u)$ задачи (6), (7). При этом $q \in C([T_0, +\infty); L^2(\mathbb{S}^2))$, $0 \leq q(t) \leq Q(\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)})$ п.в. при $t \in [T_0, +\infty)$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\alpha = \alpha(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([T_0, +\infty)) \times (\mathbb{S}^2)})$, $0 < \alpha \leq 1$, и $C = C(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([T_0, +\infty)) \times \mathbb{S}^2}) \geq 0$, что $q \in C^\alpha([T_0 + \varepsilon, +\infty)) \times \mathbb{S}^2$ и $\|q\|_{C^\alpha([T_0 + \varepsilon, +\infty)) \times (\mathbb{S}^2)} \leq C$.

Кроме того, имеет место следующий факт.

Лемма 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Если последовательности $\{q_m\} \subseteq L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $\{u_m\} \subseteq \mathcal{M}$ слабо сходятся в $L^2(X)$, $q_m \rightharpoonup q_0$ и $u_m \rightharpoonup u_0$, то для решений $q = q(t; q_m, u_m)$ задачи Коши (6), (7) имеет место сходимость

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} q(\cdot; q_m, u_m) = q(\cdot; q_0, u_0),$$

слабая в $L^2([T_0, T_1]; W^{1,2}(X))$ и в нормах $\|\cdot\|_{C([T_0 + \varepsilon, T_1] \times X)}$ при любом $\varepsilon \in (0, T_1 - T_0)$.

Доказательство. По утверждению (а) теоремы 1 на полуинтервале $[T_0, T_1]$ при $m = 1, 2, \dots$ существует единственное управляемое решение $q(t; q_m, u_m)$, и поскольку согласно замечанию 1 последовательность $\{\|q_m\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\}$ ограничена, то

$$0 \leq q(t; q_m, u_m) \leq Q \left(\sup_{(m=0,1,\dots)} \|q_m\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \right), \quad t \in [T_0, T_1], \quad m = 1, 2, \dots$$

Поэтому в силу априорных оценок для решений линейных параболических уравнений второго порядка [8, гл. VI, §1] и [9, §1.5] найдется такая постоянная C_1 , что

$$(15) \quad \|q(\cdot; q_m, u_m)\|_{L^2((T_0, T_1); W^{1,2}(X))} \leq C_1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

а по утверждению (а) теоремы 1 для $\varepsilon \in (0, T_1 - T_0)$ найдутся такие C_2 и $0 < \alpha \leq 1$, что

$$(16) \quad \|q(\cdot; q_m, u_m)\|_{[T_0 + \varepsilon, T_1] \times X} \|_{C^\alpha([T_0 + \varepsilon, T_1] \times X)} \leq C_2, \quad m = 1, 2, \dots$$

В силу (15) и теоремы Эберлейна–Шмульяна, см. [24, прилож. к гл. V, §4], последовательность $\{q(\cdot; q_m, u_m)\}$ секвенциально слабо предкомпактна в $L^2((T_0, T_1); W^{1,2}(X))$, поскольку это пространство рефлексивно [17, гл. III, §1]. А в силу (16) и теоремы Асколи–Арцела последовательность $\{q(\cdot; q_m, u_m)\|_{[T_0 + \varepsilon, T_1] \times X}\}$ секвенциально предкомпактна в нормах $\|\cdot\|_{C([T_0 + \varepsilon, T_1] \times X)}$. Следовательно, из $\{q(\cdot; q_m, u_m)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{q(\cdot; q_{m_l}, u_{m_l})\}$, сходящуюся к предельной функции

$$\tilde{q}(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} q(t; q_{m_l}, u_{m_l}) \in L^\infty([T_0, T_1]; L^\infty(X)),$$

слабо в $L^2((T_0, T_1); W^{1,2}(X))$ и в нормах $\|\cdot\|_{C([T_0+\varepsilon, T_1]\times X)}$ при любом $\varepsilon \in (0, T_1 - T_0)$.

Определение решения задачи (6), (7) при $q_0 = q_{m_l}$ и $u = u_{m_l}$ принимает вид

$$\begin{aligned} & \langle q(\cdot; q_{m_l}, u_{m_l}), p \rangle(t) + \\ & + \int_{T_0}^t (\langle dq(\cdot; q_{m_l}, u_{m_l}), dp \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} - \langle q(\cdot; q_{m_l}, u_{m_l}), p' \rangle)(\tau) d\tau = \\ & = \langle q_{m_l}, p \rangle(0) + \int_{T_0}^t \langle (A - u_{m_l})q(\cdot; q_{m_l}, u_{m_l}) - Bq^2(\cdot; q_{m_l}, u_{m_l}), p \rangle(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

В нем можно перейти к пределу при $l \rightarrow +\infty$ [29, гл. 1, §5]. В результате получим

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{q}, p \rangle(t) + \int_{T_0}^t (\langle d\tilde{q}, dp \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} - \langle \tilde{q}, p' \rangle)(\tau) d\tau = \\ & = \langle q_0, p(0) \rangle + \int_{T_0}^t \langle (A - u_0)\tilde{q} - B\tilde{q}^2, p \rangle(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

т.е. предельная функция \tilde{q} является решением задачи (6), (7) на $[T_0, T_1]$ с начальным значением q_0 и стационарным управлением u_0 . По утверждению (а) теоремы 1 решение задачи (6), (7) единственно, и, следовательно, $\tilde{q}(t) = q(t; q_0, u_0)$. Лемма доказана.

5.2. Доказательство утверждений (а) и (б)

Утверждение (а) – следствие леммы 1.

Утверждение (б) доказывается индукцией по $N = 1, 2, \dots$. Для $N = 1$ доказываемое утверждение вытекает из леммы 2 при $[T_0, T_1] = [0, T]$. Пусть оно выполняется для $N \geq 1$. Тогда последовательность $\{q(NT-; q_m, u_m, s_m)\}$ сходится к $q(NT-; q_0, u_0, s_0)$ в $\|\cdot\|_{C(X)}$, и потому $\{s_m q(NT-; q_m, u_m, s_m)\}$ слабо сходится к $s_0 q(NT-; q_0, u_0, s_0)$ в $L^2(X)$ [29, гл. 1, §5]. Следовательно, при $[T_0, T_1] = [NT, (N+1)T]$ по лемме 2 имеет место сходимость

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow +\infty} q(\cdot; s_m q(NT-; q_m, u_m, s_m), u_m, s_m) = \\ & = q(\cdot; s_0 q(NT-; q_0, u_0, s_0), u_0, s_0), \end{aligned}$$

слабая в $L^2((0, T); W^{1,2}(X))$ и в нормах $\|\cdot\|_{C([\varepsilon, T]\times X)}$ при любом $\varepsilon \in (0, T)$. Таким образом, доказываемое утверждение выполняется и для $N+1$.

5.3. Доказательство утверждения (в)

Выберем произвольное число $r \in (0, +\infty)$ и рассмотрим *функциональный отрезок*

$$[0, Q(r)]_{L^\infty(X)} = \{w \in L^\infty(X) | 0 \leq w \leq Q(r) \text{ н.в.}\},$$

где Q – функция (11). По лемме 1 корректно определен нелинейный *оператор Пуанкаре*

$$P_{[T_0, T_1]}^u : [0, Q(r)]_{L^\infty(X)} \ni w \mapsto q(T_1; w, u) \in C(X),$$

где $q = q(t; w, u)$ – решение задачи (6), (7) на полуинтервале $[T_0, +\infty)$ с начальным значением $q_0 = w$ и допустимым управлением $u \in \mathfrak{U}$ (10), ср. с [33, гл. III, §21]. При этом

$$0 = P_{[0, \frac{T}{2}]}^u 0, \quad P_{[0, \frac{T}{2}]}^u Q(r) \leq Q(r), \quad 0 = P_{[\frac{T}{2}, T]}^u 0, \quad P_{[\frac{T}{2}, T]}^u Q(r) \leq Q(r)$$

в силу замечания 2 и принципа сравнения для слабых решений [9, разд. 2.1.2], так что

$$(17) \quad \begin{aligned} P_{[0, \frac{T}{2}]}^u([0, Q(r)]_{L^\infty(X)}) &\subseteq [0, Q(r)]_{L^\infty(X)}, \\ P_{[\frac{T}{2}, T]}^u([0, Q(r)]_{L^\infty(X)}) &\subseteq [0, Q(r)]_{L^\infty(X)}. \end{aligned}$$

Для допустимых управлений $s \in \mathfrak{S}$ (10) имеем $0 \leq s \leq 1$ н.в., поэтому

$$(18) \quad s[0, Q(r)]_{L^\infty(X)} \subseteq [0, Q(r)]_{L^\infty(X)}.$$

Тем самым корректно определена композиция S операторов Пуанкаре и умножения на s ,

$$(19) \quad S : [0, Q(r)]_{L^\infty(X)} \ni v \mapsto P_{[0, \frac{T}{2}]}^u s P_{[\frac{T}{2}, T]}^u v \in [0, Q(r)]_{L^\infty(X)}.$$

Очевидно, что 0 является для S *точкой равновесия*, т.е. $S(0) = 0$, а $Q(r)$ – *точкой суперравновесия*, т.е. $S(Q(r)) \leq Q(r)$ [33, гл. I, §1]. В силу утверждения (а) и теоремы Асколи–Арцела оператор S непрерывен и имеет предкомпактный образ. В силу принципа сравнения S сильно сохраняет порядок на $[0, Q(r)]_{L^\infty(X)}$ [33; гл. I, §1]. В силу строгой вогнутости правой части уравнения (6) оператор S строго сублинеен, т.е. $\beta S(v) < S(\beta v)$ для $v \in [0, Q(r)]_{L^\infty(X)} \setminus 0$ и $0 < \beta < 1$. Следовательно, S имеет на отрезке $[0, Q(r)]_{L^\infty(X)}$ при любом $r \in (0, +\infty)$ такую единственную неподвижную точку $v_0 = S v_0$, что для любого $v \in [0, Q(r)]_{L^\infty(X)} \setminus 0$ имеет место сходимость

$$(20) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|S^k(v) - v_0\|_{L^\infty(X)} = 0.$$

[33, гл. I, §5]. Далее, согласно включениям (17) и (18) функция

$$(21) \quad q_{\infty, 0} = s P_{[\frac{T}{2}, T]}^u v_0 \in [0, Q(r)]_{L^\infty(X)},$$

и поскольку уравнение (6) автономно, т.е. все его коэффициенты не зависят от t , то

$$\begin{aligned} sP_{[0,T]}^u q_{\infty,0} &= sP_{[0,T]}^u \left(sP_{[\frac{T}{2},T]}^u v_0 \right) = sP_{[\frac{T}{2},T]}^u \left(P_{[0,\frac{T}{2}]}^u sP_{[\frac{T}{2},T]}^u v_0 \right) = \\ &= sP_{[\frac{T}{2},T]}^u S v_0 = sP_{[\frac{T}{2},T]}^u v_0 = q_{\infty,0}. \end{aligned}$$

Таким образом, $q_{\infty,0}$ является неподвижной точкой оператора $sP_{[0,T]}^u$. Выберем в качестве $q_{\infty}(t; u, s)$ решение $q(t; q_{\infty,0}, u, s)$ задачи (6), (7), (8), принимающее начальное значение $q_{\infty,0}$ (21). По утверждению (а) это решение существует, единственно, удовлетворяет оценке $0 \leq q_{\infty}(t; u, s) \leq Q(r)$ на полуинтервале $[0, +\infty)$ и в силу того, что $q_{\infty,0}$ – неподвижная точка относительно оператора $sP_{[0,T]}^u$, – условию периодичности (9).

Пусть $q(t; q_0, u, s)$ – решение задачи (6), (7), (8) с $q_0 \in [0, Q(r)]_{L^\infty(X)} \setminus 0$. Тогда

$$w(t) = \pm(q(t; q_0, u, s) - q_{\infty}(t; u, s))$$

удовлетворяет слабому принципу максимума на полуинтервалах $[kT, k(T+1))$, $k = 1, 2, \dots$ [8, гл. VI, §7] и, следовательно,

$$|q(t; q_0, u, s) - q_{\infty}(t; u, s)| \leq |q(kT; q_0, u, s) - q_{\infty}(kT; u, s)|, \quad t \in [kT, k(T+1)).$$

Так как $q(kT; q_0, u, s) = (sP_{[0,T]}^u)^k q_0$ и $q_{\infty}(kT; u, s) = (sP_{[0,T]}^u)^k q_{\infty,0}$, то отсюда заключаем,

$$\|q(t; q_0, u, s) - q_{\infty}(t; u, s)\|_{C(X)} \leq \left\| \left(sP_{[0,T]}^u \right)^k q_0 - \left(sP_{[0,T]}^u \right)^k q_{\infty,0} \right\|_{L^\infty(X)},$$

и в силу построения S (19) и неподвижности $q_{\infty,0}$ (21) относительно $sP_{[0,T]}^u$ получаем

$$(22) \quad \begin{aligned} &\|q(t; q_0, u, s) - q_{\infty}(t; u, s)\|_{C(X)} \leq \\ &\leq \left\| sP_{[\frac{T}{2},T]}^u S^{k-1} P_{[0,\frac{T}{2}]}^u q_0 - sP_{[\frac{T}{2},T]}^u v_0 \right\|_{L^\infty(X)}, \end{aligned}$$

$t \in [kT, k(T+1))$, ибо $(sP_{[0,T]}^u)^k = sP_{[\frac{T}{2},T]}^u \left(P_{[0,\frac{T}{2}]}^u sP_{[\frac{T}{2},T]}^u \right)^{k-1} P_{[0,\frac{T}{2}]}^u$. Согласно (17) точка

$$P_{[0,\frac{T}{2}]}^u q_0 \in P_{[0,\frac{T}{2}]}^u ([0, Q(r)]_{L^\infty(X)} \setminus 0) \subseteq [0, Q(r)]_{L^\infty(X)} \setminus 0,$$

откуда в силу (22), (20), непрерывности оператора $sP_{[\frac{T}{2},T]}^u$ и произвольности выбора $r \in (0, +\infty)$ вытекает утверждение (а).

5.4. Доказательство утверждения (г)

По лемме 1 найдутся такие постоянные C и α , $0 < \alpha \leq 1$, что

$$\|q_\infty(T-; u_m, s_m)\|_{C^\alpha(X)} \leq C$$

равномерно по $m = 1, 2, \dots$. Поэтому из $\{q_\infty(T-; u_m, s_m)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})\}$, согласно теореме Асколи–Арцела сходящуюся в норме $\|\cdot\|_{C(X)}$ к предельной функции

$$(23) \quad q_T = \lim_{l \rightarrow +\infty} q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l}).$$

Достаточно доказать, что независимо от выбора $\{q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})\}$ справедливо равенство

$$(24) \quad q_T = q_\infty(T-; u_0, s_0).$$

Тогда вся последовательность $\{q_\infty(T-; u_m, s_m)\}$ сходится к $q_\infty(T-; u_0, s_0)$ в норме $\|\cdot\|_{C(X)}$ и $\{s_m q_\infty(T-; u_m, s_m)\}$ слабо сходится к $s_0 q_\infty(T-; u_0, s_0)$ в $L^2(X)$ [29, гл. 1, §5], откуда по лемме 2 следует утверждение (г), так как q_∞ удовлетворяет условиям (8) и (9).

Согласно условиям (8) и (9) $q_\infty(0; u_{m_l}, s_{m_l}) = s_{m_l} q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})$. Поэтому

$$q_\infty(t; u_{m_l}, s_{m_l}) = q(t; s_{m_l} q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l}), u_{m_l}, s_{m_l}), \quad t \in [0, T),$$

так как решение задачи (6), (7) единственно по лемме 1. В силу (23) подпоследовательность $\{s_{m_l} q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})\}$ слабо сходится в $L^2(X)$ к $s_0 q_T$, так что по лемме 2 в правой части этого равенства можно перейти к пределу, в результате чего получим

$$q_T = q(T-; s_0 q_T, u_0, s_0).$$

Тем самым решение $q = q(t; s_0 q_T, u_0, s_0)$ удовлетворяет условию периодичности

$$q(0; s_0 q_T, u_0, s_0) = s_0 q(T-; s_0 q_T, u_0, s_0),$$

т.е. является периодическим решением задачи (6), (8). Поэтому согласно замечанию 3 либо $q_\infty(T-; u_0, s_0) = q(T-; s_0 q_T, u_0, s_0)$ и тогда (24) справедливо, либо $q_\infty(T-; u_0, s_0) > 0$, $q(T-; s_0 q_T, u_0, s_0) = 0$, что эквивалентно выполнению условий

$$(25) \quad \|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} > 0, \quad q_T = 0.$$

Далее от противного: докажем, что если выполнены условия (25), то утверждение

$$(26) \quad \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ l \rightarrow +\infty}} q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l}) = 0, \quad q_0 > 0,$$

и его отрицание одновременно ложны, см. 1) и 2) ниже.

1) Пусть выполнены условия (25) и справедливо утверждение (26).

По утверждению (а) для $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что

$$\|q(kT-; q_0, u_0, s_0) - q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots$$

По утверждению (б) для $\varepsilon > 0$ и $k = 1, 2, \dots$ найдется такое натуральное $l_0 = l_0(\varepsilon, k)$, что

$$\|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l}) - q(kT-; q_0, u_0, s_0)\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad l_0, l_0 + 1, \dots$$

Следовательно, поскольку

$$\begin{aligned} \|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} &\geq \|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - \\ &\quad - \|q(kT-; q_0, u_0, s_0) - q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - \\ &\quad - \|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l}) - q(kT-; q_0, u_0, s_0)\|_{C(X)}, \end{aligned}$$

то для любого $\varepsilon > 0$, $k = k_0(\varepsilon), k_0(\varepsilon) + 1, \dots$ и $l = l_0(\varepsilon, k), l_0(\varepsilon, k) + 1, \dots$ выполняется

$$\|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} \geq \|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - 2\varepsilon.$$

Отсюда, выбрав $\varepsilon = \frac{\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)}}{4} > 0$ в соответствии с (25), выводим оценку

$$\|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} \geq \frac{\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)}}{2},$$

противоречащую утверждению (26). Таким образом, условия (25) и утверждение (26) приводят к противоречию.

2) Пусть выполнены условия (25), а утверждение (26) несправедливо. Тогда при некотором начальном значении q_0 (7), $q_0 > 0$, существует такое $\delta_0 > 0$, что для $N = 1, 2, \dots$ найдутся номера $k_0 = k_0(N) \geq N$ и $l_0 = l_0(N) \geq N$, при которых

$$(27) \quad \left\| q(k_0(N)T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}) \right\|_{C(X)} \geq \delta_0.$$

В силу (23) и (25) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $l_1 = l_1(\varepsilon)$, что

$$\|q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad l = l_1, l_1 + 1, \dots$$

По утверждению (а) для $\varepsilon > 0$ и $l = 1, 2, \dots$ найдется такое натуральное $k_1 = k_1(\varepsilon, l)$, что

$$\|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l}) - q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad k = k_1, k_1 + 1, \dots$$

Поэтому для $0 < \delta \leq \delta_0$ при $l = l_1\left(\frac{\delta}{2}\right), l_1\left(\frac{\delta}{2}\right) + 1, \dots$ и $k = k_1\left(\frac{\delta}{2}, l\right), k_1\left(\frac{\delta}{2}, l\right) + 1, \dots$ имеем

$$(28) \quad \left\| q\left(k_0(N)T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}\right) \right\|_{C(X)} \|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} \leq \\ \leq \|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l}) - q_\infty(T-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} + \\ + \|q_\infty(T-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} < \delta.$$

Из (27) и (28) заключаем, что для $N = l_1\left(\frac{\delta}{2}\right), l_1\left(\frac{\delta}{2}\right) + 1, \dots$ найдется такой номер

$$k_2 = k_2(\delta, k_0(N), l_0(N)) \in \left\{ k_0(N), \dots, k_1\left(\frac{\delta}{2}, l_0(N)\right) - 1 \right\},$$

при котором справедливы неравенства

$$(29) \quad \left\| q\left(k_2(\delta, k_0(N), l_0(N))T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}\right) \right\|_{C(X)} \geq \delta, \\ \left\| q\left((k_2(\delta, k_0(N), l_0(N)) + k)T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}\right) \right\|_{C(X)} < \delta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим последовательность $\{q_N\}$, где

$$q_N = q(k_2(\delta, k_0(N), l_0(N))T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}), \quad N = l_1\left(\frac{\delta}{2}\right), l_1\left(\frac{\delta}{2}\right) + 1, \dots$$

По утверждению (а) найдутся такие постоянные C и α , $0 < \alpha \leq 1$, что $\|q_N\|_{C^\alpha(X)} \leq C$ равномерно по N . Выберем из $\{q_N\}$ подпоследовательность $\{q_{N_\beta}\}$, согласно теореме Асколи–Арцела сходящуюся в норме $\|\cdot\|_{C(X)}$ к предельной функции

$$q_{0,\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} q_{N_\beta}.$$

Норма $\|q_{0,\infty}\|_{C(X)} \geq \delta$ в силу первого неравенства (29). Поскольку последовательность $\{s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}\}$ слабо сходится в $L^2(X)$ к $s_0 q_{0,\infty}$ [29, гл. 1, §5], то по утверждению (б) для произвольного $\varepsilon > 0$ и $k = 1, 2, \dots$ найдется такое $\beta_0 = \beta_0(\varepsilon, k)$, что

$$(30) \quad \left\| q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right) - q(kT-; s_0 q_{0,\infty}, u_0, s_0) \right\|_{C(X)} < \varepsilon$$

при $\beta = \beta_0, \beta_0 + 1, \dots$. По утверждению (в) для $\varepsilon > 0$ найдется такое $k_3 = k_3(\varepsilon)$, что

$$(31) \quad \|q(kT-; s_0 q_{0,\infty}, u_0, s_0) - q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad k = k_3, k_3 + 1, \dots$$

Следовательно, имеют место два следующих факта. Во-первых, поскольку

$$\left\| q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right) \right\|_{C(X)} \geq \|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - \\ - \|q(kT-; s_0 q_{0,\infty}, u_0, s_0) - q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - \\ - \left\| q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right) - q(kT-; s_0 q_{0,\infty}, u_0, s_0) \right\|_{C(X)},$$

то согласно (31) и (30) при $k \geq k_3(\varepsilon)$ и $\beta \geq \beta_0(\varepsilon, k)$ имеем

$$(32) \quad \left\| q \left(kT-; s_{m_{i_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{i_0(N_\beta)}}, s_{m_{i_0(N_\beta)}} \right) \right\|_{C(X)} \geq \\ \geq \|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - 2\varepsilon.$$

Во-вторых, поскольку в силу построения q_N и автономности уравнения (6)

$$q \left(kT-; s_{m_{i_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{i_0(N_\beta)}}, s_{m_{i_0(N_\beta)}} \right) = \\ = q \left((k_2(\delta, k_0(N), l_0(N)) + k)T-; q_0, u_{m_{i_0(N)}}, s_{m_{i_0(N)}} \right),$$

то согласно второму неравенству (29) имеем

$$(33) \quad \left\| q \left(kT-; s_{m_{i_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{i_0(N_\beta)}}, s_{m_{i_0(N_\beta)}} \right) \right\|_{C(X)} < \delta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из (32) и (33) при $k = k_3(\varepsilon)$ и $\beta = \beta_0(\varepsilon, k_3(\varepsilon))$ выводим неравенство

$$\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} < \delta + 2\varepsilon.$$

Выбрав в этом неравенстве

$$\varepsilon = \frac{\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)}}{4} \quad \text{и} \quad \delta = \min \left\{ \frac{\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)}}{4}, \delta_0 \right\}$$

согласно первому условию (25), получаем противоречивую оценку $\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} < 0$. Тем самым условия (25) и отрицание утверждения (26) также приводят к противоречию.

Автор выражает благодарность А.А. Давыдову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Verhulst P.F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance Math. Phys. 1838. No. 10. P. 113–121.
2. *Fourier J.B.J.* Theorie Analytique de la Chaleur. Paris: F. Didot, 1822.
3. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26.
4. *Fisher R.A.* The advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. V. 7. P. 335–369.
5. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model : I – Species persistence // J. Math. Biol. 2005. V. 51. P. 75–113.
6. *Pethame B.* Parabolic Equations in Biology, Heidelberg: Springer, 2015.

7. *Ладыженская О.А., Уралъцева В.А., Солонников Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. *Lieberman G.M.* Second Order Parabolic Differential Equations. New Jersey: World Scientific, 2005.
9. *Wang M.* Nonlinear Second Order Parabolic Equations. CRC Press, Boca Ration, 2021.
10. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model: II – Biological invasions and pulsating travelling fronts // *J. Math. Pures Appl.* 84 (2005), 1101–1146.
11. *Постников М.М.* Гладкие многообразия. М.: Наука, 1988.
12. *Hebby E.* Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds. Berlin: Springer, 1996.
13. *Nicolaescu L.I.* Lectures on the Geometry of Manifolds. New Jersey: World Scientific, 2021.
14. *Туницкий Д.В.* О построении решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Труды 14-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2021). 27–29 сентября 2021 г., Москва, Россия. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 717–723.
15. *Tunitsky D.V.* On Solvability of Second-Order Semilinear Elliptic Equations on Spheres // Proceedings of the 14th International Conference «Management of large-scale system development» (MLSD), 27–29 September, 2021, Moscow, Russia. IEEE Explore, 22 November 2021. P. 1–4. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9600203>
16. *Туницкий Д.В.* О разрешимости полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // *Изв. РАН. Серия математическая.* 2022. Т. 86. № 5. С. 97–115.
17. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. AMS, Providence, RI, 1997.
18. *Lions J.L.* Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites, Berlin: Springer-Verlag, 1961.
19. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
20. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
21. *Давыдов А.А., Мельник Д.А.* Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2021. Т. 27. № 2. С. 99–107.
22. *Коопман В.О.* The theory of search. III. The optimum distribution of search effort // *Oper. Res.* 1957. No. 5. P. 613–626.
23. *Жиков В.В.* Математические проблемы теории поиска // *Тр. Владимир. политех. ин-та,* 1968. С. 263–270.
24. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
25. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
26. *Арнольд В.И.* Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // *Функц. анализ и его прил.* 2002. Т. 36. Вып. 2. С. 1–11.
27. *Davydov A., Vinnikov E.* Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting // *Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.* 2023. V. 407. P. 101–112.

28. Винников Е.В., Давыдов А.А., Туницкий Д.В. Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборе // ДАН. 2023. Т. 514. С. 59–64.
29. Гавевский К., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
30. Туницкий Д.В. О слабых решениях полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Труды 15-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2022). 26–28 сентября 2022 г., Москва, Россия. М.: ИПУ РАН, 2022. С. 613–619.
31. *Tunitsky D. V.* On Initial Value Problem for Semilinear Second Order Parabolic Equations on Spheres // Proceedings of the 15th International Conference «Management of large-scale system development» (MLSD), 26–28 September, 2022, Moscow, Russia. IEEE Explore, 9 November 2022. P. 1–4.
<https://ieeexplore.ieee.org/document/9934193>
32. Туницкий Д.В. О стабилизации решений полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Известия РАН. Серия математическая. 2023. Т. 87. № 4. С. 186–204.
33. *Hess P.* Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity. New York, Pitman Research Notes in Math. Series, 1991.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 03.05.2024

После доработки 27.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024

Стохастические системы

© 2024 г. **М.М. ХРУСТАЛЁВ**, д-р физ.-мат. наук,
Д.С. РУМЯНЦЕВ, канд. физ.-мат. наук (n3030@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ УРАВНЕНИЙ ИТО ДЛЯ ФОРМИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА С ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ¹

Предложен аналитический метод синтеза генератора случайного процесса с заданным спектром в виде линейной системы уравнений Ито. Предполагается стационарность случайного процесса, спектральная и соответствующая передаточная функции которого определены в виде рациональных дробей. Коэффициенты системы уравнений Ито генератора находятся из рекуррентных алгебраических соотношений. Метод ориентирован на работу с математическими моделями случайных процессов природы, такими как модель ветра Драйдена. Подробно представлена трансформация спектров модели порыва ветра по трем направлениям и приведены соответствующие стохастические уравнения.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение Ито, спектральная плотность, передаточная функция, формирующий фильтр, генератор случайных возмущений, модель турбулентности ветра Драйдена.

DOI: 10.31857/S0005231024070055, **EDN:** XRSLSE

1. Введение

Формирующий фильтр позволяет генерировать случайный сигнал с заданной спектральной плотностью из сигнала белого шума [1, § 6.6; 2, § 10.1; 3, § 5.1.5]. Формирующий фильтр и анализируемая система образуют некоторую расширенную систему, на вход которой действует белый шум (рис. 1). Здесь показан способ перейти от представления системы в терминах передаточных функций (изображенных на схеме) к стохастическим дифференциальным уравнениям. Результаты статьи пригодятся исследователям для добавления в динамическую модель случайных факторов и имитации природных явлений (движения воздушных масс, течения воды и т.д.).

Известно много моделей порывов ветра [4], но в статье подробно рассмотрена только модель турбулентности Драйдена [5], на выходе дающая стохастический процесс, определяемый спектрами скоростей. Спектральная плотность сигнала является четной дробно-рациональной функцией частоты и может быть представлена в виде двух комплексно-сопряженных сомножителей,

¹ Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

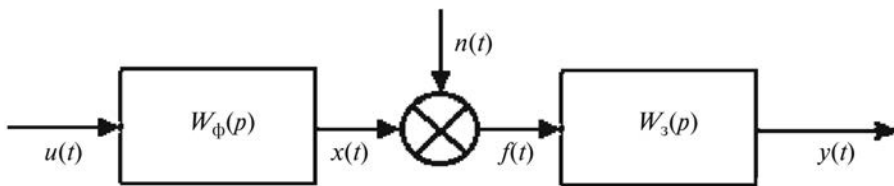


Рис. 1. Схема включения формирующего фильтра.

откуда и находится передаточная функция формирующего фильтра [1, § 6.6; 3, § 5.1.5].

Попытка напрямую написать дифференциальное уравнение высокого порядка, выход которого имеет заданный спектр, обычно приводит к появлению производных белого шума высокого порядка. Представление этих производных в виде обобщенных функций [6] и обобщение уравнений Ито в виде уравнений леонтьевского типа [6] известны, но такие уравнения сложны и мало исследованы. В [3, § 3.3.3] рассмотрен переход от линейного стохастического дифференциального уравнения высшего порядка к линейной системе стохастических дифференциальных уравнений первого порядка, но для поиска коэффициентов системы требуется дифференцировать коэффициенты исходного уравнения (если оно не является стационарным). Предлагаемый метод позволяет описать естественный случайный процесс с помощью хорошо изученных уравнений Ито [3]. Полученные уравнения, например, можно использовать совместно с уравнениями математической модели самолета [7].

Предложен способ получения относительно простых стохастических дифференциальных уравнений для синтеза выходного сигнала по известной передаточной функции. Далее будем рассматривать передаточные функции в предположении, что соответствующие им спектры известны.

Два способа преобразования любой дробно-рациональной передаточной функции, приводящие к одному и тому же результату, представлены далее. Функция разлагается на сумму дробей, числители которых – действительные числа, а знаменатели – многочлены. При этом все операции являются арифметическими. А блок-схему процесса можно изобразить в виде суммы интегрирующих звеньев. На основе новой записи можно составить систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Существует несколько более сложный способ аналогичного преобразования передаточной функции [8, §2.3]. Если передаточная функция $W(p)$ задана, то для соответствующей системы линейных уравнений вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned}$$

необходимо найти матрицу A и вектор b . Выходной вектор c задан. Первая форма Фробениуса матрицы уравнений состояния A подбирается так, что ее характеристический многочлен совпадает со знаменателем передаточной

функции. Элементы вектора b находятся из решения системы уравнений

$$W(p) = c(Ep - A)^{-1}b$$

методом неопределенных коэффициентов приравниванием множителей при одинаковых степенях переменной p многочленов числителей слева и справа [8, пример 2.7].

В предлагаемом подходе выходной вектор c находится в процессе решения и заранее не известен. В результате обращение матрицы не требуется и вычисляются только коэффициенты уравнения Ито с помощью арифметических операций.

Преобразование для получения уравнения (1) не является уникальным [8]. Поэтому не всегда удается добиться «минимальной реализации» (1), т.е. получить минимально возможное количество переменных в уравнении Ито.

2. Постановка задачи

Пусть спектральная плотность исследуемого возмущения определена как $\Phi(\omega) = |W(i\omega)|^2$, где

$$(2) \quad W(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \frac{a_0p^m + a_1p^{m-1} + \dots + a_{m-1}p + a_m}{b_0p^n + b_1p^{n-1} + \dots + b_{n-1}p + b_n},$$

здесь a_i ($i = \overline{0, m}$), b_j ($j = \overline{0, n}$) – постоянные действительные коэффициенты. Полюса и нули функции $W(p)$ располагаются в левой полуплоскости. $W(p)$ является передаточной функцией линейного дифференциального уравнения

$$(3) \quad \begin{aligned} b_0x^{(n)} + b_1x^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}x' + b_nx = \\ = a_0u^{(m)} + a_1u^{(m-1)} + \dots + a_mu. \end{aligned}$$

Блок-диаграмма формирующего фильтра представлена на рис. 2. Если на вход подавать стандартный белый шум (производную стандартного винеровского процесса) $u(t)$, то уравнение (3) становится стохастическим, но в общем случае содержит высшие производные белого шума.

Цель – заменить уравнение (3) системой линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяющей двум условиям: а) система не содержит производных входного сигнала, б) ее линейно зависящий от состояния выход

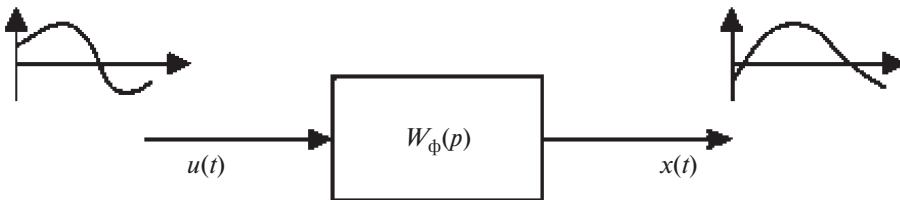


Рис. 2. Блок-диаграмма формирующего фильтра.

совпадает с выходом уравнения (3). Такая система уравнений, как показано ниже, легко преобразуется в систему уравнений Ито.

Оказывается, для преобразования достаточно представить передаточную функцию (2) в виде суммы рациональных дробей, числителями которых являются действительные коэффициенты (многочлены нулевого порядка). В случае, когда все нули знаменателя рациональной дроби вещественны, такое преобразование известно [9], но требует нахождения нулей знаменателя, что в общем случае возможно только численно. Предлагаемое преобразование не требует нахождения нулей и для любой правильной рациональной дроби как с вещественными, так и с комплексными нулями знаменателя, может быть выполнено аналитически. Коэффициенты модифицированной передаточной функции находятся последовательно из цепочки линейных уравнений.

Способ преобразования линейного стохастического уравнения n -го порядка (3) к эквивалентной линейной системе уравнений первого порядка, не содержащих производных белого шума, показан в [3, § 3.3.3]. При этом уравнение не является стационарным и коэффициенты a_i ($i = \overline{0, m}$), b_j ($j = \overline{0, n}$) зависят от времени t , а для поиска коэффициентов эквивалентной системы требуется дифференцировать функции a_i , b_j . Для стационарной системы новые коэффициенты находятся из рекуррентных арифметических соотношений.

3. Преобразование передаточной функции

Основная идея состоит в том, чтобы представить исходную функцию $W(p)$ в виде суммы нескольких функций $W_i(p)$, $i = \overline{1, m+n}$, см. рис. 3. Входной и выходной сигналы не изменятся в результате такого преобразования.

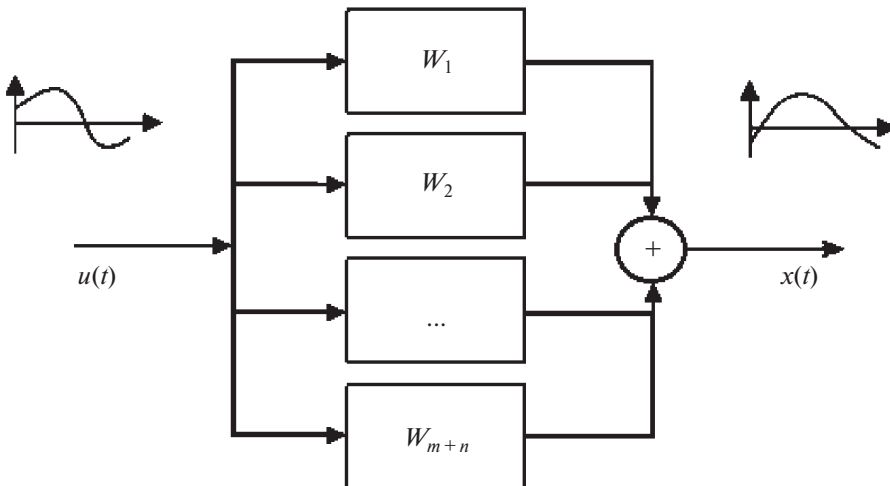


Рис. 3. Блок-диаграмма суммы нескольких формирующих фильтров.

Предлагаемое представление передаточной функции (2) имеет вид

$$(4) \quad W(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \frac{\alpha_1}{p^{n-m}} + \frac{\alpha_2}{p^{n-m+1}} + \dots + \frac{\alpha_m}{p^{n-1}} + \\ + \frac{1}{Q_n(p)} \left(\frac{\beta_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{\beta_{n-2}}{p^{n-2}} + \dots + \frac{\beta_1}{p} + \beta_0 \right).$$

Количество коэффициентов α_i ($i = \overline{1, m}$), β_j ($j = \overline{0, n-1}$) равно $m + n$. Они могут быть получены приравнованием левой и правой частей уравнений (2) и (4).

$$\begin{aligned} \beta_{n-1} + \alpha_m b_n &= 0, \\ \beta_{n-2} + \alpha_m b_{n-1} + \alpha_{m-1} b_n &= 0, \\ \beta_{n-3} + \alpha_m b_{n-2} + \alpha_{m-1} b_{n-1} + \alpha_{m-2} b_n &= 0, \\ \dots & \\ \beta_{n-m+1} + \alpha_m b_{n-m+2} + \dots + \alpha_2 b_n &= 0, \\ \beta_{n-m} + \alpha_m b_{n-m+1} + \dots + \alpha_2 b_{n-1} + \alpha_1 b_n &= 0, \\ \beta_{n-m-1} + \alpha_m b_{n-m} + \dots + \alpha_2 b_{n-2} + \alpha_1 b_{n-1} &= 0, \\ \dots & \\ \beta_2 + \alpha_m b_3 + \alpha_{m-1} b_4 + \dots + \alpha_2 b_{m+1} + \alpha_1 b_{m+2} &= 0, \\ \beta_1 + \alpha_m b_2 + \alpha_{m-1} b_3 + \dots + \alpha_1 b_{m+1} &= 0, \\ \beta_0 + \alpha_m b_1 + \alpha_{m-1} b_2 + \dots + \alpha_1 b_m &= a_m, \\ \alpha_m b_0 + \alpha_{m-1} b_1 + \dots + \alpha_1 b_{m-1} &= a_{m-1}, \\ \alpha_{m-1} b_0 + \dots + \alpha_1 b_{m-2} &= a_{m-2}, \\ \dots & \\ \alpha_2 b_0 + \alpha_1 b_1 &= a_1, \\ \alpha_1 b_0 &= a_0. \end{aligned}$$

Запишем краткую форму, представляющую собой систему рекуррентных уравнений, с помощью которых коэффициенты могут быть вычислены последовательно:

$$\alpha_1 = \frac{a_0}{b_0}, \quad \alpha_k = \frac{1}{b_0} \left[a_{k-1} - \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s b_{k-s} \right], \quad k = \overline{2, m}, \\ \beta_0 = a_m - \sum_{s=1}^m \alpha_s b_{m-s+1}, \\ \beta_k = - \sum_{s=1}^m \alpha_s b_{m+k-s+1}, \quad k = \overline{1, n-m}, \\ \beta_k = - \sum_{s=1}^{n-k} \alpha_{-n+m+k+s} b_{n-s+1}, \quad k = \overline{n-m+1, n-1}.$$

Существует и другой путь преобразования передаточной функции. Пусть передаточная функция имеет вид

$$(5) \quad W^{(r)}(p) = \frac{a_0^{(r)} p^{n-r} + a_1^{(r)} p^{n-r-1} + \dots + a_{n-r-1}^{(r)} p + a_{n-r}^{(r)}}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n},$$

$1 \leq r \leq n$. Верхний индекс (r) указывает на номер функции и степень полинома числителя. Степень полинома числителя $W^{(r+1)}(p)$ меньше степени полинома числителя $W^{(r)}(p)$, так как $n - (r + 1) < n - r$. Обозначим $B(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n$ и выполним ряд преобразований функции $W^{(r)}(p)$, состоящих в последовательном понижении степени полинома числителя до нуля.

$$\begin{aligned} W^{(r)}(p) &= \frac{a_0^{(r)} p^n + a_1^{(r)} p^{n-1} + \dots + a_{n-r}^{(r)} p^r}{p^r B(p)} = \\ &= \frac{1}{p^r B(p)} \left[\frac{a_0^{(r)}}{b_0} B(p) - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} (b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n) + \right. \\ &\quad \left. + \left(a_1^{(r)} p^{n-1} + a_2^{(r)} p^{n-2} + \dots + a_{n-r}^{(r)} p^r \right) \right] = \\ &= \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{p^r} + \frac{1}{B(p)} \left[\left(a_1^{(r)} - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} b_1 \right) p^{n-r-1} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(a_{n-r-1}^{(r)} - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} b_{n-r-1} \right) p + \left(a_{n-r}^{(r)} - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} b_{n-r} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{B(p)} \left[\frac{b_{n-r+1}}{p} + \frac{b_{n-r+2}}{p^2} + \dots + \frac{b_n}{p^r} \right]. \end{aligned}$$

Определим коэффициенты $a_\alpha^{(r+1)} = a_{1+\alpha}^{(r)} - (a_0^{(r)}/b_0) b_{1+\alpha}$, $\alpha = \overline{0, n - r - 1}$, для новой функции $W^{(r+1)}$. Тогда

$$(6) \quad W^{(r)}(p) = \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{p^r} + W^{(r+1)}(p) - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{B(p)} \sum_{k=1}^r \frac{b_{n-r+k}}{p^k},$$

и $W^{(r+1)}(p) = W^{(r)}(p) - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{p^r} + \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{B(p)} \sum_{k=1}^r \frac{b_{n-r+k}}{p^k}.$

Максимальное число шагов равно $n - r$. Функция $W^{(r)}(p)$ определена на r -м шаге, необходимо найти $W^{(r+1)}(p)$, $W^{(r+2)}(p)$, \dots . Числитель последней функции $W^{(r+s)}(p)$ является полиномом нулевого порядка, и тогда расчет будет закончен. Каждую следующую найденную функцию $W^{(r+k+1)}(p)$ нужно подставить в текущую функцию $W^{(r+k)}(p)$.

4. Формирование генератора случайных возмущений

Рассмотрим передаточную функцию (4), которая представляет собой сумму интегрирующих звеньев со своими коэффициентами усиления [10]. Для звена $1/p^{n-m}$ соответствующее уравнение будет $x_1 = u/p^{n-m}$, или $x_1^{(n-m)} = u$. Звено $1/p^{n-m+1}$ даст уравнение $x_2 = u/p^{n-m+1} = u/(p^{n-m}p) = u/p^{n-m} \times 1/p = x_1 \times 1/p$, или $x_2' = x_1$. Так последовательно находятся дифференциальные уравнения для первых m выходов. Точно так же, используя знаменатель $Q_n(p)$, получаем уравнение выхода x_{m+1} , который потом нужно еще $n-1$ раз проинтегрировать с помощью слагаемых в скобках из (4). Последним шагом будет сложение всех выходов с соответствующими коэффициентами α, β . Запишем систему дифференциальных уравнений и уравнение выхода, соответствующие передаточной функции (4) и (3):

$$(7) \quad \begin{aligned} x_1^{(n-m)} &= u, & x_2' &= x_1, & x_3' &= x_2, & \dots & x_m' &= x_{m-1}, \\ b_0 x_{m+1}^{(n)} &+ b_1 x_{m+1}^{(n-1)} &+ \dots &+ b_{n-1} x_{m+1}' &+ b_n x_{m+1} &= u, \\ x_{m+2}' &= x_{m+1}, & \dots & x_{m+n}' &= x_{m+n-1}, \\ x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m + \beta_0 x_{m+1} + \beta_1 x_{m+2} + \dots + \beta_{n-1} x_{m+n}. \end{aligned}$$

Порядок получившейся системы равен $N \leq 3n - 2$.

Система (3) может быть легко записана в виде системы уравнений первого порядка (7) и в предположении, что $u(t)$ – стандартный белый шум, преобразована в систему уравнений Ито N -го порядка.

Преобразование не меняет передаточную функцию $W(p)$ для выхода $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots$ (см. (7)). Тем не менее передаточные функции выходов x_1, x_2, \dots имеют некоторое количество нулевых полюсов. Таким образом, $W_k(p)$ для $x_k, k = \overline{1, m}$ имеет вид $W_k(p) = 1/p^{n-m+k-1}$. На практике это приведет к нестабильности при моделировании процесса (из-за ошибок в расчетах). Однако эту ситуацию можно исправить, сделав замену $p = (q - \Delta)/\lambda$ ($q = \lambda p + \Delta$), $\Delta/\lambda > 0$ в исходной передаточной функции $W(p)$. Тогда

$$\begin{aligned} W^*(q) &= \frac{P_m^*(q)}{Q_n^*(q)} = \frac{P_m \left(\frac{q-\Delta}{\lambda} \right)}{Q_n \left(\frac{q-\Delta}{\lambda} \right)} = \frac{\alpha_1^*}{q^{n-m}} + \frac{\alpha_2^*}{q^{n-m+1}} + \dots + \\ &+ \frac{\alpha_m^*}{q^{n-1}} + \frac{1}{Q_n^*(q)} \left(\frac{\beta_{n-1}^*}{q^{n-1}} + \frac{\beta_{n-2}^*}{q^{n-2}} + \dots + \frac{\beta_1^*}{q} + \beta_0^* \right). \end{aligned}$$

Обратным преобразованием $q = \lambda p + \Delta$ получим

$$W(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \frac{\alpha_1^*}{(\lambda p + \Delta)^{n-m}} + \frac{\alpha_2^*}{(\lambda p + \Delta)^{n-m+1}} + \dots$$

Передаточные функции выходных компонент x_1, x_2, \dots такого разложения будут иметь полюса в левой полушлоскости.

5. Пример

Пусть задана передаточная функция

$$W(p) = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}.$$

Требуется записать ее в виде (4) суммы дробей с полиномами нулевого порядка в числителях.

В результате преобразования получим

$$W^*(q) = W(q-1) = \frac{(q-1)^2 + 2(q-1) + 1}{(q-1)^3 + 3(q-1)^2 + 2(q-1) + 2} = \frac{q^2}{q^3 - q + 2}.$$

Здесь $n = 3$, $m = 2$, $a_0^* = 1$, $a_1^* = 0$, $a_2^* = 0$, $b_0^* = 1$, $b_1^* = 0$, $b_2^* = -1$, $b_3^* = 2$, $\alpha_1^* = \frac{a_0^*}{b_0^*} = 1$, $\alpha_2^* = \frac{1}{b_0^*} [a_1^* - \alpha_1^* b_1^*] = 0$, $\beta_0^* = a_2^* - [\alpha_1^* b_2^* + \alpha_2^* b_1^*] = 1$, $\beta_1^* = -[\alpha_1^* b_3^* + \alpha_2^* b_2^*] = -2$, $\beta_2^* = -[\alpha_2^* b_3^*] = 0$.

$$W^*(q) = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{2}{q}\right) \frac{1}{q^3 - q + 2},$$

$$W(p) = \frac{1}{p+1} + \left(1 - \frac{2}{p+1}\right) \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}.$$

Запишем решение вторым способом

$$W^{(1)}(q) = \frac{q^2}{q^3 - q + 2} = \frac{q^2}{B(q)}, \quad B(q) = q^3 - q + 2,$$

$$W^{(2)}(q) = \frac{q^2}{B(q)} - \frac{1}{q} + \frac{1}{B(q)} \times \frac{2}{q} = \frac{q^3 - B(q) + 2}{qB(q)} = \frac{1}{B(q)}.$$

Используем (6)

$$W^{(1)}(q) = \frac{1}{q} + \frac{1}{B(q)} - \frac{1}{B(q)} \frac{2}{q} = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{2}{q}\right) \frac{1}{B(q)} = W^*(q).$$

Результаты совпадают.

Запишем вывод уравнений Ито для $W(p)$ в соответствии с (7). Первое слагаемое дает уравнение $u = (p+1)x_1$. Вторым уравнением будет $u = (p^3 + 3p^2 + 2p + 2)x_2 = ((p+1)^3 - (p+1) + 2)x_2$. Обозначим $(p+1)x_2 = x_4$, $(p+1)x_4 = x_5$, тогда $u = (p+1)x_5 - x_4 + 2x_2$. Третьим уравнением будет $u = (p+1)(p^3 + 3p^2 + 2p + 2)x_3$, или $(p+1)x_3 = x_2$.

Искомая система уравнений Ито и уравнение выхода имеют вид

$$\begin{aligned} dx_1 + x_1 dt &= dw, & dx_2 + (x_2 - x_4) dt &= 0, \\ dx_3 + (x_3 - x_2) dt &= 0, & dx_4 + (x_4 - x_5) dt &= 0, \\ dx_5 + (x_5 - x_4 + 2x_2) dt &= dw, \\ x &= x_1 + x_2 - 2x_3. \end{aligned}$$

На основе передаточной функции была получена линейная система дифференциальных уравнений Ито, не содержащая производных входного сигнала. Конечно, выбор новой переменной был сделан так, чтобы в знаменателе передаточной функции легко выделить куб суммы, а потом получить линейные уравнения первого порядка.

6. Модель турбулентности ветра Драйдена

Министерство обороны США использует модель порывов ветра Драйдена в некоторых приложениях для проектирования и моделирования летательных аппаратов. Эта математическая модель рассматривает компоненты скорости непрерывных порывов ветра как случайные процессы [5, 11]. Документация MATLAB обеспечивает реализацию передаточной функции для порывов ветра [12]. Двенадцать передаточных функций определены для моделей порывов ветра в продольном, горизонтальном и вертикальном направлениях. Однако можно выделить только три типа различных функций, отличающихся от функций модели лишь постоянными коэффициентами A , B , C , D (см. [12]):

$$G_1(p) = A \frac{1}{1 + Cp}, \quad G_2(p) = A \frac{1 + Bp}{(1 + Cp)^2}, \quad G_3(p) = \frac{Ap}{1 + Cp} \times \frac{1 + Bp}{(1 + Dp)^2}.$$

Первый тип функции $G_1(p)$ является простым интегратором и не требует преобразования. Требуемая система уравнений Ито для $G_1(p)$ имеет вид

$$dx + \frac{1}{C}xdt = \frac{A}{C}dw.$$

Рассмотрим вторую. Требуется получить систему уравнений Ито для передаточной функции $G_2(p)$. Тогда

$$G_2^*(q) = G_2 \left(\frac{q-1}{C} \right) = \frac{A}{C} \frac{Bq + C - B}{q^2} = \frac{A}{C} \left(\frac{B}{q} + \frac{C-B}{q^2} \right),$$

$$G_2(p) = \frac{A}{C} \left(\frac{B}{1 + Cp} + \frac{C-B}{(1 + Cp)^2} \right).$$

Искомая система уравнений Ито и уравнение выхода для $G_2(p)$ имеют вид

$$dx_1 + \frac{1}{C}x_1dt = \frac{1}{C}dw, \quad dx_2 + \frac{1}{C}(x_2 - x_1)dt = 0,$$

$$x = \frac{A}{C} \left(Bx_1 + (C - B)x_2 \right).$$

Если сделать другую замену переменных $q = p + 1$, то получится довольно громоздкая система уравнений 5-го порядка. Предлагаем читателям убедиться в этом самостоятельно.

Рассмотрим третью функцию $G_3(p)$. Заменяем переменную: $p = (q - 1)/D$. Тогда

$$G_3^*(q) = G_3\left(\frac{q-1}{D}\right) = A \frac{Bq^2 + (D - 2B)q + B - D}{DCq^3 + (D^2 - DC)q^2}.$$

Представим последнее выражение, используя (4):

$$G_3^*(q) = A \left[\frac{\alpha_1}{q} + \frac{\alpha_2}{q^2} + \frac{1}{b_0q^3 + b_1q^2} \left(\frac{\beta_2}{q^2} + \frac{\beta_1}{q} + \beta_0 \right) \right],$$

тогда

$$\begin{aligned} b_0 &= DC, & b_1 &= D^2 - DC, \\ \alpha_1 &= B/(DC), & \alpha_2 &= [D - 2B - B(D^2 - DC)/(DC)]/(DC), \\ \beta_0 &= B - D - (D^2 - DC)[D - 2B - B(D^2 - DC)/(DC)]/(DC), \\ \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Сделаем обратную замену переменных и получим функцию

$$G_3(p) = A \left[\frac{\alpha_1}{1 + Dp} + \frac{\alpha_2}{(1 + Dp)^2} + \frac{\beta_0}{b_0(1 + Dp)^3 + b_1(1 + Dp)^2} \right].$$

Более подробно запишем вывод уравнений Ито для $G_3(p)$. Первое и второе слагаемые дают $x_1 = \frac{u}{1+Dp}$, $x_2 = \frac{u}{(1+Dp)^2} = \frac{u}{1+Dp} \times \frac{1}{1+Dp} = \frac{x_1}{1+Dp}$. Рассмотрим третье слагаемое: $x_3 = \frac{u}{b_0(1+Dp)^3 + b_1(1+Dp)^2} = \frac{u}{(1+Dp)^2} \times \frac{1}{b_0(1+Dp) + b_1} = \frac{x_2}{b_0(1+Dp) + b_1}$. Тогда искомая система уравнений Ито и уравнение выхода для $G_3(p)$ имеют вид

$$\begin{aligned} dx_1 + \frac{1}{D}x_1 dt &= \frac{1}{D}dw, & dx_2 + \frac{1}{D}(x_2 - x_1)dt &= 0, \\ dx_3 - \frac{1}{Db_0}x_2 dt + \frac{b_0 + b_1}{Db_0}x_3 dt &= 0, \\ x &= A[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_0 x_3]. \end{aligned}$$

Модель турбулентности ветра Драйдена не единственная. Например, модель фон Кармана [13] имеет другие передаточные функции, такие как

$$G(p) = A \frac{1 + Bp}{1 + Cp + Dp^2}.$$

Соответствующая система уравнений Ито для этой функции будет содержать 6 переменных. Преобразованную функцию здесь не приводим, потому что она оказалась слишком громоздкой. Возможно, была выбрана не очень удачная замена переменной. Поэтому сами исследователи в зависимости от коэффициентов C и D полинома знаменателя должны выбирать способ замены переменной.

Дискуссия о выборе модели турбулентности продолжается [14]. Видно, что число переменных в уравнении Ито для модели Драйдена не более трех, а в модели фон Кармана не менее шести. Соответственно увеличивается вычислительная сложность алгоритма моделирования порывов ветра.

7. Заключение

Предлагаемый метод преобразования передаточной функции позволяет привести ее к такому виду, что система дифференциальных уравнений, эквивалентная дифференциальному уравнению (3), не содержит производных входного сигнала $u(t)$. Подразумевая, что $u(t)$ является белым шумом, системе легко преобразовать в систему уравнений Ито.

Результаты можно использовать не только для стохастических дифференциальных уравнений, но и для обычных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (3) со скалярными входным и выходным сигналами [3, § 1.3.4].

В представленном методе невозможно влиять на количество переменных, а в методе [8] можно влиять на количество выходных переменных для выходного сигнала $y = cx$ (см. (1)) и, соответственно, на тип формирующего фильтра, изображенного на рис. 3. Поэтому в рассмотренном выше подходе структура выходного сигнала становится известна только в результате решения задачи. А в методе, описанном в [8], заранее известен тип выходного сигнала. Но предлагаемое решение в отличие от [8] не требует обращения матриц, а использует только рекурсивные арифметические операции для нахождения коэффициентов многочленов.

Здесь специально не приводятся результаты расчетов и численного моделирования динамических процессов для рассматриваемых в статье систем. На взгляд авторов, достаточно полное исследование с различными результатами моделирования выполнено в [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коновалов Г.Ф.* Радиоавтоматика: Учеб. для вузов по спец. «Радиотехника». М.: Высш. шк., 1990.
2. *Ким Д.П.* Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
3. *Пугачёв В.С., Синицин И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
4. *Hoblit Frederic M.* Gust Loads on Aircraft: Concepts and Applications. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. ISBN 0930403452, 1988.
5. *McLean D.* Automatic Flight Control Systems // Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1990, 593 p.
6. *Гликлик Ю.Е.* Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов // Сер. Матем. моделирование и программирование. Вестн. ЮУрГУ. 2012. № 27 (286). С. 24–34.
7. *Agapova A.S., Khrustalev M.M.* System shape optimization and stabilization of controlled quasi-linear stochastic systems that operate on an infinite time interval // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. V. 56. No. 1. P. 64–86.
<https://doi.org/10.1134/S1064230717010099>

Агапова А.С., Хрусталёв М.М. Оптимизация облика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 65–88.

8. *Веремей Е.И.* Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. Т. 1.
9. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. М.: Высш. шк., 1970. Т. 1. С. 369–370.
10. *Пантелеев А.В., Бортакровский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
11. *Liermann H.W.* On the Application of Statistical Concepts to the Buffeting Problem // J. Aeronaut. Sci. 1952. V. 19. No. 12. P. 793–800.
<https://doi.org/10.2514/8.2491>
12. MATLAB Reference Pages. The MathWorks, Inc. 2010. Retrieved Jan 31, 2024.
<https://www.mathworks.com/help/aeroblks/drydenwindturbulencemodelcontinuous.html>
13. MATLAB Reference Pages. The MathWorks, Inc. 2010. Retrieved Jan 31, 2024.
<https://www.mathworks.com/help/aeroblks/vonkarmanwindturbulencemodelcontinuous.html>
14. U.S. Military Handbook MIL-HDBK-1797, December 19, 1997.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньим.

Поступила в редакцию 06.08.2023

После доработки 15.01.2024

Принята к публикации 20.01.2024

Управление в социально-экономических системах

© 2024 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева)

ОБЪЕМНЫЕ ПРЕДПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ВАРИАЦИИ В ИГРАХ ОЛИГОПОЛИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЯХ СПРОСА И ИЗДЕРЖЕК И МНОГОУРОВНЕВОМ ЛИДЕРСТВЕ

Рассматривается некооперативная игра объемной конкуренции фирм на рынке олигополии для случая функций спроса и издержек общего вида. Оптимальное реагирование каждой фирмы на стратегии других фирм оценивается по величине и знаку предположительной вариации, которая выражает предположение фирмы об изменении объема предложения контрагента в ответ на единичное изменение объема предложения данной фирмы. Исследуется игра n фирм, в которой обобщенной характеристикой реагирования является сумма предположительных вариаций относительно всех контрагентов. Выявлено существование бифуркации реагирования игроков, т.е. игровой ситуации, в которой возможно как положительное, так и отрицательное реагирование с бесконечной по величине суммой вариаций. Разработаны методы расчета суммы предположительных вариаций для различных видов обратной функции спроса (линейной и степенной) и функций издержек (линейных, степенных, квадратичных), на основе которых проведен сравнительный анализ влияния этих характеристик фирм на состояние бифуркации.

Ключевые слова: олигополия, предположительная вариация, бифуркация, лидерство по Штакельбергу.

DOI: 10.31857/S0005231024070065, EDN: XRKSAU

1. Введение

В игре олигополии игроки-фирмы выдвигают предположения о стратегиях других игроков, т.е. окружения, на которых базируют свое оптимальное реагирование на эти стратегии. В случае объемной конкуренции предположения фирм формализованы в виде объемных предположительных вариаций [1]. Этот случай зачастую рассматривают исследователи [2] в связи с тем, что объемная конкуренция предпочтительнее, так как приводит к меньшему выпуску, более высоким ценам и большей прибыли, чем ценовая [3]. Предположительная вариация (здесь и далее рассматривается объемная предположительная вариация) представляет собой предполагаемое фирмой-игроком

изменение объема предложения контрагента в ответ на единичное изменение объема предложения данной фирмы. В теории олигополии принято рассматривать оптимальную (в зарубежной литературе consistent – совместимая [4]) предположительную вариацию, которая вычислена из необходимого условия оптимальности игрока, т.е. соответствует его наилучшему ответу. Другими словами, информированность о предположительной вариации в условиях неинформированности о модели выбора стратегии игрока (его функции полезности) позволяет предсказать поведение игрока.

Кроме того, игрок, оценивая предположительные вариации, может предполагать, что контрагент также оценивает его, т.е. исходит из оптимальности поведения первого. В этом случае контрагента называют лидером по Штакельбергу, а первого игрока – ведомым. Однако аналогично может рассуждать и контрагент, для которого упомянутый игрок будет лидером, а контрагент, вычисляющий предположительную вариацию из оптимальной реакции лидера, становится лидером второго уровня. Представленная последовательность рассуждений игроков называется стратегической рефлексией. Таким образом, анализ предположительных вариаций неизбежно приводит к проблеме многоуровневого лидерства [5]. Следовательно, вектор предположительных вариаций всех игроков является комплексной характеристикой игровой ситуации при данных ментальных профилях фирм, учитывая, что предположительные вариации являются функциями роли каждого игрока в иерархии многоуровневого лидерства.

В игре олигополии n лиц при $n > 2$ игровое поведение фирмы определяется суммой предположительных вариаций (СПВ) этого игрока относительно всех игроков окружения. В случае, если СПВ игрока отрицательна, то его оптимальной стратегией будет увеличение объема предложения, и наоборот. Поэтому в игре n лиц информированность обо всех компонентах вектора предположительных вариаций всех игроков не является обязательной для предсказания исхода игры, а достаточно знания компонентов вектора СПВ всех игроков. Безусловно, для определения вектора СПВ необходима информированность о функциях полезности игроков, однако если для типовых функций полезности найдены пределы и показан характер изменения СПВ, то создается информационная база для предсказания пределов исхода игры.

Типичные функции полезности задаются набором функций спроса и функций издержек [5–19]. В исследованиях олигополии наиболее часто встречаются такие обратные функции спроса, как линейная функция [5, 6, 9–15] и степенная функция [5, 16–19]. Набор функций, моделирующих затраты олигополистов, несколько шире: линейная функция [10, 12–14, 16, 18], степенная функция [6, 17], квадратичная функция [5, 7–9, 11, 15, 19]. Очевидно, что в подавляющем большинстве публикаций исследователи базируются на линейных моделях спроса и издержек, поскольку в этом случае легко вычислить предположительные вариации из функций наилучших ответов (функций реакций), которые представимы в явном виде. Степенная функция издержек

при различных значениях показателя степени может быть как выпуклой, так и вогнутой; вогнутая функция издержек соответствует положительному эффекту расширения масштаба, тогда как выпуклая – отрицательному. Квадратичная функция издержек применяется только для описания отрицательного эффекта расширения масштаба в выпуклом случае, так как в противном случае возможен переход к убывающей зависимости издержек от выпуска, что не соответствует экономическим реалиям.

Таким образом, анализ характера и пределов изменения СПВ вследствие изменения профиля рефлексивных предположений фирм в условиях многообразия функций полезности игроков представляет актуальную задачу оценивания поведения фирм в игре олигополии

2. Формулировка модели игры олигополии

Рассмотрим объемную монопродуктовую конкуренцию олигополии n фирм ($n > 2$) при общей для всех фирм обратной функции спроса $P(Q)$, убывающей по суммарному предложению продукта Q , и в случае функций издержек фирм $C_i(Q_i)$, которые не убывают по предложению i -й фирмы.

Допустим возможность рефлексии для каждого игрока (фирмы), которая задается рангом рефлексии r . Рефлексивное поведение игрока выражается в выдвигании им некоторых представлений о стратегиях окружения (остальных игроков), что приводит к появлению в игре представляемых или фантомных игроков [20]. При этом ранг рефлексии является числовой характеристикой таких представлений, а последовательность рангов задает следующую иерархию представляемых игроков:

- на ранге $r = 1$ игрок информирован о том, что окружение не информировано о его стратегии, т.е. игроки окружения являются последователями (ведомыми), а данный игрок приобретает статус лидера по Штакельбергу первого уровня;

- на ранге $r = 2$ по информации игрока его окружают лидеры по Штакельбергу первого уровня, следовательно, рассматриваемый игрок переходит в статус лидера по Штакельбергу второго уровня;

- на произвольном ранге r игроку известно, что игроки окружения имеют статус лидеров $(r - 1)$ -го уровня, тогда игрок имеет статус лидера r -го уровня.

Таким образом, реальная игра фирм на рынке олигополии далее рассматривается как информационная игра фантомных игроков, каждый из которых может находиться на различных уровнях лидерства в зависимости от степени его информированности, поэтому такую ситуацию принято называть многоуровневым лидерством (multiple leader-follower game) [5], а уровни лидерства задаются рангом r .

Игра с многоуровневым лидерством представляет собой кортеж следующего вида:

$$\Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, \{r_i, i \in N\} \rangle,$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, $\{Q_i, i \in N\}$ вектор действий игроков, $\{\Pi_i, i \in N\}$ – вектор функций полезности игроков, $\{r_i, i \in N\}$ – вектор рангов игроков.

Функция полезности i -го игрока имеет вид

$$\Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i).$$

Дифференцируя функции полезности игроков, определим систему необходимых условий равновесия Нэша:

$$(1) \quad P(Q) + (1 + S_i^r)Q_i P'_Q - C'_{iQ_i} = 0, \quad i \in N,$$

где $S_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} Q'_{j(r)Q_i}$ – сумма предположительных вариаций i -го игрока на r -м ранге рефлексии, каждый компонент которой Q'_{jQ_i} есть предположительная вариация i -го игрока, т.е. предполагаемое им изменение выпуска j -го игрока в ответ на единичный прирост выпуска i -го игрока; величина $Q'_{jQ_i} = \rho'_{ij}$ вычисляется дифференцированием уравнения (1) для j -го игрока, что подтверждает ее оптимальность.

Условие существования равновесия в рассматриваемой игре, т.е. такого решения системы (1), которое доставляет максимумы функциям полезностям $\Pi_i(Q, Q_i)$ игроков, доказано В. Новшеком [21]

$$P'_Q + P''_{QQ}Q < 0$$

и зависит от вида функций спроса: для линейной и экспоненциальной функций спроса это условие выполняется, а при степенной функции спроса – нет, тогда для существования равновесия требуется условие неубывания функций издержек $C'_{iQ_i} \geq 0$.

Решение системы (1) можно найти, если известны СПВ всех игроков S_i^r , для вычисления которых была выведена [6] рекуррентная формула на произвольном ранге рефлексии:

$$(2) \quad S_i^r = \left(\frac{1}{\sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1}} - 1 \right)^{-1}.$$

Согласно (2) СПВ игрока зависит от двух характеристик игроков окружения:

- ментальных типов игроков, определяемых значениями их СПВ на предыдущем ранге рефлексии S_j^{r-1} ;
- технологических типов, связанных с видом функций издержек игроков окружения, задаваемых параметрами u_j ; для некоторых видов функций

спроса (если $P''_{QQ_i} \neq 0$, как будет показано далее) этот параметр также учитывает ментальный тип игрока.

Отметим, что формула (2) представлена для не зависящих от действий игроков предположительных вариаций, т.е. при $\rho'_{ijQ_i} = 0$, а в [6] описан более общий случай $\rho'_{ijQ_i} \neq 0$. Также было показано [6], что предположительные вариации слабо зависят от объемов предложения игроков, т.е. $\rho'_{ijQ_i} \approx 0$. В дальнейшем эта предпосылка будет обоснована для исследуемых функций спроса и издержек, а также показано, что наибольшее влияние на СПВ игрока оказывают СПВ и типы функций спроса и издержек окружения.

Утверждение 1. В (2) параметр u_i вычисляется по формуле:

$$(2a) \quad u_i = -1 + \frac{P'_{Q_i} + (1 + S_i^{r-1})Q_i P''_{QQ_i} - C''_{iQ_i Q_i}}{|P'_{Q_i}|}.$$

В дальнейшем будем называть u_i *коэффициентом нелинейности*, поскольку он характеризует влияние нелинейности функций спроса и издержек на тип уравнения (1) i -го игрока, так как при $u_i = -2$ соответствующее уравнение системы (1) является линейным.

Таким образом, из (1) следует, что вычисление равновесия в игре напрямую зависит от значения СПВ, которое, как вытекает из (2), предопределено особенностями функций $P(Q)$ и $C_i(Q_i)$. Поэтому исследуем возможные значения СПВ при различных вариантах сочетания этих функций.

3. Результаты

3.1. Методы вычисления предположительных вариаций

В дальнейшем, если индекс игрока i не имеет значения, опустим его и будем обозначать действие игрока символом $q = Q_i \forall i \in N$. Рассмотрим следующие обратные функции спроса:

$$(3a) \quad P_1(Q) = a - bQ, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \gg b,$$

$$(3б) \quad P_2(Q) = AQ^\alpha, \quad A > 0, \quad \alpha < 0, \quad |\alpha| < 1,$$

и функции издержек

$$(4a) \quad C_1(q) = B_0 + B_1q, \quad B_0 \geq 0, \quad B_1 > 0,$$

$$(4б) \quad C_2(q) = B_0 + B_1q^\beta, \quad B_0 \geq 0, \quad B_1 > 0, \quad \beta \in (0, 2),$$

$$(4в) \quad C_3(q) = B_0 + B_1q + \frac{B_2}{2}q^2, \quad B_0 \geq 0, \quad B_1, B_2 > 0,$$

где a, b, A, α – постоянные коэффициенты функций спроса, B_0, B_1, B_2, β – постоянные коэффициенты функций издержек.

Здесь введены обозначения типов функций: $P_k(Q)$, $k = 1, 2$ – функция спроса k -го типа ($k = 1$ – линейная функция, $k = 2$ – степенная функция); $C_m(q)$, $m = 1, 2, 3$ – функция издержек m -го типа ($m = 1$ – линейная функция, $m = 2$ – степенная функция, $m = 3$ – квадратичная функция).

Для формулы (2) выведем выражения P'_Q , P'_q , P''_{Qq} , C''_{qq} при (3), (4):

$$(5a) \quad P'_{1Q} = P'_{1q} = -b, \quad P''_{1Qq} = 0,$$

$$(5b) \quad P'_{2Q} = P'_{2q} = A\alpha Q^{\alpha-1}, \quad P''_{2Qq} = A\alpha(\alpha-1)Q^{\alpha-2},$$

$$(5в) \quad C''_{1qq} = 0, \quad C''_{2qq} = B_1\beta(\beta-1)q^{\beta-2}, \quad C''_{3qq} = B_2.$$

В результате параметры u_{km} , $k = 1, 2$, $m = 1, 2, 3$ для функций (3), (4) имеют вид:

$$(6a) \quad u_{11} = -2, \quad u_{21} = -2 + (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{q}{Q},$$

$$(6b) \quad u_{12} = -2 - \frac{B_1}{b}\beta(\beta-1)q^{\beta-2},$$

$$u_{22} = -2 + (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{q}{Q} - \frac{B_1}{A|\alpha|Q^{\alpha-1}}\beta(\beta-1)q^{\beta-2},$$

$$(6в) \quad u_{13} = -2 - \frac{B_2}{b}, \quad u_{23} = -2 + (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{q}{Q} - \frac{B_2}{A|\alpha|Q^{\alpha-1}}.$$

Отметим, что в (6) параметр B_1 соответствует только случаю степенной функции.

3.2. Сравнительный анализ предположительных вариаций

Введем обозначение $s_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1}$, при котором (2) упрощается:

$$(7) \quad S_i^r = \left(\frac{1}{s_i^r} - 1 \right)^{-1},$$

где s_i^r выражает агрегат функций издержек и СПВ окружения, т.е. обобщенную характеристику технологических и ментальных типов игроков окружения.

Анализ формулы (7) показывает существование разрыва второго рода (рис. 1) функции $S_i^r(u_j, S_j^{r-1})$ при условии

$$(7a) \quad s_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1} = 1,$$

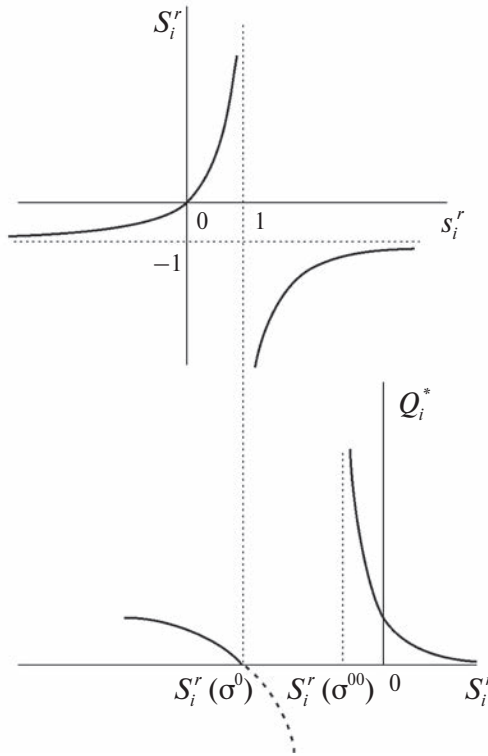


Рис. 1. Зависимость СПВ i -го игрока от агрегата функций издержек и СПВ окружения (вверху), зависимость равновесного действия i -го игрока от СПВ (внизу).

причем при $s_i^r \rightarrow 1 - 0$ эта функция принимает бесконечно большие положительные значения, а при $s_i^r \rightarrow 1 + 0$ – отрицательные. Функция $s_i^r(u_j, S_j^{r-1})$ имеет разрыв второго рода при $S_j^{r-1} = u_j + 1 \forall j \in N \setminus i$, который не приводит к разрыву функции $S_i^r(u_j, S_j^{r-1})$.

Разрыв второго рода функции $S_i^r(u_j, S_j^{r-1})$ содержательно означает, что в точке разрыва $(u_j^0, S_j^{0,r-1})$, $j \in N \setminus i$ игрок i на r -м ранге рефлексии может одновременно иметь два значения СПВ ($+\infty$ и $-\infty$). Если рассматривать последовательную рефлексию игроков относительно поведения друг друга как динамический процесс на числовой последовательности рангов $r = 1, 2, \dots$, то по аналогии с решениями некоторых дифференциальных уравнений можно говорить, что здесь наблюдается бифуркация представлений игрока. В этом случае *состояние бифуркации представлений* игрока i – это такое сочетание технологических типов игроков окружения, заданных их функциями издержек, и ментальных типов игроков окружения, выражаемых их уровнями лидерства (численно заданных в виде СПВ), при котором игрок i одновременно может предполагать бесконечно большие как положительные, так и отрицательные реакции (т.е. СПВ) окружения.

Функция (7), представленная на рис. 1 (вверху), позволяет оценить следующие интервалы изменения СПВ:

$$(76) \quad S_i^r = \begin{cases} \in [-1, 0), & \text{если } s_i^r \leq 0, \\ \in (0, \infty), & \text{если } 0 < s_i^r < 1, \\ \in (-\infty, -1), & \text{если } s_i^r < -1. \end{cases}$$

Следовательно, если определить характер зависимости агрегата s_i^r от коэффициентов нелинейности окружения u_j , которые зависят от типов функций спроса и издержек и малочувствительны к объемам предложения, и СПВ окружения S_j^{r-1} , которая зависит от ментального типа окружения, то можно оценить влияние этих параметров на СПВ игрока.

Для качественного сравнительного анализа влияния типов функций $P_k(Q), C_m(q)$, и изучения явления бифуркации рассмотрим случай идентичных игроков: для всех игроков окружения коэффициенты нелинейности и СПВ одинаковы, т.е. $u_j = u \forall j \in N, S_j^{r-1} = \sigma \forall j \in N$. В этом случае

$$(8) \quad S_i^r = \frac{n-1}{u+2-\sigma-n}, \quad s_i^r = \frac{n-1}{u-\sigma+1}.$$

Из (7а) и (8) вытекает следующее.

Утверждение 2. Если $u_j = u \forall j \in N, S_j^{r-1} = \sigma \forall j \in N$ то функция СПВ вида $S_i^r(u, \sigma)$

i) *имеет разрыв второго рода при $\sigma = \sigma^0 = u + 2 - n$ (кроме случая линейных функций спроса и издержек), причем*

$$(8a) \quad \lim_{\sigma \rightarrow (u+2-n)-0} S_i^r = \infty, \quad \lim_{\sigma \rightarrow (u+2-n)+0} S_i^r = -\infty;$$

ii) *принадлежит следующим интервалам (кроме случая линейных функций спроса и издержек, в котором $S_i^r \in [-1, 0)$):*

$$(8b) \quad S_i^r \begin{cases} \in (0, \infty), & \text{если } \sigma \in (-\infty, \sigma^0), \\ \in (-\infty, 0), & \text{если } \sigma \in (\sigma^0, \infty). \end{cases}$$

Наглядная иллюстрация бифуркации вытекает из решения системы уравнений равновесия (1) в явном виде, известного для случая линейных функций спроса и издержек. Однако в этом случае не возникает бесконечных значений предположительных вариаций (они ограничены диапазоном $(-1, 0]$). Для степенных функций издержек явное решение не существует [6], поэтому рассмотрим случай линейной функции спроса и квадратичных функций издержек.

Утверждение 3. В случае линейной функции спроса и квадратичных функций издержек общее решение игры (1) имеет вид

$$(9) \quad Q_i^* = \frac{D_i \left[\prod_{j=1 \setminus i}^n (\gamma_j^r - 1) + \sum_{j=1 \setminus i}^n \prod_{\mu=1 \setminus j, i}^n (\gamma_\mu^r - 1) \right] - \sum_{j=1 \setminus i}^n \left[D_j \prod_{\mu=1 \setminus i, j}^n (\gamma_\mu^r - 1) \right]}{\prod_{j=1}^n (\gamma_j^r - 1) + \sum_{j=1}^n \prod_{\mu=1 \setminus j}^n (\gamma_\mu^r - 1)}$$

в частном случае $n = 3$ формула следующая:

$$(9a) \quad Q_i^* = \frac{D_i \left(\prod_{j=1 \setminus i}^3 \gamma_j^r - 1 \right) - \sum_{j=1 \setminus i}^3 \prod_{\mu=1 \setminus i}^3 D_j \gamma_\mu^r + \sum_{j=1 \setminus i}^3 D_j}{\gamma_1^r \gamma_2^r \gamma_3^r - \gamma_1^r - \gamma_2^r - \gamma_3^r + 2},$$

в частном случае $n = 3$ при одинаковых параметрах типа игроков $D = D_i \forall i \in N$:

$$(9b) \quad Q_i^* = D \frac{\prod_{j=1 \setminus i}^3 \gamma_j^r - \sum_{j=1 \setminus i}^3 \gamma_j^r + 1}{\gamma_1^r \gamma_2^r \gamma_3^r - \gamma_1^r - \gamma_2^r - \gamma_3^r + 2},$$

где

$$D_i = \frac{a - B_{1i}}{b}, \quad \gamma_i = 2 + S_i^r + \frac{B_{2i}}{b},$$

символом «*» обозначено игровое равновесие.

При бифуркации представлений одновременно возможны два случая, которые опишем, базируясь на (9б) при таком же условии однотипных игроков окружения, что и в утверждении 2; тогда с учетом (6в) $\gamma_j = \gamma = -u_j + S_j^{r-1} = -u + \sigma$, $j = 2, 3$, причем $\gamma < 0$ при $\sigma = \sigma^0$, поскольку $B_2 > 0$.

Первый случай $S_i^r \rightarrow \infty$ содержательно означает, что для игроков окружения оптимальной стратегией (напомним, что рассматриваются оптимальные предположительные вариации) является бесконечный рост объема предложения, ограниченный параметрами функции спроса $P(Q)$ и производственными возможностями технологии фирм. В этом случае если СПВ окружения S_j^r , $j = N \setminus i$ есть конечные числа, то из (9б) следует, что оптимальный ответ игрока стремится к нулю справа, т.е. $Q_i^{r*} \rightarrow 0 + 0$, т.е. игрок стремится сократить объем предложения до нуля.

Второй случай $S_i^r \rightarrow -\infty$ подразумевает бесконечное сокращение игроками окружения объема предложения, хотя фактически они могут уменьшить предложение только до нуля. Тогда из (9б) следует, что оптимальный ответ игрока стремится к нулю слева, т.е. $Q_i^{r*} \rightarrow 0 - 0$, это можно трактовать как наибольший допустимый ответ игрока на предсказанное им по $S_i^r \rightarrow -\infty$ отрицательное значение суммарного объема предложения.

Интересно, что бифуркация представлений должна приводить на последующих рангах рефлексии к *бифуркации действий*, что также можно показать из формулы оптимальной СПВ (8) и равновесного действия (9б).

Если $S_i^r \rightarrow \infty$, то на следующем $(r + 1)$ -м ранге рефлексии рассмотрим ситуацию со стороны окружения (т.е. при $\sigma \rightarrow \infty$); тогда из (8) следует, что $S_j^{r+1} \rightarrow 0$. Далее, возвращаясь к i -му игроку на ранге $r + 2$, для которого $\sigma \rightarrow 0$, получим также из (8): $\lim_{\sigma \rightarrow 0} s_i^{r+2} = \frac{n-1}{u-\sigma+1} < 0$, поскольку $u < -2$ согласно (6в). Следовательно, $S_i^{r+2} \rightarrow -1$, когда $\sigma \rightarrow \sigma^{00} = u + 1$, и при условии сохранения реакций окружения по типу $S_j^{r+1} \rightarrow 0$ из формулы (9б) следует $Q_1^* \rightarrow \infty$ (поскольку $\gamma = 1$, $Q_1^* = D \frac{\gamma^2 - 2\gamma + 1}{\gamma_1(\gamma^2 - 1) - 2(\gamma - 1)}$). Таким образом, определенная через СПВ бифуркация ментального реагирования приводит к бифуркации равновесия в игре. Эти рассуждения проиллюстрированы на рис. 1 (внизу).

Случай идентичных игроков является основой для сравнительного анализа влияния типов функций спроса и издержек на СПВ. Согласно (8а) с увеличением коэффициентов нелинейности u игроков окружения точка бифуркации σ^0 сдвигается в большую сторону, а с уменьшением u – наоборот, т.е. состояние бифуркации наступает при более высоких значениях СПВ окружения. Из условий (8б) следует, что если коэффициенты нелинейности больше, то СПВ окружения должны быть больше, чтобы S_i^r принадлежала соответствующим диапазонам.

Исследуем характер зависимости СПВ i -го игрока от коэффициента нелинейности u_l некоторого l -го игрока окружения, а также от СПВ окружения и от q, Q .

Утверждение 4. СПВ i -го игрока на r -м ранге рефлексии S_i^r

i) *убывает с возрастанием коэффициента нелинейности l -го игрока окружения u_l и возрастает с увеличением S^{r-1} :*

$$(10a) \quad S_{iul}^{r/} < 0, \quad S_{iS^{r-1}}^{r/} > 0;$$

ii) *в случае линейной функции спроса не зависит от q при линейных и квадратичных функциях издержек окружения, убывает с ростом q для $\beta > 1$ и возрастает с ростом q для $\beta < 1$ при степенных функциях издержек окружения, не зависит от Q при любых функциях издержек:*

$$(10б) \quad S_{iq}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=1,3}} = S_{iQ}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=1,2,3}} = 0, \quad S_{iq}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=2}} \begin{cases} < 0 \text{ при } \beta > 1, \\ > 0 \text{ при } \beta < 1; \end{cases}$$

iii) *в случае степенной функции спроса с ростом q убывает, если $S^{r-1} > -1$ (возрастает, если $S^{r-1} < -1$) при линейных и квадратичных функциях издержек окружения, а для степенных функций издержек убывает при $S^{r-1} > -1$, когда функции издержек выпуклы ($\beta > 1$), и если, кроме того, $\varphi < 1$, когда эти функции вогнуты ($\beta < 1$), а при $S^{r-1} < -1$ возрастает*

для вогнутых функций издержек, а для выпуклых функций убывает, если $\varphi < -1$;

с ростом Q возрастает, если $S^{r-1} > -1$ (убывает, если $S^{r-1} < -1$) для линейных функций издержек и для квадратичных функций (в этом случае убывает при дополнительном условии $\zeta < 1$), для степенных функций издержек возрастает при $S^{r-1} > -1$, когда функции издержек выпуклы ($\beta > 1$), и убывает, если $\psi > 1$, когда эти функции вогнуты ($\beta < 1$), а при $S^{r-1} < -1$ убывает для вогнутых функций издержек, а для выпуклых функций возрастает, если $\psi > -1$:

$$(10B) \quad \begin{aligned} S_i^r / q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=1,3}} & \begin{cases} < 0 & \text{при } S^{r-1} > -1, \\ > 0 & \text{при } S^{r-1} < -1, \end{cases} \\ S_i^r / Q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=1}} & \begin{cases} > 0 & \text{при } S^{r-1} > -1, \\ < 0 & \text{при } S^{r-1} < -1, \end{cases} \\ S_i^r / q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=2}} & \begin{cases} < 0 & \text{если } \varphi < 1 \text{ при } t = 1, \\ < 0 & \text{при } t = 2, \\ > 0 & \text{при } t = 3, \\ < 0 & \text{если } \varphi < -1 \text{ при } t = 4, \end{cases} \\ S_i^r / Q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=2}} & \begin{cases} < 0 & \text{если } \psi > 1 \text{ при } t = 1, \\ > 0 & \text{при } t = 2, \\ < 0 & \text{при } t = 3, \\ < 0 & \text{если } \psi > -1 \text{ при } t = 4, \end{cases} \\ S_i^r / Q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=3}} & \begin{cases} > 0 & \text{при } S^{r-1} > -1, \\ < 0 & \text{если } \zeta < 1 \text{ при } S^{r-1} < -1; \end{cases} \end{aligned}$$

iii) слабо зависит от объемов предложения игроков по сравнению с влиянием СПВ окружения:

$$(10Г) \quad S_i^r / q \ll S_i^r / S^{r-1},$$

где

$$\varphi = \frac{B_1 \beta (1 - \beta) (2 - \beta) q^{\beta-3}}{A |\alpha| |1 + S^{r-1}| (1 - \alpha) Q^{\alpha-2}}, \quad \psi = \varphi \frac{1 - \alpha}{2 - \beta}, \quad \zeta = \frac{B_2 Q^{2-\alpha}}{A |\alpha| |1 + S^{r-1}| q},$$

и введены обозначения

$$\begin{aligned} t = 1: & S^{r-1} > -1 \wedge \beta < 1, & t = 2: & S^{r-1} > -1 \wedge \beta > 1, \\ t = 3: & S^{r-1} < -1 \wedge \beta < 1, & t = 4: & S^{r-1} < -1 \wedge \beta > 1. \end{aligned}$$

Сравним значения координаты точки бифуркации для различных функций спроса и издержек.

Утверждение 5. При различных типах функций спроса и издержек окружения для точки бифуркации σ^0 выполняются следующие соотношения:

$$(11a) \quad \sigma_{23}^0 > \sigma_{21}^0,$$

$$(11б) \quad \sigma_{22}^0 > \sigma_{21}^0 \text{ при } \beta > 1,$$

$$(11в) \quad \sigma_{21}^0 > \sigma_{12}^0 \text{ при } B_1 > \bar{B}_1,$$

$$(11г) \quad \sigma_{21}^0 > \sigma_{13}^0 \text{ при } B_2 < \bar{B}_2,$$

$$(11д) \quad \sigma_{12}^0 > \sigma_{22}^0 \text{ при } B_1 < \bar{B}_1, \text{ если } \beta > 1 \text{ или при } B_1 > \bar{B}_1 \text{ если } \beta < 1,$$

$$(11е) \quad \sigma_{13}^0 < \sigma_{23}^0 \text{ при } B_2 < \bar{B}_2,$$

$$(11ж) \quad \sigma_{12}^0 > \sigma_{13}^0 \wedge \sigma_{22}^0 > \sigma_{23}^0 \text{ при } \beta > 1 \text{ и } \frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda},$$

где

$$\bar{B}_1 = b \frac{\delta}{\lambda}, \quad \bar{B}_2 = b\delta, \quad \bar{B}_1 = \frac{\delta}{\lambda}(\chi - b), \quad \bar{B}_2 = \delta \frac{\chi b}{\chi - b},$$

$$\delta = (1 + S^{t-1})(1 - \alpha) \frac{q}{Q}, \quad \chi = A|\alpha|Q^{\alpha-1} > 0, \quad \lambda = \beta(\beta - 1)q^{\beta-2}.$$

Соотношения для точки бифуркации в случаях других типов функций спроса и издержек окружения представлены в Приложении.

4. Выводы

Утверждение 2 показывает, что бифуркация представлений игроков происходит, когда СПВ окружения возрастает с уровня $\sigma = u + 2 - n - 0$ до $\sigma = u + 2 - n + 0$; кроме того, с увеличением числа игроков для дестабилизации равновесия необходимо большее по модулю значение СПВ, так как координата точки бифуркации уменьшается с ростом n .

Утверждение 4 раскрывает следующие основные факторы, влияющие на СПВ игрока. Во-первых, действует фактор рыночно-технологической обстановки игры, определяемый коэффициентом нелинейности: чем больше коэффициент нелинейности игроков окружения, тем меньше СПВ, т.е. больше модуль СПВ; учитывая, что, как правило, СПВ отрицательна, *рост модуля СПВ свидетельствует об усилении реагирования игрока*. Поэтому комбинации функций спроса и издержек, приводящие к более высоким значениям коэффициента нелинейности, способствуют усилению реагирования игрока. К таким случаям, в частности, относятся игры с квадратичными функциями издержек или степенными функциями при положительном эффекте масштаба ($\beta < 1$), которые ведут к большим значениям коэффициента нелинейности по сравнению с линейной моделью издержек независимо от модели спроса, что показано в Приложении.

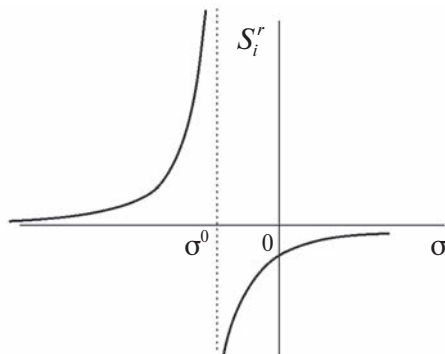


Рис. 2. Зависимость СПВ игрока от СПВ окружения.

Во-вторых, наблюдается свойство *симметричности реагирования* игроков, т.е. чем больше СПВ окружения, тем больше СПВ игрока. Этот консонанс реагирования игроков, качественно проиллюстрированный на рис. 2, выражается в двухэтапном процессе. Если окружение имеет отрицательные СПВ, то их увеличение (уменьшение по модулю) сопровождается ростом положительной СПВ игрока ($S_i^r \rightarrow \infty$), т.е. в терминах экономики игрок предполагает экспансию окружения и в результате, по формуле (9б), будет сокращать объем предложения вплоть до нуля. Тогда наступает момент бифуркации, и процесс меняет ход на противоположный, поскольку из формулы (8) следует, если ее обратить на окружение, $S_j^{r+1} = \frac{n-1}{u+2-S_i^r-n}$, что приводит к $S_j^{r+1} \rightarrow 0$, т.е. окружение предполагает нереагирование игрока. Но в ответ на это (рис. 2) СПВ игрока снова возрастает, т.е. $S_j^{r+2} \rightarrow -1$, что побуждает игрока увеличивать объем предложения.

В-третьих, наибольшее влияние на СПВ игрока оказывают СПВ и типы функций спроса и издержек окружения. Несмотря на то, что СПВ игрока зависит от его объема предложения и суммарного объема предложения игроков через коэффициенты нелинейности окружения (для нелинейных функций), это влияние несопоставимо мало с воздействием ментальных типов окружения, обусловленных его уровнями лидерства.

Утверждение 5 определяет следующие свойства бифуркации.

Случай *степенной функции спроса* приводит к большему значению точки бифуркации при квадратичной функции издержек ($k = 2, m = 3$), чем при линейной функции издержек ($k = 2, m = 1$), поскольку квадратичная функция моделирует отрицательный эффект масштаба. Аналогично случай степенной функции спроса обуславливает превышение координаты точки бифуркации при степенной функции издержек ($k = 2, m = 2$) для отрицательного эффекта масштаба $\beta > 1$ над соответствующей координатой при линейной функции издержек ($k = 2, m = 1$), а при положительном эффекте – наоборот.

Случай *степенной функции спроса и линейных издержек* ($k = 2, m = 1$) по сравнению с различными вариантами издержек для линейной функции

спроса ($m = 2, 3$) ведет к повышению точки бифуркации при определенных значениях коэффициентов B_1, B_2 :

i) если $\bar{B}_1 < 0$, т.е. для положительного эффекта масштаба при $S^{r-1} < -1$ и для отрицательного эффекта масштаба при $S^{r-1} > -1$, поскольку

$$\bar{B}_1 = \frac{b(1+S^{r-1})(1-\alpha)}{\beta(\beta-1)Qq^{\beta-3}} \begin{cases} > 0, & \text{если } (\beta > 1 \wedge S^{r-1} > -1) \vee (\beta < 1 \wedge S^{r-1} < -1), \\ < 0, & \text{если } (\beta < 1 \wedge S^{r-1} < -1) \vee (\beta > 1 \wedge S^{r-1} > -1); \end{cases}$$

то действие эффекта масштаба как технологического типа игроков противоположно действию СПВ окружения как ментального типа игроков;

ii) если $\bar{B}_1 > 0$ и $B_1 > \bar{B}_1$, т.е. при высоком темпе роста степенной функции;

iii) если $\bar{B}_2 > 0$, т.е. при $S^{r-1} > -1$, поскольку $\bar{B}_2 > 0 = b(1+S^{r-1})(1-\alpha)\frac{q}{Q}$.

Случай *степенных функций издержек* ($m = 2$) по сравнению с вариантами *квадратичных функций издержек* ($m = 3$) для любых функций спроса ($k = 1, 2$) обуславливает следующие соотношения для точки бифуркации:

i) точка бифуркации при степенных издержках больше, если эффект масштаба отрицательный ($\beta > 1$), при $B_2 \ll B_1$, поскольку из $\frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda}$ следует $B_1\beta(\beta-1)q^{\beta-2} > B_2$, а множитель $\beta(\beta-1)q^{\beta-2} \ll 1$;

ii) точка бифуркации при степенных издержках меньше, если эффект масштаба положительный ($\beta < 1$), так как при этом $B_1\beta(\beta-1)q^{\beta-2} < 0$.

Случай *квадратичных издержек* ($m = 3$) при линейной ($k = 1$) и степенной ($k = 2$) функциях спроса демонстрирует две возможности, показывая, что усиление реагирования окружения компенсирует влияние нелинейности функции спроса:

i) точка бифуркации при степенных издержках больше, если $S^{r-1} > -1$ и B_2 достаточно мало ($B_2 < \bar{B}_2$), так как $\bar{B}_2 = \frac{b(1+S^{r-1})(1-\alpha)A|\alpha|qQ^{\alpha-2}}{A|\alpha|Q^{\alpha-1}-b} > 0$, если $A \gg b$;

ii) точка бифуркации при степенных издержках меньше, если $S^{r-1} > -1(\bar{B}_2 < 0)$.

5. Заключение

Рыночно-технологическая обстановка игры олигополии описывается сочетанием функции рыночного спроса и функций издержек игроков, которые в совокупности определяют их функции полезности. На основе анализа многообразия таких сочетаний, возникающих в различных прикладных задачах моделирования олигополии, исследование показало важность рыночно-технологической обстановки игры олигополии для стабильности игрового равновесия. Причина дестабилизации равновесия, или бифуркации действий игроков, оказалась в бифуркации их представлений, когда игрок при определенной констелляции представлений игроков окружения может оценивать их оптимальную реакцию как положительную и отрицательную одновременно. В свою очередь, указанная констелляция представлений игроков предопре-

делена уровнями их лидерства по Штакельбергу и выражается некоторым значением СПВ окружения, которое можно назвать точкой бифуркации.

Координата точки бифуркации зависит от числа игроков и коэффициента нелинейности их функций полезности, а коэффициент нелинейности определяется типами функций спроса и издержек. Если для конкретного сочетания функций спроса и издержек игроков точка бифуркации больше (т.е. СПВ окружения меньше по модулю), то игровая обстановка более чувствительна к изменению ментальных типов игроков, т.е. игровое равновесие в динамике может быть легче дестабилизировано.

Характерно, что при линейных функциях спроса и издержек дестабилизация равновесия невозможна. Поэтому в реальных играх олигополии с линейными зависимостями рыночно-технологических параметров будут наблюдаться постепенные изменения равновесных действий, что зачастую наблюдается на практике.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. В [6] параметр u_i представляет собой² компонент условия второго порядка экстремума функции полезности игрока, т.е. $\Pi''_{iQ_iQ_i} = u_i - S_i^{r-1} < 0$. На основе (1) запишем это условие $P'_{Q_i} + (1 + S_i^{r-1})P'_Q + (1 + S_i^{r-1})Q_i P''_{QQ_i} - C''_{iQ_iQ_i} < 0$, затем учитывая, что $P'_Q < 0$, это неравенство разделим на $|P'_Q|$: $\frac{P'_{Q_i}}{|P'_Q|} - 1 - S_i^{r-1} + \frac{(1+S_i^{r-1})Q_i P''_{QQ_i}}{|P'_Q|} - \frac{C''_{iQ_iQ_i}}{|P'_Q|} < 0$, откуда следует (2а).

Доказательство утверждения 3. Уравнения (1) при (3а), (4в) имеют вид

$$a - bQ - b(1 + S_i^r)Q_i - B_{2i}Q_i - B_{1i} = 0,$$

или

$$\gamma_i Q_i + \sum_{j=N \setminus i} Q_j q_{-i} = D_i, \quad i \in N;$$

решение этой системы методом Крамера приводит к (9).

Доказательство утверждения 4. В результате дифференцирования формулы (7), обозначив $z_j^{r-1} = \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1}$, получим:

$$(II.1) \quad S_i^{r/u_i} = \left(\frac{1}{S_i^r} - 1 \right) (s_i^r)^{-2} (z_j^{r-1})'_{u_i} = - (1 - s_i^r)^{-2} (u_i - S_i^{r-1} + 1)^{-2} < 0,$$

$$(II.2) \quad S_i^{r/q} = S_i^{r/u_i} u'_{lq}, \quad S_i^{r/Q} = S_i^{r/u_i} u'_{lQ}, \quad S_i^{r/S_{r-1}} > 0, \quad S_i^{r/u_i} < 0.$$

² В [6] параметр имеет вид $u_i = -2 - \frac{C''_{iQ_iQ_i}}{b}$, так как выведен при линейной функции спроса, для которой $P'_Q = P'_{Q_i} = -b$.

Для упрощения анализа формул (6) введем следующие обозначения:

$$(П.3) \quad \delta = (1 + S^{r-1})(1 - \alpha) \frac{q}{Q} \begin{cases} > 0 & \text{при } S^{r-1} > -1, \\ < 0 & \text{при } S^{r-1} < -1, \end{cases} \quad \chi = A|\alpha|Q^{\alpha-1} > 0,$$

$$\lambda = \beta(\beta - 1)q^{\beta-2} \begin{cases} < 0 & \text{при } \beta < 1, \\ > 0 & \text{при } \beta > 1. \end{cases}$$

Кроме того, введем обозначения x, y, z, X, Y, Z для $u_{km}, k = 1, 2, m = 1, 2, 3$, с учетом которых формулы (6) трансформируются к виду:

$$(П.4а) \quad x = u_{11} = -2, \quad X = u_{21} = -2 + \delta,$$

$$(П.4б) \quad y = u_{12} = -2 - \frac{B_1}{b}\lambda, \quad Y = u_{22} = -2 + \delta - \frac{B_1}{\chi}\lambda,$$

$$(П.4в) \quad z = u_{13} = -2 - \frac{B_2}{b}, \quad Z = u_{23} = -2 + \delta - \frac{B_2}{\chi}.$$

Анализ формул (П.3), (П.4) показывает, что в зависимости от значений параметров β и S^{r-1} возможно четыре случая, номера которых обозначим символом t : 1) $t = 1$: $S^{r-1} > -1 \wedge \beta < 1$, в этом случае $\delta > 0 \wedge \lambda < 0$; 2) $t = 2$: $S^{r-1} > -1 \wedge \beta > 1$, при этом $\delta > 0 \wedge \lambda > 0$; 3) $t = 3$: $S^{r-1} < -1 \wedge \beta < 1$, при этом $\delta < 0 \wedge \lambda < 0$; 4) $t = 4$: $S^{r-1} < -1 \wedge \beta > 1$, при этом $\delta < 0 \wedge \lambda > 0$.

Дифференцируя (П.4) получим:

$$(П.5) \quad \begin{aligned} x'_q &= z'_q = 0, \quad X'_q = Z'_q = \frac{\delta}{q}, \\ y'_q &= -\frac{B_1\lambda}{bq}(\beta - 2), \quad Y'_q = \frac{\delta}{q} - \frac{B_1\lambda}{\chi q}(\beta - 2), \end{aligned}$$

$$(П.6) \quad \begin{aligned} x'_Q &= y'_Q = z'_Q = 0, \quad X'_Q = -\frac{\delta}{Q}, \\ Y'_Q &= -\frac{\delta}{Q} - \frac{B_1\lambda}{\chi q}(\beta - 2), \quad Z'_Q = -\frac{\delta}{Q} - \frac{B_2}{\chi Q}(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Из этих формул с учетом (П.2) и (П.3) следует:

1) при линейной функции спроса ($k = 1$)

$$S_{i\ q}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=1,3}} = S_{i\ q}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=1,3}} = 0, \quad S_{i\ q}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=2}} \begin{cases} < 0 & \text{при } \beta > 1, \\ > 0 & \text{при } \beta < 1, \end{cases}$$

2) при степенной функции спроса ($k = 2$) $Y'_q > 0$, т.е. с учетом (П.1)

$S_{i\ q}^{r/} \Big|_{\substack{k=2 \\ m=2}} < 0$, если $\delta + \frac{B_1\lambda}{\chi}(2 - \beta) > 0$, и это неравенство приводит к четырем

случаям: при $t = 1$ получается неравенство $1 > -\frac{B_1\lambda}{\chi\delta}(2 - \beta)$, что после подстановки (П.3) приводит к $1 > \varphi = \frac{B_1\beta(1-\beta)(2-\beta)q^{\beta-3}}{A|\alpha||1+S^{r-1}|(1-\alpha)Q^{\alpha-2}}$; при $t = 2$ неравенство такое же и $\varphi < 0$, т.е. $Y'_q > 0$ без дополнительных условий; при $t = 3$

имеет место $\delta + \frac{B_1\lambda}{\chi}(2 - \beta) < 0$, поэтому $Y_q' < 0$; при $t = 4$ получаем $Y_q' > 0$ при $\varphi < -1$; производные $Y_Q' > 0$, $Z_Q' > 0$, анализируются аналогично.

Сравним $S_i^{r'/S^{r-1}}$ и $S_i^{r'/q}$ по абсолютной величине, заметив, что

$$S_i^{r'/S^{r-1}} = (1 - s_i^r)^{-2}(u_i - S_i^{r-1} + 1)^{-2}, \quad S_i^{r'/q} = (1 - s_i^r)^{-2}(u_i - S_i^{r-1} + 1)^{-2}u_i^{r'/q}.$$

Из (П.5) следует, что

$$\begin{aligned} u_{11q}' &= u_{13q}' = 0, \quad u_{21q}' = u_{23q}' = (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{1}{Q}, \\ u_{12q}' &= \frac{B_1}{b}(\beta - 2)\beta(\beta - 1)q^{\beta-3}, \\ u_{22q}' &= (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{1}{Q} - \frac{B_1}{A|\alpha|Q^{\alpha-1}}(\beta - 2)\beta(\beta - 1)q^{\beta-3}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lim_{q \rightarrow \infty} u_i^{r'/q} \rightarrow 0$, поэтому $S_i^{r'/q} \ll S_i^{r'/S^{r-1}}$.

Доказательство утверждения 5. Для линейных и квадратичных функций издержек при любых значениях их параметров верны следующие соотношения:

$$x > z, \quad X > Z.$$

В остальных случаях коэффициенты нелинейности удовлетворяют следующим соотношениям: $x < X$ при $S^{r-1} > -1$, $x < y$ при $\beta < 1$, $x < Y$ при $B_1 < \bar{\bar{B}}_1$, $x < Z$ при $B_2 < \bar{\bar{B}}_2$, $X < Y$ при $\beta > 1$, $X < y$ при $B_1 > \bar{B}_1$, $X < z$ при $B_2 < \bar{B}_2$, $y < Y$ при $B_1 < \bar{B}_1$ если $\beta > 1$, или при $B_1 > \bar{B}_1$ если $\beta < 1$, $z < Z$ при $B_2 < \bar{B}_2$, $y < z$ при $\beta > 1$ и $\frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda}$, $Y < Z$ при $\beta > 1$ и $\frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda}$, $Y < Z$ при $\beta > 1$ и $\frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda}$, где $\bar{\bar{B}}_1 = \delta\frac{\chi}{\lambda}$, $\bar{B}_1 = b\frac{\delta}{\lambda}$, $\bar{\bar{B}}_2 = \delta\chi$, $\bar{B}_2 = b\delta$, $\bar{\bar{B}}_1 = \frac{\delta}{\lambda}(\chi - b)$, $\bar{B}_2 = \delta\frac{\chi b}{\chi - b}$. Поскольку из (10а) следует, что чем больше u_{km} , тем меньше S_{ikm}^r , то получим из этих соотношений неравенства для σ_{km}^0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bowley A.L.* The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Unvers. Press, 1924.
2. *Джейлли Дж.А., Рени Ф.Дж.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: ИД ГУ ВШЭ, 2011.
3. *Singh N., Vives X.* Price and Quantity Competition in a Differential Duopoly // Rand J. Econom. 1984. V. 15. P. 546–554.
4. *Daughety A.* Reconsidering Cournot: The Cournot Equilibrium is Consistent // Rand J. Econom. 1985. V. 16. P. 368–380.
5. *Julien L.A.* On noncooperative oligopoly equilibrium in the multiple leader-follower game // Europ. J. Operat. Res. 2017. V. 256. No. 2. P. 650–662.
6. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // АиТ. 2020. № 6. С. 105–130.
Geraskin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model. Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 1051–1072.

7. *Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I.* Existence of the Nash-optimal strategies in the meta-game // *Stud. Syst. Decis. Control.* 2018. No. 100. P. 95–100.
8. *Kalashnykova N., Kalashnikov V., Watada J., Anwar T., Lin P.* Consistent Conjectural Variations Equilibrium in a Mixed Oligopoly Model with a Labor-Managed Company and a Discontinuous Demand Function // *IEEE Access.* 2022. P. 1–1.
9. *Aizenberg N.I., Zorkal'tsev V.I., Mokryi I.V.* Study of Unsteady Oligopoly Markets // *J. Appl. Industr. Math.* 2017. Vol. 11. No. 1. P. 8–16.
10. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // *АиТ.* 2022. № 3. С. 84–109.
Algazin G.I., Algazina Y.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
11. *Fedyanin D.N.* Monotonicity of equilibriums in Cournot competition with mixed interactions of agents and epistemic models of uncertain market // *Proc. Comp. Sci.* 2021. No. 186. P. 411–417.
12. *Lo C.F., Yeung C.F.* Quantum Stackelberg oligopoly // *Quantum Inform. Proc.* 2022. V. 21. No. 3. P. 85.
13. *Ougolnitsky G., Gorbaneva O.* Sustainability of Intertwined Supply Networks: A Game-Theoretic Approach // *Games.* 2022. V. 13. No. 3. P. 35.
14. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий // *АиТ.* 2023. № 2. С. 150–168.
15. *Филатов А.Ю.* Неоднородность поведения фирм на олигопольном рынке: стратегические фирмы и ценополучатели // *Изв. Иркут. гос. ун-та* 2015. Т. 13. С. 72–83.
16. *Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L.* Expectational stability in aggregative games // *J. Evolut. Econom.* 2021. V. 31. No. 1. P. 235–249.
17. *Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G.* Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 2. P. 332–348.
18. *Kanieski da Silva B., Tanger S., Marufuzzaman M., Cubbage F.* Perfect assumptions in an imperfect world: Managing timberland in an oligopoly market // *Forest Policy Econ.* 2022. No. 137. P. 102691.
19. *Zhou X., Pei Z., Qin B.* Assessing Market Competition in the Chinese Banking Industry Based on a Conjectural Variation Model // *China and World Economy.* 2021. V. 29. No. 2. P. 73–98.
20. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* *Reflexion and Control: Mathematical Models.* London: CRC Press, 2014.
21. *Novshek W.* On the Existence of Cournot Equilibrium // *Rev. Econ. Stud.* 1985. No. 52. P. 85–98.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 31.10.2023

После доработки 27.02.2024

Принята к публикации 30.04.2024

© 2024 г. В.Ю. КАЛАЧЕВ, канд. экон. наук (vkalachev@sfnedu.ru),
Г.А. УГОЛЬНИЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук (gaugolnickiy@sfnedu.ru),
А.Б. УСОВ, д-р техн. наук (abusov@sfnedu.ru)
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

ДИНАМИЧЕСКИЕ КООПЕРАТИВНО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ГОСУДАРСТВЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ИННОВАЦИЙ В УНИВЕРСИТЕТАХ

Построена и в кооперативной постановке исследована двухуровневая динамическая дискретная теоретико-игровая модель управления внедрением инноваций в университетах на основе олигополии Курно. В качестве субъектов управления рассматривается государство (Центр) и конкурирующие между собой университеты (агенты). Решение ищется в программных стратегиях. Агенты вкладывают средства в разработку новых электронных курсов, что рассматривается как их инновационные инвестиции. Центр выделяет агентам субсидии на внедрение инноваций. Исследован случай субсидий, зависящих от действий агента. Кооперативная игра описывается в форме характеристических функций Неймана–Моргенштерна, Петросяна–Заккура и Громовой–Петросяна. Исследование проводится численно, приведены результаты имитационных экспериментов.

Ключевые слова: кооперативные игры, характеристическая функция, имитационное моделирование, управление университетами.

DOI: 10.31857/S0005231024070074, **EDN:** XRKFQO

1. Введение

Различным аспектам математического моделирования инновационной деятельности посвящено значительное число работ, например [1–5]. В настоящей статье существенно используется два направления этих исследований. В [6] рассмотрена статическая теоретико-игровая модель инновационной олигополии Курно, в рамках которой исследуются эффекты конкуренции производителей на рынке инновационного продукта, ограниченности емкости этого рынка и существования оптимального числа действующих на нем агентов, дополненности инновационных технологий, конформного поведения агентов. В [7, 8] построены и исследованы динамические игровые модели олигополии Курно, в которой фирмы инвестируют в дифференциацию продукта. Проведен сравнительный анализ решений в программных и позиционных стратегиях, в частности сравнение индивидуально оптимального и коллективно оптимального поведения. В настоящей работе исследование процесса внедрения инноваций в университетах проводится в рамках авторского подхода [9–12]. В [9] построена двухуровневая модель согласования частных и об-

ществленных интересов при продвижении инноваций в организации. Реализованы алгоритмы построения равновесий в играх Гермейера и с использованием имитационного моделирования. В [11] эта модель модифицирована с учетом вида функций из [6–8] в дифференциальной, а в [12] – в разностной формах. В [10] задачи мотивации сотрудников организации к продвижению инноваций путем распределения вознаграждения формализованы как кооперативные дифференциальные игры, при построении которых использованы три различные характеристические функции: классическая функция Неймана–Моргенштерна, функции Петросяна–Заккура и Петросяна–Громовой. Во всех трех случаях в качестве решения игры использован вектор Шепли, компоненты которого найдены аналитически и численно. Настоящая статья комплексно развивает работы [9–12] с использованием результатов публикаций [6–8]. Ее вклад заключается в следующем:

- предложена двухуровневая модель управления продвижением инноваций в университетах (на примере разработки электронных учебных курсов) в виде разностной иерархической игры с информационными регламентами Γ_{1t} и Γ_{2t} ;

- исходя из этой некооперативной игры построена кооперативная игра на основе характеристических функций Неймана–Моргенштерна, Петросяна–Заккура и Петросяна–Громовой;

- для всех указанных кооперативных игр вычислен вектор Шепли, проведен сравнительный анализ результатов и сформулированы рекомендации по управлению.

2. Постановка задачи

Пусть имеется несколько конкурирующих по Курно университетов, которые выступают в роли агентов. Агенты разрабатывают электронные учебные курсы для последующей продажи. Вложения в совершенствование этих курсов рассматриваются как инновационные инвестиции. В роли ведущего (Центра) выступает государство в лице своих уполномоченных органов управления (в данном случае экономического). Модель в случае n агентов записывается в виде:

- функционал выигрыша Центра

$$(1) \quad J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t \left\{ \gamma \bar{x}_t - \sum_{i=1}^n I(x_{it}) s_{it}(x_{it}) \right\} + \delta^T y_T \rightarrow \max;$$

- ограничения на управления Центра

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n s_{it}(x_{it}) \leq S_t; \quad s_{it}(x_{it}) \geq 0; \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T;$$

– функционалы выигрыша агентов [6]

$$(3) \quad J_i = \sum_{t=1}^T \delta^t \left\{ (D - \alpha \bar{x}_t) x_{it} - \frac{x_{it}^2}{2 \left(r_i + \beta \sum_{j \neq i} r_j I(x_{jt}) \right)} - (c_i - s_{it}) I(x_{it}) \right\} \rightarrow \max;$$

– ограничения на управления агентов

$$(4) \quad 0 \leq x_{it} \leq x_{\max}; \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T;$$

– уравнение динамики

$$(5) \quad y_{t+1} = y_t + \sum_{i=1}^n k_i x_{it} - m y_t; \quad y(0) = y_0.$$

Здесь J_0, J_i – функционалы выигрыша Центра и агентов соответственно; $s_{it}(x_{it})$ – субсидия Центра i -му агенту. Именно, центр выбирает значения параметров θ_{it} таким образом, что субсидия для университета i будет равняться $s_{it} = \theta_{it} x_{it}$; S_t – годовой бюджет Центра; x_{it} – объем выпуска инновационного продукта i -м агентом; $\bar{x}_t = \sum_{i=1}^n x_{it}$; r_i – тип агента (эффективность применяемых им технологий); $D, x_{\max}, \gamma > 0$; $\alpha, \beta \geq 0$ – параметры модели; $\delta \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования; c_i – постоянные издержки агента; $I(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Таким образом, смысл первого слагаемого в (3) – выручка от реализации i -м агентом произведенной им продукции в объеме x_{it} , смысл второго слагаемого – квадратичные производственные затраты типа Кобба–Дугласа i -го агента, зависящие от действий агента (x_i) и от эффективности технологий всех агентов (r), смысл третьего слагаемого – издержки, возникающие при использовании новой технологии; y_t – общий инновационный уровень системы образования; m – коэффициент снижения этого уровня при отсутствии инновационных продуктов; k_i – коэффициент влияния i -го продукта; y_0 – начальное значение инновационного уровня; T – период рассмотрения.

Ниже исследуется случай линейных функций субсидий Центра i -му агенту: $s_{it}(x_{it}) = \theta_{it} x_{it}$; $i = 1, \dots, n$, где оптимизация критерия (1) проводится по величинам $\{\theta_{it}\}_{i=1}^n$. Предполагается, что в первом приближении линейная зависимость достаточно хорошо описывает стимулирование инновационной активности агентов.

Исследование модели (1)–(5) возможно с различных точек зрения. С точки зрения Центра возникает разностная иерархическая игра, в которой используется информационный регламент игр Гермейера Γ_{1t} или Γ_{2t} [13]. Для агентов разыгрывается неантагонистическая игра в нормальной форме, в которой строится равновесие Нэша. В обоих случаях предполагается, что Центр

и агенты используют программные стратегии. Центр может предвидеть оптимальные ответы агентов, которые выбирают свои оптимальные стратегии как равновесия Нэша в игре (3)–(5) при фиксированных управлениях Центра.

В игре Гермейера Γ_{1t} Центр, предвидя оптимальные ответы агентов, под которыми понимается множество равновесий Нэша в игре (3)–(4), решает задачу (1), (2), (5). При наличии нескольких равновесий Нэша в игре агентов используется принцип гарантированного результата Гермейера.

В игре Гермейера Γ_{2t} Центр выбирает программные стратегии с обратной связью по управлению и сообщает их агентам. Если агенты не сотрудничают с Центром, то используется стратегия наказания Центром агентов. Выигрыш агентов в этом случае не превышает их гарантированный выигрыш. Если же агенты выбирают стратегии, выгодные Центру, то он использует стратегию поощрения, делая выигрыш агентов больше гарантированного. При этом, зная механизм управления Центра, агенты выбирают свои действия x_{it} как равновесие Нэша в игре (3)–(4). Так как Центр может предвидеть оптимальную реакцию агентов, то он выбирает свои стратегии, решая задачу (1)–(2), (5) на множестве равновесий Нэша в игре (3)–(4) с дополнительным требованием, чтобы при побуждении выигрыш агентов был больше гарантированного. Тогда ϵ -оптимальная гарантирующая стратегия Центра вместе с оптимальным ответом агентов (равновесием Нэша) образует решение иерархической игры Гермейера Γ_{2t} .

Подробно случаи некооперативного поведения Центра и агентов в иерархической постановке при разных информационных регламентах рассмотрены в [10, 12]. Ниже исследование проводится в предположении кооперации Центра и всех агентов. Тогда соотношения (1)–(5) описывают динамическую кооперативную игру Центра и агентов.

Способом описания кооперативных игр является использование характеристической функции, которая определяет выигрыш всех возможных коалиций (подмножеств игроков) [14]. Кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара (M, v) , где $M = \{0, 1, \dots, N\}$ – множество всех игроков, $v : 2^M \rightarrow R$ – характеристическая функция, действующая из множества всех коалиций во множество вещественных чисел.

При таком подходе наиболее часто используется характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [15]. Однако в экономических и иных приложениях теории кооперативных игр отнюдь не всегда между коалицией и антикоалицией возникает антагонистическая игра. Поэтому в последнее время получили распространение и другие характеристические функции, например функции Петросяна–Заккура [16] и Громовой–Петросяна [17]. Ниже исследование проводится в случае Центра и двух агентов: таким образом, рассматриваются динамические кооперативные игры трех лиц. Соответственно, возможны коалиции следующих типов: только Центр; один агент; два агента; Центр и агент; максимальная коалиция трех игроков.

3. Кооперативная игра в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна

Характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [15] определяет выигрыш любой коалиции S как значение антагонистической игры этой коалиции против антикоалиции $M \setminus S$. Характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна для коалиции из одного игрока имеет вид

– одного Центра

$$v(\{0\}) = \max_{\theta_{1t}, \theta_{2t}} \min_{x_{1t}, x_{2t}} J_0(\theta_{1t}, \theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t}) = \delta^T y_0(1 - m)^T,$$

– одного агента

$$v(\{1\}) = \max_{x_{1t}} \min_{x_{2t}, \theta_{1t}} J_1(\theta_{1t}, x_{1t}, x_{2t}); \quad v(\{2\}) = \max_{x_{2t}} \min_{x_{1t}, \theta_{2t}} J_2(\theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t}).$$

Учитывая линейность J_1 по x_{2t} и J_2 по x_{1t} , получим, что

$$v(\{1\}) = \max_{x_{1t}} (\min(J_1(0, x_{1t}, x_{\max}); J_1(0, x_{1t}, 0));$$

$$v(\{2\})) = \max_{x_{2t}} (\min(J_2(0, x_{\max}, x_{2t}); J_2(0, 0, x_{2t}))).$$

Вычислим эти два значения характеристической функции. Отметим, что агенты близорукие, т.е. их функционалы выигрыша можно переписать в виде

$$J_i = \sum_{t=1}^T \delta^t J_{it}; \quad i = 1, 2;$$

$$J_{it} = (D - \alpha \bar{x}_t) x_{it} - \frac{x_{it}^2}{2 \left(r_i + \beta \sum_{j \neq i} r_j I(x_{jt}) \right)} - (c_i - s_i) I(x_{it}),$$

и оптимальное значение функционалов выигрыша агентов не зависит от переменной состояния, т.е. от решения уравнения (5). Поэтому от оптимизации функционала (3) для i -го агента можно перейти к оптимизации T функций выигрыша вида

$$(6) \quad J_i = \sum_{t=1}^T \delta^t J_{it}; \quad J_{it} \rightarrow \max; \quad t = 1, \dots, T; \quad i = 1, 2.$$

Максимум при этом берется по одной переменной x_{it} . В результате каждый агент решает T задач оптимизации (6) с ограничениями (4). Для i -го агента максимальный выигрыш достигается при $x_{it} = 0$ или при $x_{it} > 0$. В случае $x_{it} = 0$ выигрыш агента равен нулю.

Рассмотрим случай $x_{it} > 0$. Используя необходимое условие экстремума функции одной переменной, получим уравнение для определения стационарных управлений ($j = 1$ если $i = 2$; $j = 2$ если $i = 1$):

$$(7) \quad \frac{\partial J_{it}}{\partial x_{it}} = D - \alpha x_{jt} - 2\alpha x_{it} - \frac{x_{it}}{r_i + \beta r_j I(x_{jt})} + \theta_{it} = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 J_{it}}{\partial x_{it}^2} = -2\alpha - \frac{1}{r_i + \beta r_j I(x_{jt})} < 0.$$

Следовательно, (7) определяет точку максимума функции J_{it} и при $x_{it} > 0$ оптимальное управление агента задается формулой

$$x_{it}^{(1)} = \frac{(D + \theta_{it} - \alpha x_{jt})(r_i + \beta r_j I(x_{jt}))}{2\alpha(r_i + \beta r_j I(x_{jt})) + 1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= \max(0; \min(J_1(0, x_{1t}^0, x_{\max}); J_1(0, x_{1t}^{00}, 0))); \\ v(\{2\}) &= \max(0; \min(J_2(0, x_{\max}, x_{2t}^0); J_2(0, 0, x_{2t}^{00}))). \end{aligned}$$

Если $(D + \theta_{1t})r_1/(2\alpha r_1 + 1) < x_{\max}$, то

$$x_{1t}^{00} = (D + \theta_{1t})r_1/(2\alpha r_1 + 1);$$

если $(D + \theta_{2t})r_2/(2\alpha r_2 + 1) < x_{\max}$, то

$$x_{2t}^{00} = (D + \theta_{2t})r_2/(2\alpha r_2 + 1);$$

если $(D + \theta_{1t} - \alpha x_{\max})(r_1 + \beta r_2)/(2\alpha(r_1 + \beta r_2) + 1) < x_{\max}$ и $D + \theta_{1t} > \alpha x_{\max}$, то

$$x_{1t}^0 = (D + \theta_{1t} - \alpha x_{\max})(r_1 + \beta r_2)/(2\alpha(r_1 + \beta r_2) + 1);$$

если $(D + \theta_{2t} - \alpha x_{\max})(r_2 + \beta r_1)/(2\alpha(r_2 + \beta r_1) + 1) < x_{\max}$ и $D + \theta_{2t} > \alpha x_{\max}$, то

$$x_{2t}^0 = (D + \theta_{2t} - \alpha x_{\max})(r_2 + \beta r_1)/(2\alpha(r_2 + \beta r_1) + 1);$$

в противном случае $x_1^0 = x_{\max}$; $x_2^0 = x_{\max}$; $x_1^{00} = x_{\max}$; $x_2^{00} = x_{\max}$.

Для коалиции из двух агентов:

$$\begin{aligned} v(\{1, 2\}) &= \max_{x_{1t}, x_{2t}} \min_{\theta_{1t}, \theta_{2t}} (J_1(\theta_{1t}, x_{1t}, x_{2t}) + J_2(\theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t})) = \\ &= \max_{x_{1t}, x_{2t}} (J_1(0, x_{1t}, x_{2t}) + J_2(0, x_{1t}, x_{2t})). \end{aligned}$$

Тогда

$$v(\{1, 2\}) = \sum_{t=1}^T v_t(\{1, 2\}) = \sum_{t=1}^T \max_{x_{1t}, x_{2t}} (J_{1t}(0, x_{1t}, x_{2t}) + J_{2t}(0, x_{1t}, x_{2t})),$$

и для определения стационарных точек получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_t(\{1, 2\})}{\partial x_{1t}} &= D - 2\alpha \bar{x}_t = \frac{x_{1t}}{r_1 + \beta r_2} + \theta_{1t} = 0; \\ \frac{\partial v_t(\{1, 2\})}{\partial x_{2t}} &= D - 2\alpha \bar{x}_t = \frac{x_{2t}}{r_2 + \beta r_1} + \theta_{2t} = 0. \end{aligned}$$

Ее решение имеет вид

$$x_{1t}^{000} = \frac{(D + \theta_{1t})(r_1 + \beta r_2)}{2\alpha(r_1 + r_2 + \beta(r_1 + r_2) + 1)};$$

$$x_{2t}^{000} = \frac{(D + \theta_{2t})(r_2 + \beta r_1)}{2\alpha(r_1 + r_2 + \beta(r_1 + r_2) + 1)},$$

при этом

$$\frac{\partial^2 v_t(\{1, 2\})}{\partial x_{1t}^2} = -2\alpha - \frac{1}{r_1 + \beta r_2} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 v_t(\{1, 2\})}{\partial x_{2t}^2} = -2\alpha - \frac{1}{r_2 + \beta r_1} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 v_t(\{1, 2\})}{\partial x_{1t} \partial x_{2t}} = -2\alpha < 0.$$

Следовательно, найдена точка максимума (x_{1t}^*, x_{2t}^*) . Причем, если $x_{1t}^{000}, x_{2t}^{000} < x_{\max}$, то

$$(x_{1t}^*, x_{2t}^*) = (x_{1t}^{000}, x_{2t}^{000});$$

если $x_{1t}^{000} \geq x_{\max}, x_{2t}^{000} < x_{\max}$, то

$$(x_{1t}^*, x_{2t}^*) = (x_{\max}, x_{2t}^{000});$$

если $x_{1t}^{000} < x_{\max}, x_{2t}^{000} \geq x_{\max}$, то

$$(x_{1t}^*, x_{2t}^*) = (x_{1t}^{000}, x_{\max});$$

если $x_{1t}^{000}, x_{2t}^{000} \geq x_{\max}$, то

$$(x_{1t}^*, x_{2t}^*) = (x_{\max}, x_{\max}).$$

$$\text{Тогда } v(\{1, 2\}) = \sum_{t=1}^T v_t(\{1, 2\}) = \sum_{t=1}^T (\max(0, J_1(x_{1t}^*, x_{2t}^*)) + \max(0, J_2(x_{1t}^*, x_{2t}^*)));$$

– коалиции одного агента и центра:

$$v(\{0, 1\}) = \max_{x_{1t}, \theta_{1t}, \theta_{2t}} \min_{x_{2t}} (J_1(\theta_{1t}, x_{1t}, x_{2t})) + J_0(\theta_{1t}, \theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t}) =$$

$$= \max_{x_{1t}} \min_{x_{2t}} (J_1(0, x_{1t}, x_{2t}) + J_0(0, 0, x_{1t}, x_{2t}));$$

$$v(\{0, 2\}) = \max_{x_{2t}, \theta_{1t}, \theta_{2t}} \min_{x_{1t}} (J_2(\theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t})) + J_0(\theta_{1t}, \theta_{2t}, x_{1t}, x_{2t}) =$$

$$= \max_{x_{2t}} \min_{x_{1t}} (J_2(0, x_{1t}, x_{2t}) + J_0(0, 0, x_{1t}, x_{2t})).$$

Значения находятся численно путем перебора областей допустимых управлений (4) с некоторым шагом.

В случае коалиции обоих агентов и центра $v(\{0, 1, 2\})$ агенты и центр сообща решают задачу оптимального управления с функционалом выигрыша вида

$$J^C(x_{1t}, x_{2t}) = \sum_{t=1}^T \delta^t \left\{ \gamma \bar{x}_t + \sum_{i=1}^2 \left((D - \alpha \bar{x}_t) x_{it} - \frac{x_{it}^2}{2 \left(r_i + \beta \sum_{j \neq i} r_j I(x_{jt}) \right)} - c_i I(x_{it}) \right) \right\} + \delta^T y_T \rightarrow \max.$$

Его максимум ищется по функциям x_{1t}, x_{2t} с учетом (4), (5). Если управления всех агентов равны нулю, то выигрыш коалиции равен $\delta^T y_0(1 - m)^T$. Если, наоборот, управления всех агентов не равны нулю, то при использовании агентами программных стратегий для нахождения максимума J^C применим дискретный принцип максимума Понтрягина [18]. Функция Гамильтона коалиции игроков имеет вид

$$H_T = \delta^t \left[\gamma \bar{x}_t + (D - \alpha \bar{x}_t) \bar{x}_t - \sum_{i=1}^2 \left(\frac{x_{it}^2}{2 \left(r_i + \beta \sum_{j \neq i} r_j I(x_{jt}) \right)} - c_i \right) \right] + \mu_{t+1} \left(\sum_{i=1}^2 (k_i x_{it} - m y_t) \right),$$

где μ_{t+1} – сопряженная переменная. Из необходимого условия экстремума получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_t}{\partial x_{1t}} &= \delta^t \left(\gamma + D - 2\alpha(x_{1t} + x_{2t}) - \frac{x_{1t}}{r_1 + \beta r_2} \right) + \mu_{t+1} k_1 = 0; \\ \frac{\partial H_t}{\partial x_{2t}} &= \delta^t \left(\gamma + D - 2\alpha(x_{1t} + x_{2t}) - \frac{x_{2t}}{r_2 + \beta r_1} \right) + \mu_{t+1} k_2 = 0, \end{aligned}$$

а для определения сопряженной переменной – систему уравнений

$$\mu_t = (1 - m)\mu_{t+1}; \quad \mu_T = \delta^T.$$

Следовательно, $\mu_t = (1 - m)^{T-t} \delta^T$. Тогда

$$x_{1t}^0 = \frac{A_{1t} - B_{1t}}{2\alpha + 1 + 1/(2\alpha(r_1 + \beta r_2))}; \quad x_{2t}^0 = \frac{A_{2t} - B_{2t}}{2\alpha + 1 + 1/(2\alpha(r_2 + \beta r_1))},$$

где

$$\begin{aligned} A_{1t} &= \gamma + D + k_2(1 - m)^{T-t} \delta^{T-t}; \\ B_{1t} &= \left(2\alpha + \frac{1}{r_2 + \beta r_1} \right) \left(\frac{\gamma + D}{2\alpha} + \frac{k_1(1 - m)^{T-t} \delta^{T-t}}{2\alpha} \right); \\ A_{2t} &= \gamma + D + k_1(1 - m)^{T-t} \delta^{T-t}; \\ B_{2t} &= \left(2\alpha + \frac{1}{r_1 + \beta r_2} \right) \left(\frac{\gamma + D}{2\alpha} + \frac{k_2(1 - m)^{T-t} \delta^{T-t}}{2\alpha} \right). \end{aligned}$$

Найденная пара (x_{1t}^0, x_{2t}^0) является точкой максимума функции Гамильтона при положительных управлениях. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_t}{\partial x_{1t}^2} &= -\delta^t \left(2\alpha - \frac{1}{r_1 + \beta r_2} \right) = E < 0; \quad \frac{\partial^2 H_t}{\partial x_{2t}^2} = -\delta^t \left(2\alpha - \frac{1}{r_2 + \beta r_1} \right) = F < 0; \\ \frac{\partial^2 H_t}{\partial x_{1t} \partial x_{2t}} &= -2\alpha \delta^t = G < 0; \quad \Delta = EF - G^2 > 0; \quad E < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, максимум функции Гамильтона с учетом ограничений на управления (4) достигается в одной из точек

$$(8) \quad \begin{aligned} &(x_{1t}^{**}, x_{2t}^{**}) = \\ &= \{ (x_{1t}^0, x_{2t}^0), (x_{1t}^0, 0), (0, x_{2t}^0), (0, 0), (x_{\max}, x_{2t}^0), (x_{1t}^0, x_{\max}), (x_{\max}, x_{\max}) \}. \end{aligned}$$

Доказано следующее

Утверждение. Формулы (8) определяют аргументы функционалов выигрыша центра и агентов, дающие значение характеристической функции максимальной коалиции, т.е.

$$v(\{0, 1, 2\}) = J_0(0, 0, x_1^{**}, x_2^{**}) + J_1(0, x_1^{**}, x_2^{**}) + J_2(0, x_1^{**}, x_2^{**}).$$

4. Кооперативная игра в форме характеристической функции Громовой–Петросяна

Значение характеристической функции Громовой–Петросяна для коалиции S вычисляется в два этапа [17]. На первом находятся оптимальные управления игроков при кооперативном подходе (формулы (8), утверждение). В результате определяются стратегии всех членов рассматриваемой коалиции, и далее они меняться не будут. На втором этапе члены антикоалиции стремятся минимизировать суммарный выигрыш всех членов коалиции, меняя свои управления. В результате определяется значение характеристической функции на этой коалиции. Таким образом:

– для коалиции из одного центра

$$v(\{0\}) = \min(J_0(0, 0, 0, 0); J_0(0, 0, x_{\max}, x_{\max}); J_0(0, 0, 0, x_{\max}); J_0(0, 0, x_{\max}, 0));$$

– для коалиции из одного агента

$$v(\{1\}) = \min_{x_{2t}, \theta_{1t}} J_1(x_{1t}^*, x_{2t}, \theta_{1t}) = \min_{x_{2t}} J_1(x_{1t}^*, x_{2t}, 0);$$

$$v(\{2\}) = \min_{x_{1t}, \theta_{2t}} J_2(x_{1t}, x_{2t}^*, \theta_{2t}) = \min_{x_{1t}} J_2(x_{1t}, x_{2t}^*, 0);$$

(здесь и далее

$$\{x_{1t}^*, x_{2t}^*, \theta_{1t}^*, \theta_{2t}^*\} = \arg \max_{x_{1t}, x_{2t}, \theta_{1t}, \theta_{2t}} (J_0 + J_1 + J_2)$$

и определяются формулой (8) и доказанным выше утверждением, причем $\theta_{1t}^* = \theta_{2t}^* = 0$);

– для коалиции одного агента и центра

$$\begin{aligned} v(\{0, 1\}) &= \min_{x_{2t}} (J_0(x_{1t}^*, x_{2t}, \theta_{1t}^*, \theta_{2t}^*) + J_1(x_{1t}^*, x_{2t}, \theta_{1t}^*)) = \\ &= \min_{x_{2t}} (J_0(x_{1t}^*, x_{2t}, 0, 0) + J_1(x_{1t}^*, x_{2t}, 0)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\{0, 2\}) &= \min_{x_{1t}} (J_0(x_{1t}, x_{2t}^*, \theta_{1t}^*, \theta_{2t}^*) + J_2(x_{1t}, x_{2t}^*, \theta_{2t}^*)) = \\ &= \min_{x_{1t}} (J_0(x_{1t}, x_{2t}^*, 0, 0) + J_2(x_{1t}, x_{2t}^*, 0)); \end{aligned}$$

– для коалиции обоих агентов

$$\begin{aligned} v(\{1, 2\}) &= \min_{\theta_{1t}, \theta_{2t}} (J_1(x_{1t}^*, x_{2t}^*, \theta_{1t}) + J_2(x_{1t}^*, x_{2t}^*, \theta_{2t})) = \\ &= J_1(x_{1t}^*, x_{2t}^*, 0) + J_2(x_{1t}^*, x_{2t}^*, 0); \end{aligned}$$

– для коалиции обоих агентов и центра

$$v(\{0, 1, 2\}) = \max_{x_{1t}, x_{2t}} J^C(x_{1t}, x_{2t})$$

и значение определяется аналогично значению характеристической функции Неймана–Моргенштерна для максимальной коалиции (утверждение).

5. Кооперативная игра в форме характеристической функции Петросяна–Заккура

Значение характеристической функции Петросяна–Заккура для коалиции S вычисляется в два этапа [16]. На первом предполагается, что все игроки равноправны и находятся их равновесные по Нэшу управления. Если таких равновесий несколько, то необходимо выбрать то, в котором выигрыш коалиции будет меньше. В результате определены стратегии всех членов антикоалиции, и далее они меняться не будут. На втором этапе члены коалиции стремятся максимизировать суммарный выигрыш коалиции, меняя свои управления. При этом стратегии членов антикоалиции не меняются. В результате определяется значение характеристической функции на этой коалиции. Обозначим $x_{1t}^{NE}, x_{2t}^{NE}, \theta_{1t}^{NE}, \theta_{2t}^{NE}$ стратегии игроков в найденном равновесии Нэша. Тогда характеристическая функция Петросяна–Заккура определяется следующим образом:

– для коалиции из одного центра

$$v(\{0\}) = J_0(x_{1t}^{NE}, x_{2t}^{NE}, 0, 0);$$

– для коалиции из одного агента

$$v(\{1\}) = \max_{x_{1t}} J_1(x_{1t}, x_{2t}^{NE}, \theta_{1t}^{NE}); \quad v(\{2\}) = \max_{x_{2t}} J_1(x_{1t}^{NE}, x_{2t}, \theta_{2t}^{NE});$$

– для коалиции одного агента и центра

$$v(\{0, 1\}) = \max_{x_{1t}} J_0(x_{1t}, x_{2t}^{NE}, 0, 0) + J_1(x_{1t}, x_{2t}^{NE}, 0);$$

$$v(\{0, 2\}) = \max_{x_{2t}} J_0(x_{1t}^{NE}, x_{2t}, 0, 0) + J_2(x_{1t}^{NE}, x_{2t}, 0);$$

– для коалиции обоих агентов

$$v(\{1, 2\}) = \max_{x_{2t}, x_{2t}} (J_1(x_{1t}, x_{2t}, \theta_{1t}^{NE}) + J_2(x_{1t}, x_{2t}, \theta_{2t}^{NE}));$$

– для коалиции обоих агентов и центра

$$v(\{0, 1, 2\}) = \max_{x_{1t}, x_{2t}} J^C(x_{1t}, x_{2t}).$$

Значения характеристических функций Громовой–Петросяна и Петросяна–Заккура находятся численно путем перебора областей допустимых управлений (2), (4) с некоторым шагом.

6. Результаты имитационных экспериментов

Были проведены имитационные эксперименты, в которых определялись значения разных характеристических функций для различных наборов входных параметров модели. При проведении имитационных экспериментов варьировались величины:

γ от 0,01 до 3 млн руб./год штук с шагом 0,05;

D от 5 до 100 млн руб./год штук с шагом 2 млн руб./год штук;

α от 0,01 до 0,8 млн руб./год штук² с шагом 0,01 млн руб./год штук²;

$r_{1,2}$ от 0,5 до 50 штук² год/млн руб. с шагом 0,5 штук² год/млн руб.;

$c_{1,2}$ от 50 до 1000 млн руб./год с шагом 50 млн руб./год;

β от 0,1 до 3 с шагом 0,1;

m от 0,0001 до 0,1 с шагом 0,0005;

$k_{1,2}$ от 0,01 до 0,8 млн руб./год штук с шагом 0,01 млн руб./год штук;

y_0 от 30 до 500 млн руб./год с шагом 20 млн руб./год ;

S_t от 100 до 500 млн руб./год с шагом 50 млн руб./год;

x_{\max} от 100 до 3000 штук с шагом 100 штук.

Таблица 1. Входные данные для численного решения

N	D	r_1	r_2	c_1	c_2	y_0	k_1	k_2	γ	α	β	m
1	200	20	30	500	700	200	0,02	0,4	1	0,2	1	0,03
2	200	60	50	300	400	200	0,03	0,3	1	0,1	0,8	0,03
3	200	20	70	350	200	100	0,04	0,06	0,5	0,3	0,1	0,03
4	200	60	20	200	400	100	0,04	0,03	0,5	0,25	0,5	0,03
5	200	30	10	600	500	200	0,01	0,05	1	0,05	0,3	0,05
6	200	20	50	400	300	200	0,05	0,02	0,5	0,1	1,4	0,05
7	300	40	60	200	500	200	0,12	0,2	1	0,12	0,8	0,05
8	300	20	10	400	300	200	0,1	0,1	1,5	0,15	0,6	0,1
9	300	40	20	500	600	50	0,01	0,03	0,4	0,05	0,7	0,02
10	300	20	10	200	500	50	0,07	0,01	0,1	0,1	1	0,02
11	300	50	30	400	300	50	0,05	0,01	0,3	0,1	0,8	0,01
12	500	20	10	400	300	200	0,03	0,25	0,4	0,2	1	0,03
13	500	10	50	400	200	200	0,07	0,03	0,3	0,2	0,8	0,03
14	500	40	25	200	500	200	0,01	0,03	0,2	0,1	1,2	0,03
15	500	30	50	400	300	200	0,05	0,3	0,1	0,5	1,5	0,03
16	500	20	40	100	500	200	0,2	0,1	0,3	0,3	1	0,03
17	500	15	10	150	100	200	0,1	0,5	0,1	0,4	0,5	0,02
18	200	20	30	450	350	100	0,06	0,04	0,1	0,2	2	0,01
19	200	60	25	500	450	100	0,01	0,03	0,4	0,15	1	0,01
20	200	10	40	400	300	100	0,03	0,02	0,3	0,2	1	0,01

Таблица 2. Значения характеристической функции Петросяна–Закура

N	$v(\{0\})$	$v(\{1\})$	$v(\{2\})$	$v(\{0, 1\})$	$v(\{0, 2\})$	$v(\{1, 2\})$	$v(\{0, 1, 2\})$
1	183	25 812	24 275	27 148	26 665	50 250	58 756
2	183	27 287	26 975	28 624	28 350	54 824	60 027
3	91	24 512	25 096	25 684	26 274	49 859	53 185
4	91	25 462	24 737	27 634	26 908	50 571	54 733
5	172	27 200	27 250	28 023	28 079	54 889	62 544
6	172	26 862	27 275	28 116	28 524	54 810	59 429
7	172	42 406	41 537	43 745	42 887	84 216	89 206
8	148	41 487	41 600	42 873	42 986	83 085	88 442
9	47	43 001	42 037	43 140	42 748	85 052	92 185
10	27	42 462	42 075	43 512	42 419	84 650	89 611
11	48	41 975	42 225	43 076	43 320	84 795	89 601
12	183	70 113	70 225	72 360	72 503	141 650	146 967
13	183	70 425	71 525	72 162	73 057	142 060	146 306
14	183	73 056	71 600	73 770	72 817	144 795	149 337
15	183	64 925	65 275	70 129	70 515	132 825	137 793
16	183	70 002	69 056	72 519	71 398	139 075	143 530
17	188	68 300	68 325	71 517	71 601	136 848	140 696
18	97	24 962	26 325	27 083	29 442	51 500	57 034
19	97	26 112	26 175	27 472	27 536	52 561	56 674
20	97	25 125	25 806	27 471	27 651	51 750	56 674

Таблица 3. Значения характеристических функций Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна

N	$v(\{0\})$	$v(\{1\})$	$v(\{2\})$	$v(\{0, 1\})$	$v(\{0, 2\})$	$v(\{1, 2\})$	$v(\{0, 1, 2\})$
1	183	25 025	25 136	25 968	25 543	50 250	58 756
2	183	27 263	27 412	28 092	27 654	54 824	60 027
3	91	24 311	25 213	24 567	25 378	49 859	53 185
4	91	25 596	24 975	25 886	25 138	50 571	54 733
5	172	27 336	27 412	27 816	27 965	54 889	62 544
6	172	27 258	27 532	27 590	27 987	54 810	59 429
7	172	41 857	42 099	43 074	43 945	84 216	89 206
8	148	41 406	41 576	42 030	42 105	83 085	88 442
9	47	42 680	42 165	42 853	42 376	85 052	92 185
10	27	42 775	41 453	43 863	42 653	84 650	89 611
11	49	42 249	42 364	42 396	42 789	84 795	89 601
12	183	70 675	70 766	71 018	71 341	141 650	146 967
13	183	70 325	71 154	71 615	72 756	142 060	146 306
14	183	72 846	71 881	73 094	72 755	144 795	149 337
15	183	65 264	66 534	66 527	67 812	132 825	137 793
16	183	69 137	68 813	70 453	70 134	139 075	143 530
17	188	68 363	68 349	68 668	68 796	136 848	140 696
18	97	26 203	25 986	25 744	28 143	51 500	57 034
19	97	26 206	26 278	26 428	26 931	52 561	56 674
20	97	25 525	26 145	25 919	26 435	51 750	56 674

Все имитационные эксперименты проводились на компьютере с процессором AMD Ryzen 5 3550H с оперативной памятью 8 Гб на объектно-ориентированном языке программирования C++. Среднее время одного эксперимента составило менее секунды. Во всех проведенных экспериментах значения характеристических функций Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна совпали для всех коалиций.

Значения характеристических функций на различных коалициях в случае входных данных из табл. 1 и $T = 6$, $n = 2$, $S_t = 300$ млн руб./год приведены в табл. 2 (для характеристической функции Петросяна–Заккура) и табл. 3 (для характеристических функций Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна).

На рис. 1–3 приведены выигрыши максимальной коалиции $v(\{0, 1, 2\}) \times 10^{-2}$ в зависимости от значений параметров D , определяющего величину выручки от реализации агентом произведенной им продукции (рис. 1), γ , определяющего выигрыш центра в зависимости от объема инновационного продукта (рис. 2), m – коэффициента снижения инновационного уровня (рис. 3). Графики на рисунках приведены в случае $T = 6$; $n = 2$; $S_t = 300$ млн руб./год; $r_1 = 60$ штук² год/млн руб.; $r_2 = 50$ штук² год/млн руб.; $c_1 = 300$ млн руб./год; $c_2 = 400$ млн руб./год; $k_1 = 0,04$ млн руб./год (штуки); $k_2 = 0,4$ млн руб./год (штуки); $\beta = 1$; $x_{\max} = 1000$ штук.

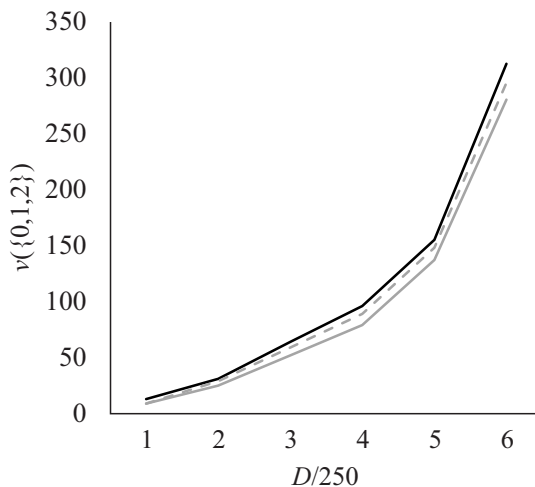


Рис. 1. Зависимость выигрыша максимальной коалиции от параметра D .

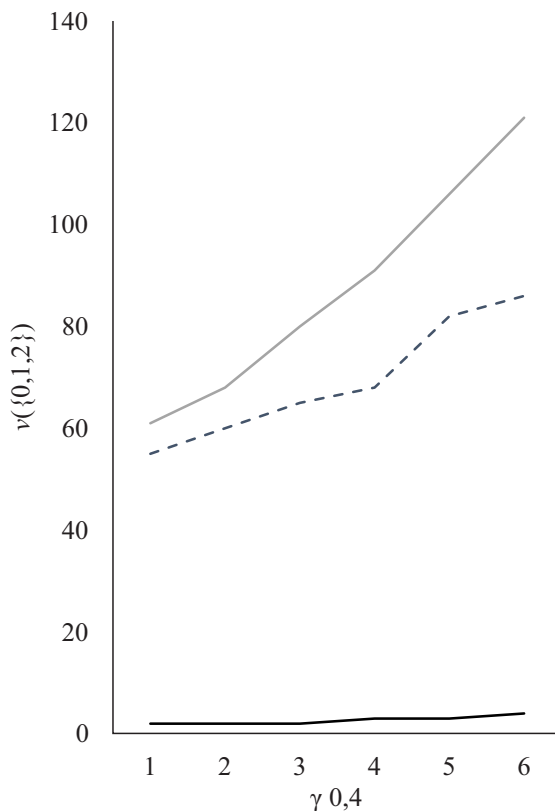


Рис. 2. Зависимость выигрыша максимальной коалиции от параметра γ .

Кроме того, на рис. 1 $m = 0,03$; $y_0 = 200$ млн руб./год,
 рис. 2 – $\alpha = 0,2$ млн руб./год штук²; $m = 0,03$; $y_0 = 200$ млн руб./год,
 рис. 3 – $\alpha = 0,2$ млн руб./год штук²; $\gamma = 1$ млн руб./год штук);
 $D = 200$ млн руб./год штук).

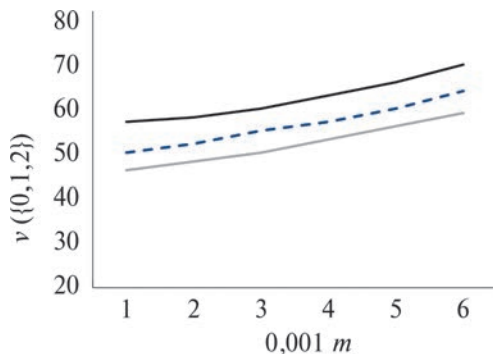


Рис. 3. Зависимость выигрыша максимальной коалиции от параметра m .

Графики на рис. 1 соответствуют случаям:

сплошная тонкая линия – $\gamma = 1$ млн руб./год штук);

$$\alpha = 0,2 \text{ млн руб./год штук}^2);$$

пунктирная – $\gamma = 0,5$ млн руб./год штук);

$$\alpha = 0,2 \text{ млн руб./год штук}^2);$$

сплошная жирная – $\gamma = 1$ млн руб./год штук);

$$\alpha = 0,1 \text{ млн руб./год штук}^2);$$

на рис. 2: сплошная жирная линия – $D = 5$ млн руб./год штук);

пунктирная – $D = 100$ млн руб./год штук);

сплошная тонкая – $D = 200$ млн руб./год штук);

на рис. 3: сплошная жирная – $y_0 = 200$ млн руб./год;

пунктирная – $y_0 = 100$ млн руб./год;

сплошная тонкая – $y_0 = 50$ млн руб./год.

На основе анализа результатов проведенных численных экспериментов можно сделать выводы о системе предпочтений с точки зрения значений характеристических функций для разных коалиций:

$$v(\{0\}), v(\{1, 2\}) : NM \leftrightarrow GP \leftrightarrow PZ;$$

$$v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{0, 1\}), v(\{0, 2\}) : NM \leftrightarrow GP < PZ.$$

Здесь приняты обозначения: NM – характеристическая функция Неймана–Моргенштерна; GP – Громовой–Петросяна; PZ – Петросяна–Заккура.

Таким образом, в кооперативной игре на основе характеристической функции для коалиции, состоящей из центра, или коалиции обоих агентов использование разных характеристических функций не меняет их выигрыш. Для коалиций, состоящих из одного агента или центра и одного из агентов, предпочтительнее использование характеристической функции Петросяна–Заккура, разница в получаемых коалициями выигрышах в большинстве случаев не превосходит 5%.

Широко распространенным принципом оптимального распределения выигрыша между игроками в кооперативных играх является вектор Шепли,

который всегда существует и единствен [14]. Компоненты вектора Шепли $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$ в случае центра и двух агентов вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{1}{3}v(\{0\}) + \frac{1}{6}(v(\{0, 1\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{6}(v(\{0, 2\}) - v(\{2\})) + \\ &+ \frac{1}{3}(v(\{0, 1, 2\}) - v(\{1, 2\})); \\ \Phi_1 &= \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}(v(\{0, 1\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{6}(v(\{1, 2\}) - v(\{2\})) + \\ &+ \frac{1}{3}(v(\{0, 1, 2\}) - v(\{0, 2\})); \\ \Phi_2 &= \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}(v(\{0, 2\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{6}(v(\{1, 2\}) - v(\{1\})) + \\ &+ \frac{1}{3}(v(\{0, 1, 2\}) - v(\{0, 1\})).\end{aligned}$$

Значения компонент вектора Шепли в случае входных данных из табл. 1 для разных характеристических функций приведены в табл. 4. В случае характеристических функций Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна значения вектора Шепли совпадают.

Таблица 4. Значения вектора Шепли для разных характеристических функций

N	Φ_0^{NM}	Φ_1^{NM}	Φ_2^{NM}	Φ_0^{PZ}	Φ_1^{PZ}	Φ_2^{PZ}
1	3517	28 124	27 114	3121	27 896	27 739
2	1246	29 037	28 730	1974	29 099	28 954
3	1514	25 534	26 059	1208	25 560	26 471
4	2141	26 658	26 933	1493	26 972	26 378
5	2899	29 802	29 844	2781	29 757	29 837
6	2012	28 502	28 913	1728	28 682	28 924
7	2152	43 526	43 092	2231	43 559	43 764
8	2297	43 000	43 130	2027	42 979	43 142
9	2533	45 153	44 056	2470	45 123	44 616
10	1895	43 903	43 488	2039	45 359	44 013
11	1994	43 679	43 904	1728	43 817	43 926
12	2587	72 107	72 255	1986	72 337	72 439
13	2021	71 643	72 567	1957	71 843	72 666
14	1897	74 679	73 118	1762	73 456	72 523
15	3458	65 983	66 302	2141	67 188	68 532
16	3097	69 203	70 130	1994	70 933	70 589
17	2427	69 116	69 142	2116	69 562	69 540
18	2750	26 476	28 071	2260	27 632	28 082
19	1857	27 352	27 404	1549	27 583	27 654
20	2372	26 628	27 364	1787	25 650	26 312

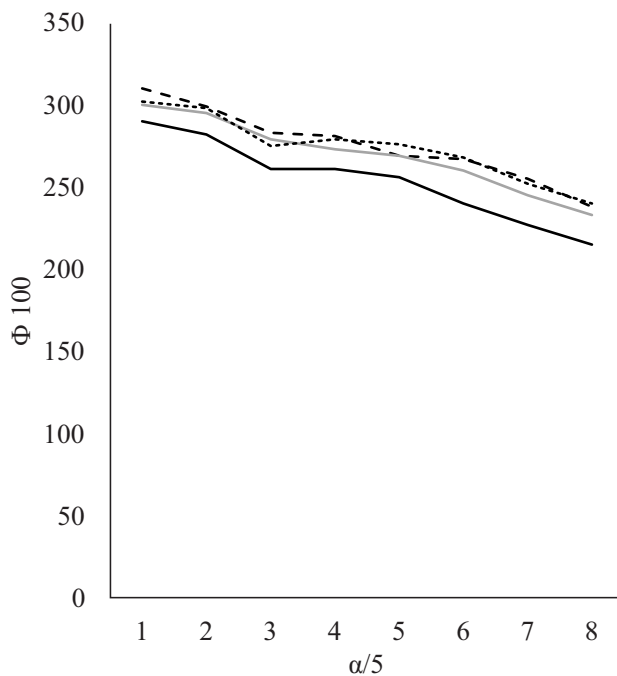


Рис. 4. Зависимость компонент вектора Шепли от α при $D = 200$ млн руб./год шт.

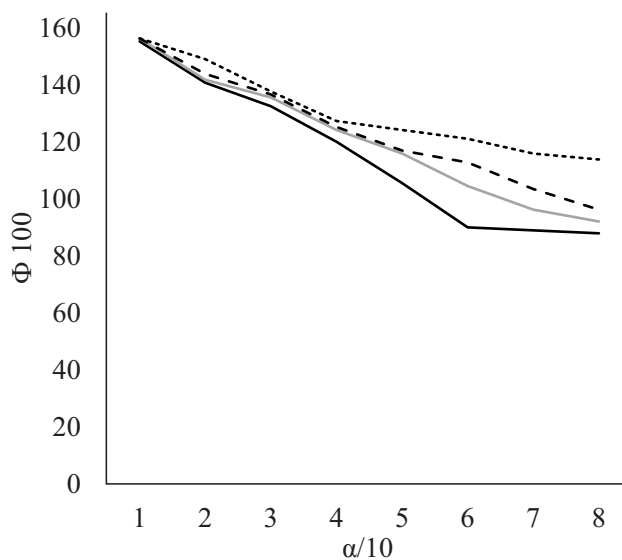


Рис. 5. Зависимость компонент вектора Шепли от α при $D = 100$ млн руб./год шт.

На рис. 4–6 приведены значения компонент вектора Шепли $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$ в зависимости от значений параметра α , влияющего на величину выручки от реализации агентом произведенной им продукции.

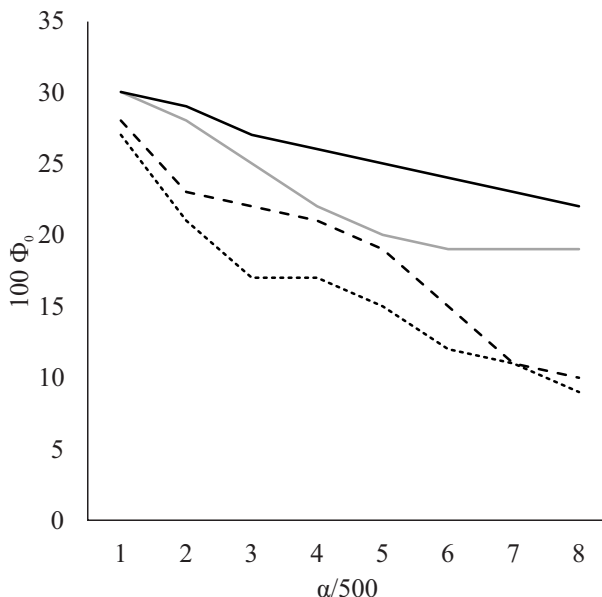


Рис. 6. Зависимость первой компоненты вектора Шепли от α .

Графики на рис. 4–6 приведены в случае

$T = 6$; $n = 2$; $S_t = 300$ млн руб./год; $r_1 = 20$ штук² год/млн руб.;
 $r_2 = 30$ штук² год/млн руб.; $c_1 = 450$ млн руб./год; $c_2 = 350$ млн руб./год;
 $k_1 = 0,06$ млн руб./год штук; $k_2 = 0,04$ млн руб./год штук; $\beta = 2$;
 $m = 0,01$; $y_0 = 100$ млн руб./год; $\gamma = 0,1$ млн руб./год штук;
 $x_{\max} = 1000$ штук.

На рис. 4–5 сплошная жирная линия соответствует Φ_1^{PZ} , пунктирная – Φ_2^{NM} , сплошная тонкая – Φ_2^{PZ} , штрихпунктирная – Φ_1^{NM} . На рис. 6 сплошная жирная линия соответствует Φ_0^{NM} при $D = 100$ млн руб./год штук), пунктирная – при $D = 200$ млн руб./год штук), сплошная тонкая – Φ_0^{PZ} при $D = 100$ млн руб./год штук), штрихпунктирная – при $D = 200$ млн руб./год штук).

Отметим, что при малых значениях параметра α отличия при использовании разных характеристических функций незначительны и они растут с ростом α . В общем случае для ведущего игрока в кооперативной игре в форме характеристической функции выгоднее использование характеристических функций Неймана–Моргенштерна или Громовой–Петросяна по сравнению с функцией Петросяна–Заккура. Для агентов такой вывод в общем случае неверен и все определяется входными параметрами модели.

На практике интерес представляет вопрос о том, насколько выгодна кооперация для разных игроков, т.е. насколько больший выигрыш они получают по сравнению с независимым поведением. В табл. 5 в первых шести столбцах приведены выигрыши Центра и агентов при независимом поведении при

Таблица 5. Сравнение выигрышей игроков при независимом и кооперативном поведении для разных характеристических функций

N	Γ_{1t}			Γ_{2t}			NM или GP			PZ		
N	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2	$J_0(\%)$	$J_1(\%)$	$J_2(\%)$	$J_0(\%)$	$J_1(\%)$	$J_2(\%)$
1	1370	25 677	25 417	1450	25 475	25 225	243	111	108	215	110	110
2	1280	27 734	27 802	1200	27 612	27 662	104	105	104	165	105	105
3	759	24 543	25 389	767	24 361	25 248	197	105	103	157	105	105
4	701	25 721	23 644	717	25 646	23 375	299	104	105	208	105	113
5	703	27 622	28 104	810	27 386	27 952	358	109	107	343	109	107
6	653	27 454	28 322	670	27 307	27 961	300	104	103	258	105	103
7	1081	42 567	42 037	1070	42 557	42 059	201	102	102	209	102	102
8	928	41 739	42 365	1000	41 518	42 139	230	104	104	203	104	102
9	636	42 911	43 021	670	42 730	42 771	378	105	103	368	106	104
10	654	43 003	42 432	680	42 825	42 275	279	103	103	300	107	104
11	798	42 534	43 211	840	42 300	42 946	237	103	102	206	103	102
12	1012	70 843	71 904	1036	70 735	71 735	250	102	102	191	102	101
13	689	70 896	71 802	707	70 702	71 631	286	101	101	277	102	101
14	579	72 916	72 354	577	72 896	72 348	329	102	102	305	101	101
15	1024	61 367	66 140	1063	65 314	66 160	3257	101	101	201	103	104
16	1008	69 215	69 402	1040	69 188	69 337	298	101	101	192	103	102
17	1993	68 410	68 895	1980	68 412	68 885	123	101	101	107	102	101
18	987	25 675	26 305	980	25 653	26 296	281	103	106	231	101	107
19	745	26 439	26 952	770	26 255	26 755	241	104	102	201	105	103
20	776	25 642	26 219	790	25 575	26 225	300	103	104	226	101	101

решении игр Гермейера Γ_{1t} и Γ_{2t} [13]. В следующих шести столбцах указано, какой процент составляет выигрыш игрока при кооперации для разных характеристических функций по отношению к его выигрышу при независимом поведении в игре Гермейера Γ_{2t} , т.е. насколько в процентном отношении кооперация будет выгоднее для Центра и агентов независимого поведения.

На рис. 7–8 приведены значения выигрышей центра (рис. 7) и одного из агентов (рис. 8) в играх Гермейера Γ_1 (штрихпунктирная линия), Γ_2 (сплошная тонкая линия) и кооперативном поведении для характеристических функций Неймана–Моргенштерна (сплошная жирная линия) и Петросяна–Заккура (пунктирная линия) в зависимости от значений параметра γ (рис. 7) и D (рис. 8). Остальные входные параметры взяты те же, что и для рис. 4–6.

Отметим, что для Центра выигрыш при кооперации может быть как намного больше выигрыша, получаемого при независимом поведении (на 100–200%), так и совсем немного больше (менее 10%). Это определяется входными параметрами модели. Так, при небольших значениях параметра D (при рассмотренных входных данных при $D < 70$), характеризующего спрос на разрабатываемые электронные курсы (при небольшом спросе на электронные курсы), выигрыш всего на 5–15% процентов больше при независимом поведении, а при значительном спросе ($D > 70$) – на 130–230%. Для агентов

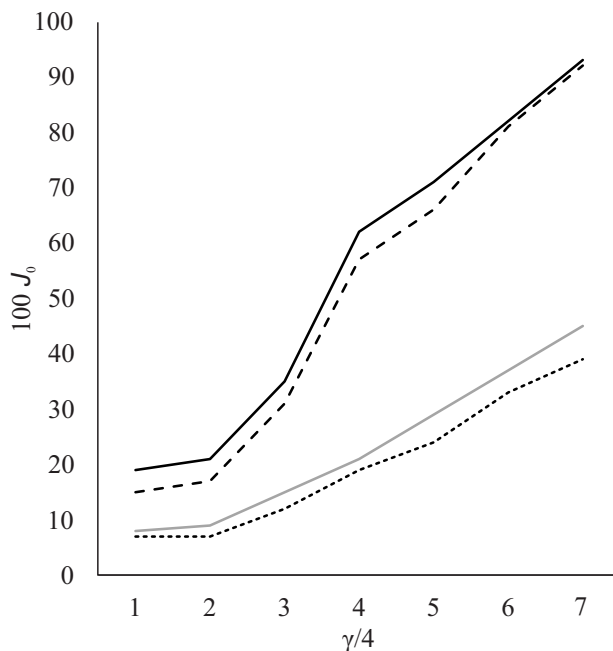


Рис. 7. Выигрыш центра при независимом и кооперативном поведении.

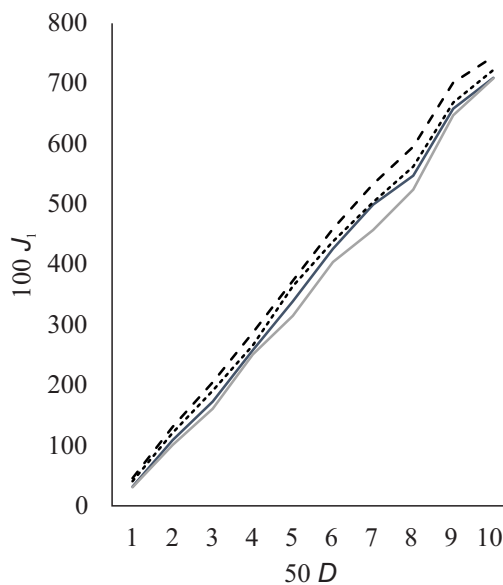


Рис. 8. Выигрыш первого агента при независимом поведении и кооперации.

ситуация аналогичная. Выигрыш при кооперации для достаточно широкого класса входных параметров всего на 1–12% выше, чем при независимом поведении, хотя с уменьшением значения параметра D выигрыш агентов при кооперации становится значительно больше, чем при независимом поведении

(на 30–100%). Интересен вывод о том, что кооперация выгоднее для Центра, чем для агентов (в смысле роста его выигрыша), для широкого класса входных параметров. Агенты получают значительно больший выигрыш при кооперации в случае слабого спроса на разрабатываемые курсы, т.е. когда они становятся “слабыми” и зависят от субсидий Центра.

7. Заключение

В кооперативной постановке исследована двухуровневая система управления инновациями в конкурирующих между собой по Курно университетах. Для описания такой системы управления предложена иерархическая (Центр-университеты) разностная модель. Проведено исследование предложенной модели в случае двух агентов в кооперативной постановке с играми в виде характеристических функций Неймана–Моргенштерна, Петросяна–Заккура и Громовой–Петросяна. Дан их сравнительный анализ. Использование характеристической функции Петросяна–Заккура является более выгодным для всех коалиций, в состав которых входят не все агенты. В остальных случаях величины выигрыша коалиции при разных характеристических функциях совпадают.

Для определения выигрышей отдельных субъектов управления используется вектор Шепли. Кооперация выгоднее для Центра, чем для агентов, (в смысле роста его выигрыша) для широкого класса входных параметров. Агенты получают значительно больший выигрыш при кооперации в случае слабого спроса на разрабатываемые курсы. Для Центра в кооперативной игре в форме характеристической функции выгоднее использование характеристических функций Неймана–Моргенштерна или Громовой–Петросяна по сравнению с функцией Петросяна–Заккура.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубина И.Н.* Теоретико-игровые модели организации креативно-инновационной деятельности фирм. АлтГУ. Барнаул, 2013. 178 с.
2. *Топка В.В.* Расширенная модель инновационного проекта при бинарном взаимном воздействии его работ // Проблемы управления. 2019. № 3. С. 22–29.
3. *Ратнер С.В.* Оценка эффективности управления эко-инновациями на основе моделей DEA с лагами и отрицательными выходами // Проблемы управления. 2020. № 5. С. 39–49.
4. *Гусева Н.И., Советкин Я.Д.* Ключевые области внедрения управленческих инноваций в российских и мультинациональных компаниях, действующих на российском рынке // Проблемы управления. 2021. № 2. С. 52–62.
5. *Рослякова Н.А., Волков А.Д., Тишков С.В.* Инновационные системы регионов Российской Арктики: структурные особенности, сценарии развития и аспекты управления (применение методики DEA-анализа) // Управление большими системами. Выпуск 106. М.: ИПУ РАН, 2023. С. 218–245.

6. *Бреер В.В., Мирзоян Г.Л., Новиков Д.А.* Инновационная олигополия Курно // Проблемы управления. 2015. № 5. С. 45–57.
7. *Cellini R., Lambertini L.* A differential game approach to investment in product differentiation // J. Econom. Dynam. Control. 2002. V. 27(1). P. 51–62.
8. *Cellini R., Lambertini L.* Private and social incentives towards investment in product differentiation // Int. Gam. Theory Rev. 2004. V. 6(4). P. 493–508.
9. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Динамические модели согласования частных и общественных интересов при продвижении инноваций // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. 11(1). С. 96–114.
10. *Malsagov M.Kh., Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* A Differential Stackelberg Game Theoretic Model of the Promotion of Innovations in Universities // Advan. Syst. Sci. Appl. 2020. V. 20(3). P. 166–177.
11. *Мальсагов М.Х., Меркулова М.В., Угольницкий Г.А.* Кооперативные дифференциально-игровые модели управления инновациями // Управление большими системами. 2020. Вып. 85. С. 143–172.
12. *Kalachev V.Yu., Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Difference Stackelberg Game Theoretic Model of Innovations Management in Universities // Contributions to Game Theory and Management. 2022. V. 15. P. 96–108.
13. *Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Динамические модели конфликтов. III. Иерархические игры // АиТ. 2015. № 2. С. 89–106.
14. *Shapley L.S.* A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games II / eds. Luce R.D. and Tucker A.W. Princeton University Press, 1953. P. 307–317.
15. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press, 1953.
16. *Petrosjan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Reduction // J. Econom. Dynam. Control. 2003. V. 27(3). P. 381–398.
17. *Gromova E.V., Petrosyan L.A.* On an Approach to Constructing a Characteristic Function in Cooperative Differential Games // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. P. 1680–1692.
18. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 30.11.2023

После доработки 12.04.2024

Принята к публикации 30.04.2024

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2024 г. **И.П. КАРПОВА**, канд. техн. наук (karpova_ip@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва),
В.Э. КАРПОВ, д-р техн. наук (karpov-ve@yandex.ru)
(Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва)

«ПОДВОДНЫЕ КАМНИ» БИОИНСПИРИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ НА ПРИМЕРЕ МУРАВЬИНЫХ ДОРОГ¹

Работа посвящена применению моделирования социального поведения в групповой робототехнике и вопросам оказания воздействия на среду группой автономных роботов путем создания и использования дорожной инфраструктуры. Модельным объектом выступают муравьиные дороги, рассматриваются основные аспекты поведения муравьев разных видов в процессе коллективной фуражировки (добычи пищи). Выявляются действия, которые в совокупности приводит к появлению того, что наблюдатель воспринимает как муравьиную дорогу. Описывается модель поведения агента при обустройстве маршрута, приводятся результаты имитационного моделирования для решения задачи фуражировки с учетом расчистки маршрута, согласующиеся с теоретической моделью. Результаты моделирования подтверждают предположение о том, что обустройство маршрута может быть выполнено индивидуальными усилиями агентов (роботов) и без необходимости организации совместных действий.

Ключевые слова: модели социального поведения, групповая робототехника, автономные мобильные роботы, биоинспирированные модели, задача фуражировки.

DOI: 10.31857/S0005231024070083, **EDN:** XRHYZC

1. Введение

Когда речь идет о передвижении автономных агентов (роботов), то обычно рассматривается задача построения оптимального или субоптимального маршрута. В случае, когда у робота есть карта местности и ему известна начальная и конечная точки маршрута, задача решается различными оптимизационными методами [1]. Если карта отсутствует, то робот либо предварительно строит эту карту, перемещаясь по исследуемой области (методы SLAM), либо совмещает процесс построения карты с поиском целевой точки (целевого объекта) [2]. При этом могут учитываться изменения среды, но

¹ Имитационное моделирование выполнено за счет государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

практически нигде не рассматривается вопрос о том, что робот сам может изменять эту среду. Например, если на его пути находится препятствие, которое мешает ему двигаться в нужном направлении, то он может обойти его или убрать с дороги, если препятствие перемещаемое и у робота есть эффекторы для его устранения. И тогда возникает вопрос о нахождении баланса между затратами на обход препятствия и на расчистку дороги. У этой работы есть два аспекта. С одной стороны, будет рассмотрен вопрос поведения агента при прохождении маршрута с точки зрения применения биоинспирированных методов. С другой, на примере этой задачи поднимается вопрос о как минимум технической нецелесообразности моделирования внешней, феноменологической стороны поведения животных вместо вычленения и реализации базовых механизмов их поведения.

Одним из подходов к решению комплексных задач группового управления роботами в сложных, недетерминированных средах является использование моделей социального поведения (МСП). МСП рассматривает социоподобную организацию взаимодействия роботов как один из адаптационных механизмов, позволяющий решать групповые задачи в сложных, недетерминированных динамических средах, где применение централизованных методов управления затруднено или невозможно [3, 4]. При этом термин «социум» рассматривается как сугубо биологическое понятие.

Ярким примером социальных животных являются муравьи. Они образуют так называемые эусоциальные сообщества – наиболее сложную форму общественной организации, для которой характерны такие признаки, как наличие закрепленной за группой территории, постоянный состав группы, когезия (стремление членов группы держаться вместе), специализация особей и др. [5, с.109].

Фактически использование МСП для решения задач групповой робототехники (ГР) заключается в формализации различных моделей поведения социальных животных, разработке механизмов и алгоритмов, создании на их основе комплекса программных и технических решений, позволяющих выполнять прикладные задачи группового управления роботами. И если ранее исследования в области МСП были сосредоточены на вопросах взаимодействия агентов со средой и друг с другом, то теперь актуальным становится вопрос оказания влияния агентов на среду.

МСП относится к биоинспирированным подходам, и вопросы методологии создания биоинспирированных моделей следует выделить особо.

2. Методологические аспекты

В области биоинспирированных моделей, относящихся к моделированию социального поведения животных, часто наблюдаются две крайности. Первая заключается в создании искусственных моделей, «вдохновенных природой». Это муравьиные алгоритмы [6], алгоритмы стаи волков [7], алгоритм бабочки [8] и аналогичные метаэвристические стохастические алгоритмы [9],

оптимизирующие поиск в пространстве решений. Например, «муравьиный алгоритм» (Ant Colony Optimization) основан на понятии феромонного следа [6]. Некоторые виды муравьев при движении оставляют пахучее вещество – феромон, который испаряется со временем. При поиске ресурсов муравьи стараются передвигаться в направлении увеличения интенсивности этого запаха. Аналог феромона используется как основа градиентного поиска в некотором пространстве решений. Другой пример – алгоритм серых волков (Gray Wolf Optimizer), базирующийся на описании действий особей из стаи серых волков при коллективной охоте [7]. Там много биологических терминов, но на самом деле «особи» – это варианты решения в пространстве, которое описывается некоторой немонотонной функцией. На каждом шаге оцениваются три лучших решения, потом «особи» сдвигаются в пространстве по определенным правилам, решения снова оцениваются в предположении, что наилучшее решение находится в геометрическом центре «доминирующих» особей. Таким образом, это совершенно искусственное построение, для которого из живой природы взят только общий принцип деления особей по весу при принятии решений. Подобные методы хорошо решают оптимизационные задачи, но имеют мало общего с реальным поведением живых организмов.

Другой крайностью является попытка имитации природных механизмов в том виде, в каком они наблюдаются в природе (феноменологический подход). Берутся некие наблюдаемые феномены (точнее, описание наблюдений, часто страдающее антропоцентричностью), и начинается моделирование их внешних проявлений. Так появляются многочисленные реализации этих феноменов, например, фуражировки муравьев (сложное поведение, включающее поиск и транспортировку пищи) [10, 11], и даже предлагаются «обобщенные подходы» к такому моделированию [12]. Потом на их основе делаются какие-то далеко идущие выводы, но все это остается частными механизмами, частными решениями отдельных специфических задач.

Один из наиболее показательных примеров – агрессия (агонистическое поведение). Достаточно давно биологи предлагали рассматривать агрессию как внешнее проявление некоторых видов социального поведения – родительского, пищевого и т.д. [13]. Но до сих пор агрессия явно или неявно объявляется базовым механизмом (отдельным типом поведения) (например, [14, 15]), хотя данный феномен можно реализовать с помощью других базовых элементов [16].

В отличие от вышеприведенных подходов парадигма МСП предполагает, что любое сложное социальное поведение или феномен складывается из небольшого числа базовых механизмов, что созвучно подходу школы М.Л. Цетлина в области коллективного поведения [17]. Для моделирования поведения необходимо разобраться в том, из каких базовых элементов оно состоит и как возникают наблюдаемые эффекты, не вводить лишние сущности, а использовать для реализации любого поведения комбинацию базовых механизмов, что обосновано и технически, и прагматически.

В качестве примера приведем феномен лидерства. Лидерство – это лишь некоторое наблюдаемое явление. У особи отсутствует специальный блок «лидер», а у насекомых нет и специфических задач, связанных с доминированием. Просто особи ведут себя определенным образом: если рядом есть кто-то более сильный (более крупный, сытый и т.д.), то особь начинает вести себя как подчиненная – она следует за лидером. Следование за лидером понимается в широком смысле – и движение, и подражание его действиям в конечном итоге. Это одна из базовых моделей социального поведения [5, 18]. Если же рядом нет никого успешнее/сильнее, то особь сама становится тем, кого окружающие воспринимают как лидера. А сама особь продолжает заниматься своими делами – строительством, фуражировкой, не выполняя никаких «лидерских функций». Наблюдатели же видят эффект самоорганизации: находящиеся рядом особи начинают выполнять аналогичную работу.

Другим наглядным примером является феномен муравьиных дорог. Это часто используемый в литературе, устоявшийся термин [19–21]. В данной работе постараемся показать, что термин «муравьиные дороги» появился как результат человеческой интерпретации наблюдаемых действий отдельных муравьев и их групп, выполняемых обычно во время фуражировки.

Строительство дорог считается одним из наиболее интересных примеров совместной деятельности муравьев, оказывающей влияние на среду обитания. Существует множество описаний того, как возникают дороги, как они длительное время поддерживаются в рабочем состоянии, и т.д. Отсюда естественным является желание промоделировать этот механизм оказания воздействия на среду, в частности с целью эффективного использования ресурсов или минимизации энергозатрат при передвижении. Однако попытка формализации приводит к переосмыслению дорожного феномена с точки зрения определения того, какие механизмы лежат в его основе.

Первый вопрос: что наблюдается на самом деле. От ответа на этот вопрос зависит, какие модели и механизмы надо реализовать. Строго говоря, дорога – это не только элемент инфраструктуры. Дорога – это понятие, присутствующее в базе знаний агента о среде его обитания (так называемой модели мира агента). С точки зрения семиотики как науки о знаковых системах, определяющей в прикладном аспекте форму представления знаний, оно должно включать в себя образ (перцепт знака), способы его использования (значение знака) и влиять на целеполагание (личностный смысл знака) [22]. Формально знак S , описывающий сущности или концепты мира агента, – это упорядоченная четверка вида $S = \langle n, p, a, m \rangle$, где n – имя знака, p – перцепт (описание, множество признаков), m – значение знака (связанные с концептом процедуры), a – личностный смысл (компонент, ответственный за целеполагание). С другой стороны, есть понятие пути следования. Это сущность принципиально иной природы. Это – наблюдаемое внешнее, оно не обязано явно присутствовать в модели мира агента. Как будет видно дальше, «дорожную» деятельность общественных насекомых можно свести к обустройству путей. Под обустройством пути будем понимать совокупность действий, про-

изводимых над областью, по которой пролегает маршрут, и направленных на изменение ее физических характеристик с целью уменьшения энергетических затрат на прохождение маршрута.

3. Дороги и пути

Дорожный аспект крайне интересен с точки зрения ГР. Она решает практические задачи типа мониторинга, разведки, патрулирования и т.д., поэтому перемещение по определенным маршрутам играет существенную роль. Важны не только кооперация и согласование действий, но также создание дорожной инфраструктуры силами самих роботов в ходе самоорганизации. Последнему вопросу уделяется мало внимания, хотя выгода от расчистки пути для повышения скорости передвижения, например, очевидна.

Биологи считают дороги одним из основных элементов структуры охраняемой территории муравьев многих видов [20], а сооружение дорог – ярким примером коллективного поведения [23]. Но попытка найти определение муравьиной дороги не дала результата. Зачастую биологи используют термины, вообще не приводя никаких определений. Так, один из видных отечественных исследователей А.А. Захаров дает классификацию муравьиных дорог, но не дает определений дороги [19]. Зарубежные биологи используют аналогичные термины: «тропы», «строительство троп» (trails, trail construction [24]), «строительство инфраструктуры» (infrastructure construction, [23]), но также не дают определений, а в лучшем случае приводят краткое описание, например: «физические тропы, т.е. дорожки, очищенные от препятствий» [24]. И создается впечатление об «устоявшейся терминологии» из разряда «всемирно известно, что такое муравьиные дороги (тропы)».

Попробуем подойти к этому вопросу с конструктивной точки зрения. Будем понимать под дорогой **обустроенную или приспособленную и используемую для передвижения полосу земли либо поверхность искусственного сооружения, т.е. нечто, являющееся результатом целенаправленной деятельности** (что несколько созвучно Федеральному закону от 10.12.1995 №196-ФЗ).

Подобного рода определения с точки зрения МСП мало что дают. Это – сугубо внешнее феноменологическое описание. Для реализации моделей поведения необходимо, чтобы дорога стала сущностью модели мира агента, т.е. неким знаком, обладающим, как минимум, двумя своими компонентами: рядом распознаваемых агентом признаков (перцепт) и множеством связанных с ним поведенческих процедур (значение). С другой стороны, есть понятие пути или, более определенно, маршрута. Считается, что маршрут – это **путь следования от одной интересующей точки до другой**. Маршрут фиксируется или оценивается внешним наблюдателем, т.е. он не обязан быть представленным в модели мира агента.

В этой работе делается предположение, что в мире муравья дороги как специально создаваемого сооружения нет, а есть маршрут, например, от гнезда до кормового участка. Можно найти много подтверждений того, что поня-

тие «муравьиная дорога» – это человеческая интерпретация движения по некоторому маршруту. Например, в [21, с. 38] говорится об определении «направления кормовых дорог или потоков фуражиров в тех случаях, когда постоянных дорог нет». Или в [20] при описании углубленных в почву дорог: «На остальной территории муравьи использовали *обычные дороги, которые представляют собой поток фуражиров, при этом активно задействовали для перемещения стволы и ветви упавших деревьев*».

Рассмотрим далее два основных «дорожных» феномена, описываемых в биологии насекомых, заменяя термин *дорога* термином **маршрут**.

3.1. Формирование маршрута

Опишем процесс формирования маршрута муравьев, опираясь на данные из [21, с. 10]. Сначала муравьи-разведчики обследуют территорию в поисках кормовых участков (например, мест обитания тли). Обнаружив новый кормовой участок, разведчики возвращаются в гнездо, мобилизуют фуражиров и отводят их на этот участок. Если кормовой участок содержит возобновляемые ресурсы, фуражиры начинают посещать его регулярно. Маршрут обычно пролегает не по прямой, а там, где удобнее ходить: частично по упавшим ветвям и стволам деревьев. Но там, где маршрут проходит по поверхности почвы, есть неровности, мелкий мусор, растительность, которые мешают проходу. И муравьи начинают *обустраивать маршрут*, чтобы сделать его более «удобным», уменьшающим энергетические затраты. Один убирает мусор, другой отодвигает в сторону частицы почвы, третий уничтожает мелкую растительность. Поверхность выравнивается, маршрут иногда становится более прямым и коротким. В результате действий отдельных особей со временем образуется та самая «расчищенная дорожка» [24], которую видит наблюдатель. Эту обычно узкую, расчищенную полосу поверхности, по которой двигаются муравьи, воспринимают как дорогу или тропу (рис. 1). Местами она прохо-

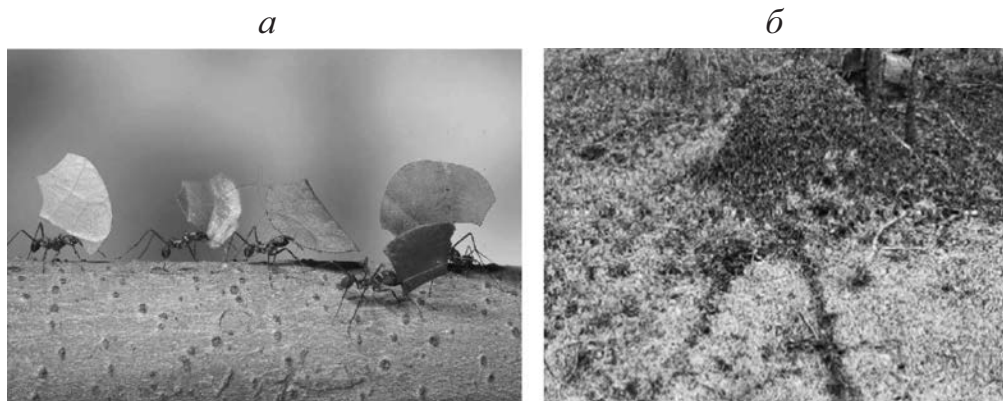


Рис. 1. Примеры «муравьиных дорог»: *а* – поток муравьев-листорезов, проходящий по стволу дерева; *б* – муравейник рыжего лесного муравья с двумя «дорогами».

дит по упавшим ветвям или стволам деревьев (рис. 1,а) [20, 21, 23], тогда ее можно выявить только по потоку муравьев. Но на почве эта «тропа» хорошо видна даже в отсутствие на ней муравьев (рис. 1,б), и у наблюдателя может возникнуть впечатление о том, что он видит некое сооружение, появившееся в результате согласованных действий (строительства).

Это «сооружение» удобно назвать дорогой по аналогии с человеческими дорогами. Но для человека дорога – это сооружение, обладающее набором признаков и интерпретируемое определенным образом, т.е. определяющее соответствующее поведение. У муравьев такого однозначного распознавания нет. Опыт, косвенно подтверждающий это, описан в [21, с. 11]. На одной из дорог изымались все фуражиры вместе с муравьями-наблюдателями с прилегающей к дороге стороны купола. Таким образом, в гнезде не осталось муравьев, которые знакомы с этой дорогой. Через несколько дней семья постепенно вновь овладела потерянной частью территории, но **исходная дорожная сеть и многие колонии тлей в подопытном секторе были потеряны**. Следовательно, другие муравьи, не знакомые с данным участком, не смогли распознать существующие на нем дороги и повторно их использовать.

3.2. Очистка маршрута

С одной стороны, деятельность муравьев по «уходу за дорогами» энергетически выгодна. Например, груженные муравьи-листорезы по очищенным тропам передвигаются в 4–10 раз быстрее, чем по неочищенным [25], и в среднем колония таких муравьев тратит всего несколько дней за сезон на расчистку троп [26]. С другой стороны, есть исследования [23] с теми же муравьями-листорезами, подтверждающие гипотезу о том, что не существует ни механизмов межиндивидуальной обратной связи, ни механизмов вербовки специально для расчистки тропы. Приведенная в [23] математическая модель показывает, что результаты экспериментов по расчистке тропы могут быть объяснены фиксированной вероятностью того, что рабочий устранил мешающее препятствие, и не требуется мобилизация других рабочих для устранения препятствий.

Итак, используя понятие маршрута, можно объяснить все наблюдаемые феномены появления, использования и поддержки «дорожной инфраструктуры муравьев», точнее, рационального использования территории.

Это утверждение может показаться излишне категоричным. Не будем углубляться в вопросы терминологии, рассуждать о тоннелях [27], углубленных в почву дорогах [20] и т.п. Разумеется, изменение среды влияет на характер поведения агента: он будет двигаться *предпочтительно* по удобному, протоптанному участку. В этом смысле тоннель является предельным случаем проявления такого «предпочтения», так как в тоннеле у муравья нет возможности выбора другого пути. Повторим, что если рассматривать дорогу не как сущность модели мира внешнего наблюдателя, а как сущность (знак) модели мира именно агента, то с такой сущностью-знаком должны быть свя-

заны и поведенческие процедуры (значение знака), и ее образ (перцепт), и смысл (явное значение с точки зрения целевой функции). Но именно всего этого не наблюдается в поведении агентов.

4. Обустройство маршрута

Исходя из вышесказанного, будем считать, что у муравьев нет отдельного вида деятельности по строительству и поддержанию дорожной инфраструктуры. Действия, в результате которых появляется то, что сторонний наблюдатель воспринимает как дорогу, выполняются отдельными муравьями-фуражирами в ходе перемещения по знакомому маршруту. Эти действия носят вспомогательный характер. Таким образом, для решения задачи по обустройству маршрута надо по возможности ограничиться теми способами и механизмами, которые ранее были реализованы и уже использовались для других задач, и не вводить сущностей сверх необходимого.

В ходе решения различных задач агент (робот) должен перемещаться из одной точки в другую. Здесь эта задача решается не на уровне планирования маршрута и выстраивания оптимальной траектории, а на поведенческом уровне (как у муравьев). Рассмотрим для примера фуражировку. Агенты-фуражиры совершают регулярные рейсы за ресурсом и перемещают его на «базу», и маршрут соединяет базу и местоположение ресурса. Агент (как и муравей [28]) не имеет карты местности: он запоминает маршрут по визуальным ориентирам и компасу [29, 30]. Агент движется, запоминая ориентиры и направление по компасу (приблизительно), поэтому маршрут – это совокупность относительно прямых отрезков от одного ориентира до другого (рис. 2).

Характер движения. Движение в каждый момент времени определяется локальной целью – направлением (у муравьев – видимый ориентир, запах, светоконпасная ориентация), а также текущим контекстом: состоянием поверхности, помехами, препятствиями и т.д. Контекст определяет характер движения, обход препятствий, локальные предпочтения и т.п. В этом смысле

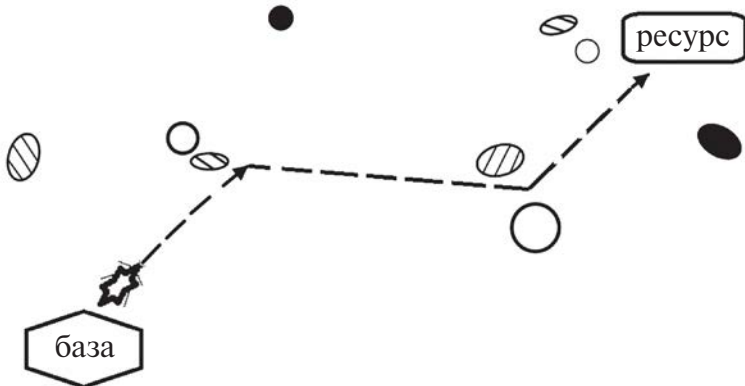


Рис. 2. Пример маршрута от «базы» до ресурса.

движение является «равнодействующей» тенденций идти в нужном направлении, а также идти так, чтобы было «удобнее». Именно в таком аспекте понимается влияние «протоптанной» тропы на движение агента. Чем интенсивнее поток, чем больше «протаптывается» путь, тем предпочтительнее будет движение именно по нему. Но такой «обустроенный» маршрут – это не дорога; просто так «удобнее» идти.

Эффективность перемещения определяется энергозатратами, которые зависят от времени перемещения по маршруту. Время зависит от длины и извилистости маршрута: по прямой агент движется быстрее, чем при поворотах, в частности при обходе препятствия. Таким образом, устранение препятствий и спрямление маршрута повысит энергоэффективность. Кроме того, для устойчивого движения по маршруту необходимо достаточное количество ориентиров, которые агент может распознать. Это позволяет увеличить вероятность успешного прохождения по маршруту и обратно.

Обустройство маршрута у муравьев в общем случае может проявляться по-разному:

1. Вытаптывание (уплотнение почвы без дополнительных усилий со стороны муравьев).
2. Расчистка пути (уборка мусора и растительности).
3. Использование подручного материала для повышения удобства прохождения по пути, например подстиление под ноги растительных остатков на топком участке маршрута.
4. Выравнивание поверхности, в том числе углубление в почву.

Процедура расчистки пути. Проходя известным ему маршрутом, агент знает, куда ему нужно двигаться (видит ориентир и идет к нему). Если перед ним препятствие, мешающее пройти прямо, он может его обойти или сдвинуть в сторону. Для этого он должен распознавать препятствия и отличать перемещаемые от неподвижных. Эти же препятствия он может воспринимать как ориентиры.

Процедура расчистки определяет, куда и как убираются помехи. Основной вопрос не в том, в каком направлении и как далеко сдвигаются мешающие объекты. Сложности возникают тогда, когда помехи сдвигаются в кучи или валы, образуя новые ориентиры. Фактически, создание нового ориентира и означает явное оказание воздействия агента на среду.

Обратим внимание, что использование перемещенных препятствий в качестве новых ориентиров не аналогично реакции на феромонный след, так как обнаружив такой ориентир, другой агент не сможет идентифицировать его как ориентир вдоль пути. Феромон у муравьев – это метка общего плана, она воспринимается другими особями как признак того, что здесь проходил другой муравей. Муравьи, не имеющие *следовых феромонов*, используют визуальные ориентиры, что косвенно свидетельствует об отсутствии у муравья «карты местности» [28] и подчеркивает значимость визуальной ориентации. Оставленный разведчиком пахучий след может быть использован фуражи-

рами для самоорганизации: они начинают двигаться по этому следу в направлении от гнезда (положение которого им известно) [31]. В случае же перемещения препятствия только тот агент, который идет вдоль известного ему маршрута, может запомнить это препятствие как ориентир.

Участники расчистки. Участником расчистки может стать любой фуражир, так как специальных муравьев-уборщиков не наблюдается [32]. Вероятность того, что муравей займется расчисткой, зависит от его состояния. Расчисткой никогда не занимаются фуражиры, несущие груз (для муравьев-листорезов см. [23]). В [23] также приводится оценка вероятности того, что муравей, столкнувшись с препятствием, будет его устранять.

Итак, расчистка пути приводит к освобождению пути, к уменьшению его длины и к созданию дополнительных ориентиров вдоль пути.

5. Модель поведения анимата при обустройстве маршрута

Считается, что обустройство маршрута у муравьев является энергетически эффективным [25, 26], следовательно, оценка действий агента в ходе фуражировки также может базироваться на изменении энергетических затрат. Приведем модель, описывающую этот процесс и позволяющую оценить эффективность агента. Это упрощенная качественная модель, она не преследует цель описать все детали процесса расчистки маршрута.

Имеется агент, решающий задачу транспортировки некоторого ресурса («пищи») от кормового участка до базы. Количество «пищи» определяет положительный вклад в его энергетический баланс. При этом агент затрачивает энергию на прохождение пути от базы до кормового участка, а также на расчистку пути от препятствий. Будем считать, что агент функционирует в таком дискретном времени, где каждый такт может определять некоторый период его существования. Среда, в которой функционирует агент, определяется ограниченным количеством невозпроизводимого ресурса на кормовом участке, а также множеством препятствий на пути следования агента. Агент с некоторой вероятностью может убирать эти препятствия, сокращая длину маршрута, но при этом тратя на уборку некоторое количество своей энергии.

Задача заключается в том, чтобы оценить энергетическую эффективность как функцию энергозатрат агента, зависящую от свойств среды и вероятности того, что агент займется расчисткой пути.

Пусть $f(t)$ – доставленный ресурс (грузоподъемность агента); будем считать для простоты, что $f(t) = f(0) = \text{const}$; $C(t)$ – затраты на доставку ресурса. Все используемые величины безразмерны и определены как полученная или потраченная энергия в условных единицах, а время t дискретно. Тогда эффективность агента $E(t)$ в момент времени t можно определить следующим образом:

$$(1) \quad E(t) = f(t) - C(t).$$

Затраты на доставку ресурса $C(t)$ (1) складываются из затрат на прохождение маршрута $L(t)$, на выполнение работ по расчистке $W(t)$ и на поиск пищи на участке $C_f(t)$:

$$(2) \quad C(t) = L(t) + W(t) + C_f(t).$$

Затраты на прохождение маршрута $L(t)$ (2) зависят от расстояния L_0 между «базой» и «кормовым участком» и от насыщенности препятствиями:

$$(3) \quad L(t) = L_0 + k_L \rho(t).$$

Здесь L_0 – условный прямой маршрут, $L_0 = \text{const}$, $\rho(t)$ – насыщенность препятствиями; k_L – коэффициент, определяющий затраты на обход препятствия.

Затраты на выполнение работ по расчистке $W(t)$ (2) зависят от насыщенности препятствиями $\rho(t)$ и от p_w – вероятности того, что агент будет устранять препятствие, $p_w = \text{const}$:

$$(4) \quad W(t) = p_w \rho(t).$$

Затраты на поиск пищи на участке $C_f(t)$ (2) обратно пропорциональны количеству пищи на участке:

$$(5) \quad C_f(t) = k_F / (F(t) + \epsilon).$$

Здесь k_F – коэффициент стоимости поиска, $k_F \in \mathcal{R}$, а ϵ введена для того, чтобы при $F(t) = 0$ затраты были бы конечны, $\epsilon \in \mathcal{R}$, $\epsilon > 0$. Количество пищи на участке $F(t)$ (5) уменьшается со временем:

$$(6) \quad F(t) = F_0 - ft.$$

Здесь F_0 – начальный объем пищи на участке. Насыщенность препятствиями $\rho(t)$ (4) также уменьшается по мере расчистки:

$$(7) \quad \rho(t+1) = \rho(t) - k_w W(t) = \rho(t) - k_w p_w \rho(t) = \rho(t)(1 - k_w p_w)$$

или в итоге

$$(8) \quad \rho(t) = \rho_0 (1 - k_w p_w)^t.$$

Здесь k_w – коэффициент эффективности действий по удалению препятствия.

В результате получаем выражение для эффективности агента

$$(9) \quad E(t) = \frac{F_0 f - f^2 t + f \epsilon - k_F}{F(t) + \epsilon} - L_0 - \rho_0 (1 - k_w p_w)^t (k_L + p_w).$$

Естественно, функцию, определяющую ресурс участка $F(t)$, необходимо доопределить так, чтобы она была ограничена снизу нулем, при этом если $F(t) = 0$, то значение f обнуляется (агент ничего не приносит):

$$(10) \quad F(t) = \max(F_0 - ft, 0), \quad f(t) = \begin{cases} f_0, & \text{если } F(t) - f_0 > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

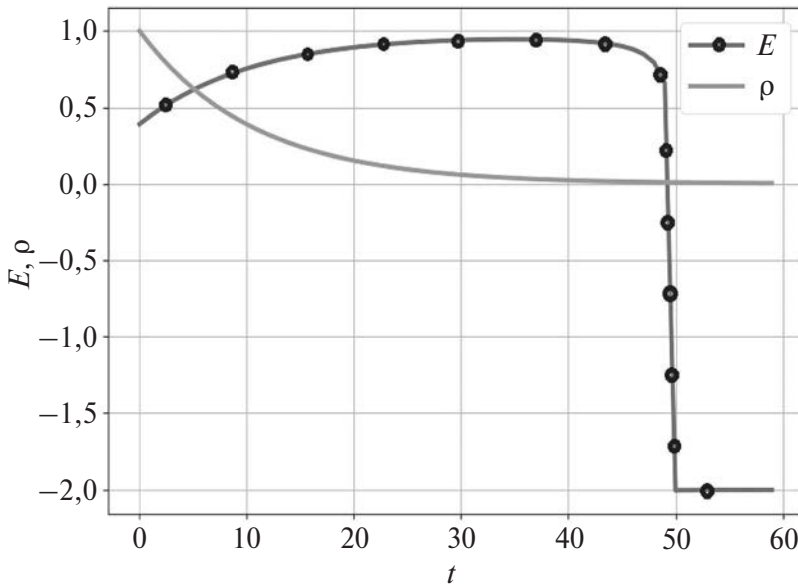


Рис. 3. Графики эффективности действий анимата $E(t)$ и насыщенности препятствиями $\rho(t)$ при численном моделировании.

Такая модель дает возможность оценить эффективность действий агента во время фуражировки и построить качественный график для $E(t)$ (10). На рис. 3 приведены графики эффективности $E(t)$ и насыщенности препятствиями $\rho(t)$ (7) для следующих значений параметров: затраты на прохождение прямого маршрута $L_0 = 1$; вероятность того, что анимат будет удалять препятствие, $p_w = 0,1$; коэффициент затрат на обход препятствия $k_L = 0,5$; начальная насыщенность препятствиями $\rho(0) = 1$; начальное количество пищи на участке $F(0) = 100$; «грузоподъемность» анимата $f = 2$; коэффициент эффективности расчистки $k_w = 0,9$; коэффициент затрат на поиск пищи $k_F = 1$, $\epsilon = 1$.

Как видно из графика $E(t)$ (рис. 3), эффективность работы агента растет по мере расчистки маршрута, достигает максимума при снижении количества препятствий ниже определенного порога, но затем начинает падать из-за уменьшения количества пищи.

Отрицательные значения $E(t)$ на графике означают, что при $F(t) = 0$ агент только тратит при движении по маршруту свои ресурсы, не восполняя их (работает в убыток).

6. Имитационное моделирование

Имитационное моделирование выполнялось в системе многоагентного моделирования Kvoqum, созданной в НИЦ «Курчатовский институт» [30]. Агент перемещался между двумя точками – от «гнезда» до «кормового участка». Подсчитывалось время, проведенное в дороге (с учетом обхода препятствий

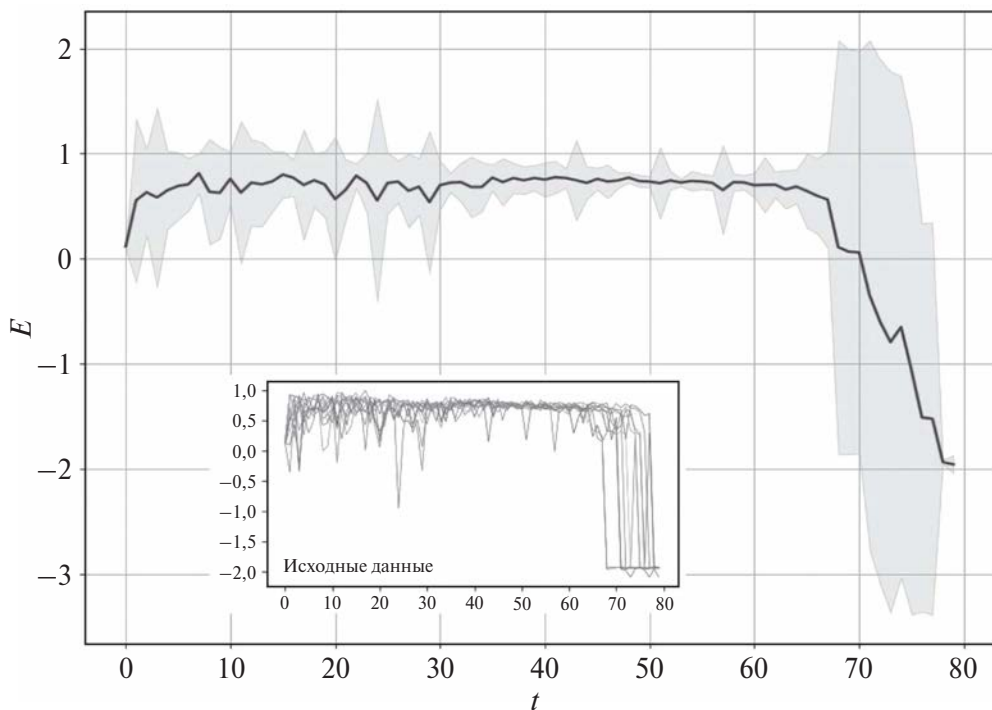


Рис. 4. График эффективности действий анимата $E(t)$ при имитационном моделировании. Среднее по десяти экспериментам и стандартное отклонение.

и/или затрат на их удаление), и время, потраченное на участке на поиск пищи. После нахождения ресурса агент мгновенно возвращался в «гнездо» и снова шел на кормовой участок. Эксперимент заканчивался, когда время на поиск пищи превышало 2000 тактов (тогда считалось, что пища на участке закончилась). На рис. 4 приведен график эффективности $E(t)$ для ряда экспериментов по имитационному моделированию. Из графика на рис. 4 видно, что эффективность действий анимата меняется аналогично тому, что показывает численное моделирование. Сначала эффективность действий анимата увеличивается, так как расчистка маршрута приводит к уменьшению времени на прохождение пути; затем наступает период стабилизации (35–55 проходы, рис. 4); по мере истощения участка увеличивается время на поиск пищи, и эффективность снижается.

7. Механизмы реализации вариантов обустройства маршрута

Вытапывание (естественное уплотнение почвы). На лабораторном полигоне это реализовать сложно, а в естественной среде это происходит естественным образом, когда роботы двигаются одним и тем же маршрутом в достаточно большом количестве. Оценка достаточной численности активных

фуражиров для семьи *Formica* из 500 особей составляет от 15 до 45 особей [34]. При этом к роботу предъявляются минимальные требования: умение ориентироваться по визуальным ориентирам и компасу, запоминать маршрут, возвращаться «на базу» и повторять маршрут.

Расчистка пути (удаление с него препятствий). Для этого в дополнение к ранее перечисленным механизмам робот должен уметь: (1) идентифицировать препятствия, (2) отличать перемещаемые препятствия от неподвижных, (3) сдвигать или переносить препятствия в сторону, (4) возвращаться к движению по маршруту, (5) уточнять запомненный маршрут, так как сдвиг препятствий изменяет конфигурацию ориентиров вдоль маршрута. В работах [35, 36] описывается способ отработки маршрута по визуальным ориентирам, при котором маршрут запоминается приблизительно, а возвращение к маршруту может быть реализовано просто как продолжение движения «в прежнем направлении» с учетом ориентиров. Поэтому необходимо передвигать препятствие на небольшое расстояние, достаточное для освобождения пути и сопоставимое с размером робота.

Для расчистки необходимо определить, как и когда робот должен сделать выбор между обходом и перемещением препятствия. После перемещения препятствия следует определить дальнейшие действия робота: он пойдет по маршруту или продолжит расчистку пути.

Выравнивание поверхности (горизонтальное выравнивание) Для этого робот должен иметь эффекторы, способные срезать верхний слой грунта или «прокладывать траншеи». Это слишком сильное требование, но можно ограничиться перемещаемыми элементами (препятствиями), на которые можно либо заехать, либо обогнуть их. Такие элементы можно сдвигать эффектором в виде отвала: в этом случае расчистка маршрута будет также приводить к выравниванию.

Механизмы для реализации вариантов обустройства маршрута роботом

Варианты обустройства маршрута	Механизмы
1. Вытаптывание	Ориентация по визуальным ориентирам и компасу Запоминание маршрута Возвращение «на базу» Повторение маршрута
2. Расчистка пути	Идентификация препятствия Распознавание перемещаемых и неподвижных препятствий Сдвиг препятствий в сторону
3. Выравнивание поверхности	Идентификация препятствия, которое можно огибать сбоку или переезжать
4. Использование подручного материала	Идентификация неудобного участка, на который можно сдвинуть препятствие

Использование подручного материала. Это более сложный вариант. Во-первых, робот должен уметь определять, что перед ним находится неудобный для передвижения участок, например углубление. Во-вторых, он должен найти поблизости элемент, которым можно выровнять этот участок. Но можно рассматривать этот вариант как продолжение предыдущего, по аналогии с муравьями, которые *перекладывают почву*, чтобы выровнять поверхность тропы [23]. И робот может перемещать мешающие проходу препятствия на эти неудобные участки. Общий список механизмов приведен в таблице. В ней для каждого следующего варианта нужны все предыдущие механизмы.

8. Заключение

У этой работы два аспекта: технический и методологический. Первый касается моделирования поведения и заключается в следующем. Приведенные выше рассуждения и результаты моделирования подтверждают предположение о том, что на самом деле в мире муравьев не существует дорог в том смысле, который вкладывает в это понятие человек. Есть только маршруты и направления движения, а обустройство маршрута с целью снижения энергетических затрат в простом случае может быть выполнено без организации совместной целенаправленной деятельности множества агентов (роботов). Таким образом, показано, что, не создавая новых сущностей, не привлекая какие-то совершенно искусственные построения, можно получить такой же результат и наблюдать такой же феномен, который у биологов принято называть «муравьиными дорогами». Формально это означает отсутствие в модели мира агента сущности «дорога», что влечет за собой отсутствие необходимости создания соответствующих этому знаку поведенческих процедур, представления/распознавания и т.п., что серьезно упрощает решение задачи.

Второй – методологический – аспект касается того, что отношение к биоинспирированности должно быть критическим и конструктивным. Вернемся к названию статьи и подытожим, в чем заключаются «подводные камни» биоинспирированности.

1. Поверхностные аналогии в биоинспирированных моделях поведения – вещь опасная. «Вдохновленные природой» модели зачастую не имеют ничего общего с тем, что имеется в природе. Опасность в том, что при таком поверхностном взгляде игнорируются механизмы, лежащие в основе того или иного поведения. В итоге получаются специфические модели, отражающие лишь внешние, феноменологические аспекты явлений природы.
2. Выявление и реализация базовых поведенческих механизмов имеет глубоко практические аспекты. Это позволяет экономить усилия при разработке систем, дает возможность комбинировать эти базовые механизмы и обеспечивает гибкость. Пример такого подхода – парадигма моделей социального поведения.

3. Сами по себе «настоящие» биологические модели и описания явлений тоже требуют критического отношения. Дело в разном понятийном аппарате у биологов и технических специалистов. Последним должна быть важна суть явления, его составные элементы и причинно-следственные связи. Без этого не понятно, что подлежит моделированию. Пример такого явления – муравьиные дороги – и был рассмотрен в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sahoo S.K., Choudhury B.B.* A Review of Methodologies for Path Planning and Optimization of Mobile Robots // *J. Proc. Manag. Techn.* 2023. V. 11. No. 1–2. P. 34–52.
2. *Abaspur Kazerouni I., Fitzgerald L., Dooly G., Toal D.* A survey of state-of-the-art on visual SLAM // *Expert Syst. Appl.* 2022. V. 205. No. 2. P. 117734.
3. *Карнов В.Э., Карнова И.П., Кулинич А.А.* Социальные сообщества роботов. М.: УРСС. 2019.
4. *Карнов В.Э.* Социальные сообщества роботов: от реактивных к когнитивным агентам // *Мягкие измерения и вычисления.* 2019. Вып. 2. № 15. С. 61–78.
5. *Дьюсбери Д.* Поведение животных: Сравнительные аспекты / Пер. с англ. М.: Мир, 1981.
6. *Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A.* Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents // *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. Part B.* 1996. V. 26. No. 1. P. 29–41. <https://doi.org/10.1109/3477.484436>
7. *Mirjalili S., Mirjalili S.M., Lewis A.* Grey Wolf Optimizer // *Adv. Eng. Softw.* 2014. V. 69. P. 46–61. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2013.12.007>
8. *Arora S., Singh S.* Butterfly optimization algorithm: a novel approach for global optimization // *Soft Comput.* 2019. V. 23. No. 3. P. 715–734. <https://doi.org/10.1007/s00500-018-3102-4>
9. *Toaza B., Esztergár-Kiss D.* A review of metaheuristic algorithms for solving TSP-based scheduling optimization problems [Formula presented] // *Appl. Soft Comput.*, 2023. V. 148. No. 11. P. 110908. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2023.11090>
10. *Imai K., Okuyama A.* Research on a Multi-agent System That Mimics Ant Foraging Behavior // *Lecture Notes in Networks and Systems. Proc. Eighth International Congress on Information and Communication Technology ICICT 2023, London, 2024.* V. 696. P. 193–203. https://doi.org/10.1007/978-981-99-3236-8_15
11. *Zhang N., Yong E.H.* Dynamics, statistics, and task allocation of foraging ants // *Phys. Rev. E.* Nov. 2023. V. 108. No. 5. P. 054306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.108.054306>
12. *De Nicola R., Di Stefano L., Inverso O., Valiani S.* Intuitive Modelling and Formal Analysis of Collective Behaviour in Foraging Ants // *Proc. 21st International Conference Computational Methods in Systems Biology (CMSB 2023).* P. 44–61.
13. *Lorenz K.* On Aggression. London: Routledge, 2002.
14. *Кудрявцева Н.Н., Маркель А.Л., Орлов Ю.Л.* Агрессивное поведение: генетико-физиологические механизмы // *Вавилов. журн. генетики и селекции.* 2014. Вып. 18. № 4/3. С. 1133–1155.

15. *Nordell S.E., Valone T.J.* Habitat Selection, Territoriality, and Aggression / Animal Behaviour, Chapter 11, Oxford University Press. 2023.
16. *Карпова И.П., Карпов В.Э.* Агрессия в мире аниматов, или О некоторых механизмах управления агрессивным поведением в групповой робототехнике // Управление большими системами. 2018. Вып. 76. С. 173–218. <https://doi.org/10.25728/ubs.2018.76.6>
17. *Цетлин М.Л.* Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969.
18. *Карпов В.Э.* Модели социального поведения в групповой робототехнике // Управление большими системами. 2016. Вып. 59. С. 165–232.
19. *Захаров А.А.* Дороги муравьев (вопросы терминологии) // «Муравьи и защита леса»: Материалы VI Всесоюзного мирмекологического симпозиума. Тарту. 1979. С. 152–155.
20. *Новгородова Т.А.* Использование углубленных в почву дорог муравьями группы *Formica rufa* (Hymenoptera, Formicidae) // Евроазиат. энтомолог. журн. 2011. Вып. 10. № 3. С. 401–405.
21. *Захаров А.А.* Муравей. Семья. Колония. М.: Фитон XXI, 2018.
22. *Осипов Г.С., Панов А.И., Чудова Н.В., Кузнецова Ю.М.* Знаковая картина мира субъекта поведения. М.: Физматлит, 2018.
23. *Bochynek T., Burd M., Kleineidam C., Meyer B.* Infrastructure construction without information exchange: the trail clearing mechanism in *Atta* leafcutter ants // Proc. R. Soc. B Biol. Sci. Jan. 2019. V. 286. No. 1895. <https://doi.org/10.1098/rspb.2018.2539>
24. *Bouchebti S., Travaglini R.V., Forti L.C., Fourcassié V.* Dynamics of physical trail construction and of trail usage in the leaf-cutting ant *Atta laevigata* // Ethol. Ecol. Evol. 2019. V. 31. No. 2. P. 105–120. <https://doi.org/10.1080/03949370.2018.1503197>
25. *Rockwood L.L., Hubbell S.P.* Host-plant selection, diet diversity, and optimal foraging in a tropical leafcutting ant // Oecologia. 1987. V. 74. P. 55–61.
26. *Howard J.J.* Costs of trail construction and maintenance in the leaf-cutting ant *Atta columbica* // Behav. Ecol. Sociobiol. 2001. V. 49. No. 5. P. 348–356. <https://doi.org/10.1007/s002650000314>
27. *Viles H.A., Goudie A.S., Goudie A.M.* Ants as geomorphological agents: A global assessment // Earth-Science Rev. Feb. 2021. V. 213. P. 103469. <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2020.103469>
28. *Wehner R., Hoinville T., Cruse H.* On the ‘cognitive map debate’ in insect navigation // Stud. Hist. Philos. Sci. 2023. V. 102. No. 8. P. 87–89. <https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2023.08.004>
29. *Dall’Osto D., Fischer T., Milford M.* Fast and Robust Bio-inspired Teach and Repeat Navigation // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2021. P. 500–507. <https://doi.org/10.1109/IROS51168.2021.9636334>
30. *Dupeyroux J., Viollet S., Serres J.R.* An ant-inspired celestial compass applied to autonomous outdoor robot navigation // Rob. Auton. Syst. 2019. V. 117. P. 40–56. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2019.04.007>
31. *Длусский Г.М.* Поведенческие механизмы регуляции фуражировки у муравьев // «Муравьи и защита леса»: Мат. VI Всесоюзного мирмекологического симпозиума. Тарту. 1979. С. 147–151.

32. *Alma A.M., Farji-Brener A.G., Elizalde L.* When and how obstacle size and the number of foragers affect clearing a foraging trail in leaf-cutting ants // *Insectes Soc.* 2019. V. 66. No. 2. P. 305–316. <https://doi.org/10.1007/s00040-018-00680-x>
33. *Карнов В.Э., Ровбо М.А., Овсянникова Е.Е.* Система моделирования поведения групп робототехнических агентов с элементами социальной организации Кворум // *Программные продукты и системы.* 2018. Вып. 31. № 3. С. 581–590. <https://doi.org/10.15827/0236-235X.123.581-590>
34. *Malyshev A., Burgov E.* Revisiting Parameters of Bioinspired Behavior Models in Group Foraging Modeling // *SPIIRAS Proc.* Feb. 2020. V. 19. No. 1. P. 79–103. <https://doi.org/10.15622/sp.2020.19.1.3>
35. *Карнова И.П.* Организация маршрута анимата на основе визуальных ориентиров и распознавания сцен // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2021. Вып. 22. № 10. С. 537–546. <https://doi.org/10.17587/mau.22.537-546>
36. *Карнова И.П.* Об одном биоинспирированном подходе к ориентации роботов, или настоящий «муравьиный» алгоритм // *Управление большими системами.* 2022. Вып. 96. С. 69–117. <https://doi.org/10.25728/ubs.2022.96.5>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галляевым.

Поступила в редакцию 30.11.2023

После доработки 18.04.2024

Принята к публикации 30.04.2024

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Каменецкий В.А.** Частотный критерий квадратичной устойчивости дискретных систем с переключениями между тремя линейными подсистемами 3

Нелинейные системы

- Жирабок А.Н., Филаретов В.Ф., Зуев А.В., Шумский А.Е.** Метод обеспечения отказоустойчивости систем управления с полной или частичной развязкой от дефектов 15
- Пестерев А.В., Морозов Ю.В.** Стабилизация интегратора третьего порядка с фазовым ограничением 32
- Туницкий Д.В.** Об оптимальном управлении сбором возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли 42

Стохастические системы

- Хрусталёв М.М.**, Румянцев Д.С. Синтез уравнений Ито для формирующего фильтра с заданным спектром 61

Управление в социально-экономических системах

- Гераськин М.И.** Объемные предположительные вариации в играх олигополии при различных функциях спроса и издержек и многоуровневом лидерстве . . . 73
- Калачев В.Ю., Угольницкий Г.А., Усов А.Б.** Динамические кооперативно-игровые модели государственного регулирования инноваций в университетах 91

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Карпова И.П., Карпов В.Э.** «Подводные камни» биоинспирированных моделей на примере муравьиных дорог 113

C O N T E N T S

Linear Systems

- Kamenetskiy V.A.** The Frequency-Domain Criterion for Quadratic Stability of Discrete Systems with Switching between Three Linear Subsystems..... 3

Nonlinear Systems

- Zhirabok A.N., Filaretov V.F., Zuev A.V., Shumsky A.E.** Method of Control System Fault Tolerance Based on Full or Partial Fault Decoupling..... 15
- Pesterev A.V., Morozov Yu.V.** Stabilization of a Chain of Three Integrators Subject to a Phase Constraint..... 32
- Tunitsky D.V.** On Optimal Control of Harvesting of a Renewable Resource Distributed on the Earth Surface..... 42

Stochastic Systems

- Khrustalev M.M.**, **Rumyantsev D.S.** Synthesis of Ito's Equations for a Shaping Filter with a Given Spectrum..... 61

Control in Social Economic Systems

- Geraskin M.I.** Quantitiev Conjectural Variations in Oligopoly Games with Different Demand and Cost Functions and Multi-Level Leadership..... 73
- Kalachev V.Yu., Ougolnitsky G.A., Usov A.B.** Dynamic Cooperative Game Models of State Regulation of Innovations in Universities..... 91

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Karpova I.P., Karpov V.E.** "Pitfalls" of Bio-Inspired Models on the Example of ant Trails..... 113