



А ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

9

сентябрь

Москва

2024

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,
Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В.,
Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В.,
Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,
Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартыхина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2024 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНЫЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР ДЛЯ КОМПЕНСАЦИИ ПО ВЫХОДУ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача компенсации по выходу ограниченных сигнальных возмущений, действующих на минимально-фазовую линейную систему с неизвестными параметрами. Разработан адаптивный вспомогательный контур, который не требует знания модели возмущения и позволяет: а) разделить процессы оценивания параметрических и сигнальных возмущений, б) с любой заданной точностью оценить и скомпенсировать сигнальное возмущение при выполнении условий параметрической идентифицируемости. Сепарация процессов оценивания двух возмущений различной природы достигнута с помощью дополнения метода вспомогательного контура А.М. Цыкунова законом идентификации неизвестных параметров, построенном на базе метода инструментальных переменных и процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (ДРСР). Полученная система компенсации сигнальных возмущений имеет определенный потенциал к использованию совместно с общепромышленными ПИ-, ПИД-регуляторами. Теоретические выводы, сделанные в работе, проиллюстрированы с помощью математического моделирования.

Ключевые слова: возмущение, оценивание, вспомогательный контур, идентификация, инструментальные переменные, сходимость, перепараметризация, динамическое расширение и смешивание.

DOI: 10.31857/S0005231024090014, **EDN:** ZRDUQR

1. Введение

Проблема компенсации внешних возмущений многие годы находится в центре внимания специалистов по радиотехнике, электротехнике, теории управления и т.д. К сегодняшнему дню предложено два основных принципа компенсации – косвенный и прямой (непосредственный).

При косвенной компенсации характеристический полином замкнутой системы выбирается так, чтобы как можно сильнее уменьшить вызванную возмущением составляющую вынужденного движения системы по сравнению с компонентой, связанной с задающим воздействием. Однако путем выбора характеристического полинома замкнутой системы оказывается невозможно с

одинаковым качеством компенсировать возмущения с существенно различными спектрами, и возникают задачи выбора характеристического полинома замкнутой системы по априорным данным о спектре возмущения или оптимальным образом (например, с точки зрения $\mathcal{H}_2$ -, $\mathcal{H}_\infty$ -норм, метрики инвариантного эллипсоида и т.д.). В этом смысле необходимо признать ограниченность возможностей классической обратной связи.

Естественным ответом на этот вызов стало развитие принципа непосредственной компенсации, в соответствии с которым сигнал управления декомпозируется на две составляющие. Первая предназначена для коррекции характеристического полинома замкнутой системы, а вторая должна равняться возмущению с противоположным знаком. Если возмущение согласовано с сигналом управления и измеряемо, то такой подход позволяет добиться полной компенсации его влияния на регулируемую переменную. На первый взгляд, условие согласования выглядит ограничительным, поскольку на практике точки приложения возмущения и управления часто отличаются. Однако на самом деле, следуя принципу эквивалентного возмущения [1] и наложив на исходное возмущение некоторые достаточно слабые условия дифференцируемости, условие согласования всегда возможно удовлетворить. Например, рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= a_1 y + b_1 x + b_1 f, \\ \dot{x} &= a_2 x + b_2 u,\end{aligned}$$

тогда, если возмущение f дифференцируемо, применение принципа эквивалентного возмущения позволяет получить систему с согласованным возмущением:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= a_1 y + b_1 \zeta, \\ \dot{\zeta} &= a_2 x + b_2 u + \dot{f} \pm a_2 f = a_2 \zeta + b_2 \underbrace{\left[u + b_2^{-1} (\dot{f} - a_2 f) \right]}_{f_{eq}},\end{aligned}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – некоторые числа, y – измеряемый выход, x – неизмеряемое состояние, $\zeta = x + f$ – фиктивное состояние, u – управление, f – исходное возмущение, f_{eq} – эквивалентное возмущение.

Далее всюду будем рассуждать исключительно о согласованных возмущениях, предполагая, что принцип эквивалентного возмущения уже реализован.

Гораздо более ограничительным является требование доступности возмущения для измерения. Для преодоления этой проблемы в литературе предложены различные наблюдатели возмущений, позволяющие по измерениям управления и выхода системы восстановить значение возмущения с некоторой (обычно с любой заданной) точностью. Не претендуя на полноту обзора, рассмотрим некоторые из существующих наблюдателей возмущений. Для ознакомления со всем многообразием методов рекомендуем читателю ознакомиться с обзорами [2–5].

Существующие наблюдатели возмущений могут быть классифицированы следующим образом:

- 1) методы, требующие знания параметров системы, модели и параметров возмущения (расширенный наблюдатель Люенбергера) [6],
- 2) методы, требующие знания параметров системы и наличия модели возмущения, допускающей параметрическую неопределенность [7–11],
- 3) методы, требующие знания модели возмущения, но не требующие знания параметров системы и возмущения [12–16],
- 4) методы, требующие знания только параметров системы [1, 17–20],
- 5*) методы, не требующие знания модели возмущения и параметров системы [21–26].

Предметом интереса данной работы являются алгоритмы, относящиеся к группе 5*, поскольку по сравнению с остальными решениями они требуют минимального объема априорной информации о системе и возмущении. Детальный анализ алгоритмов, относящихся к этой группе, показывает, что, на самом деле, в литературе не существует наблюдателей, позволяющих оценить сигнальное возмущение, если параметры системы неизвестны. Это объясняется отсутствием возможности сепарации существующими алгоритмами параметрического и сигнального возмущения. Вместо этого алгоритмы из группы 5* выполняют оценку обобщенного возмущения, состоящего из их суммы. Проиллюстрируем эти рассуждения на примере.

Рассмотрим систему первого порядка:

$$\dot{x} = u + \theta^\top \varphi(x) + f,$$

где $\theta^\top \varphi(x)$ – параметрическое возмущение, f – сигнальное возмущение.

Если параметры θ известны, а $\dot{f}$ ограничена, то простой наблюдатель ($s := \frac{d}{dt}$):

$$\hat{f} = \frac{s}{ls+1} [x] - \theta^\top \frac{1}{ls+1} [\varphi(x)] - \frac{1}{ls+1} [u]$$

согласно результатам [26, с. 196; 27] позволяет с любой точностью оценить и компенсировать сигнальное возмущение f .

Если параметры θ неизвестны, то можно оценить только обобщенное возмущение:

$$\frac{s}{ls+1} [x] - \frac{1}{ls+1} [u] = \frac{1}{ls+1} [f] + \theta^\top \frac{1}{ls+1} [\varphi(x)].$$

Для выделения сигнального возмущения из обобщенного необходимо получение и использование оценок параметров θ :

$$\hat{f} = \frac{s}{ls+1} [x] - \frac{1}{ls+1} [u] - \hat{\theta}^\top \frac{1}{ls+1} [\varphi(x)] = \frac{1}{ls+1} [f] - \tilde{\theta}^\top \frac{1}{ls+1} [\varphi(x)],$$

откуда следует, что разделение двух типов возмущений возможно, если и только если параметрическая ошибка $\tilde{\theta}$ асимптотически сходится к нулю. Однако существующие законы параметрической идентификации при наличии возмущения обеспечивают только ограниченность параметрической ошибки [28, с. 556], что не позволяет в полном объеме реализовать сепарацию, даже дополнив наблюдатель возмущений известными алгоритмами параметрической идентификации. Недостаточно удачные попытки выполнить сепарабельную оценку сигнальной и параметрической неопределенности могут быть обнаружены в работах [24, 29, 30].

Рассмотренная проблема разделимости носит фундаментальный характер и не зависит от конкретного типа применяемого наблюдателя возмущений. Поэтому существующие наблюдатели выполняют оценку и компенсацию обобщенного возмущения, состоящего из суммы параметрического и сигнального. Такой подход безусловно заслуживает право на существование и уже давно положительно зарекомендовал себя по сравнению со стандартными ПИ- и ПИД-регуляторами [22]. Однако, во-первых, в таких системах управления нарушается синергетический принцип минимального действия [31], так как вся динамика системы компенсируется без особых размышлений о ее «пользе» или «вреде» для достижения цели регулирования, во-вторых, в некоторых практических задачах базовая стабилизирующая составляющая управления (например, ПИ- или ПИД-регулятор) уже выбрана робастными методами с учетом наличия параметрической неопределенности ($\theta^T \varphi(x)$ в рассмотренном примере), а необходимо выполнить оценку и компенсацию только сигнального возмущения (f в рассмотренном примере). Поэтому актуальной является задача синтеза наблюдателя сигнального возмущения при наличии параметрического.

В этой работе рассматривается задача оценки и компенсации по выходу ограниченных сигнальных возмущений, действующих на минимально-фазовую линейную систему с неизвестными параметрами. Решение этой задачи предлагается получить в рамках методологии непрямого адаптивного управления, в соответствии с которой процедура синтеза управления декомпозируется на два этапа. На первом этапе вводится закон управления, обеспечивающий достижение цели регулирования при известных параметрах системы (в этой работе для синтеза такого закона предлагается воспользоваться методом вспомогательного контура А.М. Цыкунова [26, с. 196]). На втором этапе строится закон идентификации и осуществляется замена всех неизвестных параметров закона управления, выбранного на первом этапе, на их динамические оценки. Ключевым структурным элементом такой системы адаптивного управления является закон идентификации, который должен в замкнутом контуре управления гарантировать асимптотическую сходимость оценок неизвестных параметров к истинным значениям при действии сигнального возмущения и выполнении как можно более слабых требований к возбуждению регрессора. В этой работе для решения задачи онлайн идентификации предлагается воспользоваться недавно предложенным алгоритмом [32], по-

строенным на базе метода инструментальных переменных [33] и процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (ДРСР) [34]. Условиями сходимости процесса параметрической идентификации при использовании такого закона являются:

- знание регулятора, стабилизирующего систему при наличии сигнальных и параметрических возмущений,
- ограниченность сигнала компенсации возмущения (например, с помощью $\text{sat}\{.\}$ функции),
- наличие в задающем воздействии не менее n различных частот (где n – размерность системы),
- отсутствие пересечений спектров задающего воздействия и возмущения.

Показано, что при выполнении этих условий обеспечивается сходимость к нулю параметрической ошибки, несмотря на наличие сигнальной неопределенности, а предложенная система адаптивной компенсации сигнального возмущения гарантирует его асимптотическую оценку и компенсацию. В рамках математического моделирования показан потенциал использования предлагаемой системы совместно с общепромышленными ПИ-, ПИД-регуляторами, проиллюстрировано выполнение условий параметрической сходимости при использовании типовых задающих воздействий.

2. Постановка задачи

Рассмотрим возмущенную линейную динамическую систему

$$(2.1) \quad \begin{aligned} y(t) &= \frac{Z(\theta, s)}{R(\theta, s)} [u(t) + f(t)], \\ Z(\theta, s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0, \\ R(\theta, s) &= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \end{aligned}$$

где $y(t)$ – измеряемый выход, $u(t)$ – формируемое управление, $f(t)$ – неизвестное ограниченное возмущение, $\theta \in D_\theta \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ – вектор неизвестных параметров разомкнутой системы, $R(\theta, s)$, $Z(\theta, s)$ – многочлены порядков n и $m \leq n-1$ соответственно, $s[.] := \frac{d}{dt}[.]$ – оператор дифференцирования.

Будем считать, что управление $u(t)$ формируется следующим образом:

$$(2.2) \quad u(t) = u_b(t) + u_c(t),$$

$$u_b(t) = \frac{P_y(\kappa, s)}{Q_y(\kappa, s)} [y(t)] + \frac{P_r(\kappa, s)}{Q_r(\kappa, s)} [r(t)] = \frac{P_y(\kappa, s)}{Q_y(\kappa, s)} [y(t)] + r_f(t),$$

где $u_b(t)$ – стабилизирующая составляющая управления, $u_c(t)$ – компонента управления, предназначенная для компенсации возмущения $f(t)$, $\kappa \in D_\kappa \subset \mathbb{R}^{n_\kappa}$ – известные постоянные параметры закона управления, $r(t)$ – задающее воздействие, $m_y \leq n_y$ и $m_r \leq n_r$ – порядки пар многочленов $P_y(\kappa, s)$, $Q_y(\kappa, s)$ и $P_r(\kappa, s)$, $Q_r(\kappa, s)$ соответственно.

Для строгой формальной постановки задачи вместе с системой (2.1) рассмотрим ее параметризацию в форме линейного регрессионного уравнения:

$$(2.3) \quad z(t) = \varphi^\top(t) \theta + w(t),$$

где

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{s^n}{\Lambda(s)} y(t), \quad \varphi(t) = \left[-\frac{\alpha_{n-1}^\top(s)}{\Lambda(s)} [y(t)] \quad \frac{\alpha_m^\top(s)}{\Lambda(s)} [u(t)] \right]^\top, \\ w(t) &= [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_0] \frac{\alpha_m(s)}{\Lambda(s)} [f(t)], \\ \alpha_{n-1}^\top(s) &= [s^{n-1} \quad \dots \quad s \quad 1], \quad \alpha_m^\top(s) = [s^m \quad \dots \quad s \quad 1], \end{aligned}$$

$\varphi(t) \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ – измеряемый регрессор, $z(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый регрессанд, $\Lambda(s)$ – устойчивый полином порядка n .

Относительно стабилизирующей компоненты управления и возмущения принимается следующее

Допущение 1. Передаточная функция замкнутой системы $(\theta_{cl} : \mathbb{R}^{n+m+1} \times \mathbb{R}^{n_\kappa} \mapsto \mathbb{R}^{n_{cl}+m_{cl}+1})$ – неизвестные параметры замкнутой системы):

$$(2.4) \quad W_{cl}(\theta_{cl}, s) [\cdot] = \frac{Z(\theta, s) Q_y(\kappa, s)}{[Q_y(\kappa, s) R(\theta, s) - Z(\theta, s) P_y(\kappa, s)]} [\cdot] = \frac{Z_{cl}(\theta_{cl}, s)}{R_{cl}(\theta_{cl}, s)} [\cdot]$$

имеет гурвицевы многочлены $Z_{cl}(\theta_{cl}, s)$ и $R_{cl}(\theta_{cl}, s)$ при фиксированных κ из D_κ и всех значениях θ из D_θ .

Допущение 2. Существует и известна функция $\mu : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_>$ такая, что для

$$\lambda(t) = \frac{-1}{m_0 \mu^{n+1}(t)} \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [f(t)] + \sum_{i=1}^n m_i \mu^{n-(i-1)}(t) \frac{d^i}{dt^i} [f(t)] \right)$$

при любых числах $m_i, i = 0, \dots, n$ верно $\mu \lambda \in L_\infty$ и $\lambda \in L_p \cap L_\infty$ для $p \in [1, \infty)$.

Допущение 3. Инструментальная переменная $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$, заданная следующим образом (где $\theta_{iv} \in D_\theta \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ – известные параметры инструментальной переменной):

$$\begin{aligned} (2.5) \quad \zeta(t) &= \left[-\frac{\alpha_{n-1}^\top(s)}{\Lambda(s)} [y_{iv}(t)] \quad \frac{\alpha_m^\top(s)}{\Lambda(s)} [u_{iv}(t)] \right]^\top, \\ y_{iv}(t) &= \frac{Z(\theta_{iv}, s)}{R(\theta_{iv}, s)} [u_{iv}(t)], \\ u_{iv}(t) &= \frac{P_y(\kappa, s)}{Q_y(\kappa, s)} [y_{iv}(t)] + \frac{P_r(\kappa, s)}{Q_r(\kappa, s)} [r(t)], \end{aligned}$$

и фильтрованное возмущение $w(t)$ независимы, т.е.:

$$(2.6) \quad \forall t \geq t_0 \left| \int_{t_0}^t \zeta_i(s) w(s) ds \right| \leq c < \infty \quad \forall i = 1, \dots, n + m + 1.$$

На основании уравнения замкнутого контура (2.4) определим желаемую динамику системы:

$$(2.7) \quad y_{ref}(t) = W_{cl}(\theta_{cl}, s)[r_f(t)].$$

Необходимо без использования производных выхода $y(t)$ сформировать сигнал компенсации $u_c(t)$ так, что выполняется предельное равенство

$$(2.8) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_{ref}(t)| = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0.$$

Таким образом, в работе решается задача оценивания и компенсации неизвестного возмущения, действующего на минимально-фазовую систему с неизвестными параметрами.

Замечание 1. В практических задачах почти всегда известен стабилизирующий регулятор $u_b(t)$, гарантирующий гурвицевость характеристического полинома замкнутой системы $R_{cl}(\theta_{cl}, s)$ (например, в ряде ситуаций он может быть подобран эмпирически). Гурвицевость $Z_{cl}(\theta_{cl}, s)$ требует минимальной фазовости объекта управления (2.1).

Замечание 2. Заметим, что выход эталонной модели (2.4) недоступен для измерения, а сама эталонная модель для каждого конкретного вектора параметров системы θ из D_θ задает различное качество управления. Эти обстоятельства существенно отличают решаемую в работе проблему от классической задачи адаптивного управления с заданной эталонной моделью, где эталонная модель является одинаковой для всех θ .

Замечание 3. Допущение 2 ограничивает класс допустимых внешних возмущений. В практических задачах почти всегда найдется $p \in [1, \infty)$ такое, что $\frac{d^i}{dt^i} f(t) \in L_p$ для всех $i = 1, \dots, n + 1$, и для удовлетворения этого допущения достаточно выбрать $\mu(t) = \text{const} = \mu > 0$. Если $\frac{d^i}{dt^i} f(t) \notin L_p$ для всех $p \in [1, \infty)$, но $\sup_t \left| \frac{d^i}{dt^i} f(t) \right| < \infty$, то достаточно выбрать $\mu(t) = \mu_0 t + \mu_1$ для произвольных $\mu_0 > 0, \mu_1 > 0$. К сожалению, для возмущений $f(t)$ с неограниченными производными для выбора $\mu(t)$ требуются дополнительные априорные сведения.

Замечание 4. В допущении 3 приняты выполненными необходимые условия асимптотической сходимости закона идентификации [32]. В стационарном случае неравенство (2.6) выполняется, если спектры $r(t)$ и $f(t)$ не пересекаются.

3. Основной результат

Описание предлагаемого метода решения задачи (2.8) декомпозировано на три части. В первой части фильтрованный аналог возмущения параметризуется в виде функции от управления, выхода и некоторых, вычисляемых по θ , неизвестных параметров. Во второй части конструируется закон идентификации неизвестных параметров из параметризации возмущения. В третьей части на основании полученной параметризации фильтрованного возмущения и законов идентификации вводится адаптивный сигнал компенсации возмущения и доказывается выполнение поставленной цели (2.8).

3.1. Параметризация возмущения

Временно предположим, что параметры θ известны, и, следуя [26], введем в рассмотрение вспомогательную модель:

$$(3.1) \quad \hat{y}^*(t) = \frac{Z(\theta, s)}{R(\Theta, s)} [u(t)],$$

где $\Theta \in \mathbb{R}^n$ – известные параметры вспомогательной модели, такие что система (3.1) устойчива.

В силу уравнений (3.1) и (2.1) ошибку предсказания $\varepsilon^*(t) = y(t) - \hat{y}^*(t)$ возможно записать в следующем виде:

$$(3.2) \quad \varepsilon^*(t) = \frac{Z(\theta, s)}{R(\Theta, s)} [f(t)] + \frac{R(\Theta, s) - R(\theta, s)}{R(\Theta, s)} [y(t)].$$

Тогда, если $n - m$ производных сигналов $\varepsilon^*(t)$ и $y(t)$ измеряемы, а многочлен $Z(\theta, s)$ гурвицев, выбор

$$(3.3) \quad u_c(t) = -\frac{R(\Theta, s)}{Z(\theta, s)} [\varepsilon^*(t)] + \frac{R(\Theta, s) - R(\theta, s)}{Z(\theta, s)} [y(t)] = -f(t)$$

обеспечивает полную компенсацию возмущения:

$$(3.4) \quad y(t) = \varepsilon^*(t) + \hat{y}^*(t) = \frac{Z(\theta, s)}{R(\theta, s)} [u_b(t)] = W_{cl}(\theta_{cl}, s) [r_f(t)] = y_{ref}(t).$$

Возмущение и сигнал компенсации (3.3) могут быть представлены в следующей эквивалентной форме записи:

$$(3.5a) \quad f(t) = -u_c(t) = \psi_a^\top(\Theta) \alpha(s) [\varepsilon_f(t)] + \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \alpha(s) [y_f(t)],$$

$$(3.5b) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_\varepsilon(t) = A_b \xi_\varepsilon(t) + \rho e_m \varepsilon^*(t), \\ \varepsilon_f(t) = e_1^\top \xi_\varepsilon(t), \text{ если } m \geq 1, \\ \varepsilon_f(t) = \rho \varepsilon^*(t), \text{ если } m = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi}_y(t) = A_b \xi_y(t) + \rho e_m y(t), \\ y_f(t) = e_1^\top \xi_y(t), \text{ если } m \geq 1, \\ y_f(t) = \rho y(t), \text{ если } m = 0, \end{cases}$$

$$(3.5c) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}^*(t) = A_0 \hat{x}^*(t) - \Theta \hat{y}^*(t) + \theta_b u(t), \\ \hat{y}^*(t) = e_1^\top \hat{x}^*(t), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A_b &= A_0 - \psi_b(\theta) e_1^\top, \quad \rho = \frac{1}{b_m} = \frac{1}{e_1^\top \theta_b}, \\ \psi_b(\theta) &= \left[\frac{b_{m-1}}{b_m} \quad \frac{b_{m-2}}{b_m} \quad \dots \quad \frac{b_0}{b_m} \right]^\top = \rho \mathcal{L}_\psi \theta_b, \\ \psi_a(\theta_a) &= [\mathcal{I}_n \theta_a \quad 1]^\top, \\ \theta_a &= [a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad a_0]^\top = \mathcal{L}_a \theta, \\ \theta_b &= [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_0]^\top = \mathcal{L}_b \theta, \\ \mathcal{L}_a &= [I_{n \times n} \quad 0_{n \times (m+1)}], \quad \mathcal{L}_b = [0_{(m+1) \times n} \quad I_{(m+1) \times (m+1)}], \\ \mathcal{L}_\psi &= [0_{m \times 1} \quad I_{m \times m}], \quad \alpha(s) = [1 \quad \dots \quad s^{n-1} \quad s^n], \end{aligned}$$

а $\mathcal{I}_n$ – матрица, заполненная нулями и содержащая единицы на побочной диагонали, e_i – вектор соответствующей размерности, заполненный нулями и содержащий единицу только на i -й позиции, A_0 – верхнетреугольная матрица соответствующей размерности, θ_a, θ_b – составляющие вектора $\theta = [\theta_a^\top \quad \theta_b^\top]^\top$ и одновременно параметры многочленов $R(\theta, s)$ и $Z(\theta, s)$ соответственно.

По постановке задачи параметры θ неизвестны и производные сигналов $\varepsilon^*(t)$ и $y(t)$ недоступны для прямого измерения, а значит, сигнал компенсации (3.3), (3.5а) нереализуем. От необходимости знания производных упомянутых сигналов возможно избавиться путем построения наблюдателей фильтрованных производных.

Утверждение 1. Определим: 1) наблюдатели i -й фильтрованной производной сигналов $y_f(t)$ и $\varepsilon_f(t)$

$$\begin{cases} \dot{H}_i^\varepsilon(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) H_i^\varepsilon(t) + e_{n+1} (K_0(t) \varepsilon_f(t) - v_\varepsilon(t)), \\ h_i^\varepsilon(t) = e_{i+1}^\top H_i^\varepsilon(t), \quad v_\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^i v_j^\varepsilon(t, M_0, K_0), \end{cases} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

$$\begin{cases} \dot{H}_i^y(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) H_i^y(t) + e_{n+1} (K_0(t) y_f(t) - v_y(t)), \\ h_i^y(t) = e_{i+1}^\top H_i^y(t), \quad v_y(t) = \sum_{j=0}^i v_j^y(t, M_0, K_0), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} M_0^\top(t) &= [-m_0 \mu^{n+1}(t) \quad \dots \quad -m_{n-1} \mu^2(t) \quad -m_n \mu(t)], \\ G_0 &= \begin{bmatrix} 0_{n+1} & I_{n \times n} \\ & 0_{1 \times n} \end{bmatrix}, \quad K_0(t) = m_0 \mu^{n+1}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_0^\varepsilon(t, M_0, K_0) = 0, \\ v_1^\varepsilon(t, M_0, K_0) = s^{-1} [s [M_0^\top(t)] H_i^\varepsilon(t)] + s^{-1} [s [K_0(t)] \varepsilon_f(t)], \\ \vdots \\ v_j^\varepsilon(t, M_0, K_0) = v_{j-1}^\varepsilon(t, M_0, K_0) - s^{-1} [v_{j-1}^\varepsilon(t, \dot{M}_0, \dot{K}_0)], \quad j = 2, \dots, i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0^y(t, M_0, K_0) = 0, \\ v_1^y(t, M_0, K_0) = s^{-1} [s [M_0^\top(t)] H_i^y(t)] + s^{-1} [s [K_0(t)] y_f(t)], \\ \vdots \\ v_j^y(t, M_0, K_0) = v_{j-1}^y(t, M_0, K_0) - s^{-1} [v_{j-1}^y(t, \dot{M}_0, \dot{K}_0)], \quad j = 2, \dots, i, \end{cases}$$

а числа $m_0, m_1, \dots, m_n$ являются коэффициентами устойчивого полинома;
2) фильтрованное возмущение:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} f_f(t) &:= \psi_a^\top(\Theta) h_\varepsilon(t) + \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) h_y(t), \\ h_y(t) &= [h_0^y(t) \quad \dots \quad h_i^y(t) \quad \dots \quad h_n^y(t)]^\top, \\ h_\varepsilon(t) &= [h_0^\varepsilon(t) \quad \dots \quad h_i^\varepsilon(t) \quad \dots \quad h_n^\varepsilon(t)]^\top. \end{aligned}$$

Тогда если выполнены допущения 1 и 2, то:

- 1) ошибка $\tilde{f}(t) = f_f(t) - f(t)$ асимптотически сходится к нулю $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = 0$,
- 2) $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$ для $p \in [1, \infty)$.

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Заметим, что в стационарном случае $\mu(t) = \text{const}$ предложенные в утверждении 1 наблюдатели фильтрованных производных редуцируются до реализуемых дифференциаторов. Согласно утверждению 1, если параметры θ известны, то вместо истинного возмущения $f(t)$ исключительно по измеряемым сигналам возможно вычислить некоторое фильтрованное возмущение $f_f(t)$, которое при выполнении допущений 1 и 2 асимптотически сходится к истинному. В этом случае выбор

$$(3.7) \quad u_c(t) = -f_f(t)$$

позволяет получить следующий результат.

Теорема 1. Если параметры θ известны и выполнены допущения 1 и 2, то управление (2.2) + (3.7) обеспечивает $\tilde{y} \in L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0$.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Необходимость знания параметров θ устраним путем применения разработанного в [32] закона идентификации и синтеза адаптивной вспомогательной модели (3.1) и адаптивной версии сигнала компенсации (3.7).

3.2. Идентификация неизвестных параметров

Прежде всего для реализации адаптивного сигнала компенсации требуется получить оценки $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\rho}(t)$, $\hat{\psi}_b(t)$ неизвестных параметров системы и параметризации возмущения (3.6). Отметим, что идентификация параметров $\psi_a(\theta_a)$ не требуется, поскольку функция $\psi_a: \mathbb{R}^{n+m+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+m+2}$ очевидно удовлетворяет условию Липшица, и, следовательно, оценка $\hat{\psi}_a(t)$ может быть вычислена прямой подстановкой $\hat{\psi}_a(t) := \psi_a(\hat{\theta}_a)$, где $\hat{\theta}_a(t) = \mathcal{L}_a \hat{\theta}(t)$. Чтобы действие адаптивного закона компенсации возмущения, формируемого на базе динамических оценок, было асимптотически эквивалентно действию идеального сигнала компенсации (3.1), (3.7), необходимо обеспечить, по крайней мере, асимптотическую сходимость к нулю параметрических ошибок. Для этого будем использовать закон идентификации, разработанный в [32].

С использованием инструментальной переменной (2.5) выполним расширение регрессионного уравнения (2.3) с помощью усредняющего фильтра и фильтра типа скользящее среднее:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta}(t) &= \zeta_{iv}(t) z(t) - \zeta_{iv}(t-T) z(t-T), \quad \vartheta(t_0) = 0_{n+m+1}, \\ \dot{\psi}(t) &= \zeta_{iv}(t) \varphi^\top(t) - \zeta_{iv}(t-T) \varphi^\top(t-T), \quad \psi(t_0) = 0_{(n+m+1) \times (n+m+1)}, \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \dot{Y}(t) &= -\frac{1}{F(t)} \dot{F}(t) (Y(t) - \vartheta(t)), \quad Y(t_0) = 0_{n+m+1}, \\ \dot{\Phi}(t) &= -\frac{1}{F(t)} \dot{F}(t) (\Phi(t) - \psi(t)), \quad \Phi(t_0) = 0_{(n+m+1) \times (n+m+1)}, \\ \dot{F}(t) &= pt^{p-1}, \quad F(t_0) = F_0 > 0, \end{aligned}$$

где $T > 0$ – ширина окна, $p \geq 1$, $F_0 \geq t_0^p$ – параметры фильтрации.

Применение фильтраций (3.8) и (3.9) при $\theta = \text{const}$ позволяет получить следующее регрессионное уравнение [32]:

$$(3.10) \quad Y(t) = \Phi(t)\theta + W(t),$$

где возмущение $W(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \dot{W}(t) &= -\frac{1}{F(t)} \dot{F}(t) (W(t) - \varepsilon(t)), \quad W(t_0) = 0_{n+m+1}, \\ \dot{\varepsilon}(t) &= \zeta_{iv}(t) w(t) - \zeta_{iv}(t-T) w(t-T), \quad \varepsilon(t_0) = 0_{n+m+1}. \end{aligned}$$

Умножив (3.10) на $\text{adj}\{\Phi(t)\}$, имеем набор скалярных регрессионных уравнений:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}(t) &= \Delta(t)\theta + \mathcal{W}(t), \\ \mathcal{Y}(t) &:= \text{adj}\{\Phi(t)\}Y(t), \quad \Delta(t) := \det\{\Phi(t)\}, \quad \mathcal{W}(t) := \text{adj}\{\Phi(t)\}W(t). \end{aligned}$$

По регрессионному уравнению (3.10) методом градиентного спуска могут быть сформированы оценки параметров θ . Однако для реализации алгоритма компенсации (3.1), (3.7) также требуется получить оценки параметров

$\psi_b(\theta)$ и ρ . Заметим, что в силу равенства $\psi_b(\theta) = \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta$ для получения $\hat{\psi}_b(t)$ достаточно иметь оценки параметров ρ и θ . Величина $\hat{\theta}(t)$ уже может быть получена по (3.12), а значит, остается получить аналогичное регрессионное уравнение относительно ρ .

Умножив (3.12) на $e_1^\top \mathcal{L}_b$, имеем

$$\begin{aligned} e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t) &= \Delta(t) e_1^\top \mathcal{L}_b \theta + e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{W}(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t) = \Delta(t) b_m + e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{W}(t), \end{aligned}$$

откуда умножением на ρ получаем искомое регрессионное уравнение

$$\begin{aligned} (3.13) \quad \mathcal{Y}_\rho(t) &= \mathcal{M}_\rho(t) \rho + \mathcal{W}_\rho(t), \\ \mathcal{Y}_\rho(t) &:= \Delta(t), \quad \mathcal{M}_\rho(t) := e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t), \quad \mathcal{W}_\rho(t) = -\rho e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{W}(t). \end{aligned}$$

На основании регрессионных уравнений (3.12) и (3.13) могут быть построены алгоритмы оценки всех необходимых для реализации (3.1), (3.7) параметров:

$$\begin{aligned} (3.14) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\gamma \Delta(t) \left(\Delta(t) \hat{\theta}(t) - \mathcal{Y}(t) \right), \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0, \\ \dot{\hat{\rho}}(t) &= -\gamma \rho \mathcal{M}_\rho(t) (\mathcal{M}_\rho(t) \hat{\rho}(t) - \mathcal{Y}_\rho(t)), \quad \hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_0, \\ \hat{\psi}_b(t) &= \hat{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \hat{\theta}(t). \end{aligned}$$

Теорема 2. Если выполнено допущение 3 и дополнительно

У1) $y(t)$ и $u_c(t)$ ограничены,

У2) $\Delta \notin L_2$,

то законы идентификации (3.14) обеспечивают следующее:

- 1) параметрические ошибки $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$, $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \rho$, $\tilde{\psi}_b(t) = \hat{\psi}_b(t) - \psi_b(\theta)$ асимптотически сходятся к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_b(t) = 0,$$

- 2) $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{\rho} \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{\psi}_b \in L_2 \cap L_\infty$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Поскольку по условию задачи составляющая $u_b(t)$ закона управления является стабилизирующей, а многочлен $R_{cl}(\theta_{cl}, s)$ – гурвицевым, то У1 требует формирования ограниченного сигнала компенсации $u_c(t)$, например, с использованием стандартной функции насыщения (см. раздел 3.3). По доказанному в [32] достаточным условием для выполнения У2 является частотное богатство задания $r(t)$, например, при $m = n - 1$ оно должно содержать не менее n различных частот. Допущение 3 (неравенство (2.6)) будет выполнено, например, если спектры задающего воздействия $r(t)$ и возмущения $f(t)$ не пересекаются. Более подробно условия сходимости законов идентификации типа (3.14) изучались в [32].

Одной из степеней свободы используемой параметризации (2.3) и всей предложенной схемы идентификации является выбор вида регрессора $\varphi(t)$. Если начальные приближения неизвестных параметров такие, что $|u_c(t) + f(t)| > |f(t)|$ (в смысле среднего интегрального значения или дисперсии), то выбор (2.3) позволяет получить параметризацию с меньшим значением возмущения $w(t)$ в аналогичном смысле. Напротив, если начальные приближения неизвестных параметров такие, что даже без параметрической адаптации достигается $|u_c(t) + f(t)| < |f(t)|$ (в смысле среднего интегрального значения или дисперсии), то выбор следующего регрессора

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{n-1}^\top(s)}{\Lambda(s)} z(t) & \frac{\alpha_m^\top(s)}{\Lambda(s)} u_b(t) \end{bmatrix}^\top$$

позволяет получить параметризацию с меньшим значением возмущения $w(t)$ в аналогичном смысле.

Дальнейшая параметризация, а также предпосылки и результаты теоремы 2 от выбранного способа расчета регрессора по $u_b(t)$ или $u(t)$ не зависят.

Состояния фильтров (3.9) со скоростью $\frac{\dot{F}(t)}{F(t)}$ теряют восприимчивость к новым значениям сигналов $\vartheta(t)$ и $\psi(t)$, а значит, и параметров θ . Полностью предотвратить потерю чувствительности фильтров (3.9) на данный момент не представляется возможным, поскольку именно за счет коэффициента $\frac{\dot{F}(t)}{F(t)}$ обеспечивается сходимость параметрических ошибок к нулю при наличии внешнего возмущения.

Однако путем переопределения:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} Y(t) &:= \frac{1}{T} \vartheta(t), \\ \Phi(t) &:= \frac{1}{T} \psi(t) \end{aligned}$$

возможно получить алгоритм идентификации, обладающий качествами, более приемлемыми с практической точки зрения.

Теорема 3. Если выполнено допущение 3 и дополнительно

У1) $y(t)$ и $u_c(t)$ ограничены,

У2) существуют числа $\Delta_{UB} \geq \Delta_{LB} > 0$, такие что $\Delta_{LB} \leq |\Delta(t)| \leq \Delta_{UB}, \forall t \geq t_e$,

то существует число $\delta_0 > 0$ и сигнал $\delta_1 \in L_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0$ такие, что

$$(3.16) \quad \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t) \\ \tilde{\rho}(t) \\ \tilde{\psi}_b(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \delta_1(t) + \delta_0 T^{-1}, \forall t \geq t_0.$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Таким образом, закон идентификации (3.14) на базе сигналов (3.8) + (3.15) обеспечивает чувствительность к новым значениям параметров θ , но вместе с этим параметрические ошибки сходятся при выполнении более строгого условия по сравнению с $\Delta \notin L_2$ и не к нулю, а к его окрестности, пропорциональной параметру $T > 0$.

3.3. Адаптивный вспомогательный контур

Мотивируясь выражениями (3.1), (3.5a)–(3.5c), (3.6) и требованием У1, на основании формируемых оценок (3.14) сигнал компенсации возмущения зададим в следующем виде:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} u_c(t) &= \text{sat}_{f_{\max}} \left\{ -\hat{f}(t) \right\}, \\ \hat{f}(t) &= \psi_a^\top(\Theta) \hat{h}_\varepsilon(t) + \left(\hat{\psi}_a^\top(t) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \hat{h}_y(t), \end{aligned}$$

где

$$(3.18a) \quad \begin{cases} \dot{\hat{H}}_i^\varepsilon(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) \hat{H}_i^\varepsilon(t) + \\ \quad + e_{n+1} (K_0(t) \hat{\varepsilon}_f(t) - \hat{v}_\varepsilon(t)), \\ \hat{h}_i^\varepsilon(t) = e_{i+1}^\top \hat{H}_i^\varepsilon(t), \quad \hat{v}_\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^i \hat{v}_j^\varepsilon(t, M_0, K_0), \\ \dot{\hat{H}}_i^y(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) \hat{H}_i^y(t) + \\ \quad + e_{n+1} (K_0(t) \hat{y}_f(t) - \hat{v}_y(t)), \\ \hat{h}_i^y(t) = e_{i+1}^\top \hat{H}_i^y(t), \quad \hat{v}_y(t) = \sum_{j=0}^i \hat{v}_j^y(t, M_0, K_0), \end{cases} \quad \forall i = 0, \dots, n,$$

$$(3.18b) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_\varepsilon(t) &= \left(A_0 - \hat{\psi}_b(t) e_1^\top \right) \hat{\xi}_\varepsilon(t) + \hat{\rho}(t) e_m \varepsilon(t), \\ \begin{cases} \hat{\varepsilon}_f(t) = e_1^\top \hat{\xi}_\varepsilon(t), & \text{если } m \geq 1, \\ \hat{\varepsilon}_f(t) = \hat{\rho}(t) \varepsilon(t), & \text{если } m = 0, \end{cases} \\ \dot{\hat{\xi}}_y(t) &= \left(A_0 - \hat{\psi}_b(t) e_1^\top \right) \hat{\xi}_y(t) + \hat{\rho}(t) e_m y(t), \\ \begin{cases} \hat{y}_f(t) = e_1^\top \hat{\xi}_y(t), & \text{если } m \geq 1, \\ \hat{y}_f(t) = \hat{\rho}(t) y(t), & \text{если } m = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$(3.18c) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) - \Theta \hat{y}(t) + \hat{\theta}_b(t) u(t), \\ \hat{y}(t) = e_1^\top \hat{x}(t), \end{cases}$$

и $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, $\hat{\psi}_a(t) := \psi_a(\hat{\theta}_a)$, $\hat{\theta}_a(t) = \mathcal{L}_a \hat{\theta}(t)$, $\text{sat}_{f_{\max}} \{ \cdot \}$ – стандартная функция насыщения, ограничивающая по модулю сигнал $u_c(t)$ на

уровне $f_{\max}$. Здесь сигналы $\hat{v}_\varepsilon(t)$ и $\hat{v}_y(t)$ вычисляются по формулам, аналогичным приведенным в утверждении 1.

Теорема 4. Если

- 1) выполнены допущения 1–3 и условие У2 из теоремы 2,
 - 2) $|f(t)| < f_{\max}$ для всех $t \geq t_0$ и достаточно большого числа $f_{\max} > 0$,
- то управление (2.2) + (3.17) + (3.14) обеспечивает $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0$.

Доказательство приведено в Приложении.

Использование нестационарных фильтров (3.18а) может оказаться недопустимым на практике, например, по соображениям помехозащищенности канала управления или погрешностей, связанных с дискретизацией/численным решением нестационарных дифференциальных уравнений (3.18а). Поэтому в теореме 5 исследуем устойчивость замкнутой системы управления для случая когда $\mu(t) = \text{const}$ и допущение 2 не выполняется (в том смысле, что $\lambda \notin L_p$). Отметим, что ситуация, когда $\mu(t) = \text{const}$, но допущение 2 выполняется (т.е. $\lambda \in L_p$), уже рассмотрена в теореме 4.

Теорема 5. Если

- 1) выполнены допущения 1, 3 и условие У2 из теоремы 2,
 - 2) $\mu(t) = \mu > 0$, $\lambda \in L_\infty$,
 - 3) $|f(t)| < f_{\max}$ для всех $t \geq t_0$ и достаточно большого числа $f_{\max} > 0$,
- то управление (2.2) + (3.17) + (3.14) обеспечивает $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ для произвольно малого числа $\epsilon > 0$.

Доказательство приведено в Приложении.

Таким образом, если $(n+1)$ производных возмущения ограничены, то предлагаемая адаптивная система компенсации (3.17), (3.18а)–(3.18с), (3.9) + (3.14) внешнего возмущения со стационарными наблюдателями производных (3.18а) обеспечивает сходимость ошибки слежения в произвольно малую окрестность нуля.

Теперь для настройки параметров компенсатора (3.17), (3.18а)–(3.18с) воспользуемся идентификатором (3.14), построенным на базе сигналов (3.15), а не (3.9).

Теорема 6. Если

- 1) выполнены допущения 1, 3 и условие У2 из теоремы 3,
 - 2) $\mu(t) = \mu > 0$, $\lambda \in L_\infty$,
 - 3) $|f(t)| < f_{\max}$ для всех $t \geq t_0$ и достаточно большого числа $f_{\max} > 0$,
- то управление (2.2) + (3.17) с законами идентификации (3.14) + (3.15) обеспечивает $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ для произвольно малого числа $\epsilon > 0$.

Доказательство приведено в Приложении.

Предложенная адаптивная система компенсации внешнего ограниченного возмущения состоит из адаптивной вспомогательной модели (3.18с), алгоритмов адаптивной фильтрации (3.18б), наблюдателей фильтрованных производных с сильной обратной связью (3.18а), закона компенсации (3.17) и алгоритмов идентификации (3.14), построенных на базе сигналов, вычисляе-

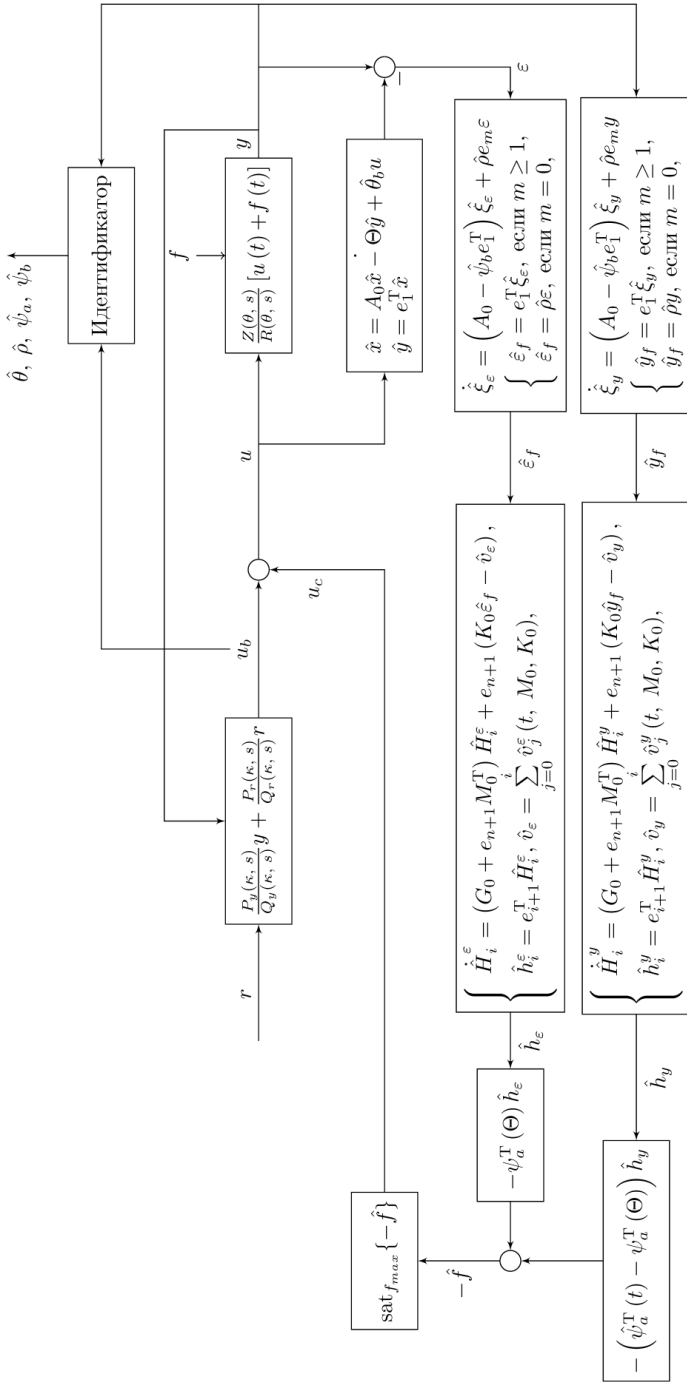


Рис. 1. Структурная схема адаптивного вспомогательного контура.

мых с помощью инструментальной модели (2.5) и фильтров (2.3), (3.8), (3.9) или (2.3), (3.8), (3.15). Структурная схема такой системы управления представлена на рис. 1.

В отличие от существующих решений [2–26] предложенный адаптивный компенсатор при выполнении условий параметрической сходимости позволяет сепарировать процессы оценивания сигнального и параметрического возмущений и асимптотически компенсировать влияние возмущения $f(t)$ на систему с неизвестными параметрами. При этом стабилизирующая компонента регулятора синтезируется независимо от компенсационной, что позволяет получить систему управления с двумя степенями свободы. По сути, в работе предложены три различные схемы компенсации внешних возмущений, которые могут быть классифицированы следующим образом:

- нестационарные наблюдатели фильтрованных производных (3.18a) + идентификатор (3.14) на базе сигналов, полученных с помощью усредняющей фильтрации (3.9),
- стационарные наблюдатели фильтрованных производных (3.18a) + идентификатор (3.14) на базе сигналов, полученных с помощью усредняющей фильтрации (3.9),
- стационарные наблюдатели фильтрованных производных (3.18a) + идентификатор (3.14) на базе сигналов, полученных с помощью фильтрации скользящим средним (3.8) + (3.15).

Первые две схемы имеют теоретическое значение, но из-за потери чувствительности фильтров (3.9) к вариациям неизвестных параметров, потенциально бесконечно большому коэффициенту усиления наблюдателей фильтрованных производных (3.18a) оказываются малоприменимыми на практике. Третья схема свободна от недостатков первых двух схем, но обеспечивает сходимость ошибки слежения только к ограниченной окрестности положения равновесия и при более строгом условии (Y_2 из теоремы 3 вместо Y_2 из теоремы 2).

Замечание 5. Использование нестационарных наблюдателей производных (3.18a) совместно с идентификатором на базе сигналов, полученных с помощью фильтрации скользящим средним (3.15), нецелесообразно, поскольку в силу свойств идентификатора будет обеспечена сходимость ошибки слежения только в ограниченную область.

4. Математическое моделирование

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \mathcal{F}(y, u, t).$$

Предположим, что величина $\frac{1}{m} \mathcal{F}(y, u, t)$ может быть приближена следующим образом:

$$\frac{1}{m} \mathcal{F}(y, u, t) := \theta_2 \frac{d}{dt} y(t) + \theta_1 y(t) + \theta_3 (u + f(t)), \quad \theta_3 := \frac{1}{m},$$

откуда в силу $s[\cdot] := \frac{d}{dt}[\cdot]$ имеем динамическую систему второго порядка:

$$(4.1) \quad y(t) = \frac{\theta_3}{s^2 + \theta_2 s + \theta_1} [u(t) + f(t)].$$

Стабилизирующую компоненту закона управления зададим с помощью ПИД-регулятора с реализуемым дифференциальным каналом:

$$(4.2) \quad u_b(t) = K_P(r(t) - y(t)) + \frac{K_I}{s} [r(t) - y(t)] + \frac{K_D s}{K_F s + 1} [r(t) - y(t)].$$

Параметры системы (4.1) и управления (4.2) выберем следующим образом:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \theta_1 &= 2, \quad \theta_2 = 5, \quad \theta_3 = 1, \\ K_P &= 6, \quad K_I = 2,5, \quad K_D = 1,5, \quad K_F = 0,01, \\ f(t) &= 2,5 + 1,25 \cos(\pi t) + 2,5 \sin(0,3\pi t), \\ r(t) &= 10 \operatorname{sgn}(\sin(0,05\pi t)). \end{aligned}$$

Параметры адаптивного вспомогательного контура (3.18а)–(3.18с), параметризации (2.3), инструментальной модели (2.5), фильтров (3.8), (3.9) и законов идентификации (3.14) установим в соответствии с выражением

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Theta &= [20 \quad 100]^\top, \quad m_0 = 1, \quad m_1 = 3, \quad m_3 = 3, \quad \mu = 10^4, \\ \Lambda(s) &= s^2 + 20s + 100, \quad Z(\theta_{iv}, s) = 4, \\ R(\theta_{iv}, s) &= s^2 + 2s + 4, \quad p = 2, \quad T = 4, \\ \hat{\theta}_0 &= [2 \quad 4 \quad 2]^\top, \quad \hat{\rho}_0 = 0,5, \quad \gamma = \gamma_\rho = 10^{13}, \quad \bar{f}_{\max} = 10. \end{aligned}$$

Параметры адаптивного вспомогательного контура (3.18а)–(3.18с), параметризации (2.3) и инструментальной модели (2.5) были выбраны из соображений устойчивости соответствующих дифференциальных уравнений. Коэффициенты усиления γ, γ_ρ были подобраны методом проб и ошибок таким образом, чтобы приближенно обеспечивалась пропорциональность:

$$(4.5) \quad \gamma \sim \frac{1}{\Delta^2(t)}, \quad \gamma_\rho \sim \frac{1}{\mathcal{M}_\rho^2(t)}.$$

На практике для выбора $\gamma, \gamma_\rho, \gamma_{\psi_b}$ требуются априорные данные о значениях амплитуды регрессора $\Delta(t)$, вычисленного на типовых траекториях системы при фиксированных p и T . При отсутствии таких сведений параметры (4.5) должны подбираться в режиме онлайн методом проб и ошибок.

На рис. 2 приведены переходные процессы по регрессору $\Delta(t)$ и норме возмущения $\mathcal{W}(t)$ регрессионного уравнения (3.12).

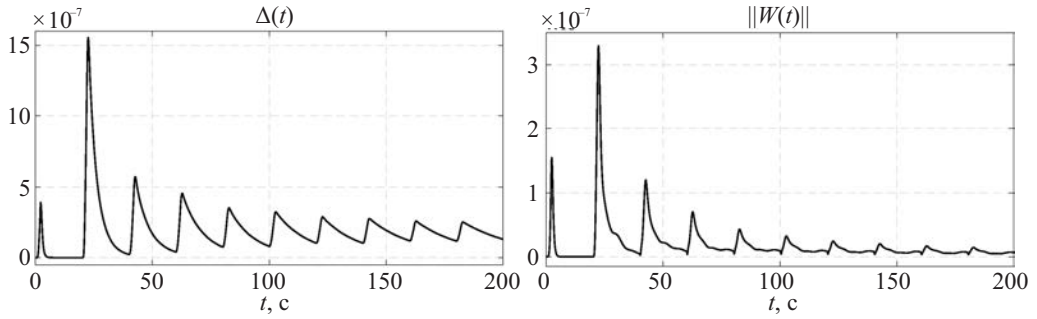


Рис. 2. Переходные процессы по $\Delta(t)$ и $\|\mathcal{W}(t)\|$.

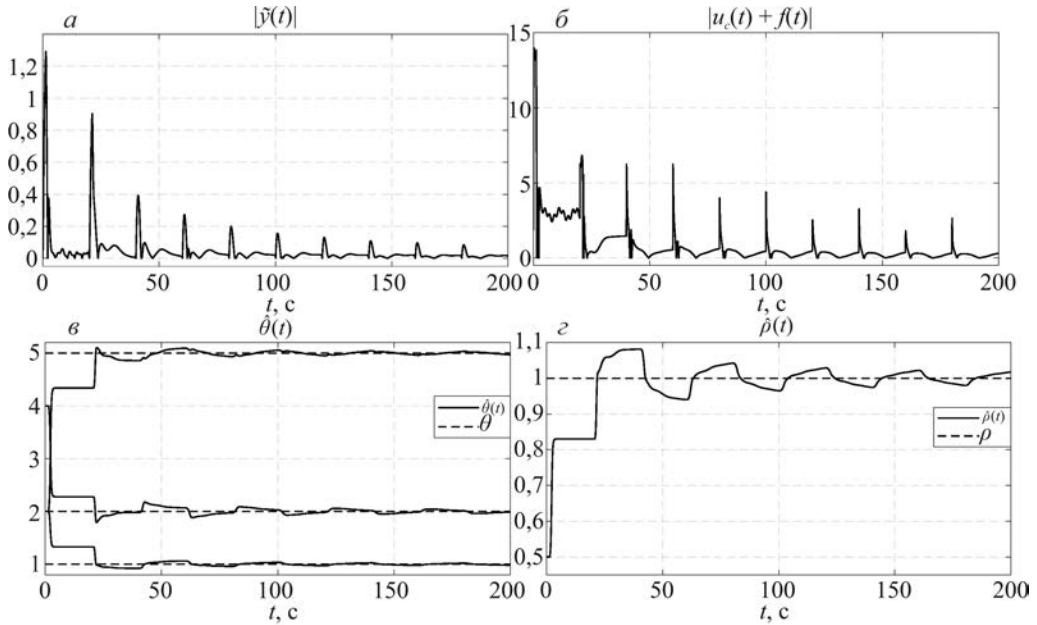


Рис. 3. Переходные процессы по $|\tilde{y}(t)|$, $|u_c(t) + f(t)|$ и $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\rho}(t)$.

Представленные на рис. 2 переходные процессы показывают, что в течение всего моделирования начиная с $t = T = 4$ регрессор $\Delta(t)$ был отличен от нуля, а возмущение $\mathcal{W}(t)$ асимптотически убывало. Эти два наблюдения согласно анализу [32] валидируют выполнение допущения 3 и условия У2 из теоремы 2.

На рис. 3,а приведены переходные процессы по ошибке слежения $|\tilde{y}(t)|$. На рис. 3,б приведены переходные процессы по ошибке компенсации $|u_c(t) + f(t)|$. На рис. 3,в и г приведены переходные процессы соответственно по оценкам $\hat{\theta}(t)$ и $\hat{\rho}(t)$.

Представленные переходные процессы иллюстрируют выводы, сделанные в теореме 4. При выполнении условий параметрической сходимости У2 из теоремы 2 и допущения 3 (см. комментарии к рис. 2) гарантируется асимп-

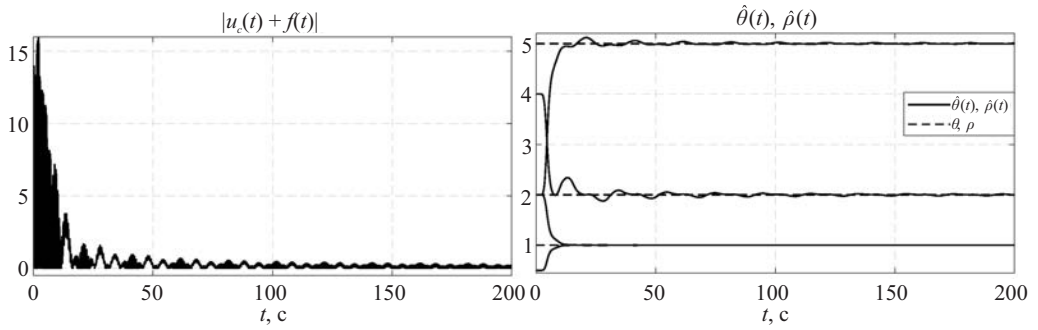


Рис. 4. Переходные процессы по $|u_c(t) + f(t)|$ и $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\rho}(t)$.

тотическая сходимость оценок $\hat{\theta}(t)$ и $\hat{\rho}(t)$ к неизвестным параметрам θ и ρ , что приводит к асимптотической сходимости к нулю ошибки компенсации $u_c(t) + f(t)$, в результате чего обеспечивается асимптотическая компенсация влияния возмущения $f(t)$ на качество переходных процессов. Отметим, что с практической точки зрения в силу использования интегрального канала в управлении (4.2) для компенсации возмущения $f(t)$ достаточно обеспечения $u_c(t) + f(t) \approx \text{const}$. В проведенном эксперименте параметрическая сходимость достигнута при типичном для практических задач задающем воздействии в виде периодического сигнала прямоугольной формы. Этот результат позволяет сделать вывод, что условия параметрической сходимости не являются ограничительными и выполняются в типовых ситуациях, встречающихся в приложениях.

Покажем, что при использовании задающего воздействия специального вида качество переходных процессов по $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\rho}(t)$ и $u_c(t) + f(t)$ может быть улучшено. Выберем задание $r(t)$ и коэффициенты усиления γ , γ_ρ следующим образом:

$$(4.6) \quad r(t) = 10 [\sin(0,2\pi t) + \sin(3\pi t)], \quad \gamma = \gamma_\rho = 10^{10},$$

а все остальные параметры установим согласно (4.3) и (4.4).

Спектр задающего воздействия (4.6) не пересекается со спектром возмущения, а сам сигнал $r(t)$ содержит $n = 2$ частот. Согласно анализу [32] вместе с ограниченностью $y(t)$, $u_c(t)$ это незамедлительно приводит к выполнению требования У2 из теоремы 2 и допущения 3.

На рис. 4 приведены переходные процессы по $u_c(t) + f(t)$ и $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\rho}(t)$ при обработке системой задающего воздействия (4.6).

Специальный выбор задающего воздействия позволяет улучшить в предлагаемой системе качество переходных процессов по $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\rho}(t)$ и $u_c(t) + f(t)$. Таким образом, проведенное моделирование валидирует сделанные в работе теоретические выводы и иллюстрирует свойства предлагаемой системы адаптивной компенсации возмущений при различных задающих воздействиях.

Замечание 6. Не вошедшие в статью результаты численного моделирования показывают, что при любом выборе начальных условий $\hat{\theta}_0, \hat{\rho}_0$ предложенное решение обеспечивает асимптотическую компенсацию возмущения. Однако качество переходных процессов при этом может быть произвольно плохим. Поэтому на практике рекомендуется приравнивать начальные условия $\hat{\theta}_0, \hat{\rho}_0$ к «номинальным» параметрам системы, например к таким параметрам, по которым производился синтез стабилизирующей компоненты управления. В этом случае удастся не только обеспечить выполнение цели (2.8), но и получить приемлемое качество переходных процессов.

5. Заключение

Разработан метод компенсации по выходу ограниченного сигнального возмущения, действующего на линейную минимально фазовую систему с неизвестными параметрами. В качестве основы предлагаемого решения выступает алгоритм компенсации возмущений на базе метода вспомогательного контура А.М. Цыкунова [26, с.196], который для асимптотической оценки и компенсации сигнального возмущения требует знания параметров системы. Для устранения этого требования с помощью закона идентификации, построенного на базе метода инструментальных переменных и процедуры ДРСР, в замкнутом контуре управления выполняется точная онлайн асимптотическая идентификация неизвестных параметров системы. Условиями сходимости процесса параметрической идентификации является:

- У1) ограниченность сигнала компенсации возмущения (например, с помощью $\text{sat}\{.\}$ функции),
- У2) частотное богатство задающего воздействия,
- У3) отсутствие пересечений спектров задающего воздействия и возмущения.

Формируемые оценки используются вместо неизвестных параметров в алгоритме компенсации возмущений на базе метода вспомогательного контура [26]. Показано, что замена неизвестных параметров на их оценки состоятельна в том смысле, что при выполнении условий У1)–У3) предложенная система адаптивной компенсации возмущений, также как и ее неадаптивный аналог, обеспечивает асимптотическую оценку и компенсацию возмущения.

Свойства предложенного решения продемонстрированы в рамках математического моделирования. Показано, что условия У1)–У3) не являются ограничительными и выполняются в типовых системах управления с ПИ-, ПИД-регуляторами при типовых задающих воздействиях. Авторы уверены, что предложенное решение имеет потенциал к практическому использованию, но отмечают, что подход имеет недостаток, связанный с необходимостью экспериментального выбора ряда параметров алгоритма идентификации и оценки неизмеряемых производных.

Актуальными направлениями дальнейших исследований являются улучшение качества переходных процессов по оценке возмущения и увеличение скорости сходимости оценок неизвестных параметров к их истинным значениям.

В этом приложении представлены вспомогательные леммы, аксиоматически используемые при доказательстве основного результата работы.

Лемма П.1.1. Для любого устойчивого, реализуемого оператора $\mathcal{H}(t, s)[\cdot]$ и соответствующего сигнала $y(t) = \mathcal{H}(t, s)[u(t)]$ верно $u \in L_p \Rightarrow y \in L_p, p \in [1, \infty]$.

Доказательство приведено в [35, с. 75].

Лемма П.1.2. Если $\dot{f} \in L_\infty$ и $f \in L_p, p \in (0, \infty)$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Доказательство приведено в [35, с. 80].

Лемма П.1.3. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x}(t) = -a^2(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$ и $a, b: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ – кусочно непрерывные ограниченные функции. Если $a \notin L_2$ и $b \in L_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Доказательство приведено в [36, Section 3.A.1].

Лемма П.1.4. Заданы неотрицательные функции $f: [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $g: [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$. Если $f(t) \leq g(t)$ для всех $t \geq t_0$ и $g \in L_p, p \in (0, \infty)$, то $f \in L_p$.

Доказательство приведено в [28, с. 74].

Лемма П.1.5. Если $f \in L_p, 1 \leq p < \infty$, то $g(t) = H(s)[f(t)] \in L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ для устойчивой строго реализуемой передаточной функции $H(s)[\cdot]$.

Доказательство приведено в [35, с. 83].

Доказательство утверждения 1. Определим линейный нестационарный оператор:

$$\mathcal{H}(t, s)[\cdot] = e_1^\top \left(sI_{n+1} - G_0 - e_{n+1}M_0^\top(t) \right)^{-1} e_{n+1}K_0(t)[\cdot].$$

В целях доказательства утверждения сначала докажем вспомогательную лемму для приведенного выше нестационарного оператора.

Лемма П.2.1. Определим сигналы $(s[\cdot] := \frac{d}{dt}[\cdot])$:

$$(П.2.1а) \quad Y^*(t) = \mathcal{H}(t, s)[s^i[U(t)]],$$

$$(П.2.1б) \quad Y_i(t) = e_{i+1}^\top \left(sI_{n+1} - G_0 - e_{n+1}M_0^\top(t) \right)^{-1} e_{n+1}K_0(t)[U(t) - v(t)],$$

zde

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sum_{j=0}^i v_j(t, M_0, K_0), \\
 v_0(t, M_0, K_0) &= 0, \\
 (\text{П.2.2}) \quad v_1(t, M_0, K_0) &= s^{-1} \left[s \left[M_0^\top(t) \right] X(t) \right] + s^{-1} [s [K_0(t)] U(t)], \\
 &\vdots \\
 v_j(t, M_0, K_0) &= v_{j-1}(t, M_0, K_0) - s^{-1} \left[v_{j-1} \left(t, \dot{M}_0, \dot{K}_0 \right) \right], \quad j = 2, \dots, i,
 \end{aligned}$$

u

$$X(t) = \left(sI_{n+1} - G_0 - e_{n+1} M_0^\top(t) \right)^{-1} e_{n+1} K_0(t) [U(t) - v(t)].$$

Тогда для всех $i = 0, \dots, n$ и $t \geq t_0$ верно $Y^*(t) = Y_i(t)$.

Доказательство :

Перепишем (П.2.1а) и (П.2.1б) в пространстве координат состояний:

$$\begin{cases} \dot{X}^*(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) X^*(t) + e_{n+1} K_0(t) s^i [U(t)], \\ Y^*(t) = e_1^\top X^*(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) X(t) + e_{n+1} (K_0(t) U(t) - v(t)), \\ Y_i(t) = e_{i+1}^\top X(t). \end{cases}$$

В силу структуры матрицы $G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)$ нетрудно убедиться в выполнении равенств:

$$\begin{aligned}
 e_1^\top X(t) &= Y_0(t), \\
 e_1^\top s[X(t)] &= e_1^\top \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) X(t) = e_2^\top X(t) = Y_1(t), \\
 e_1^\top s^2[X(t)] &= e_1^\top s \left[\left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) X(t) \right] = e_1^\top \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \dot{X}(t) = \\
 &= e_1^\top \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right)^2 X(t) = e_2^\top s[X(t)] = e_3^\top X(t) = Y_2(t), \\
 &\vdots \\
 e_1^\top s^i[X(t)] &= e_i^\top s[X(t)] = e_{i+1}^\top X(t) = Y_i(t), \quad i = 0, \dots, n,
 \end{aligned}$$

что позволяет задать вектор ошибок:

$$\begin{aligned} E(t) &= s^i [X(t)] - X^*(t), \\ e_1^\top E(t) &= Y_i(t) - Y^*(t). \end{aligned}$$

Величина $s^{i+1} [X(t)]$ для всех $i = 0, \dots, n$ имеет вид

$$\begin{aligned} s[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) X(t) + \\ &\quad + e_{n+1} \left(\tilde{v}_0(t) + K_0(t) U(t) - \sum_{j=1}^i v_j(t) \right), \\ s^2[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s[X(t)] + \\ &\quad + e_{n+1} \left(\tilde{v}_1(t) + K_0(t) s[U(t)] - s \left[\sum_{j=2}^i v_j(t) \right] \right), \\ s^3[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s^2[X(t)] + \\ &\quad + e_{n+1} \left(\tilde{v}_2(t) + K_0(t) s^2[U(t)] - s^2 \left[\sum_{j=3}^i v_j(t) \right] \right), \\ s^4[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s^3[X(t)] + \\ &\quad + e_{n+1} \left(\tilde{v}_3(t) + K_0(t) s^3[U(t)] - s^3 \left[\sum_{j=4}^i v_j(t) \right] \right), \\ &\quad \vdots \\ s^{i+1}[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s^i[X(t)] + e_{n+1} \left(\tilde{v}_i(t) + K_0(t) s^i[U(t)] \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0(t) &= v_0(t), \\ \tilde{v}_1(t) &= \dot{\tilde{v}}_0(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] X(t) + s \left[K_0(t) \right] U(t) - s \left[v_1(t) \right], \\ \tilde{v}_2(t) &= \dot{\tilde{v}}_1(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] s[X(t)] + s \left[K_0(t) \right] s[U(t)] - s^2 \left[v_2(t) \right], \\ \tilde{v}_3(t) &= \dot{\tilde{v}}_2(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] s^2[X(t)] + s \left[K_0(t) \right] s^2[U(t)] - s^3 \left[v_3(t) \right], \\ &\quad \vdots \\ \tilde{v}_i(t) &= \dot{\tilde{v}}_{i-1}(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] s^{i-1}[X(t)] + s \left[K_0(t) \right] s^{i-1}[U(t)] - s^i \left[v_i(t) \right], \\ &\quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

В силу рекуррентной последовательности (П.2.2) получаем:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_0(t) &= v_0(t), \\
s[v_1(t)] &= s \left[M_0^\top(t) \right] X(t) + s[K_0(t)] U(t), \\
s^2[v_2(t)] &= s^2 \left[M_0^\top(t) \right] X(t) + s^2[K_0(t)] U(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] s[X(t)] + \\
&+ s[K_0(t)] s[U(t)] - s^2 \left[M_0^\top(t) \right] X(t) - s^2[K_0(t)] U(t) = \\
&= s \left[M_0^\top(t) \right] s[X(t)] + s[K_0(t)] s[U(t)], \\
&\vdots \\
s^j[v_j(t)] &= s \left[M_0^\top(t) \right] s^{j-1}[X(t)] + s[K_0(t)] s^{j-1}[U(t)], \quad j = 3, \dots, i,
\end{aligned}$$

откуда $\tilde{v}_i(t) = 0$ для всех $i = 0, \dots, n$.

Тогда производная ошибки $E(t)$ приобретает вид

$$\begin{aligned}
\dot{E}(t) &= s^{i+1}[X(t)] - \dot{X}^*(t) = \\
&= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s^i[X(t)] + e_{n+1} (\tilde{v}_i(t) + K_0(t) s^i[U(t)]) - \\
&- \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) X^*(t) - e_{n+1} K_0(t) s^i[U(t)] = \\
&= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) E(t), \quad E(t_0) = 0_{n+1},
\end{aligned}$$

а значит, в силу гурвицевости $G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)$ и выполнения $E(t_0) = 0_{n+1}$ получаем $Y^*(t) = Y_i(t)$ для всех $i = 0, \dots, n$ и $t \geq t_0$.

Доказательство леммы П.2.1 завершено.

Вернемся к доказательству утверждения 1. Применив оператор $\mathcal{H}(t, s)[\cdot]$ к левой и правой части выражения (3.5a), имеем:

$$f_f(t) := \mathcal{H}(t, s)[f(t)] = \psi_a^\top(\Theta) h_\varepsilon(t) + \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) h_y(t),$$

где

$$\begin{aligned}
h_y(t) &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s)[y_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s)[s^{n-1}[y_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s)[s^n[y_f(t)]] \end{bmatrix}, \\
h_\varepsilon(t) &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s)[\varepsilon_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s)[s^{n-1}[\varepsilon_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s)[s^n[\varepsilon_f(t)]] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись результатами леммы П.2.1, получаем:

$$h_y(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s) [y_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s) [s^{n-1} [y_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s) [s^n [y_f(t)]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^y(t) \\ \vdots \\ h_i^y(t) \\ \vdots \\ h_n^y(t) \end{bmatrix},$$

$$h_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s) [\varepsilon_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s) [s^{n-1} [\varepsilon_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s) [s^n [\varepsilon_f(t)]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^\varepsilon(t) \\ \vdots \\ h_i^\varepsilon(t) \\ \vdots \\ h_n^\varepsilon(t) \end{bmatrix},$$

следовательно, имеем определение (3.6).

Возмущение $f(t)$ и фильтрованное возмущение $f_f(t)$ в пространстве состояний могут быть описаны следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{F}}(t) = G_0 \mathcal{F}(t) + e_{n+1} s^{n+1} [f(t)], \\ f(t) = e_1^\top \mathcal{F}(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{F}}_f(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) \mathcal{F}_f(t) + e_{n+1} K_0(t) [f(t)], \\ f_f(t) = e_1^\top \mathcal{F}_f(t). \end{cases}$$

Тогда ошибка $\tilde{f}(t)$ удовлетворяет выражению:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{f}} &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \mathcal{F}_f(t) + e_{n+1} K_0(t) [f(t)] - \\ &- \left(G_0 \pm e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \mathcal{F}(t) - e_{n+1} s^{n+1} [f(t)] = \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \tilde{\mathcal{F}}(t) + \\ &+ e_{n+1} K_0(t) \left(f(t) - \frac{1}{m_0 \mu^{n+1}(t)} \left(s^{n+1} [f] + \sum_{i=0}^n m_i \mu^{n-(i-1)}(t) s^i [f(t)] \right) \right) = \\ &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \tilde{\mathcal{F}}(t) + e_{n+1} K_0(t) \lambda(t), \\ \tilde{f}(t) &= e_1^\top \tilde{\mathcal{F}}(t), \end{aligned}$$

или в операторной форме:

$$(П.2.3) \quad \tilde{f}(t) = \mathcal{H}(t, s) [\lambda(t)].$$

В соответствии с допущением 2 имеем $\lambda \in L_p \cap L_\infty$ для некоторого $p \in [1, \infty)$, а тогда применение леммы П.1.1 позволяет получить $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$.

Перепишем (П.2.3) в канонической наблюдаемой форме пространства координат состояний:

$$(П.2.4) \quad \begin{cases} \dot{E}(t) = (G_0 + \mathcal{I}_{n+1} M_0(t) e_1^\top) E(t) + e_{n+1} K_0(t) \lambda(t), \\ \tilde{f}(t) = e_1^\top E(t). \end{cases}$$

Определим нормированную ошибку

$$\eta(t) = \Gamma^{-1}(t) E(t),$$

где $\Gamma(t) = \text{diag}\{1, \mu(t), \dots, \mu^n(t)\}$, а значит, $\tilde{f}(t) = e_1^\top \eta(t) = e_1^\top E(t)$.

Дифференцируя $\eta(t)$ в силу (П.2.4), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt} E(t) + \Gamma^{-1}(t) \left(G_0 + \mathcal{I}_{n+1} M_0(t) e_1^\top \right) E(t) + \\ &+ \Gamma^{-1}(t) e_{n+1} K_0(t) \lambda(t) = \left(\frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt} \Gamma(t) + \mu(t) G \right) \eta(t) + \\ &+ e_{n+1} m_0 \mu(t) \lambda(t), \quad G = G_0 - \mathcal{I}_{n+1} M e_1^\top, \end{aligned}$$

где использованы следующие соотношения (проверяются подстановкой):

$$\Gamma^{-1}(t) G_0 \Gamma(t) = \mu(t) G_0, \quad \Gamma^{-1}(t) \mathcal{I}_{n+1} M_0(t) = -\mu(t) \mathcal{I}_{n+1} M, \quad e_1^\top \Gamma(t) = e_1^\top.$$

В соответствии с допущением 2 имеем $\mu\lambda \in L_\infty$, а поскольку автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt} \Gamma(t) + \mu(t) G \right) x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

асимптотически устойчиво, то $\mu\lambda \in L_\infty \Rightarrow \dot{\eta} \in L_\infty$, значит, в силу $\dot{\tilde{f}}(t) = \dot{\eta}_1(t)$ верно $\dot{\tilde{f}} \in L_\infty$, и по лемме П.1.2 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = 0$.

Доказательство теоремы 1. Подставив (2.2) + (3.7) в (2.1) и вычитая из результата выражение (2.7), имеем:

$$\tilde{y}(t) = W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\tilde{f}(t) \right].$$

По утверждению 1 имеем $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$ для $p \in [1, \infty)$, тогда $\tilde{y} \in L_\infty$ и по лемме П.1.5 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0$.

Доказательство теоремы 2. Запишем законы идентификации (3.14) в общем виде:

$$(П.2.5) \quad \dot{\hat{\kappa}}(t) = -\gamma \mathcal{M}_\kappa(t) (\mathcal{M}_\kappa(t) \hat{\kappa}(t) - \mathcal{Y}_\kappa(t)), \quad \hat{\kappa}(t_0) = \hat{\kappa}_0,$$

где $\kappa \in \{\theta, \rho\}$, $\hat{\kappa} \in \{\hat{\theta}, \hat{\rho}\}$ и $\mathcal{Y}_\kappa(t) = \mathcal{M}_\kappa(t) \kappa + \mathcal{W}_\kappa(t)$.

По доказанному в утверждении 5 из [32] при выполнении У1 и допущения 3 оказывается верно $\mathcal{W} \in L_2$. Тогда, поскольку $\mathcal{M}_\rho \in L_\infty$, $\mathcal{Y}_\rho \in L_\infty$ (в силу У1), на основании (3.12) и (3.13) имеем $\mathcal{W}_\rho \in L_2$. Так как по (3.13) также верно

$$\Delta \notin L_2 \Rightarrow \mathcal{M}_\rho \notin L_2,$$

то доказательство теоремы 2 может быть выполнено путем анализа свойств закона идентификации общего вида (П.2.5) при выполнении условий $\mathcal{W}_\kappa \in L_2$ и $\mathcal{M}_\kappa \notin L_2$.

По доказанному в теореме 2 из [32] и утверждения 1 из [37] при $\mathcal{W}_\kappa \in L_2$ и $\mathcal{M}_\kappa \notin L_2$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\kappa}(t) = 0$, $\tilde{\kappa} \in L_\infty$. Значит, для завершения доказательства остается показать $\tilde{\kappa} \in L_2$.

Для этого оценим следующим образом производную функции $V = \frac{1}{2} \tilde{\kappa}^\top \tilde{\kappa}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\gamma \tilde{\kappa}^\top \mathcal{M}_\kappa^2(t) \tilde{\kappa} + \gamma \tilde{\kappa}^\top \mathcal{M}_\kappa(t) \mathcal{W}_\kappa(t) \leq \\ (П.2.6) \quad &\leq -\gamma(1-\chi) \tilde{\kappa}^\top \mathcal{M}_\kappa^2(t) \tilde{\kappa} + \gamma \chi^{-1} \|\mathcal{W}_\kappa(t)\|^2 \leq \\ &\leq -2\gamma \mathcal{M}_\kappa^2(t) (1-\chi) V(t) + \gamma \chi^{-1} \|\mathcal{W}_\kappa(t)\|^2, \end{aligned}$$

где $\chi \in (0, 1)$.

Проинтегрировав (П.2.6), получим:

$$V(t) \leq V(t_0) - \gamma(1-\chi) \int_{t_0}^t \mathcal{M}_\kappa^2(s) \|\tilde{\kappa}(s)\|^2 ds + \gamma \chi^{-1} \int_{t_0}^t \|\mathcal{W}_\kappa(s)\|^2 ds.$$

Так как $V \in L_\infty$ (по доказанному) и $\mathcal{W}_\kappa \in L_2$, то следующий интеграл ограничен:

$$\int_{t_0}^t \mathcal{M}_\kappa^2(s) \|\tilde{\kappa}(s)\|^2 ds \leq \frac{-V(t) + V(t_0) + \gamma \chi^{-1} \int_{t_0}^t \|\mathcal{W}_\kappa(s)\|^2 ds}{\gamma(1-\chi)} < \infty.$$

На подынтегральное выражение существует следующая оценка снизу (здесь полагается, что $\mathcal{M}_\kappa(t) > 0$ почти всюду и, следовательно, $\text{ess inf}_t \mathcal{M}_\kappa^2(t) \neq 0$):

$$\text{ess inf}_t \mathcal{M}_\kappa^2(t) \|\tilde{\kappa}(t)\|^2 \leq \mathcal{M}_\kappa^2(t) \|\tilde{\kappa}(t)\|^2,$$

что по лемме П.1.4 означает $\tilde{\kappa} \in L_2$.

Для ошибки $\tilde{\psi}_b(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_b(t) &= \hat{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \hat{\theta}(t) - \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta \pm \hat{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta = \\ &= \hat{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t) + \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta \pm \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t) = \\ &= \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t) + \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta + \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty \\ \tilde{\rho} \in L_2 \cap L_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{\psi}_b \in L_2 \cap L_\infty, \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_b(t) = 0.$$

Доказательство теоремы 3. Из (3.11) при использовании (3.15) для $W(t)$ имеем:

$$W(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t),$$

$$\varepsilon(t) = \int_{\max(t_0, t-T)}^t \zeta_{iv}(s) w(s) ds,$$

откуда при выполнении допущения 3 получаем $|W_i(t)| \leq \frac{1}{T}c$.

При выполнении У1 для регрессора $\Phi(t)$ имеем:

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\| &= \frac{1}{T} \left\| \int_{\max(t_0, t-T)}^t \zeta_{iv}(s) \varphi^\top(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{T} T \sup_t \|\zeta_{iv}(t) \varphi^\top(t)\| = \\ &= \sup_t \|\zeta_{iv}(t) \varphi^\top(t)\|, \end{aligned}$$

откуда найдется число $c_W > 0$ такое, что

$$(П.2.7) \quad \|\mathcal{W}(t)\| \leq \frac{1}{T} c_W, \quad \|\mathcal{W}_\rho(t)\| \leq \frac{1}{T} c_W.$$

На основании (П.2.7) ошибки $\tilde{\theta}(t)$, $\tilde{\rho}(t)$, $\tilde{\psi}_b(t)$ определены следующим образом:

$$(П.2.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}(t) &= \phi_{\tilde{\theta}}(t, t_0) \tilde{\theta}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_{\tilde{\theta}}(t, \tau) \Delta(\tau) \mathcal{W}(\tau) d\tau, \\ \tilde{\rho}(t) &= \phi_{\tilde{\rho}}(t, t_0) \tilde{\rho}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_{\tilde{\rho}}(t, \tau) \mathcal{M}_\rho(\tau) \mathcal{W}_\rho(\tau) d\tau, \\ \tilde{\psi}_b(t) &= \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t) + \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta + \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t), \end{aligned}$$

$$\text{где } \phi_{\tilde{\theta}}(t, \tau) = e^{-\gamma \int_{\tau}^t \Delta^2(s) ds}, \quad \phi_{\tilde{\rho}}(t, \tau) = e^{-\gamma \int_{\tau}^t \Delta^2(s) ds}.$$

По выражениям (П.2.7), (3.13) при выполнении У1 имеем $\Delta\mathcal{W}, \mathcal{M}_\rho\mathcal{W}_\rho \in L_\infty$, а при выполнении У2 получаем $\phi_{\tilde{\theta}}, \phi_{\tilde{\rho}} \in L_1$, откуда на основании (П.2.8) и в силу оценок (П.2.7) мгновенно следует существование $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 \in L_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0$ таких, что неравенство (3.16) выполнено.

Доказательство теоремы 4. Подставив (2.2) + (3.17) в (2.1) и вычитая из результата выражение (2.7), имеем:

$$(П.2.9) \quad \begin{aligned} \tilde{y}(t) &= W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\text{sat}_{f_{\max}} \left\{ -\hat{f}(t) \pm f_f(t) \pm f(t) \right\} + f(t) \right] = \\ &= W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\text{sat}_{f_{\max}} \left\{ \tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) - f(t) \right\} + f(t) \right], \end{aligned}$$

где

$$(П.2.10) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_f(t) &= -\hat{f}(t) + f_f(t) = \\ &= -\psi_a^\top(\Theta) \hat{h}_\varepsilon(t) - \left(\hat{\psi}_a^\top(t) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \hat{h}_y(t) \pm \hat{\psi}_a^\top(t) h_y(t) + \\ &+ \psi_a^\top(\Theta) h_\varepsilon(t) + \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) h_y(t) = \\ &= -\psi_a^\top(\Theta) \tilde{h}_\varepsilon(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) h_y(t) - \left(\hat{\psi}_a^\top(t) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \tilde{h}_y(t) = \\ &= -\psi_a^\top(\Theta) \tilde{h}_\varepsilon(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) h_y(t) - \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \tilde{h}_y(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) \tilde{h}_y(t), \end{aligned}$$

и (в силу леммы П.2.1)

$$(П.2.11) \quad \tilde{h}_y(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s) [\tilde{y}_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s) [s^{n-1} [\tilde{y}_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s) [s^n [\tilde{y}_f(t)]] \end{bmatrix}, \quad \tilde{h}_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s) [\tilde{\varepsilon}_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s) [s^{n-1} [\tilde{\varepsilon}_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s) [s^n [\tilde{\varepsilon}_f(t)]] \end{bmatrix}.$$

Поскольку (П.2.9)–(П.2.11) зависят от ошибок $\tilde{\varepsilon}_f(t) = \hat{\varepsilon}_f(t) - \varepsilon_f(t)$ и $\tilde{y}_f(t) = \hat{y}_f(t) - y_f(t)$, то на основании выражений (3.5a)–(3.5c) и (3.18b) также получим дифференциальные уравнения для них

$$(П.2.12) \quad \begin{aligned} \Sigma_1: \quad & \begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_y = \left(A_b - \tilde{\psi}_b e_1^\top \right) \tilde{\xi}_y - \tilde{\psi}_b y_f + \tilde{\rho} e_m y, \\ \tilde{y}_f = \begin{cases} e_1^\top \tilde{\xi}_y, & \text{если } m \geq 1, \\ \tilde{\rho} y, & \text{если } m = 0, \end{cases} \end{cases} \\ \Sigma_2: \quad & \begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_\varepsilon = \left(A_b - \tilde{\psi}_b e_1^\top \right) \tilde{\xi}_\varepsilon - \tilde{\psi}_b \varepsilon_f + (\rho + \tilde{\rho}) e_m \tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho} e_m \varepsilon^*, \\ \tilde{\varepsilon}_f = \begin{cases} e_1^\top \tilde{\xi}_\varepsilon, & \text{если } m \geq 1, \\ \tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} + \rho \tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho} \varepsilon^*, & \text{если } m = 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Система Σ_3 зависит от ошибки $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon^*(t) = y(t) - \hat{y}(t) - y(t) + \hat{y}^*(t)$, поэтому также получим дифференциальное уравнение для нее:

$$(П.2.13) \quad \Sigma_3: \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A_0 - \Theta e_1^\top) \tilde{x}(t) + \tilde{\theta}_b(t) u(t), \\ \tilde{\varepsilon}(t) = e_1^\top \tilde{x}(t). \end{cases}$$

Доказательство теоремы выполним с помощью леммы П.1.5. Для возможности применения этой леммы сначала покажем, что $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}_f(t) = 0$. Для этого перепишем (П.2.13) в операторном виде

$$\tilde{\varepsilon}(t) = e_1^\top \left(sI - A_0 + \Theta e_1^\top \right) \left[\tilde{\theta}_b(t) u(t) \right],$$

а поскольку $\tilde{\theta}_b \in L_2 \cap L_\infty$ (по теореме 2) и $u \in L_\infty$ (по допущению 1 и в силу выбора (3.17)), по лемме П.1.1 имеем $\tilde{\varepsilon} \in L_2 \cap L_\infty$.

Дальнейшее доказательство различается для ситуаций $m = 0$ и $1 \leq m \leq n - 1$.

А) При $m = 0$ получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}, \tilde{\varepsilon} \in L_2 \cap L_\infty \\ y, \varepsilon^* \in L_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}_f \in L_2 \cap L_\infty \\ \tilde{y}_f \in L_2 \cap L_\infty \end{array} \right\}.$$

Б) Для случая $1 \leq m \leq n - 1$ введем в рассмотрение квадратичную форму:

$$(П.2.14) \quad V = \tilde{\xi}_\varepsilon^\top P \tilde{\xi}_\varepsilon,$$

где $A_b^\top P + P A_b = -Q$, $Q = Q^\top > 0$.

Производная (П.2.14) в силу системы Σ_2 может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\xi}_\varepsilon^\top \left(P \left[A_b - \tilde{\psi}_b e_1^\top \right] + \left[A_b - \tilde{\psi}_b e_1^\top \right]^\top P \right) \tilde{\xi}_\varepsilon + \\ &+ 2\tilde{\xi}_\varepsilon^\top P \left(-\tilde{\psi}_b \varepsilon_f + (\rho + \tilde{\rho}) e_m \tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho} e_m \varepsilon^* \right) = \\ (П.2.15) \quad &= -\tilde{\xi}_\varepsilon^\top \left(Q + P \tilde{\psi}_b e_1^\top + e_1 \tilde{\psi}_b^\top P \right) \tilde{\xi}_\varepsilon + \\ &+ 2\tilde{\xi}_\varepsilon^\top P \left(-\tilde{\psi}_b \varepsilon_f + (\rho + \tilde{\rho}) e_n \tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho} e_n \varepsilon^* \right) \leq \\ &\leq - \left(\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P) \left\| \tilde{\psi}_b \right\| - \chi_1^{-1} \lambda_{\max}^2(P) \right) \left\| \tilde{\xi}_\varepsilon \right\|^2 + \epsilon, \end{aligned}$$

где $\chi_1 > 0$ и $\epsilon = \chi_1 \left(\left\| \tilde{\psi}_b \varepsilon_f \right\| + \|(\rho + \tilde{\rho}) e_n \tilde{\varepsilon}\| + \|\tilde{\rho} e_n \varepsilon^*\| \right)^2$.

Для любых Q и P найдутся числа $\chi_1 > 0$ и $\chi_2 > 0$ такие, что

$$\lambda_{\min}(Q) - \chi_1^{-1} \lambda_{\max}^2(P) \geq \chi_2 > 0.$$

Это позволяет переписать (П.2.15) в следующем виде:

$$(П.2.16) \quad \dot{V} \leq - \left(\chi_2 - 2\lambda_{\max}(P) \left\| \tilde{\psi}_b \right\| \right) \left\| \tilde{\xi}_\varepsilon \right\|^2 + \epsilon.$$

Поскольку $\tilde{\psi}_b \in L_\infty$ и $\tilde{\psi}_b(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (из теоремы 2), то всегда найдутся числа $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$, момент времени $\infty > t_V \geq t_0$, такие что

$$0 < \frac{-\left(\chi_2 - 2\lambda_{\max}(P)\|\tilde{\psi}_b\|\right)}{\lambda_{\max}(P)} \leq \sigma_1, \text{ для всех } t \leq t_V,$$

$$\frac{\chi_2 - 2\lambda_{\max}(P)\|\tilde{\psi}_b\|}{\lambda_{\max}(P)} \geq \sigma_2 > 0, \text{ для всех } t \geq t_V.$$

Это позволяет переписать (П.2.16) в следующем виде:

$$(П.2.17) \quad \dot{V}(t) \leq \begin{cases} \sigma_1 V(t) + \epsilon(t), & \text{для всех } t \leq t_V, \\ -\sigma_2 V(t) + \epsilon(t) & \text{для всех } t > t_V. \end{cases}$$

Так как $\tilde{\psi}_b, \tilde{\rho}, \tilde{\varepsilon} \in L_2 \cap L_\infty$ (по теореме 2 и доказанному) и $\varepsilon_f \in L_\infty$, $\varepsilon^* \in L_\infty$ (по допущению 1 и в силу выбора (3.17)), то $\epsilon \in L_1 \cap L_\infty$. Так как $\infty > t_V \geq t_0$ и $\epsilon \in L_1 \cap L_\infty$, то $V(t)$ ограничена для всех $t \in [t_0, t_V]$. Поскольку $\epsilon \in L_1 \cap L_\infty$, то по лемме П.1.1 решение (П.2.17) также ограничено для всех $t \geq t_V$ и, следовательно, $V \in L_\infty$.

Проинтегрировав (П.2.17), получим:

$$(П.2.18) \quad V(t) \leq V(t_V) - \sigma_2 \int_{t_V}^t V(s) ds + \int_{t_V}^t \epsilon(s) ds.$$

Так как $V \in L_\infty$ и $\epsilon \in L_1$, то следующий интеграл ограничен:

$$\sigma_2 \int_{t_V}^t V(s) ds \leq -V(t) + V(t_V) + \int_{t_V}^t \epsilon(s) ds < \infty,$$

откуда $\tilde{\varepsilon}_f \in L_2 \cap L_\infty$.

Повторив рассуждения (П.2.14)–(П.2.18), имеем $\tilde{y}_f \in L_2 \cap L_\infty$. Таким образом, для всех $0 \leq m \leq n-1$ по лемме П.1.1 почти всегда в смысле выполнения импликации

$$(П.2.19) \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}_f \in L_2 \cap L_\infty \\ \tilde{y}_f \in L_2 \cap L_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s^i[\tilde{\varepsilon}_f(t)] \in L_2 \cap L_\infty \\ s^i[\tilde{y}_f(t)] \in L_2 \cap L_\infty \end{array} \right\} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

получаем $\tilde{h}_\varepsilon \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{h}_y \in L_2 \cap L_\infty$ (например, если $\frac{d}{dt}[\mu(t)] = 0$, то $\mathcal{H}(t, s)[s^i[\cdot]] = \mathcal{H}(t, s)s^i[\cdot]$ и $\tilde{h}_\varepsilon \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{h}_y \in L_2 \cap L_\infty$ следует непосредственно из леммы П.1.1).

С учетом $\tilde{\psi}_a \in L_2 \cap L_\infty$ (по теореме 2) на основании выражения (П.2.10) окончательно получаем $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$. Поскольку $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$

для $p \in [1, \infty)$ (по доказанному в утверждении 1), то найдется достаточно большое число $f_{\max}$ такое, что верно

$$\text{sat}_{f_{\max}} \left\{ \tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) - f(t) \right\} = \tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) - f(t),$$

значит, можем переписать (П.2.9) в следующем виде:

$$\tilde{y}(t) = W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) \right],$$

откуда в силу $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$ по лемме П.1.5 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0$.

Доказательство теоремы 5. В соответствии с доказательством утверждения 1 и теоремы 4 при $\mu(t) = \mu > 0$ замкнутая система управления описывается следующими выражениями:

$$(П.2.20а) \quad \begin{cases} \dot{\eta}(t) = \mu G \eta(t) + e_{n+1} m_0 \mu \lambda(t), \\ \tilde{f}(t) = e_1^\top \eta(t), \end{cases}$$

$$(П.2.20б) \quad \tilde{y}(t) = W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\text{sat}_{f_{\max}} \left\{ \tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) - f(t) \right\} + f(t) \right],$$

$$(П.2.20с) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_f(t) &= -\psi_a^\top(\Theta) \tilde{h}_\varepsilon(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) h_y(t) - \\ &- \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \tilde{h}_y(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) \tilde{h}_y(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{f} \in L_\infty$ в силу $\mu \lambda \in L_\infty$ и гурвицевости матрицы G , а для $\tilde{f}_f(t)$ (повторив доказательство (П.2.12)–(П.2.19) из теоремы 4) при выполнении допущения 1 имеем

$$\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}_b \in L_2 \cap L_\infty \Rightarrow \tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty.$$

Тогда существует достаточно большое число $f_{\max}$ такое, что верно

$$\tilde{y}(t) = \underbrace{W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\tilde{f}_f(t) \right]}_{\tilde{y}_1(t)} - \underbrace{W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\tilde{f}(t) \right]}_{\tilde{y}_2(t)},$$

где в силу $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$ по лемме П.1.5 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}_1(t) = 0$.

Для завершения доказательства рассмотрим (П.2.20а) совместно с системой

$$(П.2.21) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_{cl} z(t) + e_{n_{cl}} \tilde{f}(t), \\ \tilde{y}_2(t) &= [0_{1 \times (n_{cl} - (m_{cl} + 1))} \quad \theta_{b,cl}^\top] z(t), \end{aligned}$$

где

$$A_{cl} = A_0 + e_{n_{cl}} \theta_{a,cl}^\top, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0_{n_{cl}} & I_{n_{cl}-1} \\ 0_{1 \times (n_{cl}-1)} & \end{bmatrix}, \quad e_{n_{cl}} = \begin{bmatrix} 0_{n_{cl}-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

а параметры $\theta_{a,cl}$, $\theta_{b,cl}$ являются аналогами θ_a , θ_b и соответствуют параметрам числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы (2.4).

Для анализа устойчивости (П.2.20а) + (П.2.21) введем в рассмотрение квадратичную форму:

$$(П.2.22) \quad V = z^\top P_z z + \frac{1}{\mu} \eta^\top P_\eta \eta,$$

где $P_z A_{cl} + A_{cl}^\top P_z = -Q_z$, $P_\eta G + G^\top P_\eta = -Q_\eta$ и матрицы $Q_z = Q_z^\top > 0$, $Q_\eta = Q_\eta^\top > 0$ подобраны так, что для некоторых чисел $\chi_z \in (0, 1)$, $\chi_\eta \in (0, 1)$ верно:

$$\begin{aligned} 0 < c_z &\leq \lambda_{\min} \left(Q_z - \chi_z^{-1} P_z e_{n_{cl}} e_{n_{cl}}^\top P_z \right), \\ 0 < c_\eta &\leq \lambda_{\min} \left(Q_\eta - m_0 \chi_\eta^{-1} P_\eta e_{n+1} e_{n+1}^\top P_\eta - \chi_z e_1 e_1^\top \right). \end{aligned}$$

Производная (П.2.22) в силу уравнений (П.2.20а) и (П.2.21) имеет вид

$$\begin{aligned} (П.2.23) \quad \dot{V} &= z^\top \left[P_z A_{cl} + A_{cl}^\top P_z \right] z + 2z^\top P_z e_{n_{cl}} e_1^\top \eta + \\ &+ \eta^\top \left[P_\eta G + G^\top P_\eta \right] \eta + 2\eta^\top P_\eta e_{n+1} m_0 \lambda = \\ &= -z^\top Q_z z - \eta^\top Q_\eta \eta + 2z^\top P_z e_{n_{cl}} e_1^\top \eta + 2\eta^\top P_\eta e_{n+1} m_0 \lambda. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\begin{aligned} 2z^\top P_z e_{n_{cl}} e_1^\top \eta &\leq \chi_z^{-1} z^\top P_z e_{n_{cl}} e_{n_{cl}}^\top P_z z + \chi_z \eta^\top e_1 e_1^\top \eta, \\ 2\eta^\top P_\eta e_{n+1} \lambda &\leq \chi_\eta^{-1} \eta^\top P_\eta e_{n+1} e_{n+1}^\top P_\eta \eta + \chi_\eta \lambda^2, \end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned} (П.2.24) \quad \dot{V} &= -z^\top \left[Q_z - \chi_z^{-1} P_z e_{n_{cl}} e_{n_{cl}}^\top P_z \right] z - \\ &- \eta^\top \left[Q_\eta - m_0 \chi_\eta^{-1} P_\eta e_{n+1} e_{n+1}^\top P_\eta - \chi_z e_1 e_1^\top \right] \eta + \chi_\eta m_0 \lambda^2 \leq \\ &\leq -\min \left\{ \frac{c_z}{\lambda_{\max}(P_z)}, \frac{\mu c_\eta}{\lambda_{\max}(P_\eta)} \right\} V + \chi_\eta m_0 \lambda^2. \end{aligned}$$

Поскольку в силу допущения 2 верно $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lambda^2(\mu) = 0$, то из (П.2.24) вместе с $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}_1(t) = 0$ получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ для произвольно малого числа $\epsilon > 0$.

Доказательство теоремы 6. При $\mu(t) = \mu > 0$ по доказанному в теореме 5 замкнутая система управления описывается выражениями (П.2.20а)–(П.2.20с) и (П.2.21). Более того, для компоненты $\tilde{y}_2(t)$ вынужденного движения (повторив анализ (П.2.21)–(П.2.24)) имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}_2(t)| \leq \epsilon_2$ для произвольно малого числа $\epsilon_2 > 0$. Из существования оценки сверху (3.16) на

основании выражений (П.2.10)–(П.2.13) нетрудными, но довольно объемными рассуждениями возможно получить оценку сверху на $\tilde{f}_f(t)$ в следующем виде:

$$(П.2.25) \quad \left| \tilde{f}_f(t) \right| \leq \tilde{f}_{1f}(t) + T^{-1} \tilde{f}_{0f},$$

где $\tilde{f}_{1f} \in L_2$ и $0 < \tilde{f}_{0f} < \infty$.

Тогда для завершения доказательства остается рассмотреть систему

$$(П.2.26) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_{cl} z(t) + e_{n_{cl}} \tilde{f}_f(t), \\ \tilde{y}_1(t) &= [0_{1 \times (n_{cl} - (m_{cl} + 1))} \quad \theta_{b,cl}^\top] z(t). \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости (П.2.26) введем в рассмотрение квадратичную форму

$$(П.2.27) \quad V = z^\top P_z z,$$

где $P_z A_{cl} + A_{cl}^\top P_z = -Q_z$ и матрица $Q_z = Q_z^\top > 0$ подобрана так, что для некоторого числа $\chi_z \in (0, 1)$ верно $0 < c_z \leq \lambda_{\min}(Q_z) - \chi_z^{-1} \|P_z e_{n_{cl}}\|^2$.

Производная (П.2.27) в силу уравнения (П.2.26) имеет вид

$$(П.2.28) \quad \dot{V} = z^\top \left[P_z A_{cl} + A_{cl}^\top P_z \right] z + 2z^\top P_z e_{n_{cl}} \tilde{f}_f.$$

В силу оценки (П.2.25) также получим:

$$\begin{aligned} 2 \left\| z^\top P_z e_{n_{cl}} \tilde{f}_f \right\| &\leq 2 \|z\| \|P_z e_{n_{cl}}\| \left| \tilde{f}_f \right|, \\ 2 \|z\| \|P_z e_{n_{cl}}\| \left| \tilde{f}_f \right| &\leq \chi_z^{-1} \|P_z e_{n_{cl}}\|^2 \|z\|^2 + \chi_z \tilde{f}_f^2, \\ \tilde{f}_f^2 &\leq \tilde{f}_{1f}^2(t) + 2T^{-1} \tilde{f}_{1f} \tilde{f}_{0f} + T^{-2} \tilde{f}_{0f}^2, \\ 2T^{-1} \tilde{f}_{1f} \tilde{f}_{0f} &\leq \tilde{f}_{1f}^2(t) + T^{-2} \tilde{f}_{0f}^2, \end{aligned}$$

а значит, имеем:

$$(П.2.29) \quad \dot{V} \leq -c_z \|z\|^2 + 2\chi_z \tilde{f}_{1f}^2(t) + 2T^{-2} \chi_z \tilde{f}_{0f}^2.$$

Поскольку $\tilde{f}_{1f} \in L_2$ и $\tilde{f}_{0f} < \infty$, то из (П.2.29) получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}_1(t)| \leq \epsilon_1$ для произвольно малого числа $\epsilon_1 > 0$, что позволяет сделать вывод о $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ для произвольно малого числа $\epsilon > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. She J.-H., Fang M., Ohyama Y., Hashimoto H., Wu M. Improving disturbance-rejection performance based on an equivalent-input-disturbance approach // IEEE Transact. Indust. Electron. 2008. V. 55. No. 1. P. 380–389.

2. Андреевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1 // *АиТ*. 2020. № 9. С. 3–61.
Andrievsky B., Furtat I. Disturbance Observers: Methods and Applications. I // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1563–1610.
3. Андреевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 2 // *АиТ*. 2020. № 10. С. 35–91.
Andrievsky B., Furtat I. Disturbance Observers: Methods and Applications. II // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 10. P. 1775–1818.
4. *Chen W.-H., Yang J., Guo L., Li S. Disturbance-observer-based control and related methods – An overview // IEEE Transact. Indust. Electron. 2015. V. 63. No. 2. P. 1083–1095.*
5. *Sariyildiz E., Oboe R., Ohnishi K. Disturbance observer-based robust control and its applications: 35th anniversary overview // IEEE Transact. Indust. Electron. 2019. V. 67. No. 3. P. 2042–2053.*
6. *Johnson C. Further study of the linear regulator with disturbances – The case of vector disturbances satisfying a linear differential equation // IEEE Transact. Autom. Control. 1970. V. 15. No. 2. P. 222–228.*
7. Бобцов А.А., Кремлев А.С., Цвикевич В.И. Синтез наблюдателя для конечного возмущения // *Науч.-техн. вест. информ. технологий, механики и оптики*. 2003. № 11. С. 81–85.
8. Никифоров В.О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений I. Объекты с известными параметрами // *АиТ*. 2004. № 10. С. 13–24.
Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. I. Objects with Known Parameters // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 10. P. 1531–1541.
9. *Marino R., Santosuosso G.L., Tomei P. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency // Automatica. 2003. V. 39. No. 10. P. 1755–1761.*
10. *Bobtsov A., Kremlev A. Adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency // IFAC Proceedings Volumes. 2005. V. 38. No. 1. P. 131–136.*
11. Бобцов А., Пыркин А.А. Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // *АиТ*. 2009. № 3. С. 114–122.
Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensation of unknown sinusoidal disturbances in linear plants of arbitrary relative degree // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 449–456.
12. Никифоров В.О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // *АиТ*. 2004. № 11. С. 40–48.
Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. II. Objects with Unknown Parameters // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.
13. Бобцов А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // *АиТ*. 2008. № 8. С. 25–32.
Bobtsov A.A. Output control algorithm with the compensation of biased harmonic disturbances // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 8. P. 1289–1296.

14. *Бобцов А.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А.* Компенсация гармонического возмущения для параметрически и функционально не определенного нелинейного объекта // *АиТ.* 2011. № 1. С. 121–129.
Bobtsov A.A., Kremlev A.S., Pyrkin A.A. Compensation of harmonic disturbances in nonlinear plants with parametric and functional uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 1. P. 111–118.
15. *Бобцов А.А., Колубин С.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А.* Итеративный алгоритм адаптивного управления по выходу с полной компенсацией неизвестного синусоидального возмущения // *АиТ.* 2012. № 8. С. 64–75.
Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Kremlev A.S., Pyrkin A.A. An iterative algorithm of adaptive output control with complete compensation for unknown sinusoidal disturbance // *Autom. Remote Control.* 2012. V. 73. No. 8. P. 1327–1336.
16. *Бобцов А.А., Ведяков А.А., Колубин С.А., Пыркин А.А.* Гибридный алгоритм управления по выходу с компенсацией неизвестного мультисинусоидального возмущения // *Изв. Вузов. Приборостроение.* 2013. Т. 56. № 4. С. 7–10.
17. *Corless M., Tu J.* State and Input Estimation for a Class of Uncertain Systems // *Automatica.* 1998. V. 34. No. 6. P. 757–764.
18. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных управляемых систем // *Дифференц. уравнения.* 1997. Т. 34. № 6. С. 744–750.
19. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009. 222 с.
20. *Edwards C., Spurgeon S.K., Patton R. J.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica.* 2000. V. 36. No. 4. P. 541–553.
21. *Feng H., Guo B.Z.* Active disturbance rejection control: Old and new results // *Annual Reviews in Control.* 2017. V. 44. P. 238–248.
22. *Han J.* From PID to active disturbance rejection control // *IEEE Transact. Indust. Electron.* 2009. V. 56. No. 3. P. 900–906.
23. *Bobtsov A., Pyrkin A.* A new approach to MRAC problem with disturbance rejection // *IFAC Proceedings Volumes.* 2007. V. 40. No. 13. P. 92–97.
24. *Yang J., Na J., Gao G.* Robust adaptive control with a modified controller for transient response improvement // *9 Int. Conf. Model. Identificat. Control (ICMIC).* IEEE, 2017. P. 929–934.
25. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // *АиТ.* 2007. № 7. С. 103–115.
Tsykunov A.M. Robust control algorithms with compensation of bounded perturbations // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 7. P. 1213–1224.
26. *Цыкунов А.М.* Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу. М.: Физматлит, 2009. 268 с.
27. *Glushchenko A., Lastochkin K., Abramenzkov, A., Abdulov, A.* Robust Attitude Control of Underwater Unmanned Vehicle with Estimation and Compensation of Matched Uncertainty // *5th Int. Conf. Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA).* IEEE, 2023. P. 58–63.

28. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust adaptive control. Upper Saddle River. N.J: PTR Prentice-Hall, 1996.
29. *Bobtsov A.A., Efimov D.V., Pyrkin A.* Hybrid adaptive observers for locally Lipschitz systems // Int. J. Adaptiv Control Signal Proc. 2011. V. 25. No. 1. P. 33–47.
30. *Efimov D., Edwards C., Zolghadri A.* Enhancement of adaptive observer robustness applying sliding mode techniques // Automatica. 2016. V. 72. P. 53–56.
31. *Колесников А.А.* Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
32. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Instrumental Variables based DREM for Online Asymptotic Identification of Perturbed Linear Systems // arXiv:2312.15631, 2023. P. 1–13.
33. *Söderström T., Stoica P.* Instrumental variable methods for system identification // Circuits, Systems and Signal Processing. 2002. V. 21. No. 1. P. 1–9.
34. *Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A.A., Astolfi A., Bobtsov A.A.* New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases // IEEE Transact. Autom. Control. 2020. V. 66. No. 5. P. 2265–2272.
35. *Tao G.* Adaptive control design and analysis, John Wiley & Sons, 2003.
36. *Aranovskiy S.* Parameter Estimation with Enhanced Performance, Habilitation.
37. *Wang J., Efimov D., Bobtsov A.* On robust parameter estimation in finite-time without persistence of excitation // IEEE Transact. Autom. Control. 2019. Vol. 65. No. 4. P. 1731–1738.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 24.06.2024

Принята к публикации 10.07.2024

© 2024 г. С.В. АКМАНОВА, канд. пед. наук (svet.akm_74@mail.ru)
(Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова)

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Рассматриваются нелинейные непрерывно-дискретные (гибридные) системы, содержащие подсистему дифференциальных уравнений и подсистему разностных уравнений, в состав которых входит управление (скалярное или векторное). Представлен переход от нелинейной гибридной системы с постоянным шагом $h > 0$ дискретизации к равносильной (в естественном смысле) нелинейной дискретной динамической системе. Установлены достаточные условия приведения систем первого приближения нелинейных дискретных систем к канонической форме Бруновского и достаточные условия стабилизации таких систем, достаточные условия стабилизации нелинейных гибридных систем с различным по размерности управлением. Разработаны алгоритмы построения стабилизирующих управлений для нелинейных гибридных систем. Приведены примеры, иллюстрирующие эффективность полученных результатов в решении задачи стабилизации нелинейных гибридных динамических систем.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, дискретная система, гибридная система, управляемая система, точка равновесия, стабилизируемая система, каноническая форма Бруновского.

DOI: 10.31857/S0005231024090023, **EDN:** ZQWTTU

1. Введение

Задача стабилизации динамических систем является одной из важнейших в теории управления, что обусловлено запросами практики управления, а также открытыми (нерешенными) научными проблемами в этой области [1–4]. Решение данной задачи позволит обеспечить устойчивые режимы функционирования динамических систем и поможет решить поставленные задачи управления данными системами.

Гибридные динамические системы служат математическими моделями реальных механических, технических, технологических и других процессов, природа которых неоднородна и которые не могут быть описаны только дифференциальными уравнениями. Например, моделирование управления летательными аппаратами, электропоездами может быть реализовано лишь с помощью дискретного регулятора силы тяги [5, 6]. Поэтому главной особенностью таких гибридных (непрерывно-дискретных) динамических систем управления служит их адекватность моделируемым объектам [7], процессы функционирования которых носят, как правило, нелинейный характер, а зна-

чит соответствующие им гибридные динамические системы являются нелинейными непрерывно-дискретными системами.

Среди гибридных систем имеется большой класс систем, стабилизируемых соответствующими переключениями в определенные моменты времени [8]. Однако вопросы стабилизации реальных динамических систем управления неразрывно связаны с вопросами управляемости указанных систем.

Методы стабилизации управляемых динамических систем создавались и развивались более 150 лет [4]. Накоплен большой опыт по стабилизации непрерывных, дискретных систем (см., например, [9–16]), имеются наработки в области стабилизации линейных гибридных систем (см., например, [3, 7, 17]), а также нелинейных гибридных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с различными нелинейностями и управлением в виде дискретного регулятора обратной связи по состоянию или выходу [18–22]. Однако вопросы стабилизации нелинейных гибридных систем, процессы в которых описываются дифференциальными и разностными уравнениями, а состояния содержат как непрерывные, так и дискретные компоненты, недостаточно изучены.

В настоящей статье изложен общий подход к стабилизации таких нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) систем со скалярным или многомерным (векторным) управлением, имеющих постоянный шаг дискретизации. Этот подход основан на переходе от данной нелинейной гибридной системы к равносильной, в естественном смысле, нелинейной дискретной динамической системе.

Новизна данного исследования состоит в следующем:

1) введено понятие канонической формы Бруновского для системы первого приближения нелинейной дискретной динамической системы со скалярным управлением;

2) установлены достаточные условия приведения системы первого приближения равносильной нелинейной дискретной системы со скалярным (векторным) управлением к канонической форме Бруновского (к совокупности независимых подсистем, каждая из которых имеет каноническую форму Бруновского);

3) установлены и продемонстрированы на примерах алгоритмы приведения систем первого приближения равносильных нелинейных дискретных систем (как со скалярным, так и с векторным управлением) к канонической форме Бруновского;

4) установлены достаточные условия стабилизации систем первого приближения равносильных нелинейных дискретных динамических систем управления (как со скалярным, так и с векторным управлением);

5) установлены достаточные условия стабилизации нелинейных гибридных динамических систем управления с различным по размерности управлением;

6) установлены и продемонстрированы на примерах алгоритмы построения стабилизирующих управлений для нелинейных гибридных систем с различным по размерности управлением.

2. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная система управления вида

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$(2) \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$ – векторы состояний системы (1), характеризующие поведение соответственно непрерывной и дискретной частей данной системы; $u \in R^q$ – управление системы (1); моменты времени t_k задают на R равномерную сетку с постоянным шагом $h > 0$, т.е. $t_{k+1} - t_k = h > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и $t_k = kh$; функции $f(x, y)$ и $g(x, y, u)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных.

Пусть при выключенном управлении, т.е. при $u = 0$, выполняются соотношения

$$(3) \quad f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0) = 0,$$

т.е. при $u = 0$ система (1) имеет нулевую точку равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Функционирование системы (1) при выбранном управлении $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, с учетом (2), осуществляется по стандартной схеме:

- 1) задаются начальные условия $z_0 = (x_0, y_0)$;
- 2) находится решение $x = \varphi_0(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_0)$, $x(t_0) = x_0$, по которому строятся векторы $x_1 = \varphi_0(t_1)$, $y_1 = g(x_1, y_0, u_0)$, где $u_0 = u(t_0)$;
- 3) находится решение $x = \varphi_1(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_1)$, $x(t_1) = x_1$, по которому строятся векторы $x_2 = \varphi_1(t_2)$, $y_2 = g(x_2, y_1, u_1)$, где $u_1 = u(t_1)$ и т.д.

Следовательно, решением системы (1), стартующим из точки $z_0 = (x_0, y_0)$ при выбранном управлении $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, является функция

$$(4) \quad z(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (\varphi_0(t), y_0), & t_0 \leq t < t_1, \\ (\varphi_1(t), y_1), & t_1 \leq t < t_2, \\ (\varphi_2(t), y_2), & t_2 \leq t < t_3, \\ \vdots & \end{cases}$$

Компоненты решения (4) имеют следующие особенности: $x(t)$ непрерывна при всех $t \geq 0$, непрерывно дифференцируема на интервале (t_k, t_{k+1}) , но не обязательно дифференцируема в моменты времени $t = t_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $y(t)$ кусочно-постоянна и меняет свои значения в моменты времени $t = t_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Основной задачей в настоящей статье является установление достаточных условий стабилизации систем вида (1) и построение стабилизирующих управлений для таких систем. Решение поставленной задачи основано на переходе

от нелинейной гибридной системы (1) к равносильной нелинейной дискретной динамической системе.

3. Переход к дискретной системе. Управляемость и стабилизируемость систем

Учитывая соотношения (3), функции $f(x, y)$, $g(x, y, u)$ можно представить в виде

$$f(x, y) = A_1x + B_1y + a(x, y), \quad g(x, y, u) = A_2x + B_2y + Cu + b(x, y, u),$$

где $A_1 = f'_x(0, 0)$, $B_1 = f'_y(0, 0)$, $A_2 = g'_x(0, 0, 0)$, $B_2 = g'_y(0, 0, 0)$, $C = g'_u(0, 0, 0)$ – матрицы соответствующих размеров, а гладкие нелинейности $a(x, y)$ и $b(x, y, u)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} a(x, y) &= o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| \rightarrow 0, \\ b(x, y, u) &= o(\|x\| + \|y\| + \|u\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Будем полагать, что $x(t_k) = x_k$, $y(t_k) = y_k$, $u(t_k) = u_k$, тогда система (1) равносильна гибридной системе

$$(5) \quad \begin{cases} x'(t) = A_1x(t) + B_1y_k + a(x(t), y_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y_{k+1} = A_2x_{k+1} + B_2y_k + Cu_k + b(x_{k+1}, y_k, u_k), & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Пусть $\det A_1 \neq 0$, тогда, применяя оператор сдвига по траекториям системы $x' = f(x, y)$ за время от $t = 0$ до $t = h > 0$ (см. [23]), можно выполнить переход от системы (5) к дискретной системе вида

$$(6) \quad \begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1h}x_k + A_1^{-1}(e^{A_1h} - I)B_1y_k + \varepsilon(x_k, y_k; h), \\ y_{k+1} = A_2e^{A_1h}x_k + (A_2A_1^{-1}(e^{A_1h} - I)B_1 + B_2)y_k + Cu_k + \delta(x_k, y_k, u_k; h), \end{cases}$$

где

$$\varepsilon(x_k, y_k; h) = e^{(t_k+h)A_1} \int_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} a(p(s, x_k, y_k), y_k) ds,$$

$x = p(t, x_k, y_k)$ – решение задачи Коши

$$(7) \quad \begin{aligned} x' &= A_1x + B_1y_k + a(x, y_k), \quad x(t_k) = x_k; \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) &= A_2\varepsilon(x_k, y_k; h) + b(x_{k+1}, y_k, u_k). \end{aligned}$$

Отметим, что случай вырожденной матрицы A_1 также может быть рассмотрен, но приводит к существенно более сложным формулам.

Дискретную систему (6) можно записать в компактном виде

$$(8) \quad z_{k+1} = A(h)z_k + Bu_k + \xi(z_k, u_k, h), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

здесь

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix},$$

$A(h)$ – блочная матрица порядка $n + m$:

$$(9) \quad A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix}.$$

При $u = 0$ система (6) или, что то же самое, система (8) имеет нулевое положение равновесия.

Используя [23] и условие (7), можно доказать, что

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y; h) &= o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| \rightarrow 0, \\ \delta(x, y, u; h) &= o(\|x\| + \|y\| + \|u\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда в системе (8) функция $\xi(z, u, h)$ удовлетворяет условию

$$(10) \quad \xi(z, u, h) = o(\|z\| + \|u\|) \quad \text{при} \quad \|z\| + \|u\| \rightarrow 0.$$

При выбранном управлении $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, гибридная система (1) и дискретная система (6) равносильны в следующем смысле [8]:

– если $(x(t), y_k)$ – решение системы (1), то (x_k, y_k) – решение системы (6), где $x_k = x(t_k)$;

– если (x_k, y_k) – решение системы (6), то $(x(t), y_k)$ – решение системы (1), где $x(t)$ – решение задачи Коши $x' = f(x, y_k)$, $x(t_k) = x_k$.

Следовательно, система (1) и система (8) также равносильны.

Основываясь на [24–26], введем следующие определения.

Определение 1. Гибридная система (1) называется управляемой при $h = h_0 > 0$, если для любых векторов $z^{(0)}, z^{(1)} \in R^{n+m}$ существует управление $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, l - 1$ ($l \in N$) такое, что для решения $z = z(t)$ системы (1) с начальным условием $z(t_0) = z^{(0)}$ выполняется равенство $z(t_l) = z^{(1)}$, где $t_l = t_0 + lh_0$.

Определение 2. Дискретная система (8) называется управляемой при $h = h_0 > 0$, если для любых состояний $z^{(0)}, z^{(1)} \in R^{n+m}$ существует управление u_k , $k = 0, 1, \dots, l - 1$ ($l \in N$) такое, что для решения z_k , $k = 0, 1, \dots, l$, системы (8) с начальным условием $z_0 = z^{(0)}$ выполняется равенство $z_l = z^{(1)}$, где $z_l = z(t_l) = z(t_0 + lh_0)$.

Положение равновесия систем (1) и (8) при некоторых $h > 0$ может быть неустойчивым.

Определение 3. Гибридная система (1) называется стабилизируемой при $h = h_0 > 0$, если существует кусочно-постоянная функция $u = \varphi(t) \in R^q$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, такая что система (1) с управлением $u = \varphi(t)$ при $h = h_0 > 0$ имеет асимптотически устойчивое решение $x = 0$, $y = 0$.

Определение 4. Дискретная система (8) называется стабилизируемой при $h = h_0 > 0$, если существует управление $u_k = \Phi(z_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, такое что при $h = h_0 > 0$ система (8) имеет асимптотически устойчивое решение $z = 0$.

Сравнивая определения 1 и 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Гибридная система (1) управляема при $h = h_0 > 0$ в том и только том случае, если дискретная система (8) управляема при $h = h_0 > 0$. Доказательство данной теоремы и других основных утверждений вынесено в Приложение.

Системой первого приближения нелинейной дискретной системы (8) служит линейная дискретная система вида

$$(11) \quad z_{k+1} = A(h)z_k + Bu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Перейдем к рассмотрению вопросов стабилизации системы (1), учитывая особенности управления в этой системе.

4. Стабилизация гибридной системы (1) со скалярным управлением

Пусть в системе (1) $u \in R^1$, тогда система первого приближения соответствующей дискретной системы (8) имеет вид

$$(12) \quad z_{k+1} = A(h)z_k + bu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $z \in R^{n+m}$, $A(h)$ – матрица вида (9), b – матрица размера $(n+m) \times 1$, $u \in R^1$.

Будем полагать, что при $h = h_0 > 0$ для системы (12) выполняется условие полной достижимости, т.е.

$$(13) \quad \text{rank}[b, A(h_0)b, A^2(h_0)b, \dots, A^{n+m-1}(h_0)b] = n+m,$$

из которого следует управляемость системы (12) при $h = h_0 > 0$.

Заметим, что условие (13) можно ослабить, например, условием полной управляемости системы (12) при $h = h_0 > 0$ ([11], с. 268–269).

Имеет место

Теорема 2. Пусть линейная дискретная система (12) удовлетворяет условию (13), тогда существует преобразование

$$(14) \quad z_k^* = Sz_k, \quad u_k^* = \alpha z_k + u_k,$$

где $\det S \neq 0$, α – матрица размера $1 \times (n+m)$, приводящее данную систему к виду

$$(15) \quad \begin{cases} z_{k+1,1}^* = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,n+m-1}^* = z_{k,n+m}^*, \\ z_{k+1,n+m}^* = u_k^*, \end{cases}$$

при этом $z_{k,i}^*$ – i -я компонента вектора z_k^* .

Систему (15) назовем канонической формой Бруновского для системы (12) при $h = h_0 > 0$. В таком случае справедлива

Теорема 3. Пусть система (12) удовлетворяет условию (13), тогда она стабилизируема при $h = h_0 > 0$.

Из доказательства теоремы 3 (см. ниже Приложение) и равенств (14) получим

Следствие 1. Управление $u_k = S^* z_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $S^* = pS - \alpha$, $u_k^* = pz_k^*$, является стабилизирующим для линейной дискретной системы (12), при этом все собственные значения матрицы $A(h_0) + bS^*$ меньше 1 по модулю.

Теорема 4. Если система первого приближения (12) соответствующей нелинейной дискретной системы (8) удовлетворяет условию (13), тогда соответствующая гибридная система (1) стабилизируема при $h = h_0 > 0$.

Пример 1. Построить стабилизирующее управление для гибридной системы

$$(16) \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y_{k,1} + a(x(t), y_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y_{k+1,1} = x(t_{k+1}) + y_{k,2} - u_k + b_1(x(t_{k+1}), y_k, u_k), \\ y_{k+1,2} = -x(t_{k+1}) + y_{k,1} + 0,5u_k + b_2(x(t_{k+1}), y_k, u_k), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $x \in R^1$, $y \in R^2$, $u \in R^1$; $a(x, y)$, $b_1(x, y, u)$, $b_2(x, y, u)$ – гладкие нелинейности в соответствии с системой (5), приводя соответствующую дискретную систему первого приближения к канонической форме Бруновского.

Системой первого приближения для нелинейной дискретной системы, равносильной системе (16), служит дискретная система вида (12) с матрицами

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{-h} & 1 - e^{-h} & 0 \\ e^{-h} & 1 - e^{-h} & 1 \\ -e^{-h} & e^{-h} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что эта дискретная система управляема при всех $h : 0 < h \neq \ln 4$.

Пусть $h_0 = \ln 2$, тогда $A(h_0) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$, заметим, что при $u = 0$ ре-

шение $x = 0$, $y = 0$ системы (16) является устойчивым (но не асимптотически устойчивым). Составим матрицу $F(h_0) = [b, A(h_0)b, A^2(h_0)b]$.

$$F(h_0) = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & -0,25 \\ -1 & 0 & -0,75 \\ 0,5 & -0,5 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad \text{тогда } F^{-1}(h_0) = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \\ -8 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$f(h_0) = [-8 \ 4 \ 8], \quad S = \begin{bmatrix} f(h_0) \\ f(h_0)A(h_0) \\ f(h_0)A^2(h_0) \end{bmatrix}, \quad \text{т.е.} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда $z_k^* = Sz_k$, что соответствует системе

$$\begin{cases} z_{k,1}^* = -8x_k + 4y_{k,1} + 8y_{k,2}, \\ z_{k,2}^* = -6x_k + 2y_{k,1} + 4y_{k,2}, \\ z_{k,3}^* = -4x_k + 2y_{k,2}. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} z_{k+1,1}^* = -8x_{k+1} + 4y_{k+1,1} + 8y_{k+1,2} = -6x_k + 2y_{k,1} + 4y_{k,2} = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = -6x_{k+1} + 2y_{k+1,1} + 4y_{k+1,2} = -4x_k + 2y_{k,2} = z_{k,3}^*, \\ z_{k+1,3}^* = -4x_{k+1} + 2y_{k+1,2} = -3x_k - y_{k,1} + u_k = u_k^*. \end{cases}$$

Таким образом, каноническая форма Бруновского для дискретной системы первого приближения, соответствующей системе (16), при $h_0 = \ln 2$ имеет вид

$$\begin{cases} z_{k+1,1}^* = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*, \\ z_{k+1,3}^* = u_k^*, \end{cases}$$

где $u_k^* = -3x_k - y_{k,1} + u_k$. Можно убедиться, что $u_k^* = \alpha z_k + u_k$, где $\alpha = f(h_0)A^3(h_0)$.

Найдем стабилизирующее управление для системы (16).

Имеем $u_k = S^* z_k$, $S^* = pS - \alpha$, $u_k^* = pz_k^*$, где $p = [p_1 \ p_2 \ p_3]$, p_1 , p_2 и p_3 – коэффициенты характеристического уравнения последней системы уравнений:

$$\lambda^3 - p_3\lambda^2 - p_2\lambda - p_1 = 0.$$

Поскольку коэффициенты характеристического уравнения выбираются произвольно, то подберем их так, чтобы корни λ_1 , λ_2 и λ_3 этого уравнения лежали внутри единичной окружности.

Возьмем $\lambda_{1,2,3} = \frac{1}{2}$, тогда $\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{8} = 0$, и $p = [\frac{1}{8} \ -\frac{3}{4} \ \frac{3}{2}]$, $\alpha = [-3 \ -1 \ 0]$, отсюда $S^* = [\frac{1}{2} \ 0 \ 1]$, т.е. $u_k = \frac{1}{2}x_k + y_{k,2}$ – искомое управление.

Действительно, при $h_0 = \ln 2$ подстановка найденного управления в дискретную систему вида (12), соответствующую системе (16), позволит получить матрицу $A(h_0) + bS^*$, все собственные значения которой равны $\frac{1}{2}$, т.е. по модулю меньше 1. Тогда на основании доказательства теоремы 4 (см. ниже Приложение) делаем вывод о том, что система (16) стабилизируема при $h_0 = \ln 2$ управлением $u_k = \frac{1}{2}x_k + y_{k,2}$.

Рассмотрим важный частный случай системы (1), когда $n = m = q = 1$. Тогда система (1) содержит скалярные уравнения и равносильна гибридной системе вида

$$(17) \quad \begin{cases} x'(t) = a_1x(t) + b_1y_k + a(x(t), y_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y_{k+1} = a_2x_{k+1} + b_2y_k + cu_k + b(x_{k+1}, y_k, u_k), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $a_1 = f'_x(0, 0)$, $b_1 = f'_y(0, 0)$, $a_2 = g'_x(0, 0, 0)$, $b_2 = g'_y(0, 0, 0)$, $c = g'_u(0, 0, 0)$ – числа, а гладкие нелинейности $a(x, y)$ и $b(x, y, u)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} a(x, y) &= o(|x| + |y|) \quad \text{при } |x| + |y| \rightarrow 0, \\ b(x, y, u) &= o(|x| + |y| + |u|) \quad \text{при } |x| + |y| + |u| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Равносильная системе (17) нелинейная дискретная система имеет систему первого приближения вида (12), где

$$(18) \quad A(h) = \begin{bmatrix} e^{a_1 h} & \frac{b_1}{a_1}(e^{a_1 h} - 1) \\ a_2 e^{a_1 h} & \frac{a_2 b_1}{a_1}(e^{a_1 h} - 1) + b_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}.$$

Тогда справедлива

Теорема 5. Если гибридная система (1) содержит скалярные уравнения и в равносильной системе (17) $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c \neq 0$, тогда система (1) стабилизируема при любом $h > 0$.

В таком случае стабилизирующее управление находится согласно алгоритму, продемонстрированному в Примере 1.

5. Стабилизация системы (1) с многомерным (векторным) управлением

Пусть в гибридной системе (1) $n \geq 1$, $m > 1$, $q > 1$, т.е. для равносильной дискретной системы (8) системой первого приближения служит дискретная система (11), и пусть система (11) при $h = h_0 > 0$ удовлетворяет условию полной достижимости, т.е.

$$(19) \quad \text{rank}[B, A(h_0)B, A^2(h_0)B, \dots, A^{n+m-1}(h_0)B] = n + m.$$

Теорема 6. Если система (11) удовлетворяет условию (19), тогда существует преобразование

$$(20) \quad z_k^* = Sz_k, \quad u_{k,l}^* = \alpha_l z_k + u_{k,l}, \quad \det S \neq 0, \quad l = 1, \dots, q,$$

приводящее систему (11) к совокупности q независимых подсистем, каждая из которых имеет каноническую форму Бруновского.

Из доказательства данной теоремы (см. Приложение) следует, что исходная система (11) распадается на q независимых подсистем вида (15), размерности которых равны $s_1, \dots, s_q$, при этом $s_1 + s_2 + \dots + s_q = n + m$. Тогда справедлива

Теорема 7. Если линейная дискретная система (11) удовлетворяет условию (19), тогда она стабилизируема при $h = h_0 > 0$.

Из доказательства теоремы 7 (см. ниже Приложение) и равенств (20) получим

Следствие 2. Стабилизирующее управление для дискретной системы (11) имеет вид

$$u_k = S^* z_k,$$

где $u_{k,l} = s_l^* z_k$, $s_l^* = pS_l - \alpha_l$, $u_{k,l}^* = pz_{kl}^*$, S_l – часть матрицы S , соответствующая подсистеме l ($l = 1, \dots, q$), p – вектор размерности s_l , z_{kl}^* – вектор, содержащий s_l компонент вектора z_k^* , соответствующих подсистеме l , s_l^* – строки матрицы S^* . При этом все собственные значения матрицы $A(h_0) + BS^*$ меньше 1 по модулю.

Имеет место следующая

Теорема 8. Если линейная дискретная система (11) удовлетворяет условию (19), тогда соответствующая ей нелинейная гибридная система (1) стабилизируема при $h = h_0 > 0$.

Пример 2. Построить стабилизирующее управление для гибридной системы

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + 2y_{k,1} - 2y_{k,2} + a(x(t), y_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y_{k+1,1} = -x_{k+1} + u_{k,1} - u_{k,2} + b_1(x_{k+1}, y_k, u_k), \\ y_{k+1,2} = x_{k+1} - y_{k,1} + y_{k,2} + u_{k,1} + 2u_{k,2} + b_2(x_{k+1}, y_k, u_k), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $x \in R^1$, $y \in R^2$, $u \in R^2$; $a(x, y)$, $b_1(x, y, u)$, $b_2(x, y, u)$ – гладкие нелинейности в соответствии с системой (5), приводя соответствующую дискретную систему первого приближения к совокупности независимых подсистем в канонической форме Бруновского (к канонической форме Бруновского).

Данной системе соответствует дискретная система вида (11) с матрицами

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{-2h} & 1 - e^{-2h} & e^{-2h} - 1 \\ -e^{-2h} & e^{-2h} - 1 & 1 - e^{-2h} \\ e^{-2h} & -e^{-2h} & e^{-2h} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда получим матрицу

$$[B, A(h)B, A^2(h)B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3(e^{-2h} - 1) & 0 & (e^{-2h} - 1)(9e^{-2h} - 3) \\ 1 & -1 & 0 & 3(1 - e^{-2h}) & 0 & (e^{-2h} - 1)(3 - 9e^{-2h}) \\ 1 & 2 & 0 & 3e^{-2h} & 0 & e^{-2h}(9e^{-2h} - 6) \end{bmatrix},$$

$\text{rank}[B, A(h)B, A^2(h)B] = 3$ при любых $h > 0$, значит, соответствующая линейная дискретная система вида (11) управляема при любом $h > 0$.

Пусть $h_0 = \ln 3$ и пусть b_1, b_2 – столбцы матрицы B . Тогда

$$A_0 = A(h_0) = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -8/9 \\ -1/9 & -8/9 & 8/9 \\ 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

Из последовательности столбцов $(b_1, b_2, A_0 b_1, A_0 b_2, A_0^2 b_1, A_0^2 b_2)$ составим матрицу F_0 третьего порядка ранга 3. Заметим, что матрица $A_0 b_1$ является нулевым столбцом, поэтому столбцы $A_0 b_1, A_0^2 b_1$ исключаются из рассмотрения.

$A_0 b_2 = [-8/3 \ 8/3 \ 1/3]^T$, поэтому $s_1 = 1, s_2 = 2$, и $F_0 = [b_1, b_2, A_0 b_2]$, т.е.

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8/3 \\ 1 & -1 & 8/3 \\ 1 & 2 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad F_0^{-1} = \begin{bmatrix} 17/24 & 2/3 & 1/3 \\ -7/24 & -1/3 & 1/3 \\ -3/8 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$k = 1, 2$, так как $\text{rank } B = 2$.

$k = 1$: $\sum_{j=1}^k s_j = s_1 = 1$, следовательно, f_1 – первая строка матрицы F_0^{-1} .

$k = 2$: $\sum_{j=1}^k s_j = s_1 + s_2 = 3$, следовательно, f_2 – третья строка матрицы F_0^{-1} .

$$S = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_2 A_0 \end{bmatrix}, \quad \text{т.е. } S = \begin{bmatrix} 17/24 & 2/3 & 1/3 \\ -3/8 & 0 & 0 \\ -1/24 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

$$z_k^* = S z_k, \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} z_{k,1}^* = \frac{17}{24}x_k + \frac{2}{3}y_{k,1} + \frac{1}{3}y_{k,2}, \\ z_{k,2}^* = -\frac{3}{8}x_k, \\ z_{k,3}^* = -\frac{1}{24}x_k - \frac{1}{3}y_{k,1} + \frac{1}{3}y_{k,2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$z_{k+1,1}^* = u_{k,1}^*, \quad \text{где } u_{k,1}^* = f_1 A_0^{s_1} z_k + u_{k,1} = f_1 A_0 z_k + u_{k,1} = \frac{1}{24}x_k + u_{k,1};$$

$$z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*; \quad z_{k+1,3}^* = u_{k,2}^*,$$

$$\text{где } u_{k,2}^* = f_2 A_0^{s_2} z_k + u_{k,2} = \frac{5}{72}x_k + \frac{2}{9}y_{k,1} - \frac{2}{9}y_{k,2} + u_{k,2}.$$

Итак, каноническая форма Бруновского (совокупность таких форм) для линейной дискретной системы, соответствующей исходной системе, при $h_0 = \ln 3$ имеет вид

$$\begin{cases} z_{k+1,1}^* = u_{k,1}^*, \\ z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*, \\ z_{k+1,3}^* = u_{k,2}^*. \end{cases}$$

Найдем стабилизирующее управление для соответствующей линейной дискретной системы при $h_0 = \ln 3$.

- 1) $u_{k,1}^* = p z_{k,1}^*$, где $p = p_1$, $z_{k,1}^* = z_{k,1}^*$, так как $s_1 = 1$, $z_{k+1,1}^* = p z_{k,1}^*$, тогда $\lambda = p$. Пусть $\lambda = \frac{1}{3}$, то $p = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = f_1 A_0 = [\frac{1}{24} \ 0 \ 0]$, $S_1 = f_1$, значит, $s_1^* = p S_1 - \alpha_1 = [\frac{7}{36} \ \frac{2}{9} \ \frac{1}{9}]$, $u_{k,1} = s_1^* z_k$, т.е. $u_{k,1} = \frac{7}{36}x_k + \frac{2}{9}y_{k,1} + \frac{1}{9}y_{k,2}$;
- 2) $u_{k,2}^* = p z_{k,2}^*$, где $p = [p_1 \ p_2]$, $z_{k,2}^* = [z_{k,2}^* \ z_{k,3}^*]^T$, так как $s_2 = 2$, $z_{k+1,3}^* = p_1 z_{k,2}^* + p_2 z_{k,3}^*$, тогда $\lambda^2 - p_2 \lambda - p_1 = 0$.

Пусть $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}$, тогда $\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{9} = 0$, и $p = [-\frac{1}{9} \quad \frac{2}{3}]$;

$$\alpha_2 = f_2 A_0^2 = [5/72 \quad 2/9 \quad -2/9], \quad S_2 = \begin{bmatrix} -3/8 & 0 & 0 \\ -1/24 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$s_2^* = pS_2 - \alpha_2 = [-1/18 \quad -4/9 \quad 4/9], \quad \text{т.е. } u_{k,2} = -\frac{1}{18}x_k - \frac{4}{9}y_{k,1} + \frac{4}{9}y_{k,2}.$$

Таким образом, стабилизирующее управление имеет вид

$$u_k = \begin{bmatrix} \frac{7}{36}x_k + \frac{2}{9}y_{k,1} + \frac{1}{9}y_{k,2} \\ -\frac{1}{18}x_k - \frac{4}{9}y_{k,1} + \frac{4}{9}y_{k,2} \end{bmatrix}.$$

Данное управление является стабилизирующим и для исходной нелинейной гибридной системы, поскольку

$$S^* = \begin{bmatrix} 7/36 & 2/9 & 1/9 \\ -1/18 & -4/9 & 4/9 \end{bmatrix}, \quad A_0 + BS^* = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -8/9 \\ 5/36 & -2/9 & 5/9 \\ 7/36 & -7/9 & 10/9 \end{bmatrix},$$

и матрица $A_0 + BS^*$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2,3} = \frac{1}{3}$, т.е. $|\lambda_{1,2,3}| < 1$.

6. Заключение

В работе установлено общее достаточное условие стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных систем вида (1) как с одномерным, так и с многомерным управлением, которое предполагает выполнение условия полной достижимости для систем первого приближения соответствующих равносильных нелинейных дискретных динамических систем.

Изложен общий подход к стабилизации нелинейных гибридных систем (1) с различным по размерности управлением, представлено построение стабилизирующих управлений для таких систем. Предложенный подход позволит обеспечить устойчивые режимы функционирования реальных технических, механических и других систем управления с неоднородной структурой, а также решить вопросы построения допустимого и оптимального управлений данными системами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Из равносильности систем (1) и (8), которая учитывает связь решений данных систем, а также определений управляемых систем следует справедливость данного утверждения.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку линейная дискретная система (12) удовлетворяет условию (13), то матрица

$$F(h_0) = [b, A(h_0)b, A^2(h_0)b, \dots, A^{n+m-1}(h_0)b]$$

обратима, т.е. существует обратная матрица $F^{-1}(h_0)$.

Пусть $f(h_0) \in R^{n+m}$ – вектор, составленный из элементов последней строки матрицы $F^{-1}(h_0)$ [27]. Тогда с учетом определения обратной матрицы получим:

$$(П.1) \quad f(h_0)b = f(h_0)A(h_0)b = \dots = f(h_0)A^{n+m-2}(h_0)b = 0,$$

$$(П.2) \quad f(h_0)A^{n+m-1}(h_0)b = 1.$$

Пусть

$$(П.3) \quad \begin{cases} z_{k,1}^* = f(h_0)z_k, \\ z_{k,2}^* = f(h_0)A(h_0)z_k, \\ z_{k,3}^* = f(h_0)A^2(h_0)z_k, \\ \vdots \\ z_{k,n+m}^* = f(h_0)A^{n+m-1}(h_0)z_k, \end{cases}$$

тогда $z_k^* = Sz_k$, где $S = \begin{bmatrix} f(h_0) \\ f(h_0)A(h_0) \\ f(h_0)A^2(h_0) \\ \vdots \\ f(h_0)A^{n+m-1}(h_0) \end{bmatrix}$, причем $\det S \neq 0$, поскольку

дискретная система (12) удовлетворяет условию (13).

При $h = h_0 > 0$ система (12) примет вид

$$z_{k+1} = A(h_0)z_k + bu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

тогда из равенств (П.3) с учетом (П.1) и (П.2) получим:

$$(П.4) \quad \begin{cases} z_{k+1,1}^* = f(h_0)z_{k+1} = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = f(h_0)A(h_0)z_{k+1} = z_{k,3}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,n+m-1}^* = f(h_0)A^{n+m-2}(h_0)z_{k+1} = z_{k,n+m}^*, \\ z_{k+1,n+m}^* = f(h_0)A^{n+m-1}(h_0)z_{k+1} = \alpha z_k + u_k, \end{cases}$$

где $\alpha = f(h_0)A^{n+m}(h_0)$.

Следовательно, система (П.4) имеет вид (15), где $u_k^* = \alpha z_k + u_k$, и эквивалентна дискретной системе (12) при $h = h_0 > 0$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Дискретная система (12) удовлетворяет условию (13), тогда согласно теореме 2 она представима в виде (15).

Пусть $u_k^* = pz_k^*$, где $p = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{n+m}]$, тогда система (15) примет вид

$$(П.5) \quad \begin{cases} z_{k+1,1}^* = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,n+m-1}^* = z_{k,n+m}^*, \\ z_{k+1,n+m}^* = p_1 z_{k,1}^* + p_2 z_{k,2}^* + \dots + p_{n+m} z_{k,n+m}^*. \end{cases}$$

И пусть $z_{k,1}^* = \lambda^0 = 1$, $z_{k,2}^* = z_{k+1,1}^* = \lambda$, $z_{k,3}^* = z_{k+1,2}^* = z_{k+2,1}^* = \lambda^2, \dots, z_{k,n+m}^* = \lambda^{n+m-1}$, $z_{k+1,n+m}^* = \lambda^{n+m}$. Тогда система (П.5) сводится к уравнению

$$(П.6) \quad \lambda^{n+m} - p_{n+m} \lambda^{n+m-1} - p_{n+m-1} \lambda^{n+m-2} - \dots - p_2 \lambda - p_1 = 0.$$

Уравнение (П.6) является характеристическим для матрицы системы (П.5). Поскольку коэффициенты уравнения (П.6) выбираются произвольно, то подберем их так, чтобы выполнялось условие $|\lambda_i| < 1$ при $i = 1, \dots, n+m$. Тогда система (15) с управлением $u_k^* = pz_k^*$ имеет асимптотически устойчивое решение $z_k^* = 0$. Отсюда следует, что дискретная система (12), представленная в форме (15), стабилизируема при $h = h_0 > 0$, и теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Учитывая следствие 1, соотношение (10) и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевой точки равновесия нелинейной непрерывно-дискретной системы (1), полученное в [23], установим справедливость данного утверждения, и теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Можно установить, что если в нелинейной гибридной системе (17) $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c \neq 0$, то соответствующая ей дискретная система (12) с матрицами (18) удовлетворяет условию (13), тогда, учитывая теорему 4, получим заключение теоремы 5.

Доказательство теоремы 6. Без ограничения общности будем считать, что $\text{rank } B = q$, $q > 1$. Пусть $b_1, \dots, b_q$ – столбцы матрицы B , $A_0 = A(h_0)$ и дискретная система (11) удовлетворяет условию (19).

Из последовательности столбцов (см. [27])

$(b_1, b_2, \dots, b_q, A_0 b_1, A_0 b_2, \dots, A_0 b_q, A_0^2 b_1, A_0^2 b_2, \dots, A_0^2 b_q, \dots, A_0^{n+m-1} b_1, \dots, A_0^{n+m-1} b_q)$ составим матрицу $F_0 = F(h_0)$ порядка $n+m$, ранг которой равен $n+m$, причем

$$(П.7) \quad F_0 = [b_1, A_0 b_1, A_0^2 b_1, \dots, A_0^{s_1-1} b_1, b_2, A_0 b_2, A_0^2 b_2, \dots, A_0^{s_2-1} b_2, \dots, b_q, A_0 b_q, A_0^2 b_q, \dots, A_0^{s_q-1} b_q].$$

При построении матрицы (П.7) важно, чтобы для каждого столбца b_k эта матрица включала все столбцы $b_k, A_0 b_k, A_0^2 b_k, \dots, A_0^{s_k-1} b_k$, где $s_k = 1, \dots, n+m$, $k = 1, \dots, q$, при этом каждый столбец $A_0^j b_k$, ($j = 0, 1, \dots, n+m-1$) включается в матрицу при условии: если со всеми столбцами, стоящими до

него в этой матрице, он образует линейно независимую систему. В противном случае столбцы $A_0^j b_k, A_0^{j+1} b_k, \dots, A_0^{n+m-1} b_k$ исключаются из рассмотрения.

Поскольку $\text{rank } F_0 = n+m$, то существует обратная матрица F_0^{-1} . Пусть f_k ($k = 1, \dots, q$) – обозначение строки матрицы F_0^{-1} с номером, определяемым числом $\sum_{j=1}^k s_j$, тогда, учитывая определение обратной матрицы, получим условия:

$$(II.8) \quad f_k A_0^{j-1} b_i = 0, \quad (k \neq i) \vee (j \neq s_k),$$

$$(II.9) \quad f_k A_0^{s_k-1} b_k = 1.$$

Пусть

$$(II.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{k,1}^* = f_1 z_k, \\ z_{k,2}^* = f_1 A_0 z_k, \\ \vdots \\ z_{k,s_1}^* = f_1 A_0^{s_1-1} z_k, \\ z_{k,s_1+1}^* = f_2 z_k, \\ z_{k,s_1+2}^* = f_2 A_0 z_k, \\ \vdots \\ z_{k,s_1+s_2}^* = f_2 A_0^{s_2-1} z_k, \\ \vdots \\ z_{k,s_1+s_2+\dots+s_q}^* = f_q A_0^{s_q-1} z_k, \end{array} \right.$$

$$\text{где } s_1 + s_2 + \dots + s_q = n + m. \text{ Тогда } z_k^* = S z_k, \text{ причем } S = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_1 A_0 \\ \vdots \\ f_1 A_0^{s_1-1} \\ f_2 \\ f_2 A_0 \\ \vdots \\ f_2 A_0^{s_2-1} \\ \vdots \\ f_q \\ \vdots \\ f_q A_0^{s_q-1} \end{bmatrix},$$

S – матрица порядка $n + m$, $\det S \neq 0$, так как дискретная система (11) удовлетворяет условию (19).

Тогда $z_{k+1}^* = Sz_{k+1}$; при $h = h_0 > 0$ дискретная система (11) примет вид

$$z_{k+1} = A_0 z_k + Bu_k,$$

и, учитывая (П.8)–(П.10), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{k+1,1}^* = f_1 A_0 z_k + f_1 Bu_k = f_1 A_0 z_k = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = f_1 A_0^2 z_k + f_1 A_0 Bu_k = f_1 A_0^2 z_k = z_{k,3}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,s_1}^* = f_1 A_0^{s_1} z_k + f_1 A_0^{s_1-1} Bu_k = f_1 A_0^{s_1} z_k + u_{k,1} = u_{k,1}^*, \\ z_{k+1,s_1+1}^* = f_2 A_0 z_k + f_2 Bu_k = z_{k,s_1+2}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,s_1+s_2}^* = f_2 A_0^{s_2} z_k + f_2 A_0^{s_2-1} Bu_k = f_2 A_0^{s_2} z_k + u_{k,2} = u_{k,2}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,s_1+s_2+\dots+s_q}^* = f_q A_0^{s_q} z_k + f_q A_0^{s_q-1} Bu_k = f_q A_0^{s_q} z_k + u_{k,q} = u_{k,q}^*. \end{array} \right.$$

Таким образом, при $h = h_0 > 0$ дискретная система (11) с помощью преобразования (20) приведена к совокупности q независимых подсистем, представленных в форме Бруновского:

$$(П.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{k+1,1}^* = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,s_1}^* = u_{k,1}^*, \\ z_{k+1,s_1+1}^* = z_{k,s_1+2}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,s_1+s_2}^* = u_{k,2}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,s_1+s_2+\dots+s_q-1}^* = z_{k,s_1+s_2+\dots+s_q}^*, \\ z_{k+1,n+m}^* = u_{k,q}^*. \end{array} \right.$$

Размерности данных подсистем (число уравнений в них) равны соответственно $s_1, s_2, \dots, s_q$. При этом $u_{k,l}^* = \alpha_l z_k + u_{k,l}$ ($l = 1, \dots, q$) – компоненты вектора управления, причем $\alpha_l = f_l A_0^{s_l}$. Дискретная система (11) эквивалентна системе (П.11) при $h = h_0 > 0$.

Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Из доказательства теоремы 3 следует, что каждая из q подсистем в (П.11) при определенном образом построенных управлениях имеет асимптотически устойчивое решение $z^* = 0$. В таком случае система (П.11) имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Следовательно, эквивалентная ей система (11) стабилизируема при $h = h_0 > 0$.

Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Из теоремы 7 следует, что дискретная система (11) стабилизируема при $h = h_0 > 0$ и согласно следствию 2 все собственные значения матрицы $A_0 + BS^*$ меньше 1 по модулю. Тогда, учитывая (10) и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной непрерывно-дискретной системы, полученное в работе [23], приходим к требуемому выводу.

Теорема 8 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астахова Т.Н., Зуев А.Л. Стабилизация нелинейных систем в классе функций управления с дискретными переключениями // Уч. записки Таврич. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. 2011. Т. 24(63). № 3. С. 1–9.
2. Логунова О.С., Агапитов Е.Б., Баранкова И.И. и др. Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами // Электротехнические системы и комплексы. 2019. № 2 (43). С. 25–34.
3. Марченко В.М., Борковская И.М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. Физико-математические науки и информатика. 2012. № 6. С. 7–10.
4. Шумафов М.М. Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор // Вест. СПб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 564–591.
5. Гурман В.И., Кань Ни Минь. Вырожденные задачи оптимального управления. I // АиТ. 2011. № 3. С. 36–50.
Gurman V.I., Kang Ni Ming. Degenerate Problems of Optimal Control. I // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 3. P. 497–511.
6. Моисеев А.А. Оптимальное управление при дискретных управляющих воздействиях // АиТ. 1991. № 9. С. 123–132.
Moiseev A. Optimal Control Under Discrete Control Actions // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 9. P. 1274–1280.
7. Марченко В.М., Борковская И.М. О стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. 2020. Серия 3. № 1. С. 5–13.
8. Акманова С.В., Копылова Н.А. The Stability of Continuous-Discrete Dynamical Systems under Fast Switching // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. No. 5. P. 1826–1832.
9. Седова Н.О. Достаточные условия устойчивости и построение стабилизирующих управлений для дифференциальных систем специального вида с запаздыванием // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 13. № 4. С. 118–130.
10. Леонов Г.А. Стабилизационная проблема Брокетта // АиТ. 2001. № 5. С. 190–193.
11. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2002.

12. *Кривдина Л.Н.* Стабилизация дискретных объектов по выходу на основе линейных матричных неравенств // Детерминированные системы. 2006. № 2 (12). С. 102–110.
13. *Зубер И.Е.* Стабилизация дискретных систем динамическим регулятором // Вест. СПбГУ. 2012. Серия 1. Вып.1. С. 27–30.
14. *La Salle J.P.* The Stability and Control of Discrete Processes. N.Y.: Springer-Verlag. Inc., 1986.
15. *Nešić D., Teel A.R., Kokotović P.V.* Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations // Syst. Control. Lett. 1999. V. 38. No. 4–5. P. 259–270.
16. *Nešić D., Teel A.R.* Stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their Euler approximate model // Automatica. 2006. V. 42. No. 10. P. 1801–1808.
17. *Марченко В.М., Борковская И.М.* К вопросу о стабилизации гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. 2020. Серия 3. № 2. С. 5–11.
18. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.
19. *Qian C., Du H.* Global Output Feedback Stabilization of a Class of Nonlinear Systems via Linear Sampled-Data Control // IEEE Transact. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 11. P. 2934–2939.
20. *Karafyllis L., Krstic M.* Nonlinear Stabilization Under Sampled and Delayed Measurements, and With Inputs Subject to Delay and Zero-Order Hold // IEEE Transact. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 5. P. 1141–1154.
21. *Сейфуллаев Р.Э., Фрадков А.Л.* Анализ дискретно-непрерывных нелинейных многосвязных систем на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2015. № 6. С. 57–74.
22. *Seifullae R.E., Fradkov A.L.* Event-Triggered Control of Sampled-Data Nonlinear Systems // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. No. 14. P. 12–17.
23. *Юмагулов М.Г., Акманова С.В.* Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Уфим. мат. журн. 2023. Т. 15. № 2. С. 85–100.
24. *Ахундов А.А.* Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы. 1975. № 14. С. 4–10.
25. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: Ин-т мат. АН Белоруссии, 2001.
26. *Сазанова Л.А.* Об управлении дискретными системами // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УрГУ, 2002.
27. *Анохин Н.В.* Управление нелинейными механическими системами с дефицитом управляющих воздействий в окрестности положения равновесия // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИПМех. РАН, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 21.05.2024

После доработки 05.07.2024

Принята к публикации 10.07.2024

© 2024 г. А.С. КУЛЕШОВ, канд. физ.-мат. наук
(alexander.kuleshov@math.msu.ru),

М.М. ГАДЖИЕВ, (maxuta-jr@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО ПОВЕРХНОСТЬЮ ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ, В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ¹

Изучаются регулярные прецессии твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения и находящегося в свободном молекулярном потоке частиц. Получены условия устойчивости регулярных прецессий, построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре–Четаева.

Ключевые слова: твердое тело с неподвижной точкой, свободный молекулярный поток, регулярные прецессии, устойчивость стационарных движений.

DOI: 10.31857/S0005231024090035, EDN: ZQWMZL

1. Введение

Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием внешних сил является обобщением классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Один из случаев интегрируемости этой задачи был открыт Ж.-Л. Лагранжем [1]. В дальнейшем было опубликовано множество работ, посвященных изучению динамики волчка Лагранжа. Регулярные прецессии были впервые рассмотрены в [2, 3], а их устойчивость исследуется в работах [2, 4, 5].

Модель взаимодействия свободномолекулярного потока частиц с твердым телом была предложена в работах А.А. Карымова [6, 7] и В.В. Белецкого [8, 9], в которых рассматривалась динамика спутников, движущихся в верхних слоях атмосферы или под действием солнечной радиации. Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием набегающего свободномолекулярного потока частиц впервые была рассмотрена в работе А.А. Бурова и А.В. Карапетяна [10]. В ней получены уравнения движения, а также найден интегрируемый случай, аналогичный случаю Лагранжа в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Вопрос устойчивости стационарных движений тела под воздействием солнечной радиации был рассмотрен, например, в работе В.В. Сидоренко [11].

¹ Исследование выполнено за счет проекта Российского научного фонда № 24-11-20009.

В данной работе исследуются регулярные прецессии динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения. С помощью теории Рауса исследования устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами получены условия устойчивости регулярных прецессий тела с неподвижной точкой, находящегося в потоке частиц.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой O в свободном молекулярном потоке частиц постоянной плотности ρ (см. рис. 1). Частицы потока движутся с постоянной абсолютной скоростью

$$-\mathbf{v} = v_0 \boldsymbol{\gamma},$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, неподвижный в абсолютном пространстве и направленный вдоль набегающего потока. Частицы движутся поступательно, тепловым движением пренебрегаем. В качестве модели взаимодействия частиц с телом выбрана следующая – частица совершает абсолютно неупругий удар с телом, передавая ему всю энергию и не отражаясь. Также будем рассматривать достаточно медленные вращения тела, т.е. произведение характерной угловой скорости на характерное расстояние от неподвижной точки до поверхности тела значительно меньше скорости набегающего потока v_0 . Используя метод, предложенный в работах В.В. Белецкого [8, 9], можно записать систему уравнений движения тела [10, 19–21]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbb{J}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega}] &= -\rho v_0^2 S(\boldsymbol{\gamma}) [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbb{J}_0 = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела относительно неподвижной точки O , записанный в системе координат $Oxyz$, связанной с телом, с началом в неподвижной точке и осями, направленными вдоль главных осей инерции тела. Обозначим орты этой системы координат $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Запишем вектор абсолютной угловой скорости тела в тех же координатах $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_x + \omega_2 \mathbf{e}_y + \omega_3 \mathbf{e}_z$.

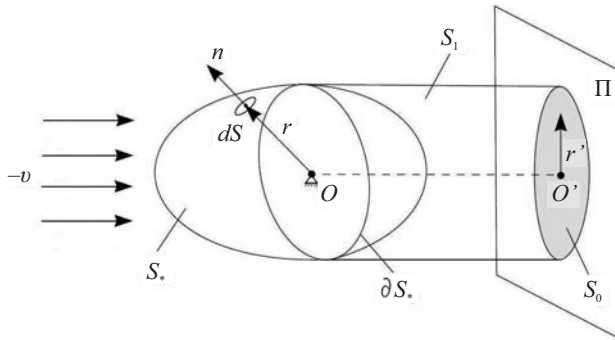


Рис. 1. Твердое тело с неподвижной точкой в потоке частиц.

Выражение $S(\gamma)$ представляет собой площадь фигуры S_0 – ортогональной проекции поверхности тела на плоскость Π , перпендикулярную направлению набегающего потока частиц γ . Можно сказать, что S_0 представляет собой “тень”, которую отбрасывает тело в потоке частиц на плоскость, перпендикулярную потоку. Вектор $\mathbf{c}(\gamma)$ – это вектор, проведенный из проекции неподвижной точки O' (см. рис. 1) в центр масс “тени”, т.е. в центр масс однородной пластины, имеющей форму фигуры S_0 .

3. Регулярные прецессии тела

Рассмотрим динамически симметричное тело ($A_1 = A_2$) с неподвижной точкой, лежащей на оси динамической симметрии. Предположим, что тело ограничено поверхностью эллипсоида вращения с полуосями $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = b$, ось симметрии которого совпадает с осью динамической симметрии тела. В таком случае уравнения движения тела (1) допускают один квадратичный и два линейных по обобщенным скоростям первых интеграла [19–22]:

$$(2) \quad U_0 = \frac{A_1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{A_3}{2} \omega_3^2 - f \int_0^{\gamma_3} S(\gamma_3) c_3(\gamma_3) d\gamma_3 = k_0 = \text{const},$$

$$(3) \quad U_1 = A_1 (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + A_3 \omega_3 \gamma_3 = k_1 = \text{const},$$

$$(4) \quad U_2 = \omega_3 = k_2 = \text{const},$$

где $f = \rho v_0^2$. В этом случае для изучения стационарных движений системы можно воспользоваться теорией Рауса для голономных систем с известными первыми интегралами [12–15, 18]. Эффективный потенциал в случае, когда тело ограничено поверхностью вытянутого эллипсоида вращения, в явном виде записывается следующим образом:

$$(5) \quad W(\theta) = \frac{(k_1 - A_3 k_2 \cos \theta)^2}{2A_1 \sin^2 \theta} - \frac{f\pi a^2 b l}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2}} - \\ - \frac{f\pi b l}{2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}} \text{arctg} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \cos \theta}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2}}} \right).$$

Здесь l – расстояние от неподвижной точки до центра эллипсоида вращения, ограничивающего твердое тело, а θ – угол между осью динамической симметрии тела и направлением потока частиц, отсчитываемый так, что при $\theta = 0$ тело ориентировано по потоку частиц. При любых значениях постоянных первых интегралов система уравнений (1) допускает двухпараметрическое семейство частных решений следующего вида:

$$(6) \quad \omega_1 = \omega \gamma_1, \quad \omega_2 = \omega \gamma_2, \quad \omega_3 = \omega \cos \theta + \Omega, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2 = \sin^2 \theta, \quad \gamma_3 = \cos \theta,$$

где ω и Ω – постоянные, связанные с постоянными k_1 и k_2 первых интегралов (3) и (4) соотношениями

$$\omega = \frac{k_1 - A_3 k_2 \cos \theta}{A_1 \sin^2 \theta}, \quad \Omega = \frac{(A_1 \sin^2 \theta + A_3 \cos^2 \theta) k_2 - k_1 \cos \theta}{A_1 \sin^2 \theta},$$

а постоянный угол θ определяется из условия существования регулярных прецессий

$$\frac{dW(\theta)}{d\theta} = 0,$$

которое в явном виде записывается следующим образом:

$$(7) \quad \frac{(k_1 - A_3 k_2 \cos \theta)(A_3 k_2 - k_1 \cos \theta)}{2A_1 \sin^3 \theta} + f\pi a^2 b l \sin \theta \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2}} = 0.$$

Запишем уравнение (7) в безразмерной форме. Для этого введем безразмерные постоянные интегралов

$$(8) \quad p_1 = \frac{k_1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}}, \quad p_2 = k_2 \sqrt{\frac{A_3}{f \pi a^2 l}}$$

и безразмерные параметры

$$y = \frac{A_1}{A_3} \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right), \quad z = \frac{b^2}{a^2} > 1.$$

Тогда условие существования регулярных прецессий (7) в безразмерной форме переписывается следующим образом:

$$\frac{(p_1 - p_2 \cos \theta)(p_2 - p_1 \cos \theta)}{y \sin^3 \theta} + \sin \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 0,$$

или, домножая на $-y \sin^3 \theta$,

$$(9) \quad \begin{aligned} a_{11} p_1^2 + 2a_{12} p_1 p_2 + a_{22} p_2^2 + a_1 &= 0, \\ a_{11} &= \cos \theta, \quad a_{12} = -\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad a_{22} = \cos \theta, \\ a_1 &= -y \sin^4 \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при каждом фиксированном значении θ уравнение (9) задает некоторую кривую второго порядка. Приведем эту кривую к каноническому виду. Для этого введем новые переменные x_1 и y_1 по формулам:

$$(10) \quad x_1 = p_1 - p_2, \quad y_1 = p_1 + p_2.$$

Для того, чтобы понять физический смысл безразмерных постоянных интегралов x_1 и y_1 , вспомним определение постоянных k_1 и k_2 (см. формулы (3), (4)). Для динамически симметричного тела можно записать

$$k_1 = A_1 (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + A_3 \omega_3 \gamma_3 = (\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \quad k_2 = \omega_3 = \frac{(\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_z)}{A_3}.$$

Подставляя данные выражения в (8), получим следующее:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}} (\mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}} (\mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_z).$$

По формуле (10) получается, что x_1 – это, с точностью до постоянного множителя, проекция кинетического момента тела на вектор $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z$:

$$x_1 = p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}} (\mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega}, (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z)).$$

А y_1 – проекция кинетического момента тела на вектор $\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z$

$$y_1 = p_1 + p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f \pi a^2 l}} (\mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega}, (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z)).$$

Векторы $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z$ и $\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z$ перпендикулярны друг другу

$$((\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z), (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z)) = \boldsymbol{\gamma}^2 - \mathbf{e}_z^2 = 0.$$

Третий ортогональный вектор перпендикулярен $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{e}_z$, следовательно, проходит вдоль линии узлов

$$[(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z) \times (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z)] = 2[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_z].$$

Таким образом, $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_z$ и $\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_z$ – ортогональные векторы в плоскости, перпендикулярной линии узлов, а x_1 и y_1 , с точностью до постоянного множителя, представляют собой проекции кинетического момента на эти векторы.

Запишем уравнение (9) в координатах x_1, y_1

$$(11) \quad \frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^2 x_1^2 - \frac{1}{4} (1 - \cos \theta)^2 y_1^2 + a_1 = 0.$$

Полученное уравнение с точностью до постоянного множителя представляет собой канонический вид кривой второго порядка. Определим вид этой кривой. При $\theta \neq \pi n$ свободный член $a_1 < 0$, а коэффициенты в квадратичной части отличны от нуля. Это означает (см., например, [16, 17]), что в каждом сечении плоскостями $\theta \neq \pi n$ поверхности, задаваемой уравнением (11), имеем гиперболу. При $\theta = \pi n$ свободный член, а также один из коэффициентов в квадратичной части будут равны нулю. Таким образом, в сечении плоскостями $\theta = \pi n$ поверхность (11) представляет собой одну прямую вида

$$p_1 = (-1)^n p_2.$$

Эти прямые соответствуют однопараметрическим решениям системы уравнений движения, которые отвечают перманентным вращениям тела вокруг оси динамической симметрии, совпадающей с направлением потока частиц, омывающего тело с неподвижной точкой (см. [22]).

Условие устойчивости стационарных движений (6) в случае, когда тело с неподвижной точкой, находящееся в потоке частиц, ограничено поверхностью вытянутого эллипсоида вращения, имеет вид

$$\frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} \geq 0$$

или, в явном виде

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + 2 \cos^2 \theta)}{y \sin^4 \theta} p_1^2 - \frac{(5 + \cos^2 \theta) \cos \theta}{y \sin^4 \theta} p_1 p_2 + \frac{(1 + 2 \cos^2 \theta)}{y \sin^4 \theta} p_2^2 + \\ & + \frac{(2z \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta}{\sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} \geq 0. \end{aligned}$$

После домножения на положительный множитель $y \sin^4 \theta$, данное неравенство примет вид

$$\begin{aligned} (12) \quad & b_{11} p_1^2 + 2b_{12} p_1 p_2 + b_{22} p_2^2 + b_1 \geq 0, \\ & b_{11} = 1 + 2 \cos^2 \theta, \quad b_{12} = -\frac{(5 + \cos^2 \theta) \cos \theta}{2}, \quad b_{22} = 1 + 2 \cos^2 \theta, \\ & b_1 = \frac{y (2z \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1) \sin^4 \theta \cos \theta}{\sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Запишем неравенство (12) в переменных x_1, y_1 :

$$(13) \quad \frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^2 (2 + \cos \theta) x_1^2 + \frac{1}{4} (1 - \cos \theta)^2 (2 - \cos \theta) y_1^2 + b_1 \geq 0.$$

При каждом фиксированном θ границей области устойчивости (т.е. кривой, которой соответствует знак равенства в неравенстве (13)) также будет некоторая кривая второго порядка. Вид этой кривой зависит от знака свободного члена b_1 . При $b_1 < 0$ граница области устойчивости представляет собой эллипс с центром в точке $x_1 = 0, y_1 = 0$. На плоскости безразмерных параметров x_1, y_1 при каждом фиксированном θ вне соответствующего эллипса будет область устойчивости регулярных прецессий (6), а внутри – область неустойчивости. При $b_1 > 0$ граница области устойчивости вырождается в мнимый эллипс, а при $b_1 = 0$ граница представляет из себя прямую. Можно заметить, что при $b_1 \geq 0$ неравенство (13) выполняется для любых значений x_1, y_1 , следовательно регулярные прецессии будут устойчивыми.

Рассматривая одновременно условие существования (11) и условие устойчивости (13) стационарных движений тела с неподвижной точкой в потоке

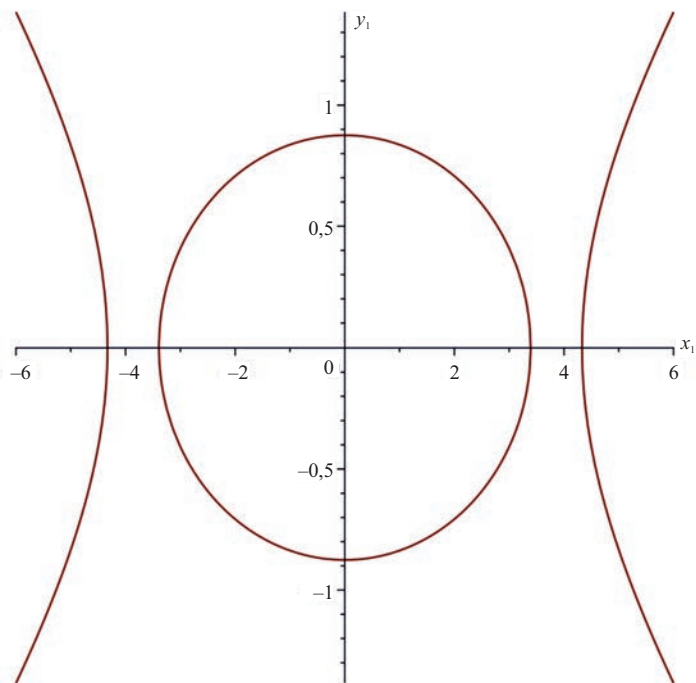


Рис. 2. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{5}{6}$, $z = 8$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

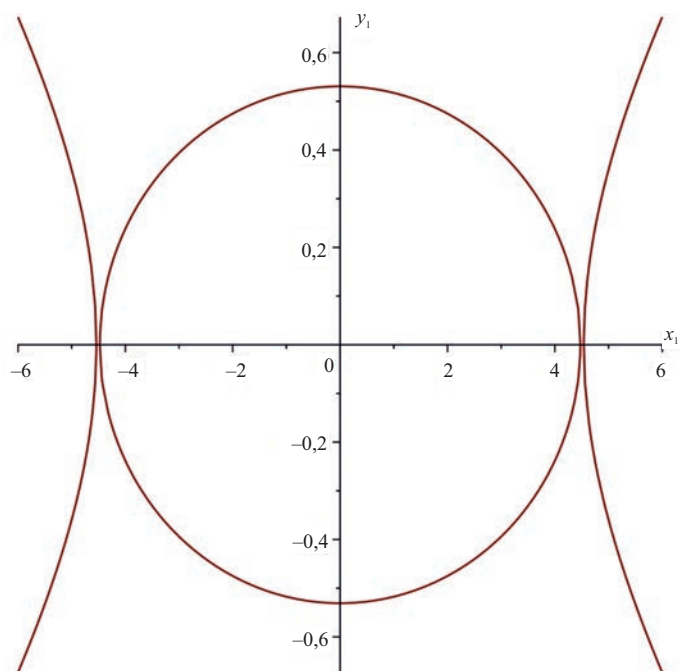


Рис. 3. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{5}{6}$, $z = 8$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

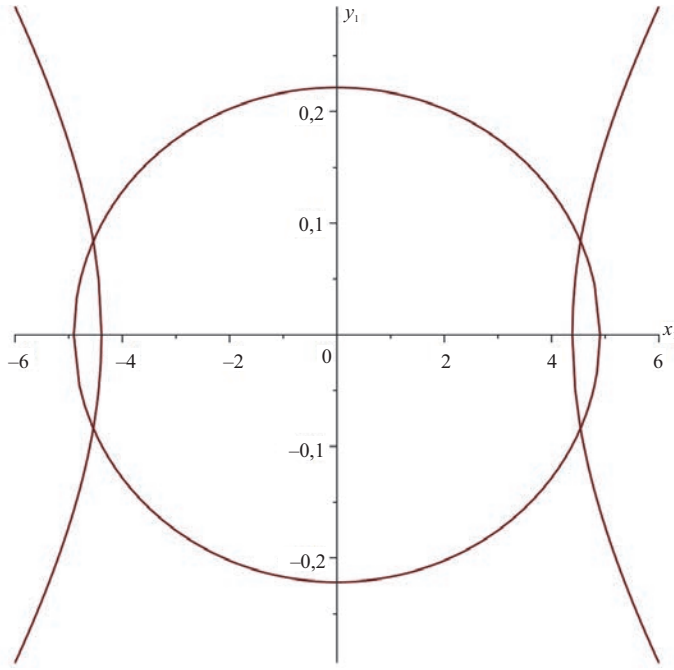


Рис. 4. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{5}{6}$, $z = 8$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

частиц, можно сделать вывод об устойчивости таких движений. Именно, если при некотором фиксированном θ гипербола (11) и эллипс (13) не пересекаются, то стационарное движение (6), соответствующее данному θ , является устойчивым (рис. 2–4).

Исследуем вопрос устойчивости регулярных прецессий более подробно. Из условия существования (11) стационарных движений выразим величину y_1^2 :

$$(14) \quad y_1^2 = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} x_1^2 + \frac{4a_1}{(1 - \cos \theta)^2}.$$

Так как $y_1^2 \geq 0$, то из (14) получим ограничение на x_1 :

$$(15) \quad x_1^2 \geq \frac{4y \sin^4 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = (x_1)_*^2.$$

Подставим полученное выражение (14) для y_1^2 в условие устойчивости (13). Получим неравенство

$$(16) \quad (1 + \cos \theta)^2 x_1^2 + (2 - \cos \theta) a_1 + b_1 \geq 0.$$

Левая часть неравенства представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Обозначим через x_{10} абсциссу точки пересечения параболы с положительной полуосью Ox_1 . Найдем это значение

$$x_{10}^2 = -\frac{(2 - \cos \theta) a_1 + b_1}{(1 + \cos \theta)^2}.$$

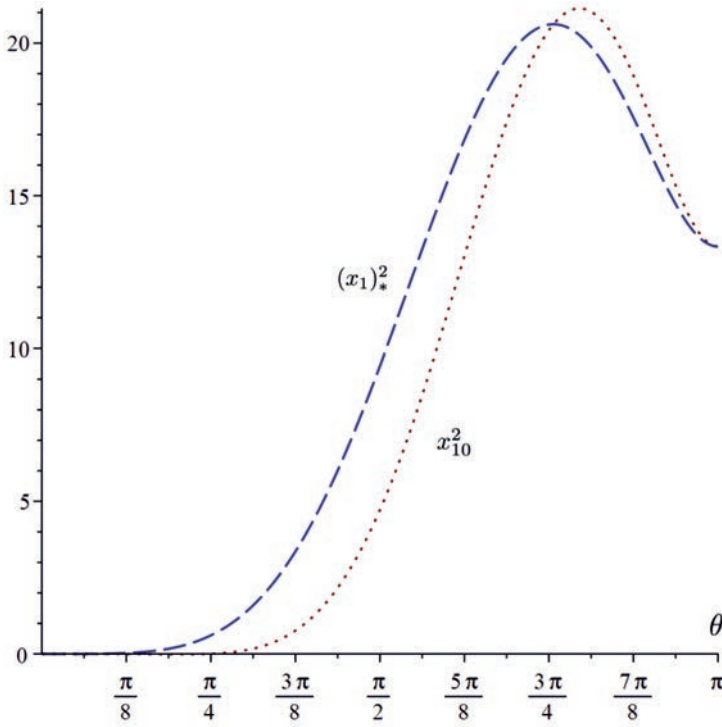


Рис. 5. Взаимное расположение x_{10}^2 и $(x_1)_*^2$ при $y = \frac{5}{6}, z = 8$.

После подстановки значений a_1 и b_1 запишем выражение x_{10}^2 в явном виде:

$$(17) \quad x_{10}^2 = \frac{y \sin^4 \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{(1 + \cos \theta)^2} \left(2 - 3 \cos \theta + \frac{\cos \theta}{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \right).$$

При $x_1^2 \geq x_{10}^2$ условие устойчивости (16) будет выполняться. Таким образом, регулярные прецессии существуют при выполнении условия (15), и являются устойчивыми, если выполняется условие (16). Отсюда можно сделать следующие выводы (рис. 5):

1. При $x_{10}^2 < (x_1)_*^2$ регулярные прецессии устойчивы при любых допустимых значениях x_1, y_1 (а соответственно при любых p_1, p_2).
2. При $x_{10}^2 > (x_1)_*^2$ регулярные прецессии устойчивы только при $x_1^2 > x_{10}^2$.

3.1. Случай $z > 1$

Рассмотрим сначала случай вытянутого эллипсоида вращения ($z > 1$). Найдём условия, при которых $x_{10}^2 > (x_1)_*^2$. Получим

$$3(1 - z) \cos^3 \theta + 2(1 - z) \cos^2 \theta + (3z - 1) \cos \theta + 2z < 0.$$

Раскладывая на множители левую часть, получим следующее неравенство:

$$(18) \quad 3(z-1)(\cos \theta + 1) \left(\cos \theta - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right) \times \\ \times \left(\cos \theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \right) > 0.$$

Первые три множителя в левой части неравенства (18) положительные. Можно показать, что при $z > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} > 1.$$

Таким образом, множитель

$$\cos \theta - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}$$

в неравенстве (18) всегда отрицателен. Следовательно, неравенство (18) равносильно неравенству

$$(19) \quad \cos \theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} < 0.$$

Рассмотрим данное неравенство. Функция

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}$$

монотонно возрастает при $z > 1$. При этом она принимает значение -1 при $z = 2$, и дальше асимптотически стремится к значению $-\frac{2}{3}$. Таким образом, при $1 < z \leq 2$ получаем

$$\cos \theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z-1}{z-1}} \geq 0,$$

а значит, неравенство (19) не выполняется. Отсюда делаем вывод, что при $1 < z \leq 2$ регулярные прецессии устойчивы при любом значении θ и любых допустимых значениях параметров x_1 и y_1 (и соответственно при любых допустимых значениях постоянных интегралов p_1, p_2).

На рис. 6 при $y = 2$, $z = \frac{12}{11}$ представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне $y_1 = 0$. На этом графике прямая $\theta = \pi$ соответствует перманентным вращениям тела вокруг оси динамической симметрии. Видно, как от этой прямой ответвляются устойчивые регулярные прецессии тела. Кроме того, на плоскости безразмерных параметров x_1 и y_1 при фиксированных значениях θ были построены графики соответствующих гиперболы

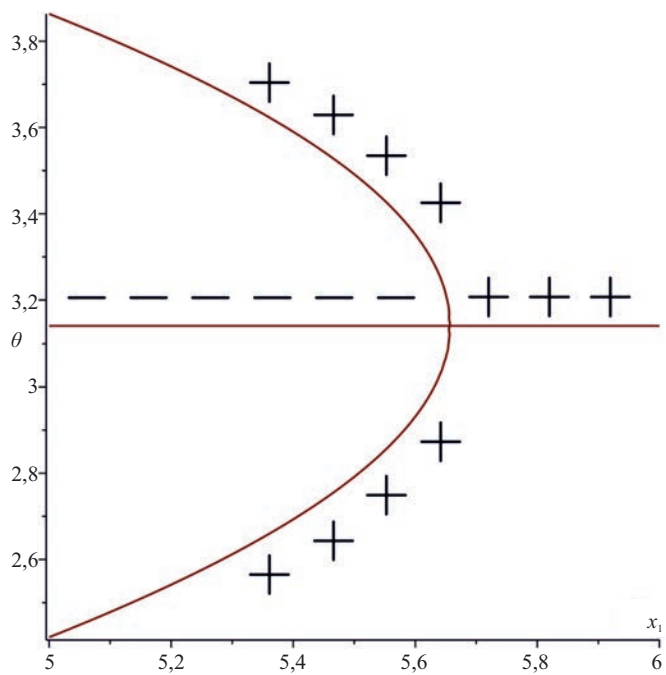


Рис. 6. Сечение поверхности (11) плоскостью $y_1 = 0$ при $y = 2, z = \frac{12}{11}$.

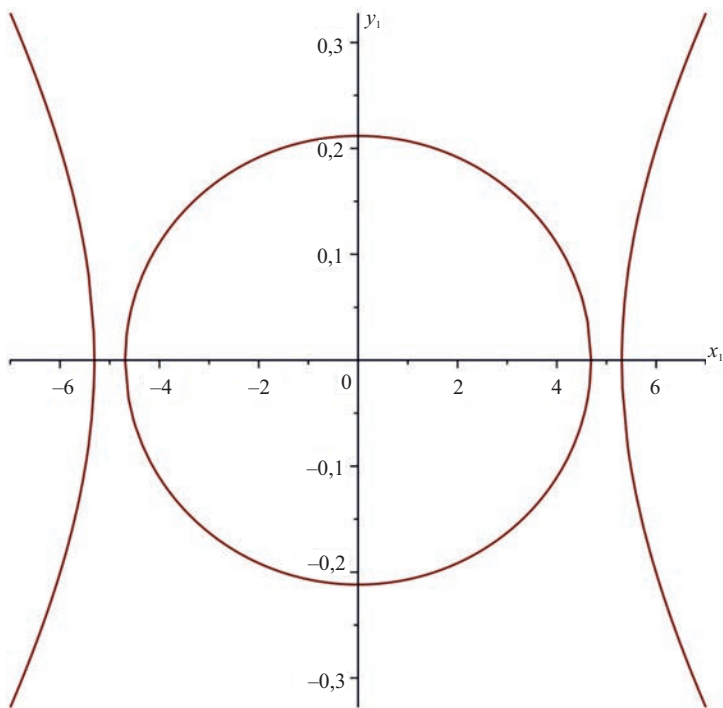


Рис. 7. Взаимное расположение гиперболы и эллипса при $y = 2, z = \frac{12}{11}, \theta = \frac{5\pi}{6}$.

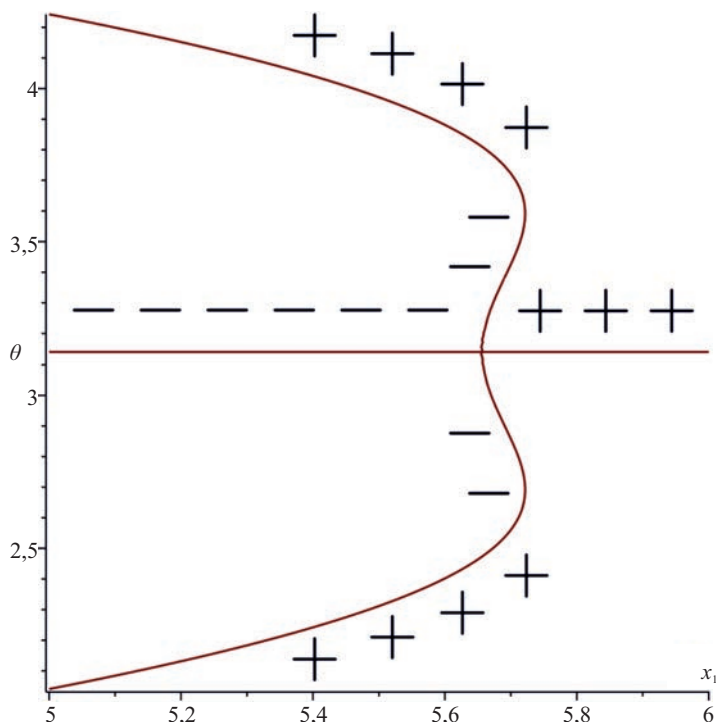


Рис. 8. Сечение поверхности (11) плоскостью $y_1 = 0$ при $y = 2, z = \frac{5}{2}$.

и эллипса, задаваемых соотношениями (11) и (13) (см. рис. 7). Видно, что в рассматриваемом случае они не пересекаются.

Введем новое обозначение θ_2 :

$$(20) \quad \theta_2 = \arccos \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{25z - 1}{z - 1}} \right).$$

Можно сделать вывод, что при $z > 2$ неравенство (19) выполняется при $\cos \theta < \cos \theta_2$ и не выполняется при $\cos \theta \geq \cos \theta_2$.

На рис. 8 при $y = 2, z = \frac{5}{2}$ представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне $y_1 = 0$. Видно, что регулярные прецессии тела, отвечающие от перманентных вращений, являются неустойчивыми вблизи значения $\theta = \pi$, а затем, проходя через точку перегиба, становятся устойчивыми. Точка перегиба соответствует значению $\theta = \theta_2$, где θ_2 определяется формулой (20).

Кроме того, на рис. 9 на плоскости безразмерных параметров x_1 и y_1 представлены графики гиперболы и эллипса при значении $\theta = \theta_2$, определяемом формулой (20). Видно, что при этом значении они касаются, но не пересекаются.

Объединяя полученные выводы, можно заключить: исходное неравенство (18) выполняется при $z > 2$ и $\cos \theta < \cos \theta_2$. И не выполняется при

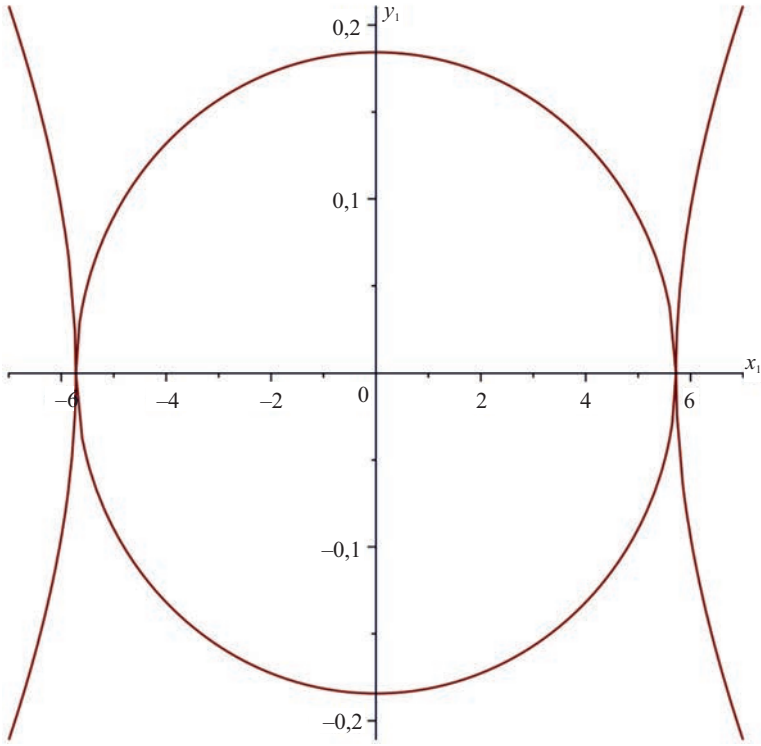


Рис. 9. Взаимное расположение гиперболы и эллипса при $y = 2, z = \frac{5}{2}, \theta = \theta_2$

всех других значениях переменных. Таким образом, регулярные прецессии устойчивы при любых значениях x_1, y_1 (а соответственно и при любых значениях постоянных первых интегралов p_1, p_2), если $1 < z \leq 2$ или $z > 2$ и $\cos \theta > \cos \theta_2$. Если же $z > 2$ и $\cos \theta < \cos \theta_2$, то регулярные прецессии устойчивы только при $x_1^2 > x_{10}^2$.

3.2. Случай $z < 1$

Теперь исследуем устойчивость регулярных прецессий сжатого эллипсоида вращения ($z < 1$). Все найденные ранее выражения для x_{10}^2 и $(x_1)_*^2$ будут иметь тот же вид и для сжатого эллипсоида (15), (17). Условия, при которых $x_{10}^2 > (x_1)_*^2$, будут аналогичны (18). Упростив их, получим следующее неравенство:

$$(21) \quad \left(\cos \theta - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \left(\cos \theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) < 0.$$

Легко видеть, что при $z \in [\frac{1}{25}, 1)$ неравенство (21) не выполняется. Таким образом, можем сделать вывод, что при $z \in [\frac{1}{25}, 1)$ значение $x_{10}^2 \leq (x_1)_*^2$, а значит регулярные прецессии будут устойчивыми при любых значениях параметров x_1, y_1 .

3.3. Случай $z < \frac{1}{25}$

Рассмотрим наконец случай $z < \frac{1}{25}$. Неравенство (21) будет выполняться при следующих значениях θ :

$$(22) \quad \theta \in \left(\arccos \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right), \arccos \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \right).$$

Введем новое обозначение θ_1

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right).$$

Получается, что при $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, \pi)$ неравенство (21) не будет выполняться, следовательно, регулярные прецессии будут устойчивыми при любых значениях параметров x_1, y_1 . В случае же, если $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, то регулярные прецессии будут устойчивы только при $x_1^2 > x_{10}^2$.

На рис. 10 при $y = \frac{101}{200}$, $z = \frac{1}{100}$ представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне $y_1 = 0$. Видно, что регулярные прецессии тела, ответвляющиеся от перманентных вращений, являются устойчивыми вблизи значения $\theta = \pi$, и устойчивость сохраняется при уменьшении угла до θ_2 .

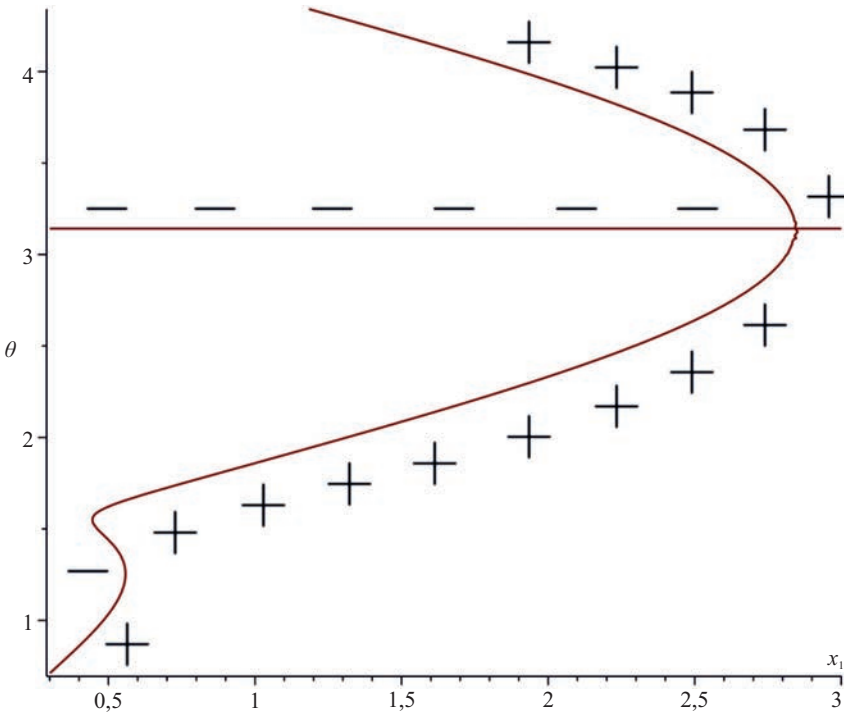


Рис. 10. Сечение поверхности (11) плоскостью $y_1 = 0$ при $y = \frac{101}{200}$, $z = \frac{1}{100}$.

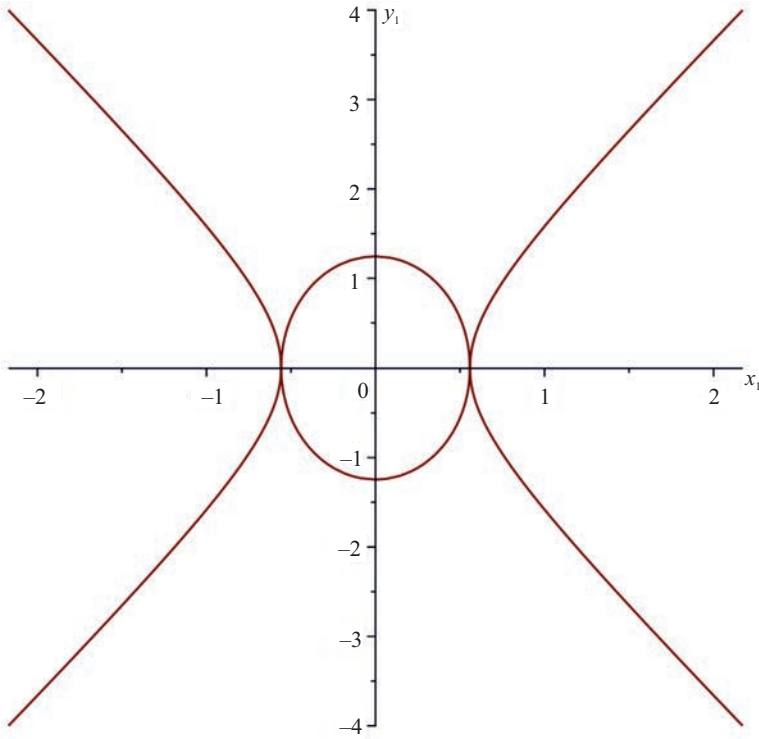


Рис. 11. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{101}{200}$, $z = \frac{1}{100}$,
 $\theta = \arccos\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)$.

Далее, при значениях $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, регулярные прецессии становятся неустойчивыми, и при $\theta < \theta_1$ снова становятся устойчивыми.

На рис. 11–12 на плоскости безразмерных параметров x_1 и y_1 представлены графики гиперболы и эллипса при значениях

$$z = \frac{1}{100}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right) \quad \text{и} \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right).$$

Видно, что при этих значениях угла θ гиперболы и эллипс касаются, но не пересекаются.

Итак, окончательно можно сделать вывод, что все регулярные прецессии (6) динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, находящегося в потоке частиц, будут устойчивы независимо от величин параметров x_1 , y_1 (а соответственно и независимо от значений постоянных первых интегралов p_1 и p_2), если отношение квадратов полуосей эллипсоида лежит в промежутке

$$\frac{1}{25} \leq z \leq 2.$$

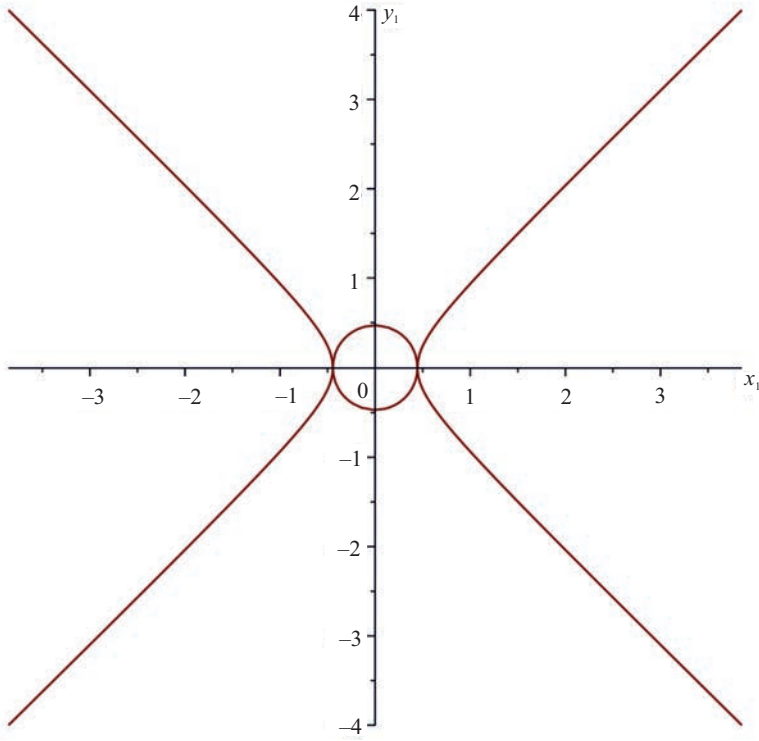


Рис. 12. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{101}{200}$, $z = \frac{1}{100}$,
 $\theta = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)$.

При $z > 2$ регулярные прецессии тела будут устойчивы независимо от значений параметров x_1 и y_1 если θ лежит в промежутке

$$\theta \in \left[0, \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}\right)\right).$$

При значениях θ , принадлежащих промежутку

$$\theta \in \left[\arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}\right), \pi\right)$$

регулярные прецессии устойчивы, если справедливо неравенство

$$x_1^2 > \frac{y \sin^4 \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{(1 + \cos \theta)^2} \left(2 - 3 \cos \theta + \frac{\cos \theta}{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}\right).$$

При

$$0 < z < \frac{1}{25}$$

регулярные прецессии тела будут устойчивы независимо от значений параметров x_1 и y_1 , если θ принадлежит объединению интервалов

$$\theta \in \left(0, \arccos \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \right) \cup \left(\arccos \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right), \pi \right).$$

При значениях θ , принадлежащих отрезку

$$\theta \in \left[\arccos \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right), \arccos \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-25z}{1-z}} \right) \right]$$

регулярные прецессии будут устойчивы, если выполняется условие

$$x_1^2 > \frac{y \sin^4 \theta \sqrt{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{(1 + \cos \theta)^2} \left(2 - 3 \cos \theta + \frac{\cos \theta}{z \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \right).$$

Таковы основные выводы об устойчивости регулярных прецессий динамически симметричного тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, в потоке частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagrange J.L.* *Mechanique analytique*. Paris: Desaint, 1788.
2. *Routh E.J.* *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being part II of a treatise on the whole subject*. 6th ed. New York: Dover, 1955.
3. *Tournaire L.-M.* *Memoire sur la rotation des corps pesant* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1860. V. 50. No. 1. P. 476–481.
4. *Скимель В.Н.* К задачам устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 130–132.
5. *Четаев Н.Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 1. С. 123–124.
6. *Карымов А.А.* Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 867–876.
7. *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника в поле сил светового давления // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 923–930.
8. *Белецкий В.В.* *Движение искусственного спутника относительно центра масс*. М.: Наука, 1965.
9. *Белецкий В.В., Янишин А.М.* *Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников*. Киев: Наук. думка, 1984.
10. *Буров А.А., Карпетян А.В.* О движении твердого тела в потоке частиц // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 77–81.

11. *Сидоренко В.В.* О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Косм. иссл. 1992. Т. 30. № 6. С. 780–790.
12. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал URSS, 1998.
13. *Карпетян А.В.* Устойчивость и бифуркация движений. М.: Изд-во МГУ, 2020.
14. *Каленова В.И., Карпетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А.* Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 117–158.
15. *Karapetyan A.V.* On construction of the effective potential in singular cases // Regular Chaot. Dynam. 2000. V. 5. No. 2. P. 219–224.
16. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
17. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Изд-во ГИТТЛ, 1955.
18. *Karapetyan A.V., Kuleshov A.S.* Steady Motions of Nonholonomic Systems // Regular and Chaot. Dynam. 2002. V. 7. No. 1. P. 81–117.
19. *Гаджиев М.М., Кулешов А.С.* О движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вест. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2022. № 3. С. 58–68.
20. *Кулешов А.С., Гаджиев М.М.* Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вест. СПб. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 550–560.
21. *Gadzhiev M.M., Kuleshov A.S.* Nonintegrability of the Problem of the Motion of an Ellipsoidal Body with a Fixed Point in a Flow of Particles // Russ. J. Nonlin. Dynam. 2022. V. 18. No. 4. P. 629–637.
22. *Гаджиев М.М., Кулешов А.С.* Об устойчивости стационарных движений тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Тр. МАИ. 2023. № 129. С. 1–20.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 03.06.2024

После доработки 05.07.2024

Принята к публикации 11.08.2024

© 2024 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНАЯ СХЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ¹

Рассматривается гладкая автономная система общего вида. Строится глобальное семейство (по параметру h) невырожденных периодических решений; на нем период меняется монотонно. Решается задача стабилизации колебаний редуцированной управляемой системы. Применяется гладкое автономное управление с параметром, зависящим от h , конструируется притягивающий цикл. Результаты конкретизируются для дифференциального уравнения n -го порядка. Устанавливается соответствие результатов с выводами, полученными для обратимой механической системы. Для редуцированной консервативной системы предлагается адаптивная схема управления для стабилизации любого колебания семейства. Приводятся приложения.

Ключевые слова: автономная система, невырожденное периодическое решение, глобальное семейство, теорема Ляпунова о центре, адаптивная схема, притягивающий цикл, естественная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231024090046, **EDN:** ZQVIDC

1. Введение

Решается задача управления колебаниями (периодическими решениями) автономной системы общего вида. В невырожденном случае справедлива альтернатива: цикл (изолированное колебание) или семейство колебаний. Период на семействе невырожденных колебаний монотонно зависит от параметра семейства h . Поэтому в задаче о стабилизации колебаний семейства естественно искать управление с параметром, зависящим от h . В адаптивной системе управления “регулятор автоматически изменяет свою структуру или свои параметры в зависимости от изменения параметров объекта управления или свойств возмущения” [1, с. 108].

В данной статье применяется автономное управление, в котором параметр в регуляторе находится в зависимости от значения параметра h стабилизируемого колебания семейства: регулятор обладает свойством адаптивности. В этом смысле говорится об адаптивной схеме управления.

В следующем примере

$$(1) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon u, \quad u = (1 - Kx^2)\dot{x}$$

¹ Статья подготовлена к трехсотлетию Российской академии наук.

управление u содержит параметр K ; ω – частота линейного осциллятора. При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) допускает семейство колебаний $x = A \cos \varphi$ с амплитудой A и энергией $h = \omega^2 A^2 / 2$. Для стабилизации выбранного колебания семейства с энергией $h = h^*$ в (1) полагается $K = 2\omega^2 / h^*$. Тогда в (1) реализуется притягивающийся цикл, близкий к колебанию линейного осциллятора с энергией h^* . Формула для K справедлива для любого колебания семейства. Применяется адаптивная схема стабилизации.

Уравнение (1) называется осциллятором типа Ван дер Поля. Уравнение Ван дер Поля [2] получается в (1) при $K = 1$: в регеративном приемнике ω настраивается на частоту принимаемого сигнала.

Линейный осциллятор допускает семейство изохронных колебаний. В математическом маятнике период колебаний является монотонной функцией параметра семейства. Такое семейство колебаний называется невырожденным [3].

При исследовании колебаний в многомерной автономной системе необходимо описать все множество невырожденных колебаний. Возникает проблема глобального семейства колебаний: существование, построение, свойства. Кроме интереса для теории обыкновенных дифференциальных уравнений, знание о глобальном семействе гарантирует полноту решения задачи управления.

Основное положение о глобальном семействе заключается в возможности продолжения любого локального невырожденного семейства периодических решений на глобальное семейство, на котором параметр семейства принимает всевозможные для решений семейства значения. Построение глобального семейства для частного случая проводилось в [3]. Адаптивная схема стабилизации колебаний для редуцированной системы на плоскости приводилась в [3]: строился притягивающийся цикл.

Глобальное семейство описывается редуцированной системой, размерность которой совпадает с размерностью k этого семейства. В общем случае – системы из n дифференциальных уравнений – имеем $1 < k \leq n$. Вопросы существования глобального семейства, выделения редуцированной системы и построения для нее адаптивной схемы стабилизации колебаний рассматриваются в данной статье. Результаты конкретизируются для дифференциального уравнения n -го порядка. Также выясняется, как полученные выводы соотносятся с результатами для систем, обладающих свойствами обратимости, консервативности.

Приводятся приложения. Задача трех тел введена Л. Эйлером в 1764 г. (опубликована в [4]) при изучении движения Луны. Показывается, как в задаче строятся глобальные семейства периодических орбит; адаптивная схема применяется для орбитальной стабилизации. Задача В.В. Белецкого [5] описывает колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. В частном случае – на круговой орбите адаптивной схемой управления стабилизируется любое колебание спутника.

2. Теорема о глобальном семействе

Рассматривается гладкое автономное уравнение

$$(2) \quad \dot{z} = Z(z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

общее решение которого обозначается через $z(z_1^0, \dots, z_n^0, t)$, где $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ – начальная точка (при $t = 0$). Необходимое и достаточное условие существования T -периодического решения системы (2) записывается в виде равенства

$$(3) \quad f \equiv z(z_1^0, \dots, z_n^0, T) - z^0 = 0.$$

Пусть уравнение (3) имеет решение $z^0 = z^*$, $T = T^*$, не совпадающее с равновесием: $Z(z^*) \neq 0$. Тогда уравнение (3) допускает семейство по γ решений

$$(4) \quad z^0 = z^*(\gamma), \quad T = T^*,$$

где γ – сдвиг начального момента времени по траектории. При этом ранг Ra функциональной матрицы A_f (матрицы Якоби) для функции f с параметром T в точке z^* при $T = T^*$ удовлетворяет неравенству $\text{Ra} \leq n - 1$.

Случай $\text{Ra} = n - 1$ называется невырожденным для периодического решения (см. [3]). Далее рассматривается случай $\text{Ra} = n - 1$.

В невырожденном случае матрица A_f имеет простое нулевое собственное значение или жорданову k -клетку из нулевых собственных значений: $1 < k \leq n$. В первой ситуации уравнение (3) допускает единственное решение вида (4). Поэтому автономное уравнение (2) допускает изолированное периодическое решение – цикл с периодом T^* .

Вторая ситуация называется случаем семейства периодических решений.

В окрестности решения (4) уравнения (3) выводится линейная система

$$(5) \quad \xi_s \equiv \frac{\partial f_s}{\partial z_1^0} dz_1^0 + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial z_n^0} dz_n^0 + \frac{\partial f_s}{\partial T} dT = 0, \quad s = 1, \dots, n,$$

$$f = (f_1, \dots, f_n),$$

которая справедлива при произвольном γ . Ранг матрицы A_f в (5) равен $\text{Ra} = n - 1$. Цикл получается для простого нулевого собственного значения: в (5) имеем решение $dz_1(\gamma) = \dots = dz_n(\gamma) = 0$, $dT = 0$.

Случай семейства реализуется при $dT \neq 0$. Производные

$$\frac{df_s}{dT} = Z_s(z^*(\gamma)), \quad s = 1, \dots, n,$$

вычисляются в точке (4) и обеспечивают равенство ранга расширенной матрицы в (5) числу $n - 1$. При этом из (5) вычисляются $dz_1^0(\gamma), \dots, dz_n^0(\gamma)$ как линейные функции dT . При изменении dT получается семейство решений.

Сам период T меняется от решения к решению, т.е. является функцией скалярного параметра h : $z^0 = z^0(\gamma, h)$, $T = T(h)$. Таким образом, из системы (5) находится локальное h -семейство. Производная $T'(h^*) \neq 0$ для значения параметра $h = h^*$. Поэтому на семействе период $T(h)$ меняется монотонно вместе с параметром семейства h . В этом смысле h -семейство является невырожденным [3].

Определение 1. Семейство периодических решений уравнения (2) называется невырожденным, если период $T(h)$ на нем монотонно зависит от параметра h .

Из изложения следует, что точка $z^0 = z^*$ периодического решения уравнения (2) обладает свойством приводить к невырожденному семейству периодических решений. Само опорное периодическое решение также принадлежит семейству. В этом смысле оно называется невырожденным. Невырожденным будет и любое периодическое решение невырожденного семейства.

Определение 2. Решение, принадлежащее невырожденному семейству периодических решений, называется невырожденным.

Невырожденное периодическое решение продолжается по периоду T или то же самое – по параметру семейства h . Это свойство называется *свойством локальной продолжимости*. Невырожденное периодическое решение продолжается одновременно в стороны увеличения и уменьшения периода.

В [3] вводится понятие глобального семейства периодических решений.

Определение 3. Невырожденное семейство периодических решений, на котором параметр h принимает всевозможные для решений семейства значения, называется глобальным семейством.

При приведении матрицы A_f к каноническому виду система (5) распадается на подсистемы, одна из которых – с жордановой k -нулевой клеткой – приводит к семейству периодических решений, другая подсистема в (5) имеет нулевое решение. Поэтому в новых переменных семейство периодических решений описывается k переменными. В фазовом пространстве глобальное семейство представляется связным k -мерным множеством точек.

В невырожденном для периодического решения случае $\text{Ra} = n - 1$ справедлива

Теорема 1. Пусть уравнение (2) допускает невырожденное периодическое решение. Тогда оно продолжается по периоду T на глобальное семейство Σ . На Σ период $T(h)$ монотонно зависит от параметра семейства h . Семейство Σ заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$; Σ описывается редуцированной системой k -го порядка. Для точек области $\hat{\Sigma}$ $\text{rang Ra} = n - 1$, на ее границе $\partial\hat{\Sigma}$ условие $\text{Ra} = n - 1$ не выполняется.

Доказательство. Невырожденное периодическое решение обладает свойством локальной продолжимости. Это свойство не зависит от размерности k жордановой клетки с нулевыми собственными значениями матрицы A_f .

Поэтому доказательство теоремы 1 с точностью до размерности жордановой k -нулевой клетки и несущественных редакционных изменений совпадает с доказательством теоремы [3, теорема 1] для случая $k = 2$. При этом редуцированная система описывается системой k -го порядка.

Замечание 1. При подходе к границе $\partial\hat{\Sigma}$ производная $T'(h)$ может стремиться к нулю, бесконечности или перестает существовать.

Замечание 2. В системе (2) возможно одновременное существование нескольких глобальных семейств периодических решений с одним k . Также нет препятствий к одновременному существованию глобальных семейств с разными k .

3. Адаптивная схема управления для редуцированной системы

Согласно теореме 1 глобальное семейство периодических решений $\Sigma = \{\varphi_s(h, t)\}$ может описываться редуцированной системой в $\mathbb{R}^k$:

$$(6) \quad \dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_k), \quad s = 1, \dots, k.$$

Ставится задача стабилизации любого $T(h)$ -периодического колебания φ из семейства Σ , выбранного значением параметра h . Применяется управление, содержащее параметр K ; значение K выбирается в зависимости от величины h : $K = K(h)$. Управление задается гладкой функцией F переменных $x_1, \dots, x_k$ и действует с малым коэффициентом ε усиления сигнала регулятора. В управляемой системе

$$(7) \quad \dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_k) + \varepsilon F_s, \quad s = 1, \dots, k,$$

стабилизируемое колебание будет ε -близким к колебанию системы (7). Параметром K в управлении обеспечивается тождественное выполнение по h условий существования в (7) периодического решения. Тогда колебание с параметром $h = h^*$ стабилизируется при подстановке в управление F числа $K = K(h^*)$, для которого выполняется условие $dK(h^*)/dh \neq 0$. В частном случае $k = 2$ схема реализована в [3].

Задача стабилизации ставится в малом. Она решается построением притягивающего цикла. Поэтому далее находятся условия существования цикла и вычисляются характеристические показатели (ХП) для цикла. Эти задачи решаются в окрестности опорного колебания $x = \varphi(h^*, t)$ линеаризованной системой. Управления F_s вычисляются на опорном колебании. Отклонения от опорного колебания и число ε рассматриваются одного порядка.

В системе (7) полагается: $\Delta_s = x_s - \varphi_s$, $s = 1, \dots, k$. Выписываются уравнения для переменных Δ_s . В линейном приближении по Δ_s получаются уравнения для вариаций δx_s . Далее анализируется периодическое решение управляемой системы

$$(8) \quad \delta \dot{x}_s = p_{s1}\delta x_1 + \dots + p_{sk}\delta x_k + \varepsilon F_s, \quad s = 1, \dots, k.$$

Система (8) с точностью до нелинейных членов совпадает с системой, выводимой из (7) для приращений Δ_s . В окрестности опорного колебания из линеаризованной системы (8) выводится цикл системы (7).

На многообразии $\hat{\Sigma}$ переменные

$$\delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial h}, \quad j = 1, \dots, k,$$

являются функциями h и t . Через $\{y_1, \dots, y_k\}$ обозначается решение сопряженной системы. Тогда соотношение

$$(9) \quad y_1 \delta x_1 + \dots + y_k \delta x_k = \text{const}$$

представляет первый интеграл линейной однородной системы в (8). Набором этих интегралов однородная линейная система с периодическими коэффициентами в (8) приводится к системе с постоянными коэффициентами. Для случая жордановой k -нулевой клетки получаются уравнения

$$(10) \quad \dot{u}_1 = 0, \quad \dot{u}_2 = -u_1, \dots, \dot{u}_k = -u_{k-1}.$$

Выпишем все решения сопряженной системы:

$$(11) \quad \begin{aligned} y_{s1} &= \psi_{s1}, \\ y_{s2} &= t\psi_{s1} + \psi_{s2}, \\ &\dots \\ y_{sk} &= \frac{t^{k-1}\psi_{s1}}{k-1} + \dots + t\psi_{s,k-1} + \psi_{sk}, \end{aligned}$$

где ψ_{sj} — функции с периодом $T(h)$. Тогда преобразование Ляпунова дается формулами

$$(12) \quad u_j = \psi_{1j}\delta x_1 + \dots + \psi_{kj}\delta x_k, \quad j = 1, \dots, k,$$

с невырожденной периодической матрицей $\|\psi_{sj}(h, t)\|$. Из этих формул получаются производные

$$\dot{u}_j = \psi_{1j} \frac{d\delta x_1}{dt} + \dots + \psi_{kj} \frac{d\delta x_k}{dt} + \dot{\psi}_{1j}\delta x_1 + \dots + \dot{\psi}_{kj}\delta x_k, \quad j = 1, \dots, k.$$

Поэтому управляемая система (8) в переменных u_j отличается от (10) слагаемыми неоднородности и записывается в виде:

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{u}_1 &= \varepsilon(\psi_{11}F_1 + \dots + \psi_{k1}F_k) = \varepsilon\hat{F}, \\ \dot{u}_j &= -u_{j-1} + \varepsilon(\psi_{1j}F_1 + \dots + \psi_{kj}F_k), \quad j = 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Системой (13) на многообразии $\hat{\Sigma}$ при $T = T^*$ задается отображение $t : 0 \rightarrow T^*$. При $\varepsilon = 0$ отображение допускает нулевую неподвижную точку. При

$\varepsilon \neq 0$ необходимые условия существования неподвижной точки даются амплитудным уравнением

$$(14) \quad I(h) \equiv \int_0^{T^*} \hat{F} dt = \int_0^{T^*} \sum_{s=1}^k \psi_{s1} F_s dt = 0$$

(см. [6, гл. VI, §8, стр. 413, §9, стр. 417]). Уравнение (14) составляется относительно неизвестной h , при этом функция $\hat{F}$, наряду с h , содержит параметр $K = K(h^*)$. Конкретный вид (14) приводится к примеру далее для (21). Простому корню $h = h^*$ амплитудного уравнения (14) отвечает изолированное периодическое решение системы (13), значит, системы (8). Система (8) с точностью до нелинейных слагаемых (в окрестности исследуемого колебания) описывает цикл системы (7). Поэтому цикл системы (7) выводится из амплитудного уравнения (14). Достаточным условием существования цикла будет неравенство $dI(h^*)/dh \neq 0$.

ХП цикла находятся из уравнений в вариациях. В случае жордановой k -нулевой клетки для определения ХП вычисляется одно число α (см. [6, гл. 3, § 11]). Оно показывает изменение вариации за период. Сами вариации находятся как производные от функций u_s по параметру h .

Первое уравнение системы (13) записывается следующим образом:

$$\dot{u}_1(h^*, t) = \varepsilon \left[\hat{F}_* + \sum_{s=1}^k \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial h} \right)_* \Delta h + \dots \right],$$

где звездочкой помечено вычисление при $h = h^*$. Тогда для приращения Δh получается

$$\frac{d(\Delta u_1)}{dt} = \varepsilon \left[\sum_{s=1}^k \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial h} \right)_* \Delta h + \dots \right],$$

откуда находится уравнение для производной

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial h} \right)_* = \varepsilon \sum_{s=1}^k \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial h} \right)_* = \varepsilon \frac{\partial \hat{F}(h^*, t)}{\partial h}.$$

Изменение производной за период приводит к ХП цикла

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial h} \right)_* = \frac{\varepsilon}{T^*} \int_0^{T^*} \frac{\partial \left(\sum_{s=1}^k \psi_s(h^*, t) F_s(h^*, t) \right)}{\partial h} dt.$$

Таким образом, ХП цикла α вычисляется по формуле

$$(15) \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{T^*} \int_0^{T^*} \frac{\partial \hat{F}(h^*, t)}{\partial h} dt.$$

Теорема 2. Для редуцированной управляемой системы (7) задача стабилизации цикла для любого выбранного значения параметра $h = h^*$ решается гладким управлением F , действующим с малым коэффициентом усиления сигнала регулятора. Достаточным условием стабилизации является выполнение неравенства $dI(h^*)/dh < 0$ на корень амплитудного уравнения (14). Характеристический показатель цикла вычисляется по формуле (15).

Теорема 2 применяется ко всем колебаниям глобального семейства. Управление содержит параметр h , находится из условия тождественного выполнения по h амплитудного уравнения и строится как обобщение универсального управления из [7]. В случае $k = 2$ ряд конкретных управлений, удовлетворяющих теореме 2, приведен в [3]. Для уравнения n -порядка адаптивное управление дается в разделе 4.

Замечание 3. Согласно теореме 2 задача стабилизации цикла решается управлением $\hat{F}$. Поэтому в системе (8) можно выбирать управление $\hat{F}$, в котором полагается, например, $F_s \equiv 0$; $s = 2, \dots, k$. Для уравнения второго порядка ($k = 2$) применяется управление, в котором $F_1 \equiv 0$, $F_2 \neq 0$.

4. Дифференциальное уравнение n -го порядка

Случай жордановой n -клетки с нулевыми собственными значениями матрицы A_f является единственным для одного дифференциального уравнения n -го порядка

$$(16) \quad x^{(n)} = X(x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

где $x^{(j)}$ означает производную j -го порядка от x .

В самом деле, уравнение (16) записывается как система

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{x}_s &= x_{s+1}, \quad s = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= X(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

где функции в (2) равны: $X_s = x_{s+1}$, $s = 1, \dots, n-1$. Поэтому из уравнения (3) получается, что сама матрица A_f представляет собой жорданову n -клетку с нулевыми собственными значениями.

Таким образом, если система (17) обладает невырожденным периодическим решением, то оно согласно теореме 1 принадлежит глобальному семейству $T(h)$ -периодических решений, на котором период монотонно зависит от параметра h . Решения задаются в пространстве $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$. Периодическое решение уравнения (16) обозначается через $x = \varphi(h, t)$.

Поставим задачу стабилизации выделенного значением $h = h^*$ решения уравнения (16). Для этого в записи системы (7) выбирается векторное управление $F = (F_1, \dots, F_n)$, удовлетворяющее амплитудному уравнению (14) с

простым корнем. В теореме 2 применяется скалярное управление $\hat{F}$, формируемое из координат вектора F . В частном случае системы (7) – уравнения (17) полагается: $F_1 = \dots = F_{n-1} = 0$, а функция F_n выписывается в явном виде. Тогда получается управляемая система

$$(18) \quad x^{(n)} = X(x, x', \dots, x^{(n-1)}) + \sigma \varepsilon [1 - Kx^2]x',$$

где управление F_n действует с малым коэффициентом усиления, а число σ равно 1 или (-1) . Коэффициент K выбирается в зависимости от значения параметра h : $K = K(h)$. Для стабилизации колебания с $h = h^*$ принимается $K = K(h^*)$.

Таким образом строится адаптивная схема управления.

Применяемое в (18) управление является аналогом универсального управления, предложенного в [7]. Оно удовлетворяет амплитудному уравнению (14), которое почти для всех точек семейства по параметру h имеет простой корень.

Функция $K(h)$ получается из условия тождественного выполнения по h амплитудного уравнения (14) и вычисляется по формуле

$$K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \psi_{nn}(h, t) \varphi'(h, t) dt}{\int_0^{T(h)} \varphi^2(h, t) \psi_{nn}(h, t) \varphi'(h, t) dt};$$

функция $\psi_{nn}(h, t)$ берется из (12). Тогда для функции $I(h)$ из (14) в точке $h = h^*$ справедливы формулы

$$(19) \quad \frac{dI(h^*)}{dh} = \chi \nu(h^*), \quad \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu(h^*) = \int_0^{T(h^*)} \psi_{nn}(h^*, t) \varphi'(h^*, t) dt.$$

В результате справедлива следующая

Теорема 3. Если дифференциальное уравнение n -го порядка допускает невырожденное периодическое решение, то оно принадлежит глобальному семейству по скалярному параметру h . Решение со значением параметра $h = h^$, $\chi \nu \neq 0$, стабилизируется по адаптивной схеме управления (18), в которой полагается $K = K(h^*)$: знак числа σ обеспечивает притяжение к циклу.*

Замечание 4. Из записи уравнения (16) в виде (17) и применения для (17) адаптивной системы управления раздела 4 следует, что в уравнении (18) притяжение к циклу происходит в пространстве $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$.

5. Симметричные периодические движения

Автономная система общего вида (2) может обладать дополнительными свойствами, например быть консервативной, обратимой, записываться в гамильтоновой форме и т.д. При этом теорема 1 остается справедливой. Однако для некоторых систем теорема 1 нуждается в уточнении.

Далее понятие глобального семейства периодических решений ОДУ конкретизируется для симметричных периодических движений.

Обратимая динамическая система с фазовым вектором z и невырожденным отображением G обладает свойством пространственно-временной симметрии в смысле инвариантности относительно преобразования: $(z, t) \rightarrow (Gz, -t)$. Она описывает модели в различных областях знаний (см. обзор [8]). В случае

$$G = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad l \geq n$$

(I_j – единичная $(j \times j)$ -матрица) получим обратимую механическую систему [9]. Фазовое пространство этой системы описывается векторами u и v такими, что $\dim u = l$, $\dim v = n$, а преобразование симметрии имеет вид $(u, v, t) \rightarrow (u, -v, -t)$. При этом в механике за вектор u обычно принимается вектор обобщенных координат (квазикоординат), а за вектор v – вектор обобщенных скоростей (квазискоростей). Множество $M = \{u, v : v = 0\}$ называется неподвижным множеством обратимой механической системы.

Фазовый портрет обратимой механической системы симметричен относительно множества M . Траектории, пересекающие M , называются симметричными. Двукратное пересечение траекторией множества приводит к симметричному периодическому движению (СПД). На СПД периода $T/2$ в моменты времени $t = 0, T/2$ траектория пересекает множество M . Необходимые и достаточные условия существования СПД периода $T/2$ даются равенствами

$$(20) \quad v_s(u_1^0, \dots, u_l^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2; \quad s = 1, \dots, n,$$

где $u^0 \in M$ – значение на СПД. Вводится матрица

$$A(u^0, T/2) = \|a_{sj}\| = \left\| \frac{\partial v_s(u_1^0, \dots, u_l^0, T/2)}{\partial u_j^0} \right\|.$$

Определение 4. Случай $\det A(u^0, T/2) \neq 0$ называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.

СПД является периодическим решением. Из определения 4 следует, что невырожденные СПД образуют семейство, на котором монотонно меняется период: для него справедливо определение 1. Равенство (20) также справедливо на периоде. При этом условия (3), записанные для СПД, выполняются тождественно по $(l - n)$ значениям u_j^0 . Значит, матрица A_f в (5) содержит

$(l - n)$ простых нулевых собственных значений. Поэтому условие невырожденности $\text{rank } A_f = \text{Ra} = l + n - 1$, введенное для системы общего вида (2), выполняется для обратимой механической системы только при $l = n$. Соответственно, теорема 1 справедлива для СПД только в случае $l = n$.

С другой стороны, определение 3 в формулировке, где в обратимой механической системе не подразумевается условие невырожденности в виде равенства $\text{Ra} = l + n - 1$, остается справедливым для СПД в общей ситуации. Поэтому теорема 1 о глобальном семействе остается справедливой в следующей формулировке.

Теорема 4. Невырожденное СПД обратимой механической системы всегда продолжается на глобальное семейство невырожденных СПД, которое описывается редуцированной обратимой механической системой с переменными: вектором $u \in \mathbb{R}^{l-n}$ и скаляром v .

Наиболее полное доказательство теоремы 4 приведено в [10]. Адаптивная схема стабилизации колебаний для редуцированной обратимой механической системы построена в [11].

Теоремой 4 закрывается важный вырожденный для теоремы 1 случай симметричных периодических движений.

6. Консервативная система

Для определенности полагается, что консервативная система задается уравнениями Лагранжа второго рода и подвержена действию потенциальных сил. Тогда она описывается системой уравнений второго порядка. Пусть через q и $\dot{q}$ обозначены векторы координат и скоростей соответственно. Тогда динамические уравнения инвариантны относительно замены: $(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, \dot{q}, -t)$. Поэтому консервативная система принадлежит к классу обратимых механических систем, где размерности векторов q и $\dot{q}$ совпадают. Положения равновесия системы принадлежат неподвижному множеству системы. Невырожденные равновесия делятся на центры и седла. Согласно теореме Ляпунова о центре (см. [12]), к центру примыкает локальное семейство нелинейных периодических движений (ляпуновское семейство). Для него размерность нулевой жордановой клетки $k = 2$. В силу наличия в системе интеграла энергии период на семействе будет монотонной функцией постоянной энергии h . Поэтому ляпуновское семейство состоит из невырожденных периодических движений. По теореме 1 оно продолжается на глобальное семейство невырожденных периодических решений, причем редуцированная система содержит два уравнения первого порядка. Такой же вывод получается по теореме 4, но здесь уточняется, что редуцированная система принадлежит к классу обратимых механических систем. В силу консервативности исходной системы получается редуцированная консервативная система с одной степенью свободы (см. [13, лемма П.1]).

Таким образом, ляпуновские семейства консервативной системы всегда продолжаются на глобальные семейства симметричных периодических движений: справедлива глобальная теорема Ляпунова о центре, выведенная впервые в [3].

Консервативная система может описываться уравнениями, не принадлежащими к классу обратимых механических систем. В этом случае применение к системе теоремы 1 также приводит к редуцированной консервативной системе с одной степенью свободы: интеграл энергии сохраняется.

Для обратимой системы с одной степенью свободы в [7, теорема 1] построена управляемая система, которая почти для всех колебаний решает задачу стабилизации. Оказывается, в редуцированной консервативной системе стабилизируются все колебания семейства.

Рассматривается управляемая консервативная система с одной степенью свободы

$$(21) \quad \ddot{x} + f(x) = \varepsilon \sigma(1 - Kx^2)\dot{x},$$

содержащая параметр K и при $\varepsilon = 0$ допускающая интеграл энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \int f(x)dx = h(\text{const})$$

(σ принимает значение 1 или (-1)). Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ система (21) допускает семейство невырожденных периодических движений $x = \varphi(h, t)$.

Необходимые и достаточные условия существования притягивающего цикла, близкого к колебанию с параметром системы $h = h^*$, даются простым корнем амплитудного уравнения

$$I(h) \equiv \int_0^{T(h^*)} [1 - K(h^*)\varphi^2(h, t)]\dot{\varphi}(h, t)dt = 0.$$

Функция $K(h)$ вычисляется по формуле

$$(22) \quad K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \dot{\varphi}^2(h, t)dt}{\int_0^{T(h)} \varphi^2(h, t)\dot{\varphi}^2(h, t)dt},$$

а неравенство $dK(h^*)/dh \neq 0$ доставляет условие простоты корня амплитудного уравнения.

Теорема 5. Системой (21) с параметром K решается задача стабилизации любого колебания, близкого к колебанию консервативной системы с одной степенью свободы.

Доказательство. Введем новое время $\tau = t/T(h)$. Тогда период колебаний не зависит от h и равен 1, формула (22) записывается в виде

$$K(h) = \frac{\int_0^1 z^2(\tau) d\tau}{\int_0^1 \varphi^2(h, T(h)\tau) z^2(\tau) d\tau}.$$

На семействе колебаний функция $\varphi^2(h, t)$ при фиксированном t монотонно зависит от h . Это справедливо для любого типа семейства: невырожденного или вырожденного. Следовательно, функция $K(h)$ монотонна на семействе колебаний консервативной системы.

Таким образом, достаточное условие в [7, теорема 1] выполняется всегда для любого типа семейства – нерожденного и вырожденного, и теорема 5 доказана.

Замечание 5. Для вырожденного семейства функция $K(h)$ вычисляется в явном виде (см. [13]).

Замечание 6. Согласно теореме 5 посредством адаптивной схемы получается исчерпывающее решение задачи стабилизации любого колебания из семейства консервативной системы с одной степенью свободы.

Замечание 7. Результат остается справедливым для консервативной системы с произвольным числом степеней свободы.

7. Приложения

1. Ограниченная плоская задача трех тел описывается уравнениями [14]:

$$(23) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \Omega &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_0} + \frac{\mu}{r_1}, \quad \Omega(x, y) = \Omega(x, -y), \\ r_0^2 &= (x + \mu)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Они содержат единственный безразмерный массовый параметр μ .

Система (23) допускает интеграл энергии. В силу своей инвариантности относительно преобразования

$$\{x, y, \dot{x}, \dot{y}, t\} \rightarrow \{x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t\}$$

система (23) также относится к обратимой механической системе.

Положения относительного равновесия (точки либрации) находятся из уравнений

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0.$$

Задача допускает пять точек либрации L_i , $i = 1, \dots, 5$. При этом L_1, L_2, L_3 лежат на оси абсцисс x , а точки L_4 и L_5 расположены симметрично относительно оси x и образуют равносторонние треугольники с основными телами, расположенными на оси x .

Точки L_1, L_2 и L_3 относятся к равновесиям обратимой механической системы. К ним всегда примыкает симметричное ляпуновское семейство, для которого матрица A_f раздела 2 имеет жорданову 2-нулевую клетку. Применяется теорема 4. Глобальное семейство описывается консервативной системой с одной степенью свободы, обладающей симметричными орбитами. По теореме 5 задача орбитальной стабилизации любой орбиты решается адаптивной схемой управления.

К точкам L_4 и L_5 применяется теорема 1. Система (23) консервативна, поэтому глобальное семейство описывается консервативной системой с одной степенью свободы. Любая орбита глобального семейства стабилизируется применением теоремы 5.

Ограниченная задача трех тел является основной в теории орбит [15]. В теории управляемого орбитального движения решается задача орбитальной стабилизации. Результаты по задаче планируются подробно описать в отдельной статье.

2. Стабилизация колебаний спутника. Движение спутника в плоскости орбиты под действием гравитационных сил описывается уравнением В.В. Белецкого [5]. Далее рассматривается частный случай – круговой орбиты. Здесь уравнение Белецкого приобретает вид

$$(24) \quad \ddot{\alpha} + \mu \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dv},$$

где μ – инерциальный параметр ($|\mu| \leq 3$), α – угол между радиусом-вектором центра масс и главной центральной осью инерции спутника в плоскости орбиты, v – истинная аномалия, выбранная в качестве независимой переменной. Получается уравнение математического маятника

$$\ddot{y} + \mu \sin y = 0, \quad \mu > 0, \quad y = 2\alpha,$$

или

$$\ddot{y} + |\mu| \sin y = 0, \quad \mu < 0, \quad y = 2\alpha + \pi.$$

Колебания спутника образуют семейство от начального отклонения по углу y , на котором период $T(h)$ возрастает.

В [13] для стабилизации колебаний предлагается применять мехатронную схему с осциллятором типа Ван дер Поля. Мехатронная схема является адаптивной в смысле данной статьи.

Согласно теореме 5 локальная стабилизация любого колебания достигается применением адаптивной схемы

$$\ddot{x} + |\mu| \sin x = \varepsilon \sigma (1 - Kx^2) \dot{x},$$

где $x = 2\alpha$, $\mu > 0$ или $x = 2\alpha + \pi$, $\mu < 0$, и выбирается $\sigma = 1$. Здесь уже не используется осциллятор типа Ван дер Поля.

Заметим, что схема стабилизации равновесия в задаче о вращательном движении спутника предлагается, например, в [16].

8. Заключение

Периодическое решение автономной системы общего вида в невырожденном случае может быть циклом или принадлежать семейству. Для цикла матрица Якоби имеет одно нулевое собственное значение, семейству соответствует жорданова k -нулевая клетка. Обычно рассматривается случай $k = 2$; для него в [3] построено глобальное семейство невырожденных периодических решений, которое описывается редуцированной системой второго порядка. Эти результаты справедливы для общего случая размерности $1 < k \leq n$ (n -размерность автономной системы). Для редуцированной системы порядка k строится адаптивная схема стабилизации колебаний. Применяется автономное управление с параметром $K(h)$, зависящим от параметра h глобального семейства. Оно является обобщением на систему произвольного порядка управления из [7]; значением h выделяется колебание в глобальном семействе. Стабилизация происходит путем реализации притягивающего цикла.

Для дифференциального уравнения n -го порядка по переменной x редуцированная система совпадает с исходной. Для стабилизации периодического решения применяется управление – нелинейная диссипация, линейная по скорости, действующая в окрестности цикла, содержащая параметр и обеспечивающая притяжение к циклу в пространстве $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$.

Аналогичные результаты известны (см. [10]) для симметричных периодических движений обратимых механических систем. В случае пространственно-временной симметрии матрица Якоби допускает нулевые собственные значения: простые и одну жорданову 2-клетку. Консервативной системе отвечает жорданова 2-нулевая клетка. Задача стабилизации колебаний семейства находит исчерпывающее решение для консервативной системы с одной степенью свободы: в управляемой системе автоматически выполняются условие стабилизации выбранного колебания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриевский Б.Р., Балашов М.В., Бахтадзе Н.Н., и др. Теория управления (дополнительные главы): Учебное пособие / Под ред. Д. А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2019.
2. Van der Pol B. On relaxation-oscillations in the circuit with non-linear resistance // Philos. Mag. 1927. Ser. 7. V. 3. No. 13. P. 65–80.
3. Тхай В.Н. Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // АиТ. 2023. № 5. С. 29–44.
Tkhai V.N. Stabilization of Oscillations of a Controlled Autonomous System // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 5. P. 520–531.

4. *Euler L.* Consideratios de motu corporum coelestrium // *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* 1766. Т.10.
5. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // *Искусственные спутники Земли.* 1958. № 1. С. 25–43. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
6. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
7. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // *АиТ.* 2019. № 11. С. 83–92.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
8. *Lamb J.S.W., Roberts J.A.G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // *Physica D.* 1998. V. 112. No. 1–2. P. 1–39.
9. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // *Прикл. матем. и механ.* 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
10. *Тхай В.Н.* Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2023. № 6. С. 165–179.
11. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой обратимой механической системы // *АиТ.* 2022. № 9. С. 94–108.
Tkhai V.N. Stabilization of Oscillations of a Controlled Reversible Mechanical System // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 9. P. 94–108.
12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения / *Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР,* 1956. Т. 2. С. 7–263.
13. *Тхай В.Н.* Режим цикла в связанной консервативной системе // *АиТ.* 2022. № 2. С. 90–106.
Tkhai V.N. Cycle Mode in a Coupled Conservative System // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 2. P. 237–251.
14. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.
15. *Szebehely V.* *Theory of Orbits.* New York, Academic Press. 1967.
16. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // *Космические исследования.* 2022. Т. 60. № 5. С. 404–412.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 30.01.2024

После доработки 30.04.2024

Принята к публикации 10.06.2024

Стохастические системы

© 2024 г. Ю.В. МАЛИНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (malinkovsky@gsu.by),
С.Ю. ЕВМЕНЕНКО (stas.evmenenko@yandex.ru)
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКРЫТОЙ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ

Рассматривается открытая сеть обслуживания с однолинейными узлами и экспоненциальным ограничением на время пребывания запросов в узлах. Запросы, время пребывания которых в узле закончилось, мгновенно и независимо от других запросов начинают перемещаться по матрице, отличной от матрицы маршрутизации обслуженных запросов. В сеть поступает простейший поток запросов. Устанавливается инвариантность стационарного распределения по отношению к функциональной форме распределений длительностей обслуживания при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: теория вероятностей, теория массового обслуживания, условие эргодичности, открытая сеть массового обслуживания, сеть с экспоненциальным ограничением на время пребывания запросов в узлах, инвариантность стационарного распределения.

DOI: 10.31857/S0005231024090057, EDN: ZQRYHX

1. Введение

Важную роль при исследовании сетей массового обслуживания играет доказательство инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к форме распределения длительностей обслуживания запросов в узлах. Это связано с тем, что на практике распределение продолжительности обслуживания обычно отличается от показательного.

В ряде работ, например в [1, 2], инвариантность установлена в предположении, что распределения длительностей обслуживания имеют рациональные преобразования Лапласа–Стилтьеса. В [3] была доказана инвариантность стационарного распределения для открытых и замкнутых сетей обслуживания с обходами узлов запросами. Результаты по инвариантности стационарного распределения сетей при более общих предположениях получены, например, в [4–7]. В [8, 9] показаны примеры применения аппарата сетей обслуживания к современным инфокоммуникационным системам и сетям. В [10, 11] была

обоснована необходимость исследования сетей обслуживания, в которых запрос может покинуть узел, не дожидаясь окончания обслуживания. Однако в указанных работах считалось, что продолжительности обслуживания запросов имеют показательное распределение.

В настоящей работе рассматривается сеть обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания запросов в узлах, в которой продолжительности обслуживания имеют произвольный закон распределения, а дисциплина обслуживания запросов в узлах имеет следующую специфику. Запрос, поступающий в некоторый узел, обладает абсолютным приоритетом по отношению ко всем остальным запросам в узле, а вытесненный с прибора запрос при повторном его попадании на прибор дообслуживается оставшееся время. Доказывается, что стационарное распределение вероятностей состояний указанных сетей не зависит от функционального вида законов распределения длительностей обслуживания запросов в узлах при фиксированных первых моментах.

2. Марковский случай

В сеть массового обслуживания, состоящую из N однолинейных узлов (систем), поступает стационарный пуассоновский поток запросов с интенсивностью λ . Каждый поступающий запрос независимо от других запросов с вероятностью p_{0i} направляется в i -й узел ($i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N p_{0i} = 1$). Число мест для ожидания в узле неограниченно.

Состояние сети будем описывать вектором $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), \dots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число запросов в i -м узле в момент времени t .

Время пребывания запроса в i -м узле является случайной величиной, условное распределение которой (если в i -м узле находится n_i запросов) показательное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}$. Другими словами, условная вероятность того, что пребывание каждого запроса в i -м узле закончится в промежутке $[t, t+h)$, если в момент t в узле находилось n_i запросов, равна $\frac{\nu_i}{n_i}h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$, а условная вероятность завершения пребывания хотя бы одного из этих запросов равна $\nu_i h + o(h)$. Запрос, обслуженный в i -м узле, мгновенно и независимо от других запросов с вероятностью p_{ij} направляется в j -й узел сети, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($\sum_{j=0}^N p_{ij} = 1$). Запрос, время пребывания которого в i -м узле закончилось, мгновенно и независимо от других запросов с вероятностью r_{ij} направляется в j -й узел сети, а с вероятностью r_{i0} покидает сеть ($\sum_{j=0}^N r_{ij} = 1$). Для удобства введем узел 0, который отождествим с внешностью сети. Введем также следующие две стохастические квадратные матрицы порядка $N+1$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & r_{01} & r_{02} & \dots & r_{0N} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N0} & r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NN} \end{bmatrix},$$

которые назовем матрицами маршрутизации соответственно обслуженных и «потерянных» запросов. Итак, $p_{00} = r_{00} = 0$, $r_{0j} = p_{0j}$ для остальных j . Очевидно, матрица $S = (s_{ij}, i, j = \overline{0, N})$, где для $i \neq 0$

$$s_{ij} = \frac{\mu_i p_{ij} + \nu_i r_{ij}}{\mu_i + \nu_i} = \frac{\mu_i}{\mu_i + \nu_i} p_{ij} + \frac{\nu_i}{\mu_i + \nu_i} r_{ij},$$

а $s_{0j} = p_{0j}$, также является стохастической и по смыслу управляет движением запросов по узлам $0, 1, \dots, N$ без учета того, за счет чего (окончания обслуживания или окончания времени пребывания) запрос покидает узел. Будем называть эту матрицу матрицей маршрутизации.

Будем предполагать, что матрица s_{ij} неприводима. Уравнение

$$(1) \quad \varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i s_{ij} \quad (j = \overline{1, N})$$

будем называть уравнением трафика. И в силу неприводимости матрицы s_{ij} уравнение (1) будет иметь единственное решение (ε_j) , для которого $\varepsilon_j > 0$, $(j = \overline{1, N})$.

Пусть длительности обслуживания запросов в узлах имеют показательное распределение, т.е. для i -го узла

$$B_i(t) = 1 - \exp[-\mu_i t] \quad (t > 0).$$

Тогда $\mathbf{n}(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным фазовым пространством состояний.

В [10] для системы с ограниченным временем пребывания установлено, что при выполнении условия $\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} < 1$, $i = \overline{1, N}$ цепь Маркова, описывающая число запросов в сети в момент времени t , эргодична, ее стационарное распределение имеет вид $p(\mathbf{n}) = p_1(n_1) \dots p_N(n_N)$ с множителями

$$p_i(n_i) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} \right)^{n_i} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} \right),$$

а уравнение глобального равновесия имеет вид

$$(2) \quad \begin{aligned} & p(\mathbf{n}) \left(\lambda + \sum_{i=1}^N (\mu_i(1 - p_{ii}) + \nu_i(1 - r_{ii})) I_{n_i \neq 0} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} - e_i) \lambda p_{0i} + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} + e_i) (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N p(\mathbf{n} + e_j - e_i) (\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}). \end{aligned}$$

3. Немарковский случай

Будем предполагать, что времена обслуживания запросов в узлах не зависят от процесса поступления и друг от друга и имеют произвольную функцию распределения $B_i(t)$,

$$(3) \quad (\mu_i)^{-1} = \int_0^{\infty} [1 - B_i(t)] dt,$$

где μ_i – скорость обслуживания запросов занятым i -м узлом. Если запрос поступает в узел, свободный от запросов, он сразу начинает обслуживаться. Если запрос поступает в узел, в котором уже есть запрос, то он выбивает запрос, находящийся на приборе, и сразу же начинает обслуживаться, а выбитый с прибора запрос становится в начало очереди (дисциплина LCFS Preemptive Resume). В этом случае процесс $\mathbf{n}(t)$, вообще говоря, не является марковским. Тем не менее для него справедлива

Теорема 1. Цепь Маркова, описывающая число запросов в сети в момент времени t , эргодична, если выполнено условие $\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} < 1$, $i = \overline{1, N}$, а ее стационарное распределение имеет вид $p(\mathbf{n}) = p_1(n_1) \dots p_N(n_N)$ с множителями

$$p_i(n_i) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} \right)^{n_i} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} \right).$$

Доказательство. Пусть $\tau_{ik}(t)$ – остаточное время обслуживания запроса в i -м узле с момента t до момента окончания времени обслуживания, а $\tau_i(t) = (\tau_{i1}(t), \tau_{i2}(t), \dots, \tau_{in_i}(t))$ – вектор, описывающий, остаточное время пребывания запросов в i -м узле; где k -номер позиции, на которой находится запрос от “хвоста” к прибору. Поскольку, вообще говоря, $\mathbf{n}(t)$ не является марковским процессом, рассмотрим марковский процесс $\zeta(t) = (\mathbf{n}(t), \tau(t))$, добавляя к $\mathbf{n}(t)$ непрерывную компоненту $\tau(t) = (\tau_1(t); \dots; \tau_N(t))$. Пусть выполнено условие

$$\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} < 1, \quad i = \overline{1, N},$$

т.е. в случае, когда $\mathbf{n}(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $\mathbf{n}(t)$, а, следовательно, в общем случае и процесса $\tau(t)$, так как $\tau(t)$ получается из $\mathbf{n}(t)$ добавлением непрерывных компонент. Доказательство этого факта может быть проведено либо по схеме, предложенной в [12], либо с помощью предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [13]. Введем обозначение

$$\begin{aligned} F(\mathbf{n}, x) &= F(\mathbf{n}, x_{11}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, \dots, x_{2n_2}, \dots, x_{N1}, \dots, x_{Nn_N}) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{n(t) = \mathbf{n}, \tau_{i1}(t) < x_{i1}, \dots, \tau_{in_i}(t) < x_{in_i}, i = \overline{1, N}\}. \end{aligned}$$

Несложно доказать, что при $\mu^{-1} < \infty$ существуют конечные пределы

$$F(\mathbf{n}, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(\mathbf{n}, t, x).$$

Введем обозначения: $[\tilde{x}_i]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $x_1, \dots, x_N$, а на месте i -го элемента находится элемент $\tilde{x}_i$, и $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $x_1, \dots, x_N$, а на месте i -го и j -го элементов находятся элементы $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$ соответственно.

Для $F(\mathbf{n}, x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \lambda p_{0i} F(\mathbf{n}, x) + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{n}, x) B_i(x_{i,n_i}) \nu_i = \\
& = \sum_{i=1}^N F(\mathbf{n} - e_i, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i-1}]) I_{n_i \neq 0} B_i(x_{i,n_i}) \lambda p_{0i} + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{n}, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i-1}, 0])}{\partial x_{i,n_i}} B_i(x_{i,n_i}) p_{ii} + \\
& + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{n}, x) B_i(x_{i,n_i}) \nu_i r_{ii} + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{n} + e_i, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}, 0])}{\partial x_{i,n_i+1}} p_{i0} + \\
& + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{n} + e_i, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}, x_{i,n_i+1}]) \nu_i r_{i0} + \\
& + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\mathbf{n}, x)}{\partial x_{i,n_i}} - \frac{\partial F(\mathbf{n}, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i-1}, 0])}{\partial x_{i,n_i}} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{\partial F(\mathbf{n} + e_j - e_i, [x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}, 0])}{\partial x_{j,n_j+1}} B_i(x_{i,n_i}) p_{ji} + \\
& + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N F(\mathbf{n} + e_j - e_i, [x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}, x_{j,n_j+1}]) B_i(x_{i,n_i}) \nu_j r_{ji}.
\end{aligned}
\tag{4}$$

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \sum_{i=1}^N \lambda p_{0i} F(\mathbf{n}, x) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{n} + e_i, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}, 0])}{\partial x_{i,n_i+1}} p_{i0} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N F(\mathbf{n} + e_i, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}, x_{i,n_i+1}]) \nu_i r_{i0}; \\
 (6) \quad \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\mathbf{n}, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i-1}, 0])}{\partial x_{i,n_i}} - \frac{\partial F(\mathbf{n}, x)}{\partial x_{i,n_i}} \right) - \\
 &- \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{n}, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i-1}, 0])}{\partial x_{i,n_i}} B_i(x_{i,n_i}) p_{ii} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N F(\mathbf{n}, x) B_i(x_{i,n_i}) \nu_i - \sum_{i=1}^N F(\mathbf{n}, x) B_i(x_{i,n_i}) \nu_i r_{ii} = \\
 &= \sum_{i=1}^N F(\mathbf{n} - e_i, [x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i-1}]) I_{n_i \neq 0} B_i(x_{i,n_i}) \lambda p_{0i} + \\
 &+ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{\partial F(\mathbf{n} + e_j - e_i, [x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}, 0])}{\partial x_{j,n_j+1}} B_i(x_{i,n_i}) p_{ji} + \\
 &+ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N F(\mathbf{n} + e_j - e_i, [x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}, x_{j,n_j+1}]) B_i(x_{i,n_i}) \nu_j r_{ji}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что неотрицательным абсолютно непрерывным по x решением уравнений (5), (6), а, следовательно, и уравнения (4) является

$$(7) \quad F(\mathbf{n}, x) = p(\mathbf{n}) \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{n_i} \mu_i \int_0^{x_{ik}} [1 - B_i(u)] du,$$

где $p(\mathbf{n})$ – стационарная вероятность состояния $\mathbf{n}$ в процессе $\mathbf{n}(t)$ в марковском случае. Действительно, подставляя (7) в (5), поделив обе части полученного уравнения на $F(\mathbf{n}, x)$ и умножив на $p(\mathbf{n})$, получим:

$$p(\mathbf{n}) \lambda = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} + e_i) (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}).$$

Затем подставив (7) в (6), поделив обе части полученного соотношения на $F(\mathbf{n}, x)B_i(x_{i,n_i})$ и умножив на $p(\mathbf{n}) \int_0^{x_{i,n_i}} [1 - B_i(u)] du$, получим:

$$(8) \quad p(\mathbf{n}) \left(\sum_{i=1}^N (\mu_i(1 - p_{ii}) + \nu_i(1 - r_{ii})) I_{n_i \neq 0} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} - e_i) \lambda p_{0i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N p(\mathbf{n} + e_j - e_i) (\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}).$$

Сложив оба полученных уравнения, получим уравнение глобального равновесия для марковского случая (2), и с учетом, что $F(\mathbf{n}, +\infty) = p(\mathbf{n})$, теорема 1 доказана.

4. Заключение

В статье для сети массового обслуживания с однолинейными узлами и экспоненциальным ограничением на время пребывания запросов в узлах доказана нечувствительность стационарного распределения по отношению к распределениям длительностей обслуживания запросов при фиксированных первых моментах этих распределений.

Полученные результаты могут применяться при проектировании новых и модернизации уже существующих информационно-вычислительных сетей и сетей передачи данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baskett F.E., Chandy K.M., Muntz R.R., Palacios F.G.* Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers // J. Assoc. Comput. Mach. 1975. V. 22. No. 2. P. 248–260.
2. *Towsley D.* Queueing network models with state-dependent routing // J. Assoc. Comput. Mach. 1980. V. 27. No. 2. P. 323–337.
3. *Малинковский Ю.В.* Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона–Ньюэлла // АИТ. 1998. № 9. С. 29–35.
4. *Ивницкий В.А.* Об условии инвариантности стационарных вероятностей для сетей массового обслуживания // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27. № 1. С. 188–192.
5. *Barbour A.D.* Networks of queues and the method of stages // Adv. Appl. Probab. 1976. V. 8. No. 3. P. 584–591.
6. *Chandy K.M., Howard J.H., Jr., Towsley D.F.* Product-form and local balance in queueing networks // J. Assoc. Comput. Mach. 1977. V. 24. No. 2. P. 250–263.
7. *Samelson C.L., Bulgren W.G.* A note on product-form solution for queueing networks with Poisson arrivals and general service-time distributions with finite means // J. Assoc. Comput. Mach. 1982. V. 29. No. 3. P. 830–840.

8. *Скоба А.Н., Состина Е.В.* Применение аппарата сетей массового обслуживания для аналитико-численного моделирования работы информационной системы без учета влияния блокировок // Инженерный вестник Дона. 2015. Вып. 3.
9. *Кузнецов Н.А., Семенихин К.В.* Анализ и оптимизация управляемой модели замкнутой сети массового обслуживания // АиТ. 2020. № 3. С. 67–85.
10. *Малинковский Ю.В.* Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания // АиТ. 2015. № 4. С. 67–79.
11. *Малинковский Ю.В.* Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания // АиТ. 2017. № 10. С. 155–167.
12. *Коваленко И.Н.* Об условии независимости вероятностей состояний системы от вида закона распределения времени обслуживания // Проблемы передачи информации. 1962. Вып. 11. С. 147–151.
13. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания // М.: Наука, 1966.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 30.03.2024

После доработки 28.06.2024

Принята к публикации 25.07.2024

Стохастические системы

© 2024 г. В.В. РЫКОВ, д-р физ.-мат. наук (vladimir_rykov@mail.ru)
(Российский государственный университет нефти и газа
(национальный исследовательский университет) им. И.М. Губкина, Москва),
Н.М. ИВАНОВА, канд. физ.-мат. наук (nm_ivanova@bk.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗА И ВРЕМЕНИ РЕМОНТА ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ¹

Вводится понятие маркированного марковского процесса, с помощью которого изучается восстанавливаемая система нагруженного дублирования с одним ремонтным устройством. Предполагается, что наработки до отказа и длительности ремонта элементов системы имеют произвольные распределения. Предлагаемый подход позволяет вычислить вероятность безотказной работы системы, ее среднюю наработку до отказа и провести анализ чувствительности этих характеристик к виду исходных распределений. Апробация нового метода проведена на численных примерах путем сравнения с ранее полученными аналитическими результатами и показала их высокую точность.

Ключевые слова: маркированный марковский процесс, система нагруженного дублирования, произвольные распределения наработки до отказа и времени восстановления элементов, надежность, чувствительность.

DOI: 10.31857/S0005231024090068, EDN: ZQQMZC

1. Введение

Обеспечение надежности систем, объектов и процессов является одной из основных целей при их создании и дальнейшей эксплуатации. Одним из способов повышения структурной надежности системы является резервирование, предполагающее дублирование ее критически важных элементов или резервирование большей кратности. Система, состоящая из основного и одного дублирующего элементов, является наиболее простой резервированной системой, ее исследование интересно как с теоретической, так и практической точек зрения.

Дублированные системы с различными типами резерва, а также с возможностью восстановления отказавших элементов хорошо изучены многими авторами. Основные результаты исследования марковских дублированных

¹ Публикация выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-49-02023 (получатель Иванова Н.М., численный анализ, подготовка текста).

восстанавливаемых и невосстанавливаемых систем можно найти в классических работах по математической теории надежности (см., например, [1, 2] и др.).

Обширность практических приложений резервированных систем привела к созданию новых математических моделей более сложных систем. Так, в [3, 4] рассматривается надежность дублированной системы с неоднородными элементами, наработки до отказа которых имеют различные распределения. Работы [5, 6] содержат исследование систем с профилактическим и приоритетным обслуживанием отказавших элементов. Работы [7, 8] посвящены дублированным системам с различными типами ремонта системы после ее отказа, где отказы элементов подчинены модели Маршала–Олкина. В контексте внедрения избыточности в системы необходимо учитывать и вопросы оптимизации резервирования по разным критериям. Многочисленные исследования посвящены и этой проблематике (см., например, [9, 10]). Другой проблемой является определение исходных параметров системы, а именно вида распределения наработки до отказа и длительности восстановления элементов системы.

Зачастую на практике вид распределения наработки до отказа и времени ремонта элементов системы неизвестен. В самых ранних работах по исследованию надежности дублированных систем выдвигаются предположения об экспоненциальном распределении случайных величин соответствующих времен². Однако появление новых математических методов исследования позволило изучать системы, в которых одно время имеет экспоненциальное распределение, а другое – произвольное. Так, имеется ряд исследований, посвященных применению метода введения дополнительных переменных, полумарковских процессов и других к этим задачам (см., например, [11–14]). Продолжением этих исследований является анализ чувствительности показателей надежности к виду исходных распределений.

В [15] для исследования системы k -из- n с экспоненциально распределенной наработкой до отказа и произвольным распределением времени ремонта применена теория разложимых полурегенерирующих процессов, предложенная ранее автором В.В. Рыковым в качестве обобщения и развития идеи регенерации Смита [16]. Позже этот же подход был применен к исследованию надежности дублированных систем ненагруженного резервирования [17, 18] с произвольными исходными распределениями наработки до отказа и времени ремонта элементов. Однако, как оказалось, он неприменим для исследования аналогичной системы нагруженного резервирования и других более сложных моделей.

В настоящей работе для исследования дублированных восстанавливаемых систем нагруженного резервирования впервые предлагается новый под-

² Следуя классическим работам А.Я. Хинчина, Б.В. Гнеденко и других, далее всюду, где говорится о распределениях времен, подразумеваются распределения соответствующих случайных величин.

ход, опирающийся на новое понятие маркированных марковских процессов (ММП).

Понятие ММП введено как развитие понятия и теории точечных процессов [19]. В теории массового обслуживания точечным процессом называется возрастающая последовательность неотрицательных случайных величин, описывающих моменты наступления некоторых событий, на положительной полуоси времени [20]. Частными случаями точечных процессов являются пуассоновский процесс, точечный процесс Кокса, в которых время наступления событий подчиняется экспоненциальному распределению. Другим обобщением пуассоновского процесса является процесс восстановления, в котором промежутки между наступлениями событий подчинены отличному от экспоненциального распределению [21].

Для описания точечного процесса, распределение которого обладает свойством марковости, в 1977 г. было введено понятие марковских точечных процессов [22]. Позже его обобщением стало понятие марковского маркированного точечного процесса, который определяется парой случайных величин, где первая компонента есть время наступления случайного события, а вторая – метка, также являющаяся случайной величиной, дополнительно описывающей соответствующее событие.

С момента введения понятия точечного процесса соответствующая теория активно развивается, поскольку нашла применение в различных областях науки и техники. Работа [23] посвящена построению математической модели управления автотранспортом на перекрестке с помощью маркированных точечных процессов. В [24] исследован мультивариантный точечный процесс для задачи мониторинга состояния телекоммуникационного соединения. Возможность применения пространственных пуассоновских процессов для моделирования взаимодействия беспроводных устройств рассмотрена в [25].

Вводимый в настоящей работе ММП отличается от известных понятий тем, что состоит из двух компонент, первая из которых представляет собой число отказавших элементов системы, а вторая – набор случайных меток, определяющих их остаточные наработки до отказа и времени ремонта. С помощью предложенного подхода удастся вычислить вероятность безотказной работы системы до момента t и среднюю наработку до отказа дублированной системы нагруженного резерва с произвольными распределениями наработки до отказа и времени ремонта ее элементов. Далее пояснение относительно зависимости вероятности безотказной работы системы от времени t будет опущено.

Статья организована следующим образом. Постановка задачи, основные обозначения и предположения приводятся в следующем разделе 2. В разделе 3 представлено преобразование меток на отдельном периоде регенерации. В разделе 4 получены основные характеристики модели в терминах меток, а в разделе 5 предложен алгоритм их вычисления. Апробация предложенного алгоритма и примеры численного анализа предлагаются в разделе 6. В кон-

це сформулированы основные результаты работы и приведены направления дальнейших исследований.

2. Постановка задачи. ММП

2.1. Постановка задачи. Обозначения и предположения

Рассмотрим восстанавливаемую систему нагруженного дублирования с единственным устройством восстановления отказывающихся элементов, для которой используется обозначение $\langle GI_2|GI|1 \rangle$. Здесь скобки $\langle \rangle$ обозначают замкнутую систему, символы GI – рекуррентный поток отказов и рекуррентный механизм обслуживания с произвольными распределениями наработки до отказа и времени ремонта на первой и второй позициях соответственно. Подстрочный индекс у первого символа обозначает количество элементов системы. Цифра на последней позиции обозначает количество ремонтных единиц. Введем следующие обозначения и предположения:

- $A_i : (i = 1, 2, \dots)$ – наработки до отказа элементов системы, которые предполагаются независимыми одинаково распределенными (н.о.р.) случайными величинами (с.в.) с общей для них функцией распределения (ф.р.) $A(t) = \mathbf{P}\{A_i \leq t\}$, плотностью распределения (п.р.) $a(t) = A'(t)$ и конечными математическим ожиданием $\mu_a = \mathbf{E}[A_i] < \infty$ и дисперсией $\sigma_a^2 = \mathbf{D}[A_i] < \infty$.
- $B_i : (i = 1, 2, \dots)$ – времена ремонта элементов системы, которые предполагаются н.о.р. с.в. с общей ф.р. $B(t) = \mathbf{P}\{B_i \leq t\}$, п.р. $b(t) = B'(t)$ и конечными математическим ожиданием $\mu_b = \mathbf{E}[B_i] < \infty$ и дисперсией $\sigma_b^2 = \mathbf{D}[B_i] < \infty$.

2.2. Определение ММП

Для исследования такой модели введем понятие *маркированного марковского процесса* (ММП) с дискретным параметром

$$Z(n) = \{(J(n), \mathbf{X}(n)), n = 0, 1, \dots\},$$

первая компонента которого представляет собой условную марковскую цепь $J(n) := J$ с не более чем счетным пространством состояний $\mathcal{J}$, а вторая – набор случайных меток $\mathbf{X}(n) := \mathbf{X}_i(n)$, где $i \in \mathcal{J}$, со значениями в измеримом пространстве меток $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Такой процесс задается:

- переходными вероятностями $p_{ij}(\mathbf{X}_i)$ условной марковской цепи J , зависящими от содержания метки $\mathbf{X}_i$ в состоянии i ;
- операторами преобразования меток $\Phi_{ij}(\mathbf{X}_i)$ при переходе из состояния i в состояние j марковской цепи и их распределениями.

Замечание 1. Этот процесс можно рассматривать как специальный вид марковской последовательности с общим пространством состояний и задавать с помощью переходного ядра (генератора процесса). Однако для исследования различных приложений удобнее отпираться от понятия ММП.

Замечание 2. На основе такой модели можно исследовать широкий класс процессов, таких как полумарковские, полурегенерирующие процессы, процессы марковского восстановления и т.п.

2.3. Построение ММП

Приведем построение ММП на примере модели $\langle GI_2|GI|1 \rangle$. В качестве пространства состояний последовательности $J(n)$ выберем множество отказавших элементов $\mathcal{J} = (0, 1, 2)$, где состояние i означает число элементов системы, находящихся в неработоспособном состоянии. В качестве меток $\mathbf{X}_i(n)$ выберем многомерные с.в., содержанием которых являются

- в состоянии $i = 0$ остаточная наработка до отказа элемента $X_0^{(1)}(n)$ и время работы вновь отремонтированного элемента $X_0^{(2)}(n)$,
- в состоянии $i = 1$ остаточная наработка до отказа одного из элементов $X_1^{(1)}(n)$ и вновь назначенное время восстановления другого $X_1^{(2)}(n)$,
- в состоянии $i = 2$ остаточное время восстановления элемента $X_2(n)$, уже находящегося на ремонте.

Здесь верхний индекс указывает номер метки, нижний – состояние цепи $i \in \mathcal{J}$, а переменная в скобках – это номер шага.

Предположим, что в начальный момент времени (на шаге $n = 0$) оба элемента системы исправны, т.е. $J(0) = 0$. Тогда начальным содержанием меток будут являться наработки до отказа элементов системы (н.о.р с.в.), $X_0^{(1)}(0) = A_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}(0) = A_0^{(2)}$ ($A_0^{(1)}$ и $A_0^{(2)}$ также, как и ранее, н.о.р. с.в. с распределением $A(\cdot)$). В последующем процесс оказывается в состоянии $i = 0$ с некоторым набором меток, значение которых будет вычислено ниже.

Возможные переходы рассматриваемой цепи и преобразования меток, описывающие поведение рассматриваемой системы, показаны на рис. 1.

Из состояния 0 процесс переходит в состояние 1 независимо от значения меток с вероятностью $p_{01}(\mathbf{X}(n)) = 1$. При этом на первом шаге метки в состоянии 1 преобразуются следующим образом:

$$(1) \quad \mathbf{X}_1(1) = \Phi_{01}[\mathbf{X}_0(0)]: \quad X_1^{(1)}(1) = A_0^{(1)} \vee A_0^{(2)} - A_0^{(1)} \wedge A_0^{(2)}, \quad X_1^{(2)}(1) = B_1.$$

Из состояния 1 возможны переходы в состояние 0 в случае восстановления отказавшего элемента и в состояние 2 в случае отказа второго элемента

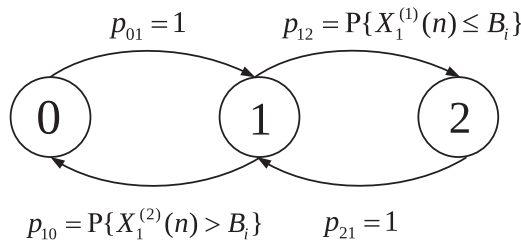


Рис. 1. Граф переходов системы $\langle GI_2|GI|1 \rangle$.

системы. При переходе в состояние 0 на первом шаге эта вероятность имеет вид

$$p_{10}(\mathbf{X}_1(1)) = \mathbf{P} \left\{ X_1^{(1)}(1) > X_1^{(2)}(1) \right\}.$$

При этом метки в состоянии 0 преобразуются следующим образом:

$$(2) \quad \mathbf{X}_0(1) = \Phi_{10}[\mathbf{X}_1(0)] : \quad X_0^{(1)}(1) = (X_1^{(1)}(1) - B_1)1_{\{X_1^{(1)}(1) > B_1\}}, \quad X_0^{(2)}(1) = A_1.$$

Аналогично при переходе в состояние 2 соответствующая вероятность перехода принимает вид

$$p_{12}(\mathbf{X}_1(1)) = \mathbf{P} \left\{ X_1^{(1)}(1) \leq X_1^{(2)}(1) \right\},$$

при этом метка в состоянии 2 преобразуется следующим образом:

$$(3) \quad \mathbf{X}_2(1) = \Phi_{12}[\mathbf{X}_1(1)] : \quad X_2(1) = (B_1 - X_1^{(1)}(1))1_{\{X_1^{(1)}(1) \leq B_1\}}.$$

Наконец, из состояния 2 возможен только один переход в состояние 1, так что $p_{21}(\mathbf{X}_2(1)) = 1$, при этом метки в новом состоянии (на втором шаге) преобразуются следующим образом:

$$(4) \quad \mathbf{X}_1(2) = \Phi_{21}[\mathbf{X}_2(1)] : \quad X_1^{(2)}(2) = A_1, \quad X_1^{(1)}(2) = B_2.$$

Таким образом очевидно, что переход из состояния 2 в состояние 1 представляет собой регенерацию системы, поэтому для ее изучения достаточно исследовать ее поведение только на отдельном периоде регенерации.

3. Исследование поведения процесса на периоде регенерации

Имея в виду регенеративный характер поведения системы, рассмотрим более подробно поведение процесса $Z(n)$ на периоде регенерации. Аналогично предыдущему разделу приведем преобразование меток на периоде регенерации системы. При этом для остаточного времени работы системы после отказа одного из ее элементов на l -м шаге периода регенерации для краткости используем следующее обозначение:

$$W(l) = X_0^{(1)}(l) \vee X_0^{(2)}(l) - X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l) \quad (l = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда с учетом преобразования меток (1)–(4) справедлива

Лемма 1. Между возвращениями в состояние 1 из состояния 2 (т.е. на периоде регенерации системы) метки преобразуются следующим образом:

$$(5) \quad \begin{aligned} X_0^{(1)}(l) &= (X_1^{(1)}(l-1) - X_1^{(2)}(l-1))1_{\{X_1^{(1)}(l-1) > X_1^{(2)}(l-1)\}}, \quad X_0^{(2)} = A_l \in A(.), \\ X_1^{(1)}(l) &= W(l-1), \quad X_1^{(2)} = B_l \in B(.), \\ X_2(l) &= (X_1^{(1)}(l) - X_1^{(2)}(l))1_{\{X_1^{(1)}(l) \leq X_1^{(2)}(l)\}}, \end{aligned}$$

где в качестве начального содержания меток выбраны

$$X_0^{(1)}(0) = X_0^{(2)}(0) = 0, \quad X_1^{(1)}(0) = A_0, \quad X_1^{(2)}(0) = B_0, \quad X_2(0) = 0.$$

Доказательство. Действительно, отправляясь из состояния 1 с метками $X_1^{(1)}(0) = A_0$, $X_1^{(2)}(0) = B_0$ процесс сразу переходит в состояние 2, если отказ работающего элемента произойдет раньше восстановления ремонтирующегося, т.е. при $A_0 \leq B_0$, при этом процесс окажется в состоянии 2 с меткой

$$X_2(1) = (X_1^{(1)}(0) - X_1^{(2)}(0))1_{\{X_1^{(1)}(0) \leq X_1^{(2)}(0)\}}.$$

Из состояния 1 процесс перейдет в состояние 0, если восстановление ремонтирующегося элемента произойдет раньше отказа работающего, т.е. при $A_0 > B_0$; при этом метки преобразуются следующим образом:

$$X_0^{(1)}(1) = (X_1^{(1)}(0) - X_1^{(2)}(0))1_{\{X_1^{(1)}(0) > X_1^{(2)}(0)\}}, \quad X_0^{(2)}(1) = A_1.$$

Далее процесс возвратится в состояние 1 с вероятностью 1 и метками

$$X_1^{(1)}(1) = X_0^{(1)}(1) \vee A_1 - X_0^{(1)}(1) \wedge A_1 \equiv W(1), \quad X_1^{(2)}(1) = B_1.$$

Из состояния 1 процесс может перейти в состояние 2 с вероятностью

$$\mathbf{P}\{X_1^{(1)}(1) \leq X_1^{(2)}(1)\} \equiv \mathbf{P}\{W(1) \leq B_1\}$$

и остаточным временем ремонта (меткой)

$$X_2(2) = (X_1^{(2)}(1) - X_1^{(1)}(1))1_{\{X_1^{(1)}(1) \leq X_1^{(2)}(1)\}},$$

после чего с вероятностью 1 вернется в состояние 1. На этом период регенерации закончится.

В противном случае период регенерации продолжится, и процесс перейдет в состояние 0 с вероятностью

$$\mathbf{P}\{X_1^{(1)}(1) > X_1^{(2)}(1)\} \equiv \mathbf{P}\{W(1) > B_1\}$$

и метками

$$X_0^{(1)}(2) = (X_1^{(1)}(1) - X_1^{(2)}(1))1_{\{X_1^{(1)}(1) > X_1^{(2)}(1)\}}, \quad X_0^{(2)}(2) = A_2.$$

Аналогично происходит преобразование меток на l -м шаге. Из состояния 1 процесс l раз возвратится в состояние 0, если при $(l-1)$ -м посещении состояния 1 из состояния 0 ремонт закончится раньше остаточной наработки до отказа работающего элемента, т.е. при

$$X_1^{(2)}(l-1) = B_{l-1} < W(l-1) = X_1^{(1)}(l-1).$$

При этом остаточная наработка до отказа уменьшится на $X_1^{(2)}(l-1) = B_{l-1}$, и содержание метки в состоянии 0 станет равным

$$\begin{aligned} X_0^{(1)}(l) &= (X_1^{(1)}(l-1) - X_1^{(2)}(l-1))1_{\{X_1^{(1)}(l-1) > X_1^{(2)}(l-1)\}} \equiv \\ &\equiv (W(l-1) - B_{l-1})1_{\{W(l-1) > B_{l-1}\}}. \end{aligned}$$

У отремонтированного элемента начинается новая наработка до отказа $X_0^{(2)}(l) = A_l$, что с учетом содержания меток доказывает первую из формул (5).

Далее из состояния 0 процесс с вероятностью 1 возвратится в состояние 1. Тогда остаточная наработка до отказа системы $W(l)$ после l -го возвращения в состояние 1 представляет собой разность между максимумом и минимумом с.в. $X_0^{(1)}(l)$ и A_l , и начинается ремонт второго элемента, т.е. вторая метка принимает значение B_l ,

$$X_1^{(1)}(l) = X_0^{(1)}(l) \vee A_l - X_0^{(1)}(l) \wedge A_l \equiv W(l), \quad X_1^{(2)}(l) = B_l,$$

что доказывает вторую из формул (5).

Наконец, из состояния 1 в случае отказа работающего элемента, т.е. при

$$X_1^{(2)}(l) = B_l \geq W(l) = X_1^{(1)}(l),$$

процесс переходит в состояние 2 с меткой

$$X_2(l) = (X_l^{(1)}(l) - X_1^{(2)}(l))1_{\{X_1^{(1)}(l) \leq X_1^{(2)}(l)\}} \equiv (B_l - W(l))1_{\{W(l) \leq B_l\}},$$

что доказывает последнюю из формул (5) и завершает доказательство леммы.

В следующем разделе полученные соотношения использованы для вычисления основных характеристик надежности модели.

4. Вычисление основных характеристик надежности

Основными характеристиками надежности рассматриваемой системы на периоде регенерации при начальном значении меток

$$X_0^{(1)}(0) = X_0^{(2)}(0) = 0, \quad X_1^{(1)}(0) = A_0, \quad X_1^{(2)}(0) = B_0, \quad X_2(0) = 0$$

являются:

- распределение $\pi_l = \mathbf{P}\{\nu = l\}$ числа шагов ν до момента отказа системы;
- длительности $T_{ij}(l)$, ($i, j = 0, 1, 2$, $l = 1, 2, \dots$) перехода из состояния i в состояние j на l -м шаге и их характеристики;
- время R от момента возвращения процесса из состояния 2 в состояние 1 до следующего момента перехода в состояние 2, соответствующее распределение $R(t)$, т.е. вероятность безотказной работы системы, а также соответствующее среднее время μ_R между возвращениями;
- распределение периода регенерации системы $\Pi = R + T_{21}(\nu)$.

Вычислим основные характеристики модели в терминах меток. Обозначим через

$$T(l) = T_{10}(l-1) + T_{01}(l), \quad l = 1, 2, \dots,$$

время до возвращения в состояние 1 на l -м шаге периода регенерации, Ω_l и $\hat{\Omega}_l$ – множества элементарных событий, для которых выполняются соотношения

$$\Omega_l = \{\omega : W(0) > B_0, W(1) > B_1, \dots, W(l) > B_l\} \quad (l = 1, 2, \dots),$$

$$\hat{\Omega}_l = \Omega_{l-1} \wedge \{W(l) \leq B_l\}, \quad \hat{\Omega}_0 = \{A_0 \leq B_0\}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Распределение числа шагов ν на периоде регенерации π_l , длительности пребывания $T_{ij}(l)$ в состоянии i до перехода в состояние j на l -м шаге, наработка системы R до отказа, ее период регенерации Π в терминах меток выражаются следующим образом:

$$(6) \quad \pi_l = \mathbf{P}\{\nu = l\} = \mathbf{P}(\hat{\Omega}_l),$$

$$(7) \quad T_{10}(l) = X_1^{(2)}(l)1_{\{X_1^{(1)}(l) > X_1^{(2)}(l)\}}, \quad T_{01}(l) = X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l),$$

$$(8) \quad T(l) = T_{10}(l-1) + T_{01}(l),$$

$$(9) \quad T_{12}(l) = X_1^{(1)}(l)1_{\{X_1^{(1)}(l) \leq X_1^{(2)}(l)\}}, \quad T_{21}(l) = X_2(l),$$

$$(10) \quad R = \sum_{l \geq 0} [T(l) + T_{12}(l)]1_{\{\hat{\Omega}_l\}},$$

$$(11) \quad \Pi = R + T_{21}(l)1_{\{\hat{\Omega}_l\}}.$$

При этом условием конечности периода регенерации является расходимость ряда

$$(12) \quad \sum_{i \geq 0} \ln \mathbf{P}\{W(i) \leq B_i \mid W(i-1) \leq B_{i-1}\}.$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 1, отправляясь из состояния 1 с метками $X_1^{(1)}(0) = A_0$, $X_1^{(2)}(0) = B_0$, процесс сразу переходит в состояние 2, если отказ работающего элемента произойдет раньше восстановления ремонтирующегося, т.е. при $X_1^{(1)}(0) \leq X_1^{(2)}(0)$, проведя в нем время

$$T_{12}(1) = X_1^{(1)}(0) \wedge X_1^{(2)}(0) = X_1^{(1)}(0)1_{\{X_1^{(1)}(0) \leq X_1^{(2)}(0)\}}.$$

При этом процесс окажется в состоянии 2 с меткой $X_2(1) = (B_0 - A_0)1_{\{A_0 \leq B_0\}}$ и проведет в нем случайное время, равное этой величине,

$$T_{21}(1) = (B_0 - A_0)1_{\{A_0 \leq B_0\}}.$$

Таким образом,

$$\pi_0 = \mathbf{P}\{A_0 \leq B_0\}, \quad R = A_0, \quad \Pi = B_0,$$

что соответствует формулам (6), (9)–(11) при $l = 0$.

Число возвращений в состояние 1 будет равно 1, если восстановление ремонтирующегося элемента произойдет раньше отказа работающего, т.е. при $A_0 > B_0$; при этом процесс проведет в состоянии 1 до перехода в состояние 0 случайное время

$$T_{10}(1) = X_1^{(1)}(0) \wedge X_1^{(2)}(0) 1_{\{X_1^{(1)}(0) > B_0\}} \equiv A_0 \wedge B_0 1_{\{A_0 > B_0\}}$$

и перейдет в состояние 0 с метками

$$X_0^{(1)}(1) = (A_0 - B_0) 1_{\{A_0 > B_0\}}, \quad X_0^{(2)}(1) = A_1.$$

Далее процесс возвратится с вероятностью 1 в состояние 1 с метками

$$X_1^{(1)}(1) = X_0^{(1)}(1) \vee A_1 - X_0^{(1)}(1) \wedge A_1 \equiv W(1), \quad X_1^{(2)}(1) = B_1$$

за время $T_{01}(1) = X_0^{(1)}(1) \wedge X_0^{(2)}(1)$.

Затем из состояния 1 процесс перейдет в состояние 2 с вероятностью $\mathbf{P}\{W(1) \leq B_1\}$ и меткой

$$X_2(1) = (B_1 - W(1)) 1_{\{W(1) \leq B_1\}},$$

проведя в нем время $T_{12}(1) = W(1) 1_{\{W(1) \leq B_1\}}$, после чего с вероятностью 1 за время $T_{21}(1) = (B_1 - W(1)) 1_{\{W(1) \leq B_1\}}$ вернется в состояние 1. На этом цикл закончится. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \mathbf{P}\{\nu = 1\} = \mathbf{P}(\hat{\Omega}_1), \\ R &= T_{10}(1) + T_{01}(1) + T_{12}(1), \\ \Pi &= R + T_{21}(1), \end{aligned}$$

что соответствует формулам (6)–(11) при $l = 1$.

Аналогично, число возвращений в состояние 1 будет равно l , если осуществится событие $\hat{\Omega}_l$, т.е. если процесс $l - 1$ раз перейдет из состояния 1 в 0 и обратно, а на l -м шаге перейдет в состояние 2. Вероятность этого события равна

$$\pi_l = \mathbf{P}\{\nu = l\} = \mathbf{P}(\hat{\Omega}_l),$$

что доказывает формулу (6). При этом преобразования меток осуществляются в соответствии с леммой 1, а времена переходов $T_{10}(l)$ из состояния 1 в 0 и обратно $T_{01}(l)$ на l -м шаге равны

$$\begin{aligned} T_{10}(l) &= X_1^{(2)}(l) 1_{\{X_1^{(1)}(l) > X_1^{(2)}(l)\}}, \quad T_{01}(l) = X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l) 1_{\{X_0^{(1)}(l) > X_0^{(2)}(l)\}}, \\ T_{12}(l) &= X_1^{(1)}(l) 1_{\{X_1^{(1)}(l) \leq X_1^{(2)}(l)\}}, \quad T_{21}(l) = X_2(l). \end{aligned}$$

Соображение о том, что наработка системы R до отказа складывается из последовательностей длительностей ремонтов и остаточных наработок до отказа элементов, т.е. длительностей переходов между состояниями 1 и 0 до перехода в состояние 2, а ее период регенерации Π включает в себя дополнительно время $T_{21}(l)$ в состоянии 2, доказывает справедливость формул (10), (11).

Приведем теперь условие конечности периода регенерации. Так как время возвращения из состояния 2 в состояние 1 конечно с вероятностью 1 для любого шага цикла, для этого достаточно конечности с вероятностью 1 наработки системы до отказа,

$$\mathbf{P}\{R < \infty\} = 1.$$

Рассмотрим сначала условие конечности числа шагов на периоде регенерации $\mathbf{P}\{\nu < \infty\} = 1$. Замечая, что

$$\mathbf{P}\{\nu < \infty\} = \sum_{l \geq 0} \mathbf{P}\{\nu = l\} = \sum_{l \geq 0} \mathbf{P}(\hat{\Omega}_l),$$

вычислим вероятность события $\hat{\Omega}_l$, пользуясь марковской зависимостью меток,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{\Omega}_l) &= \mathbf{P}\{W(l) > B_l \mid \Omega_{l-1}\} \mathbf{P}(\Omega_l) = \\ &= \mathbf{P}\{W(l) > B_l \mid W(l-1) \leq B_{l-1}\} \mathbf{P}(\Omega_{l-1}) = \\ &= (1 - p_l) \mathbf{P}(\Omega_{l-1}) = (1 - p_l) \mathbf{P}(\Omega_{l-1} \mid \Omega_{l-2}) \mathbf{P}(\Omega_{l-1}) = \dots = \\ &= (1 - p_l) p_{l-1} \dots p_0 + \dots + p_0 (1 - p_1) + p_0, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$p_0 = \mathbf{P}\{A_0 > B_0\}, \quad p_i = \mathbf{P}\{W(i) \leq B_i \mid W(i-1) \leq B_{i-1}\}.$$

Суммируя полученные выражения, найдем

$$\sum_{l \geq 0} \pi_l = 1 - p_0 + p_0(1 - p_1) + \dots + p_0 \dots p_{l-1}(1 - p_l) + \dots = 1 - \prod_{l \geq 0} p_l.$$

Таким образом, условием конечности числа шагов на периоде регенерации является расходимость произведения $\prod_{l \geq 0} p_l$ или, что эквивалентно, расходимость ряда (12),

$$\sum_{l \geq 0} \ln p_l,$$

что завершает доказательство теоремы.

Полученные соотношения показывают, что основные характеристики модели выражаются в терминах меток. Однако аналитические выражения их распределений и числовых показателей достаточно громоздки и требуют введения специальных преобразований. При этом вычислительные процедуры для представления окончательных результатов достаточно проблематичны. Поэтому в следующем разделе предлагается алгоритм вычисления основных характеристик модели путем имитационного моделирования, опирающийся непосредственно на предложенный подход.

5. Алгоритм вычисления основных характеристик надежности

В этом разделе представлен алгоритм вычисления характеристик надежности восстанавливаемой дублированной системы нагруженного резервирования на основе предлагаемого метода.

Алгоритм 1.

Исходные данные:

- $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ – распределения с.в. A_i , B_i , соответствующие средние (μ_a, μ_b)
- и коэффициенты вариации (v_a, v_b) ,
- N – число реализаций модели,
- n – счетчик числа реализаций,
- ν_l – массив числа циклов длины l на периоде регенерации,
- l – счетчик длины периода регенерации,
- R – массив значений наработки системы до отказа,
- Π – массив периода регенерации системы.

Задать: $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, N , $n = 1$, $\nu_l = [0] * \max(l)$, $R = [0] * N$, $\Pi = [0] * N$.

Начало. Положить: $l = 0$, $X_1^{(1)}(0) = A_0 \in A(\cdot)$, $X_1^{(2)}(0) = B_0 \in B(\cdot)$,
 $X_0^{(1)}(0) = X_0^{(2)}(0) = X_2(0) = 0$, $T(0) = 0$.

Шаг 1. Если $n < N$, то переход на Шаг 2, в противном случае переход на Шаг 4.

Шаг 2. Пока $X_1^{(1)}(l) > X_1^{(2)}(l) \forall l = 0, 1, \dots$, повторять:

$$l := l + 1$$

$$T_{10}(l) = X_1^{(2)}(l - 1)$$

$$X_0^{(1)}(l) = X_1^{(1)}(l - 1) - X_1^{(2)}(l - 1), \quad X_0^{(2)}(l) = A_l \in A(\cdot)$$

$$T_{01}(l) = X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l)$$

$$T(l) := T(l - 1) + T_{10}(l) + T_{01}(l)$$

$$X_1^{(1)}(l) = X_0^{(1)}(l) \vee X_0^{(2)}(l) - X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l), \quad X_1^{(2)}(l) = B_l \in B(\cdot),$$

иначе $X_1^{(1)}(l) < X_1^{(2)}(l)$

$$T_{12}(l) = X_1^{(1)}(l)$$

$$T_{21}(l) = X_2(l) = X_1^{(2)}(l) - X_1^{(1)}(l).$$

Переход на Шаг 3.

Шаг 3. Сбор статистики:

- заполнение массива $\nu_l := \nu_l + 1$,
- заполнение массива $R_n := T(l) + T_{12}(l)$,
- заполнение массива $\Pi_n := R_n + T_{21}(l)$.

Положить $n := n + 1$. Перейти на Начало.

Шаг 4. Обработка статистики:

– вычисление оценки распределения числа шагов ν на периоде регенерации,

$$\hat{\pi} = \frac{\nu_l}{\sum_{l>0} \nu_l},$$

– оценка вероятности безотказной работы системы по полученному массиву R :

$$\hat{R}(t) = 1 - \frac{1}{N} R_n, \quad R_n \leq t \leq R_{n+1},$$

– вычисление оценки средней наработки системы до отказа как среднего значения массива R ,

$$\hat{\mu}_R = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_n,$$

– вывод результатов.

СТОП.

6. Примеры

В данном разделе рассмотрим несколько примеров численного анализа, а также сравним результаты, полученные с помощью предлагаемого подхода и методов теории марковских процессов. Выбор исходных данных не относится к какому-либо примеру из практической задачи и носит лишь демонстративный характер.

6.1. Система $< M_2 | M | 1 >$

Пусть наработка до отказа и время ремонта элементов имеют экспоненциальное распределение с параметрами α и β соответственно, $A(t) \sim \text{Exp}(\alpha)$, $B(t) \sim \text{Exp}(\beta)$. Характеристики надежности такой системы можно вычислить прямым методом из процесса рождения и гибели. Таким образом, вероятность безотказной работы системы $< M_2 | M | 1 >$ вычисляется как

$$(13) \quad R(t) = \frac{1}{2r} e^{-\frac{1}{2}(3\alpha+\beta+r)t} (e^{rt}(\alpha + \beta + r) - (\alpha + \beta - r)),$$

где $r = \sqrt{\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2}$, откуда получаем среднюю наработку системы μ_R до отказа,

$$(14) \quad \mu_R = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{1 + 2\alpha\beta^{-1}}{2\alpha^2\beta^{-1}}.$$

Для иллюстрации примера положим $\alpha = \beta = 1$. В этом случае средние значения наработки до отказа и времени ремонта равны $\mu_a = \mu_b = 1$. Для проведения эксперимента было взято $N = 10^5$ – число реализаций алгоритма,

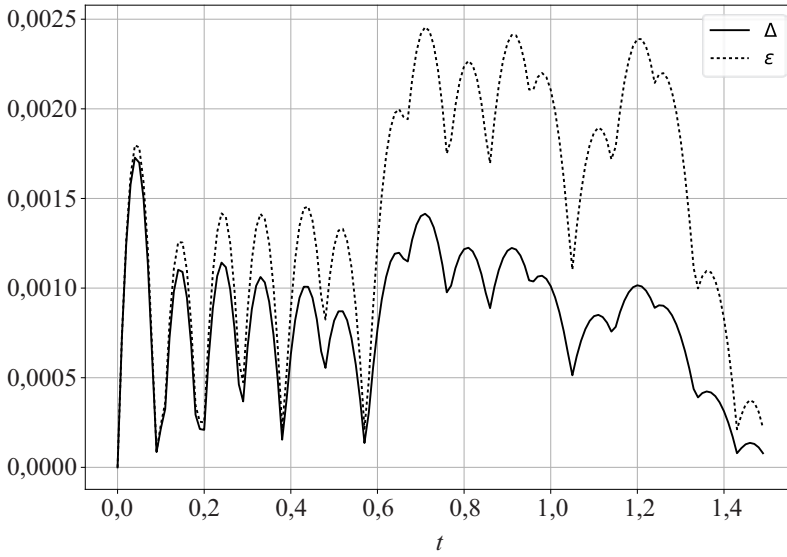


Рис. 2. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|M|1 \rangle$.

подобранное экспериментальным путем для достижения высокой точности результатов алгоритма. Непосредственная реализация алгоритма выполнена на языке программирования Python. Для оценки точности полученных результатов по предложенному алгоритму рассмотрим абсолютную Δ и относительную ε погрешности,

$$\Delta = |R_{th}(t) - \hat{R}(t)|, \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{R_{th}(t)},$$

где $R_{th}(t)$ обозначает значения вероятности безотказной работы системы, вычисленные по формуле (13), а $\hat{R}(t)$ – значения, полученные с помощью алгоритма. На рис. 2 показаны графические результаты вычисления этих оценок на интервале $t = [0, 1,5]$, где $t = 1,5$ соответствует средней наработке системы μ_R до отказа, вычисленной по формуле (14). Из графика видно, что на рассматриваемом интервале t максимальное значение абсолютной ошибки составляет $\Delta \approx 0,0017$, а максимальное значение относительной ошибки $\max(\varepsilon) \approx 0,0025$. При этом значения средних оценок на всем интервале t равны соответственно $\mathbf{E}[\Delta] = 0,0008$ и $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0,0014$.

Значения средней наработки системы μ_R до отказа, вычисленные аналитически и по алгоритму, равны соответственно $\mu_R = 1,5$ и $\hat{\mu}_R = 1,502127$ и подчеркивают сопоставимость полученных результатов.

6.2. Система $\langle M_2|GI|1 \rangle$

Рассмотрим далее случай, когда наработка до отказа элементов имеет экспоненциальное распределение, а время их ремонта подчиняется произвольному закону распределения, т.е. рассмотрим систему $\langle M_2|GI|1 \rangle$.

Для вычисления аналитического выражения вероятности безотказной работы такой системы используется метод введения дополнительных переменных [26], который приводит к необходимости решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -2\alpha\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t, x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t; x) &= -(\alpha + \beta(x))\pi_1(t, x), \\ \frac{d}{dt}\pi_2(t) &= \alpha \int_0^t \pi_1(t, x)dx,\end{aligned}$$

вместе с начальными $\pi_0(0) = 0$, $\pi_1(0) = 1$, $\pi_2(0) = 0$ и граничным условиями $\pi_1(t, 0) = 2\alpha\pi_0(t)$ с помощью метода характеристик. Путем решения этой системы в терминах преобразований Лапласа (ПЛ) получено ПЛ вероятности безотказной работы системы, которое в терминах ПЛ п.р. времени ремонта ее элементов $\tilde{b}(s)$ имеет вид

$$(15) \quad \tilde{R}(s) = \frac{s + \alpha(2 - \tilde{b}(s + \alpha))}{(s + \alpha)(s + 2\alpha(1 - \tilde{b}(s + \alpha)))}.$$

Откуда найдем среднюю наработку до отказа системы

$$\mu_R = \tilde{R}(0) = \frac{2 - \tilde{b}(\alpha)}{2\alpha(1 - \tilde{b}(\alpha))}.$$

Для сравнения аналитических результатов и их оценок, полученных с помощью нового алгоритма, предположим, что время ремонта элементов имеет Гамма распределение ($\Gamma = \Gamma(l, \theta)$) с соответствующими характеристиками: п.р. $b(t) = \theta^l t^{l-1} e^{-\theta t} \Gamma(l)^{-1}$, $t > 0$, средним $\mu_b = l\theta^{-1} = 1$ и коэффициентом вариации $v_b = \sqrt{l}/l = 0,5$. Для остальных параметров снова положим $\alpha = 1$, $N = 10^5$. Для оценки полученных результатов рассмотрим также абсолютную Δ и относительную ε погрешности (см. рис. 3). Для вычисления этих оценок в качестве теоретического $R_{th}(t)$ взято обратное ПЛ вероятности безотказной работы (15), вычисленное численно с использованием встроенной функции языка программирования Python. Аргумент t рассматривается на интервале $t = [0, 1,35]$, где $\max(t) = 1,35$ соответствует значению μ_R при заданных параметрах.

По результатам эксперимента, максимальное значение для Δ составило $\max(\Delta) \approx 0,0017$, а для ε составило $\max(\varepsilon) \approx 0,0028$. Средние значения на всем интервале t составили $\mathbf{E}[\Delta] = 0,0007$ и $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0,0012$. В данном случае средняя наработка до отказа системы составила $\mu_R = 1,3469$ для аналитического результата и $\hat{\mu}_R = 1,3478$ для алгоритма. Результаты оценки алгоритма снова демонстрируют высокую точность относительно аналитических результатов.

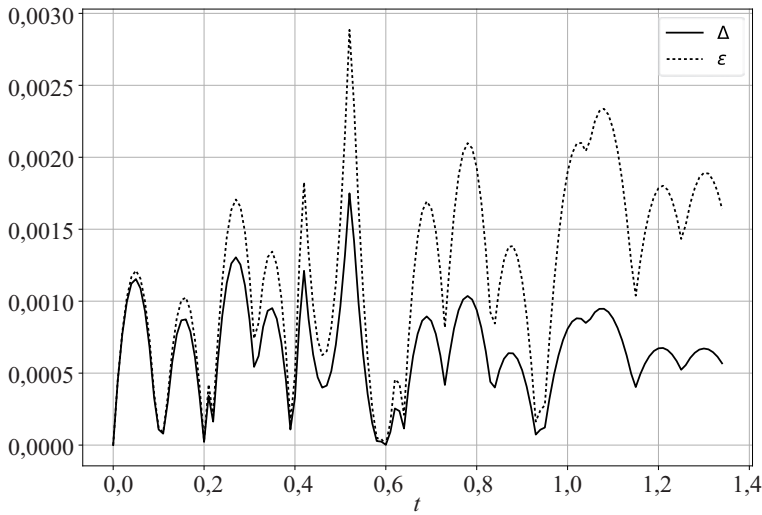


Рис. 3. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|\Gamma|1 \rangle$.

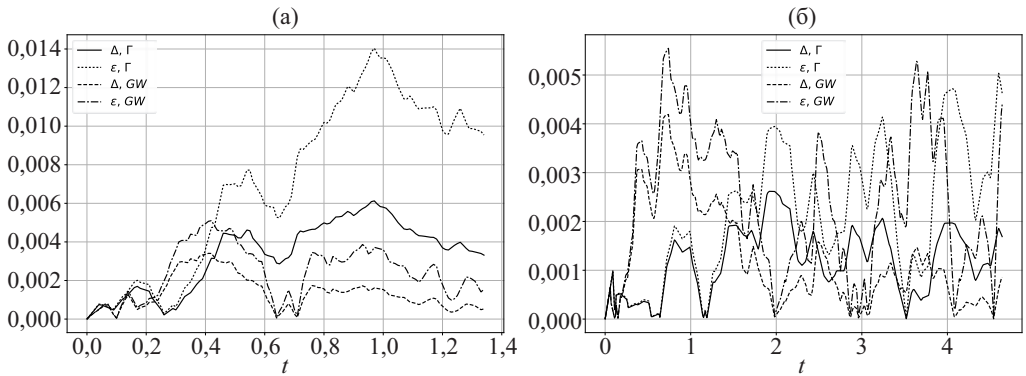


Рис. 4. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$. а – $v_b = 0,5$. б – $v_b = 5$.

Для дополнительной проверки рассмотрим имитационное моделирование восстанавливаемой дублированной системы с использованием метода дискретно-событийного моделирования [27]. Реализация метода выполнена на языке программирования Python, для чего общее время моделирования взято $T = 10^5$. Для примера рассмотрим распределения Γ и Гнеденко–Вейбулла (GW) времени ремонта элементов, при этом фиксируя для обоих распределений значения среднего $\mu_b = 1$ и коэффициента вариации $v_b = 0,5, 5$. Остальные параметры остаются прежними.

На рис. 4,а,б представлены абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$ для рассматриваемого примера.

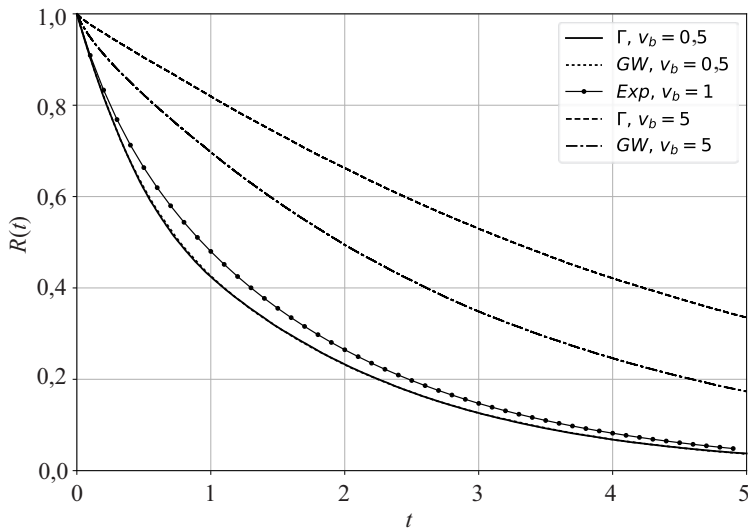


Рис. 5. Вероятность безотказной работы системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$.

Аргумент t выбран до максимального значения средней наработки до отказа системы для $v_b = 0,5$ и $v_b = 5$ соответственно для каждого рисунка. Результаты оценки вероятности безотказной работы с помощью метода дискретно-событийного моделирования взяты как $R_{th}(t)$. Полученные результаты показали, что среди рассмотренных распределений времени ремонта и соответствующих значений коэффициента вариации максимальные значения погрешностей составили $\max(\Delta) \approx 0,006$ и $\max(\varepsilon) \approx 0,014$.

Средние значения этих погрешностей для всех случаев представлены в табл. 1. Эти результаты эксперимента подтверждают точность характеристик надежности, полученных с помощью предлагаемого подхода.

Далее приведем непосредственно график вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$, полученный с помощью предложенного подхода (см. рис. 5). Легенда рисунка определяет тип линии для выбранных распределений времени ремонта и соответствующих значений коэффициента вариации. Для выявления влияния коэффициента вариации времени ремонта на вероятность безотказной работы системы на рисунке также представлен случай, определяющий марковскую модель (*Exp*).

Результаты данного примера показывают, что вид распределения и коэффициент вариации времени ремонта существенно влияют на вероятность

Таблица 1. Средние значения погрешностей Δ и ε

$B(\cdot), v_b$	$E[\Delta]$	$E[\varepsilon]$
$\Gamma, v_b = 0,5$	0,0034	0,0070
$\Gamma, v_b = 5$	0,0006	0,0007
$GW, v_b = 0,5$	0,0014	0,0024
$GW, v_b = 5$	0,0023	0,0031

Таблица 2. Средняя наработка до отказа системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$

$B(\cdot), v_b$	Событийное моделирование	Алгоритм
$\Gamma, v_b = 0,5$	1,34619	1,34457
$\Gamma, v_b = 5$	4,63125	4,64059
$GW, v_b = 0,5$	1,34111	1,352305
$GW, v_b = 5$	2,80304	2,82017

безотказной работы системы. Однако стоит отметить, что кривые вероятности безотказной работы при $v_b = 0,5$ и $v_b = 1$ расположены друг к другу довольно близко. Более того, при $v_b = 0,5$, несмотря на различные распределения времени ремонта, эти кривые сливаются на рассмотренном интервале t . В случае $v_b = 5$, наоборот, кривые вероятности безотказной работы при тех же распределениях времени ремонта значительно отличаются друг от друга. Таким образом, можно сделать вывод о нечувствительности вероятности безотказной работы к виду распределения времени ремонта при фиксированных среднем μ_b и коэффициенте вариации v_b при $v_b < 1$ и, наоборот, о ее чувствительности при $v_b > 1$.

В табл. 2 представлены значения средней наработки до отказа системы для данного примера, и также приведены соответствующие значения, полученные с помощью метода дискретно-событийного моделирования. Результаты демонстрируют нечувствительность среднего μ_R к виду распределения времени ремонта при фиксированных μ_b и v_b при $v_b < 1$. Кроме того, средняя наработка до отказа системы оказывается чувствительной к виду распределения времени ремонта и значению коэффициента вариации при $v_b > 1$.

6.3. Система $\langle GI_2|GI|1 \rangle$

В последнем примере рассмотрим такую систему, наработка до отказа и время ремонта элементов которой имеют произвольные распределения. В качестве этих распределений возьмем снова Γ и GW . Введем обозначение коэффициента вариации наработки до отказа элементов системы v_a и положим $v_a = 0,5$. Остальные исходные параметры сохраняются из предыдущего примера. На рис. 6, 7 демонстрируются оценки абсолютной Δ и относительной ε погрешностей для различных исходных распределений и коэффициентов вариации. Легенда рисунка определяет тип линии для погрешностей при Γ и GW распределениях времени ремонта. В качестве $R_{th}(t)$ снова рассмотрена оценка вероятности безотказной работы, полученная методом событийного моделирования.

Согласно полученным графическим результатам максимальная абсолютная погрешность среди рассмотренных случаев составляет $\max(\Delta) < 0,005$. Максимальное значение относительной погрешности варьируется в интервале $\max(\varepsilon) \approx [0,003, 0,014]$. С учетом заданных значений $N = 10^5$ и $T = 10^5$ эти результаты объективно удовлетворительны.

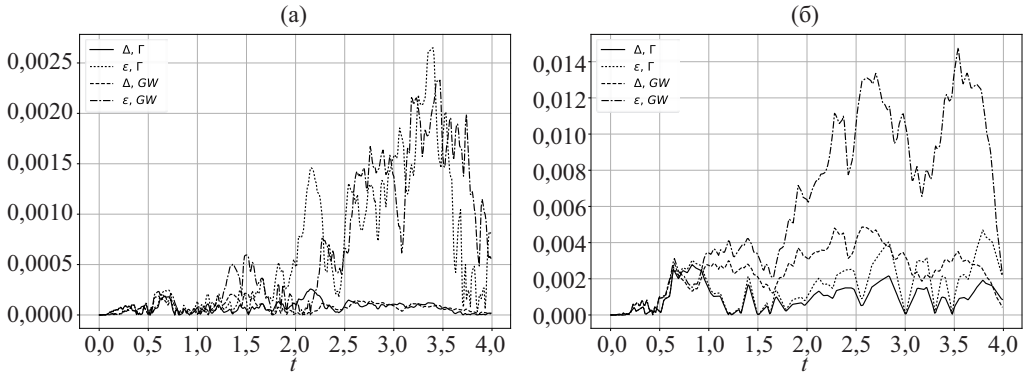


Рис. 6. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle \Gamma_2 | GI | 1 \rangle$. а - $v_b = 0,5$. б - $v_b = 5$.

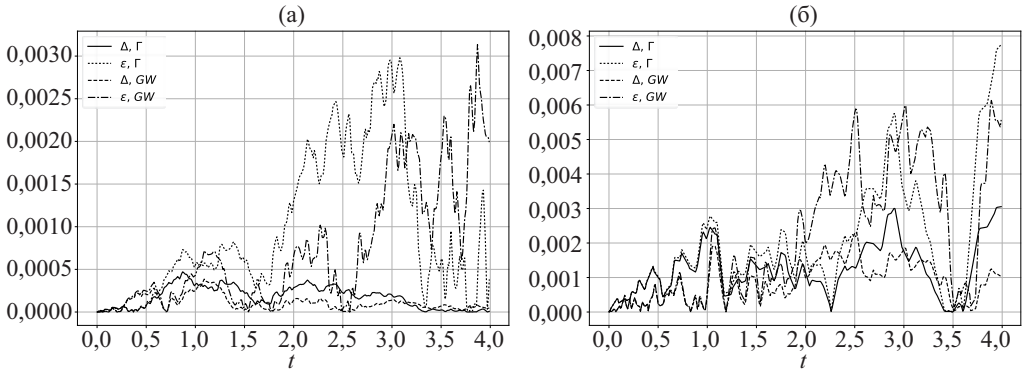


Рис. 7. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle GW_2 | GI | 1 \rangle$. а - $v_b = 0,5$. б - $v_b = 5$.

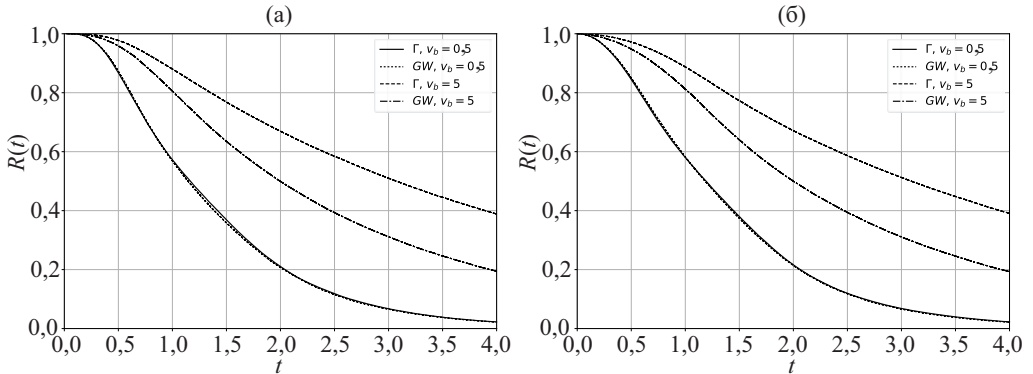


Рис. 8. Вероятность безотказной работы системы $\langle GI_2 | GI | 1 \rangle$. а - $A \sim \Gamma, v_a = 0,5$. б - $A \sim GW, v_a = 0,5$.

На рис. 8 представлены графики вероятности безотказной работы для распределений Γ и GW наработки до отказа элементов. Эксперимент демонстрирует аналогичные результаты предыдущего примера. Значение коэффициен-

Таблица 3. Средняя наработка до отказа системы $\langle GI_2|GI|1 \rangle$

а) $A \sim \Gamma, v_a = 0,5$		
$B(\cdot), v_b$	Событийное моделирование	Алгоритм
$\Gamma, v_b = 0,5$	1,4059	1,4003
$\Gamma, v_b = 5$	4,1305	4,2208
$GW, v_b = 0,5$	1,3900	1,3877
$GW, v_b = 5$	2,6242	2,6349
б) $A \sim GW, v_a = 0,5$		
$B(\cdot), v_b$	Событийное моделирование	Алгоритм
$\Gamma, v_b = 0,5$	1,4061	1,4044
$\Gamma, v_b = 5$	4,1637	4,2347
$GW, v_b = 0,5$	1,3983	1,3985
$GW, v_b = 5$	2,6329	2,6433

та вариации времени восстановления $v_b = 5$ приводит к увеличению значений вероятности безотказной работы на рассматриваемом интервале t . Кроме того, вид распределения времени восстановления влияет на поведение этой кривой при $v_b > 1$. При этом очевидно, что кривые вероятности безотказной работы достаточно близки друг к другу при различных исходных распределениях, но фиксированных значениях параметров μ_a и v_a .

В табл. 3 представлены значения средней наработки до отказа системы для рассмотренной модели, включая оценки, полученные методом событийного моделирования. Таблицы 3,а и 3,б демонстрируют близкие результаты при различных распределениях наработки до отказа элементов. Значения средней наработки до отказа системы μ_R отличаются лишь на втором или третьем знаках после запятой. Таким образом, можно сделать вывод о нечувствительности средней наработки до отказа системы к виду распределения наработки до отказа при фиксированных среднем μ_a и коэффициенте вариации v_a .

Дополнительно сравнивая значения табл. 2 и 3, можно сделать вывод о низкой чувствительности средней наработки до отказа системы к виду распределения наработки до отказа элементов при фиксированных среднем μ_a и коэффициенте вариации $v_a \leq 1$.

7. Заключение

В статье введено понятие маркированного марковского процесса, с помощью которого исследована система нагруженного дублирования с произвольными исходными распределениями. Предложены методика и алгоритм вычисления вероятности безотказной работы такой системы. Апробация результатов, полученных с помощью нового подхода, проводилась путем сравнения с результатами аналитических вычислений и дискретно-событийного моделирования. Новый подход показал высокую точность в сравнении с известными методами.

Главное преимущество предлагаемого алгоритма моделирования по сравнению с дискретно-событийным моделированием заключается в том, что представленная процедура полностью опирается на математически сформулированный подход и, по сути, состоит в реализации преобразования меток, которая однозначно определяет работу системы. Более того, данный алгоритм освобождает от необходимости написания дополнительного кода программы дискретно-событийного моделирования, что существенно облегчает процесс исследования дублированной системы нагруженного резерва с произвольными исходными распределениями.

В дальнейшем предполагается применить этот подход для исследования других сложных стохастических систем, в том числе для исследования характеристик надежности системы k -из- n с произвольными исходными распределениями и произвольным числом ремонтных единиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. Пер. с англ., под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Сов. радио, 1969.
3. Sugawara, Y., Murata, K. Reliability and Preventive Maintenance of a Two-Unit Standby Redundant System with Different Failure Time Distributions // Lecture Notes Econom. Math. Syst., Springer Publ. 1984. V. 235.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-45587-2_6
4. Houankpo H.G.K., Kozyrev D. Mathematical and Simulation Model for Reliability Analysis of a Heterogeneous Redundant Data Transmission System // Mathematics, MDPI Publ. 2021. V. 9. 2884. <https://doi.org/10.3390/math9222884>
5. Yali M., Haiying Z. Reliability analysis of warm standby redundant repairable system without being repaired “as good as new” // 2012 IEEE Symposium on Robotics and Applications (ISRA), IEEE Publ. 2012. P. 141–143.
<https://doi.org/10.1109/ISRA.2012.6219142>
6. Takemoto Y, Arizono I. A study of MTTF in two-unit standby redundant system with priority under limited information about failure and repair times // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability, Sage Publ. 2015. V. 230. No. 1. P. 67–74.
<https://doi.org/10.1177/1748006X15584235>
7. Rykov V. On steady state probabilities of renewable system with Marshal-Olkin failure model // Stat Papers, Springer Publ. 2018. V. 59. P. 1577–1588.
<https://doi.org/10.1007/s00362-018-1037-6>
8. Rykov V., Zaripova E., Ivanova N., Shorgin S. On Sensitivity Analysis of Steady State Probabilities of Double Redundant Renewable System with Marshall-Olkin Failure Model // Commun. Comput. Inform. Sci., Springer Publ. 2018. V. 919. P. 234–245. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99447-5_20
9. Peiravi S., Nourelfath M., Zanjani M.K. Universal redundancy strategy for system reliability optimization // Reliabil. Engin. Syst., Elsevier Publ. 2022. V. 225.
<https://doi.org/10.1016/j.ress.2022.108576>

10. *Parveen, Singh D., Taneja A.K.* Redundancy optimization for a system comprising one operative unit and N hot standby units // Reliabil.: Theor. Appl. 2023. V. 18. No. 4(76). P. 547–562. <https://doi.org/10.24412/1932-2321-2023-476-547-562>
11. *Shunji Osaki, Toshio Nakagawa* On a Two-Unit Standby Redundant System with Standby Failure // Oper. Res. Institut. Oper. Res. Management Sci. 1971. V. 19. No. 2. P. 510–523. <https://doi.org/10.1287/opre.19.2.510>
12. *Rykov V., Efrosinin D., Vishnevsiy V.* On Sensitivity of Reliability Models to the Shape of Life and Repair Time Distributions // 2014 Ninth International Conference on Availability, Reliability and Security, Fribourg, Switzerland, IEEE Publ. 2014. P. 430–437. <https://doi.org/10.1109/ARES.2014.65>
13. *Koutras V.P., Platis A.N.* Semi-Markov Availability Modeling of a Redundant System with Partial and Full Rejuvenation Actions // 2008 Third International Conference on Dependability of Computer Systems DepCoS-RELCOMEX. 2008. <https://doi.org/10.1109/depcos-reldcomex.2008.13>
14. *Mishchenko V.I., Kravtsov A.N. Mamleev T.F.* A Semi-Markov Model of the Functioning of Redundant Measuring Instruments Relative to the Frequency of Verification // Meas Tech. 2021. V. 64. P. 289–295. <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01931-3>
15. *Rykov V., Ivanova N., Kozyrev D.* Application of Decomposable Semi-Regenerative Processes to the Study of k -out-of- n Systems // Mathematics, MDPI Publ. 2021. V. 9. 1933. <https://doi.org/10.3390/math9161933>
16. *Smith W.* Regenerative stochastic processes // Proc. Royal Soc. Ser. A. The Royal society Publ. 1955. V. 232. P. 6–31.
17. *Rykov V., Efrosinin D., Stepanova N., Sztrik J.* On Reliability of a Double Redundant Renewable System with a Generally Distributed Life and Repair Times // Mathematics, MDPI Publ. 2020. V. 8. 278. <https://doi.org/10.3390/math8020278>
18. *Rykov V., Ivanova N.* On Reliability of a Double Redundant Renewable System with Arbitrarily Distributed Life- and Repair Times of its Units // J. Math. Sci., Springer Publ. In print.
19. *Ibe O.C.* Markov Processes for Stochastic Modeling. London: Elsevier, 2013.
20. *Daley D.J., Vere-Jones D.* An Introduction to the Theory of Point Processes. New York: Springer, 2003.
21. *Cox D.R., Isham V.* Point processes. Chapman & Hall/CRC, 1980.
22. *Ripley B.D., Kelly F.P.* Markov Point Processes // J. London Math. Soc., 1977. V. 15. 1. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-15.1.188>
23. *Литвак Н.В., Федоткин М.А.* Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками // АиТ. 2000. № 5. С. 67–76.
24. *Борисов А.В., Миллер Б.М., Семенухин К.В.* Фильтрация марковского скачкообразного процесса по наблюдениям мультивариантного точечного процесса // АиТ. 2015. № 2. С. 34–60.
25. *Абаев П.О., Бесчастный В.А., Гайдамака Ю.В.* О применении пространственных точечных процессов в решении оптимизационных задач для беспроводных сетей с установлением прямых соединений // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 11. № 2. С. 160–165.

26. Rykov V., Ivanova N., Kozyrev D. Sensitivity Analysis of a k -out-of- n : F System Characteristics to Shapes of Input Distribution // Lecture Notes Comp. Sci., Springer Publ. 2021. V. 12563. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8_37
27. Ivanova N. Modeling and Simulation of Reliability Function of a k -out-of- n : F System // Commun. Comput. Inform. Sci., Springer Publ. 2021. V. 1337. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66242-4_22

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 28.06.2024

После доработки 11.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

Управление в социально-экономических системах

© 2024 г. Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru),
Д.Г. АЛГАЗИНА, канд. техн. наук (darya.algazina@mail.ru)
(Алтайский государственный университет, Барнаул)

АГРЕГИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ РЕФЛЕКСИВНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО

Рассматривается модель олигополии с произвольным числом агентов, рефлексующих по Курно в условиях неполной информации, для классического случая линейных функций издержек и спроса. Агенты принимают решения, основываясь на модели коллективного поведения. В исследовании проблемы выявления условий сходимости к равновесию этой модели акцент сделан на траектории суммы невязок действий всех агентов. Получены агрегированные оценки динамики этой траектории, позволяющие судить о движении к положению равновесия траектории каждого из агентов.

Ключевые слова: олигополия Курно, рефлексивное поведение, невязки, агрегированные оценки, условия сходимости.

DOI: 10.31857/S0005231024090079, **EDN:** ZQONUI

1. Введение

Научные направления, в рамках которых исследуются модели поведения рациональных агентов в условиях неполной информации, существенное внимание уделяют рынку олигополии. Теория игр стала первым научным методом анализа олигополии [1]. С обзором новейших достижений в теории игр олигополии можно ознакомиться в [2].

Модели теории коллективного поведения дополняют модели теории игр тем, что предоставляют возможность исследования динамики поведения рациональных агентов при достаточно слабых предположениях об их информированности [3, 4]. Динамический процесс принятия агентом решений строится на основе рефлексивных размышлений о наилучшем собственном выборе, с учетом наилучших откликов остальных конкурентов. Развитие динамики направляется выбором агентов. Определяющим эффектом рефлексии является достижение равновесия [4, 5].

Значительное число исследований моделей теории игр и коллективного поведения на конкурентных рынках [6–16] и др. посвящено проблеме выявления условий существования равновесия, его единственности и сходимости к нему траекторий агентов.

Приняв ту или иную гипотезу о поведении агентов и их взаимодействиях, можно детально рассчитать траекторию каждого из них. Однако агрегированное описание поведения системы в целом, не вдаваясь в подробное описание поведения каждого из агентов, представляется целесообразнее такого метода по ряду обстоятельств. Так понятно, что активность отдельных агентов в отдельные моменты времени не может оказывать сколько-нибудь заметного влияния на сходимость траекторий. К тому же рост числа агентов на рынке и их траекторий, времени на получение результата делают метод все менее привлекательным. В ряде случаев об асимптотической сходимости рассчитанных траекторий можно судить лишь через значительный промежуток времени, в частности, когда процесс развивается неоднозначно или медленно, и тенденция проявляется поздно. Интуитивно агрегированное описание коллективного поведения системы агентов на значительных временных промежутках может быть не менее точным, чем детализированное.

2. Формальная постановка задачи исследования

В качестве базовой рассматривается модель олигополии Курно [1], которая состоит из n конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов. Считается, что спрос определен функцией вида (обратной функцией спроса в зависимости от совокупного выпуска агентов):

$$(1) \quad p(Q) = a - bQ,$$

где $p(Q)$ – единая рыночная цена, $Q = \sum_{i \in N} q_i$ – совокупный выпуск n агентов $i \in N = \{1, \dots, n\}$, q_i – выпуск i -го агента, a и b – параметры. Параметр a характеризует максимально возможную цену товара, при которой объем спроса будет стремиться к нулю, а параметр b характеризует наклон кривой спроса.

Полные издержки агентов имеют вид

$$(2) \quad \phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i,$$

где c_i, d_i – предельные и постоянные издержки i -го агента соответственно. Целевые функции агентов заданы выражением

$$(3) \quad \Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \rightarrow \max_{q_i}.$$

Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют. Состояние рынка в момент времени t ($t = 0, 1, 2, \dots$) задается n -мерным вектором $q^t = (q_1^t, \dots, q_i^t, \dots, q_n^t)$.

Агенты считаются в совокупности конкурентоспособными на рынке Курно, если для каждого агента выполняется ограничение на его предельные издержки

$$(4) \quad c_i < \frac{a + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} c_j}{n}.$$

В этом случае каждый агент считается конкурентоспособным, а в модели олигополии Курно, как в игре в нормальной форме, равновесие $q^* = (q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ понимаемое как статическое равновесие Нэша [17], существует, единственно и $q_i^* > 0 \forall i \in N$ (см., например, [18]).

В условиях игровой неопределенности (о действиях, выбираемых конкурентным окружением) и неполного знания (о затратах, целевых функциях и прочих атрибутах конкурентов) равновесие рынка, как правило, может быть достигнуто не в результате однократного принятия агентами решений, а как исход итерационного рефлексивного процесса [3, 4, 18–20].

Будем рассматривать рефлексивный дискретный процесс, когда смена состояний рынка удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [4] – в каждый момент (период, такт) времени $(t + 1)$ каждый агент наблюдает объемы выпуска всех агентов, выбранные ими в предыдущий момент времени t и корректирует свой выпуск, делая шаг в направлении текущего положения цели $x_i(q_{-i}^t)$ согласно следующей итерационной процедуре:

$$(5) \quad q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), \quad i \in N.$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0, 1]$ – параметр, независимо выбираемый каждым i -м агентом, определяет величину его шага к текущему положению своей цели. Агент может делать полный шаг, полагая $\gamma_i^{t+1} = 1$, тем самым выбирая свой наилучший ответ, «оставаться на месте», выбирая $\gamma_i^{t+1} = 0$, или делать «неполный шаг», если $\gamma_i^{t+1} \in (0, 1)$.

Текущее положение цели i -го агента $x_i(q_{-i}^t)$ – это такой его объем выпуска, который максимизировал бы собственную целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же объемы выпуска, что и в предыдущий [4, 21]. Здесь $q_{-i}^t = (q_1^t, \dots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \dots, q_n^t)$ – обстановка i -го агента (вектор объемов выпуска всех агентов в момент времени t за исключением i -го агента). Известно, что (см., например, [10, 18])

$$(6) \quad x_i(q_{-i}^t) = \frac{h_i - \sum_{j \neq i} q_j^t}{2} = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}.$$

Здесь:

$h_i = \frac{a-c_i}{b}$ – объем совершенно конкурентного рынка при ценообразовании по предельным издержкам $p(Q) = c_i$, называемый «совершенно конкурентный объем фирмы i »;

$Q_{-i}^t = \sum_{j \neq i} q_j^t$ – суммарный выпуск «окружением» i -го агента ($i, j \in N$).

Приведем вывод переменной $x_i(q_{-i}^t)$, чтобы показать ее соотношение с q_i^t . Используя (1)–(3) для t -го момента времени получаем

$$\frac{\partial \Pi_i^t}{\partial q_i^t} = a - bq_i^t - bQ_{-i}^t + \left(-b - b \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} \right) q_i^t - c_i = 0$$

и

$$q_i^t = \frac{(a - c_i)/b - Q_{-i}^t}{2 + \partial Q_{-i}^t / \partial q_i^t}.$$

По предположению Курно выпуск окружения агента не изменится, если он изменит свой выпуск. Поэтому $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = 0$ и оптимальный выпуск агента q_i^t составит $\frac{(a-c_i)/b - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j^t}{2}$. Этот оптимальный выпуск будет являться текущим положением цели агента $x_i(q_{-i}^t)$ в (6).

Для модели (5)–(6) под траекторией i -го агента понимается *реализованная* по этой модели последовательность объемов выпуска $q_i^0, q_i^1, \dots, q_i^t, \dots$.

Проблеме выявления условий сходимости к равновесию траекторий агентов, определяемых по (5)–(6), и ее модификациям в классической модели олигополии Курно (1)–(4) посвящено значительное число работ [18–20, 22–26] и др.

Особенность и новизна проведенного здесь исследования заключается в разработке агрегированного описания поведения системы в целом, позволяющего судить о движении к положению равновесия траектории каждого из агентов.

Проводимое исследование предполагает последовательное решение следующих задач:

- 1) приведение моделей агентов к однородному виду (форме);
- 2) исследование влияния суммарных невязок на сходимость траекторий агентов;
- 3) агрегированное описание преобразования (пересчета) суммарных невязок при переходе из периода в период;
- 4) агрегированное описание динамики (оценка) суммарных невязок по совокупности временных периодов;
- 5) формирование условий сходимости к равновесию траекторий агентов с использованием агрегированной оценки динамики модели коллективного поведения.

Интуитивно понятно, что агрегаты предпочтительнее формировать из однородных элементов. В идеальном случае однородные агенты могут различаться лишь их выбором параметра γ . Исследуем возможность такого случая для модели рынка (1)–(4) и процесса (5)–(6).

С этой задачи начнем следующий раздел.

3. Методы и результаты исследования

Пусть процесс (5)–(6) для модели (1)–(4) сходится при наборах параметров шагов $\{\gamma_i^{t+1}\}$ ($i \in N; t = 0, 1, 2, \dots$) и предельных издержках агентов $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_n)$.

Будет ли при тех же параметрах шагов сходиться этот процесс, если меняются предельные издержки агентов или параметры рынка?

С целью ответа на этот вопрос введем следующую замену переменных:

$$(7) \quad \varepsilon_i^t = q_i^* - q_i^t \quad (i \in N; t = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь q_i^* – равновесный, q_i^t – текущий выпуск i -го агента.

Используя известные для равновесия Курно соотношения $h_i = Q^* + q_i^*$, преобразуем (5)–(6). Имеем

$$\begin{aligned} q_i^* - q_i^{t+1} &= q_i^* - q_i^t - \gamma_i^{t+1} \left(\frac{h_i - Q_{-i}^t}{2} - q_i^t \right) = \\ &= q_i^* - q_i^t - \gamma_i^{t+1} \left(\frac{Q^* + q_i^* - Q_{-i}^t}{2} - q_i^t \right) = \\ &= q_i^* - q_i^t - \gamma_i^{t+1} \left(\frac{\sum_{j \neq i} (q_j^* - q_j^t) + 2q_i^*}{2} - q_i^t \right). \end{aligned}$$

Окончательно

$$(8) \quad \varepsilon_i^{t+1} = \varepsilon_i^t + \gamma_i^{t+1} \left(-\frac{\sum_{j \neq i} \varepsilon_j^t}{2} - \varepsilon_i^t \right).$$

Здесь, по аналогии с (1)–(6), текущее положение цели i -го агента равно $\left(-\frac{\sum_{j \neq i} \varepsilon_j^t}{2} \right)$, а (8) является моделью индикаторного поведения агента, если его целевая функция имеет вид

$$(9) \quad \Pi_i(\varepsilon) = - \left(\sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \varepsilon_i \rightarrow \max_{\varepsilon_i}.$$

Здесь $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n)$.

Покажем это. По (9) для t -го момента времени находим оптимальные невязки i -го агента. Имеем

$$\frac{\partial \Pi_i^t}{\partial \varepsilon_i^t} = -\varepsilon_i^t - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j^t - \left(1 + \frac{\partial \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j^t}{\partial \varepsilon_i^t} \right) \varepsilon_i^t.$$

Отсюда

$$\varepsilon_i^t = - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j^t / \left(2 + \frac{\partial \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j^t}{\partial \varepsilon_i^t} \right).$$

По предположению Курно окружение агента не изменит свой выпуск, если он сам делает это. Очевидно, что это предположение относится и к невязкам. Поэтому $\frac{\partial \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j^t}{\partial \varepsilon_i^t} = 0$ и его положение цели (оптимальные невязки на текущий момент времени) составит $\left(-\frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j^t}{2} \right)$.

Для модели (8) под траекторией i -го агента будем понимать реализованную по этой модели последовательность невязок $\varepsilon_i^0, \varepsilon_i^1, \dots, \varepsilon_i^t, \dots$.

Сходимость (8) означает, что $\varepsilon_i^t \rightarrow \varepsilon_i^* = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Утверждение 1. Процесс индикаторного поведения (8) сходится тогда и только тогда, когда сходится процесс (5)–(6) для модели (1)–(4).

Доказательство этого утверждения приведено в Приложении.

Следующее утверждение показывает, что для сходимости траектории невязок каждого из агентов достаточно сходимости траектории суммарных невязок всех агентов.

Утверждение 2. Если $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $\varepsilon_j^t \rightarrow \varepsilon_j^ = 0 \forall j \in N$.*

Доказательство этого утверждения, основанное на методе математической индукции, приведено в Приложении.

Примечание. Из равенства $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t = 0$ по (8) следуют равенства $|\varepsilon_j^{t+1}| = (1 - \gamma_j^{t+1}/2)|\varepsilon_j^t|$ и неравенства $|\varepsilon_j^{t+1}| < |\varepsilon_j^t|$ при $\gamma_j^{t+1} \neq 0 \forall j \in N$, которые указывают на то, что в этом случае траектории всех агентов в $(t+1)$ -м периоде будут ближе к положению равновесия, чем в t -м периоде.

Итоговый результат для модели (1)–(6), по сути являющийся следствием утверждения 1, представлен в следующей теореме.

Теорема 1. В линейной модели Курно (1)–(4) с конкурентоспособными агентами параметры рынка a и b , параметры агентов c_i и d_i не влияют на условия на величины шагов $\{\gamma_i^t\}_{t=1,2,\dots}$, обеспечивающие сходимость модели индикаторного поведения (5)–(6).

Отметим преимущества в исследовании проблемы достижения равновесия на основе модели (8):

- модель безразлична к параметрам рынка и затрат агентов (a, b, c_i, d_i) , что дает возможность упростить исследование;
- агенты и их траектории различаются лишь выбором параметра γ и начальными данными. При этом значение имеет только первое, так как интересуют условия сходимости при любых начальных данных;
- с точки зрения экономических ограничений могут предъявляться требования к неотрицательности текущих выпусков агентов в модели (5)–(6). В модели (8) для подобных требований к невязкам нет оснований.

Перейдем к следующей задаче, которая, согласно утверждению 2, имеет важное значение для сходимости траектории каждого из агентов. Обсудим условия на параметры γ , при которых $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \rightarrow 0$.

По (8) имеем, что $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} = \left(1 - \sum_{j \in N} \gamma_j^{t+1}/2\right) \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} - \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \gamma_j^{t+1}/2$.

При $\gamma_j^{t+1} \equiv 1 \quad \forall j \in N$ имеем $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} = (1 - (1+n)/2) \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1}$.

При $\gamma_j^{t+1} \equiv 0 \quad \forall j \in N$ будет, что $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} = \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t$.

Таким образом, если $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \neq 0$, то существует такое значение параметра $\tilde{\gamma}^{t+1}$, что

$$(10) \quad \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} = (1 - \tilde{\gamma}^{t+1}(1+n)/2) \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t.$$

При этом значение параметра $\tilde{\gamma}^{t+1}$ определяется из соотношения

$$(11) \quad \tilde{\gamma}^{t+1} = \left(\sum_{j \in N} \gamma_j^{t+1} + \sum_{j \in N} \gamma_j^{t+1} \varepsilon_j^t / \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \right) / (1+n).$$

Здесь $\tilde{\gamma}^{t+1}$ является средним арифметическим взвешенным набора параметров $\{\gamma_j^{t+1}\}_{j \in N}$ с весами $\{\omega_j^t\}_{j \in N}$, т.е. $\tilde{\gamma}^{t+1} = \frac{\sum_{j \in N} \omega_j^t \gamma_j^{t+1}}{\sum_{j \in N} \omega_j^t}$ и веса являются вещественными числами вида $\omega_i^t = \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t + \varepsilon_i^t$.

«Отрицательный» вклад агента в параметр $\tilde{\gamma}^{t+1}$ возможен в тех случаях, если знак его невязок не совпадает со знаком совокупных невязок всех агентов $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t = Q^* - Q^t$.

Фиксируем некоторые периоды времени t_0, τ и $\tau > t_0$. Далее, полагая, что $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0} \neq 0$ и $\tilde{\gamma}^t \neq \frac{2}{1+n}$ (случай, когда $\tilde{\gamma}^t = \frac{2}{1+n}$ и соответственно $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t = 0$, учтены в примечании к утверждению 2), при $t_0 + 1 \leq t \leq \tau$ по (10) последовательно получаем

$$(12) \quad \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0+\tau} = \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0} \prod_{t=t_0+1}^{\tau} (1 - \tilde{\gamma}^t(1+n)/2).$$

Введем обозначения:

$$T = \{t_0 + 1, \dots, \tau\}, \quad T_+ = \{t \in T | 1 - \tilde{\gamma}^t(1+n)/2 > 0\}, \\ T_- = \{t \in T | 1 - \tilde{\gamma}^t(1+n)/2 < 0\}.$$

В отдельные периоды из множества T_+ могут иметь место два случая возможных неравенств: $1 \leq 1 - \tilde{\gamma}^t(1+n)/2$ (если $\tilde{\gamma}^t \leq 0$) и $0 < \tilde{\gamma}^t(1+n)/2 < 1$ (если $0 < \tilde{\gamma}^t < \frac{2}{1+n}$). Первый случай является «неблагоприятным», а второй «благоприятным» для сходимости процесса. Аналогично, в множестве T_- также возможны «благоприятные» периоды, когда $-1 < 1 - \tilde{\gamma}^t(1+n)/2 < 0$ (если $\frac{2}{1+n} < \tilde{\gamma}^t < \frac{4}{1+n}$), и «неблагоприятные» периоды, когда $1 - \tilde{\gamma}^t(1+n)/2 < -1$ (если $\frac{4}{1+n} \leq \tilde{\gamma}^t$).

Используя неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем:

$$\prod_{t \in T_+} (1 - \tilde{\gamma}^t(1+n)/2) \leq \left[\frac{1}{t_+} \sum_{t \in T_+} (1 - \tilde{\gamma}^t(1+n)/2) \right]^{t_+} = [1 - \bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau(1+n)/2]^{t_+},$$

$$\prod_{t \in T_-} (\tilde{\gamma}^t(1+n)/2 - 1) \leq \left[\frac{1}{t_-} \sum_{t \in T_-} (\tilde{\gamma}^t(1+n)/2 - 1) \right]^{t_-} = [\bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau(1+n)/2 - 1]^{t_-}.$$

Здесь: $\bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau = \frac{1}{t_+} \sum_{t \in T_+} \tilde{\gamma}^t$, $\bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau = \frac{1}{t_-} \sum_{t \in T_-} \tilde{\gamma}^t$ – средние значения взвешенного параметра $\tilde{\gamma}^t$ по множествам T_+ и T_- соответственно; $t_+(t_-)$ – число периодов в множестве $T_+(T_-)$, $\tau = t_+ + t_-$.

Отсюда по (12) получаем, что

$$(13) \quad \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} \right| \leq [1 - \bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau(1+n)/2]^{t_+} |1 - \bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau(1+n)/2|^{t_-} \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0} \right|.$$

Неравенство (13) и утверждение 2 позволяют сформулировать следующее утверждение о сходимости процесса (8).

Утверждение 3. Модель (8) сходится к положению равновесия, если для произвольного t_0 и $\tau > t_0$ выражение $[1 - \bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau(1+n)/2]^{t_+} |1 - \bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau(1+n)/2|^{t_-}$ ($\tau = t_+ + t_-$) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Если $\exists t_0$ такое что $0 < \bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau$ и $\bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau < \frac{4}{n+1} \quad \forall \tau > t_0$, то модель (8) сходится к равновесию.

Поясним справедливость этого следствия. Если $t \in T_+$, то всегда $\tilde{\gamma}^t < \frac{2}{1+n}$ и $\bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau < \frac{2}{1+n}$. Если $t \in T_-$, то всегда $\tilde{\gamma}^t > \frac{2}{1+n}$ и поэтому $\bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau > \frac{2}{1+n}$. Поэтому, чтобы выполнялись неравенства $[1 - \bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau(1+n)/2] < 1$ и $|1 - \bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau(1+n)/2| < 1$, достаточно потребовать, чтобы $0 < \bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau$ и $\bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau < \frac{4}{1+n}$.

Также из утверждений 1 и 3 следует, что для тех наборов параметров $\{\gamma_i^t\}$, для осредненных оценок которых выполняются неравенства $0 < \bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau$ и $\bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau < \frac{4}{1+n}$, сходится модель (5)–(6).

Следствие 2. Пусть параметры $\tilde{\gamma}^t \quad t = (1, 2, \dots, \tau)$ – случайные величины, и $\bar{\tilde{\gamma}}^\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \tilde{\gamma}^t$ по вероятности сходится к общему среднему $\bar{\tilde{\gamma}}$. Тогда модель (8) по вероятности сходится к равновесию при $\tau \rightarrow \infty$, если $\bar{\tilde{\gamma}} < \frac{4}{1+n}$.

Пример фрагмента численного расчета. Положим в модели (1)–(3) $n = 4$, $a = 100$, $b = 0,1$, $c = (20; 25; 20; 30)$, $q^0 = (250; 250; 100; 200)$. Постоянные издержки для всех агентов равны и составляют 500. По формуле $h_i = \frac{a - c_i}{b}$ имеем, что $h = (800; 750; 800; 700)$.

При полной информированности агентов статичное равновесие Нэша q^* является решением системы линейных алгебраических уравнений вида $q_i + Q = h_i \quad (i = \overline{1, 4})$. Имеем, что $q_i^* = h_i - \frac{1}{5} \sum_{j=1}^4 h_j$ и $q^* = (190; 140; 190; 90)$.

Фрагмент динамики при $n = 4$

Такты	Невязки действий агентов				Параметры шагов				$\sum \varepsilon_j$	$\tilde{\gamma}$	$\tilde{\gamma}_+$	$\tilde{\gamma}_-$
t	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	-60,0	-110,0	90,0	-110,0					-190,0			
1	-10,0	-65,0	105,0	-72,5	0,40	0,30	0,30	0,25	-42,5	0,31	0,31	
2	0,5	-48,9	95,6	-61,0	0,40	0,30	0,30	0,20	-13,8	0,27	0,29	
3	3,2	-39,5	62,9	-51,7	0,40	0,30	0,80	0,25	-25,1	-0,33	0,08	
4	7,5	-29,8	57,2	-42,1	0,40	0,30	0,30	0,25	-7,1	0,29	0,13	
5	7,5	-22,4	39,7	-35,9	0,40	0,40	0,70	0,25	-11,2	-0,23	0,06	
6	8,2	-15,7	35,4	-30,0	0,40	0,40	0,30	0,25	-2,1	0,32	0,11	
7	6,1	-13,0	30,4	-26,0	0,70	0,30	0,30	0,25	-2,5	-0,08	0,08	
8	5,4	-9,9	26,2	-22,4	0,40	0,40	0,30	0,25	-0,7	0,28	0,10	
9	5,1	-8,3	22,4	-19,5	0,10	0,30	0,30	0,25	-0,3	0,24	0,12	
10	4,7	-7,0	19,1	-17,1	0,20	0,30	0,30	0,25	-0,3	-0,03	0,10	
11	3,4	-3,3	14,4	-10,1	0,60	1,00	0,50	0,80	4,3	5,61		5,61
12	-0,5	-3,8	5,0	-7,2	1,00	1,00	1,00	1,00	-6,5	1,00		3,31
13	3,0	1,3	5,4	-0,4	1,00	1,00	0,50	1,00	9,3	0,98		2,53
14	-3,2	-4,0	-2,0	-4,9	1,00	1,00	1,00	1,00	-14,0	1,00		2,15
15	5,4	5,0	6,0	4,6	1,00	1,00	1,00	1,00	21,0	1,00		1,92
16	-7,8	-8,0	-7,5	-8,2	1,00	1,00	1,00	1,00	-31,5	1,00		1,77
17	11,9	11,8	12,0	11,7	1,00	1,00	1,00	1,00	47,3	1,00		1,66
18	-17,7	-17,8	-17,6	-17,8	1,00	1,00	1,00	1,00	-71,0	1,00		1,57
19	26,6	26,6	26,7	26,6	1,00	1,00	1,00	1,00	106,5	1,00		1,51
20	-39,9	-6,7	-26,6	-39,9	1,00	0,50	0,80	1,00	-113,1	0,82		1,44
21	36,6	23,3	8,3	36,6	1,00	0,50	0,50	1,00	104,8	0,77		0,77
22	-34,1	-8,7	-19,9	-34,1	1,00	0,50	0,50	1,00	-96,9	0,77		0,77
23	31,4	17,7	9,3	31,4	1,00	0,50	0,50	1,00	89,7	0,77		0,77
24	-11,0	-9,2	-15,5	-29,2	0,70	0,50	0,50	1,00	-64,8	0,69		0,75
25	26,9	9,3	4,6	-5,7	1,00	0,50	0,50	0,50	35,2	0,62		0,72
26	-4,1	-1,8	-5,3	-20,4	1,00	0,50	0,50	1,00	-31,7	0,76		0,73
27	13,8	6,6	3,9	5,6	1,00	0,50	0,50	1,00	29,9	0,78		0,74
28	5,0	-2,5	-4,5	-12,1	0,40	0,50	0,50	1,00	-14,2	0,59		0,72
29	9,6	1,6	0,1	1,0	1,00	0,50	0,50	1,00	12,4	0,75		0,72
30	-1,4	-1,9	-3,0	-5,7	1,00	0,50	0,50	1,00	-12,0	0,79		0,73

Примечание: обозначения показателей в шапке таблицы даны без индекса « t », предполагая под этим индексом номер такта (периода, итерации).

Переход к модели (8) осуществляется, используя формулу расчета невязок $\varepsilon_i^t = q_i^* - q_i^t$. Имеем $\varepsilon^0 = (-60; -110; 90; -110)$.

По текущим значениям невязок ε_i^t (столбцы 2–5 таблицы) и текущим значениям параметров γ_i^t (столбцы 6–9 таблицы), по формулам (8) и (11) по каждому такту (столбец 1) приведены расчеты *средних арифметических взвешенных* $\tilde{\gamma}^t$ наборов параметров $\{\gamma_j^t\}$ (столбец 11).

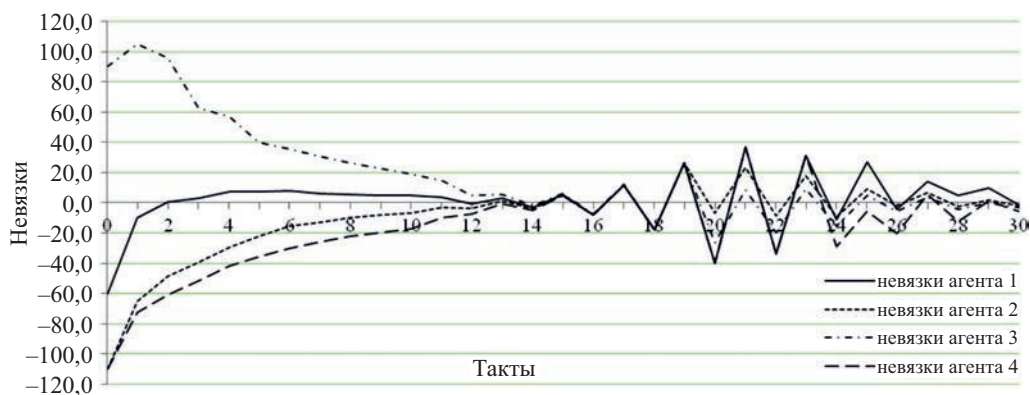


Рис. 1. Динамика невязок действий отдельных агентов.

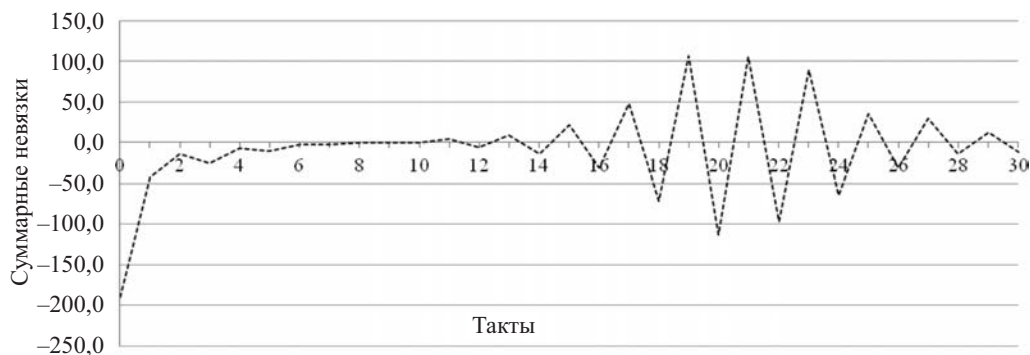


Рис. 2. Динамика суммарных невязок.

Сходимость процесса зависит от того, какие шаги γ выбирают агенты. Известно, что если агенты делают максимальные (равные единице) шаги γ , то процесс сходится только при $n = 2$. При $n = 4$ процесс расходится, если все агенты делают шаги, превышающие 0,8. В общем случае при $n = 4$ вопрос о сходимости остается открытым, если агенты действуют разнонаправленно: одни выбирают шаги больше 0,8, другие меньше.

Для большей наглядности введенных авторами статьи условий, как средства для индикации сходимости процесса, выделено три промежутка по десять тактов в каждом. В первых десяти тактах агенты намеренно делают небольшие шаги, чтобы гарантировать сходимость. В следующих десяти тактах делают большие шаги, чтобы показать расходимость процесса. В заключительные десять тактов процесс опять сделан сходящимся за счет того, что не все агенты делают большие шаги.

Рассмотрим подробнее динамику процесса. В каждом из первых десяти тактов динамики средние взвешенные $\tilde{\gamma}^t$ не превосходят $2/(1+n) = 0,4$ (есть и два отрицательных значения), а агрегированная оценка $\tilde{\gamma}_+^t$ (их *среднее арифметическое* за t тактов – см. столбец 12) находится в диапазоне $(0; 0,4)$. Поэтому имеет место тенденция к уменьшению суммарных невязок по абсо-

лютной величине: было $\varepsilon^0 = (-60; -110; 90; -110)$ и $\left| \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^0 \right| = 190$, стало в десятом такте $\varepsilon^{10} = (4,7; -7,0; 19,1; -17,1)$ и $\left| \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^{10} \right| = 0,3$.

Следующие десять тактов (с одиннадцатого по двадцатый) $\tilde{\gamma}^t$ и агрегированная оценка динамики $\tilde{\gamma}^T$ (столбец 13) превосходят $4/(1+n) = 0,8$ что обуславливает тенденцию к увеличению по абсолютной величине суммарных невязок. Стало $\varepsilon^{20} = (-39,9; -6,7; -26,6; -39,9)$ и $\left| \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^{20} \right| = 113,1$.

С двадцать первого по тридцатый такты средние *арифметические взвешенные* $\tilde{\gamma}^t$ и их *среднее арифметическое* $\tilde{\gamma}^T$ находятся в диапазоне $(0,4; 0,8)$, что означает выполнение условий сходимости по утверждению 3 и его следствию 1 при $t_0 = 21$, и обуславливает тенденцию к уменьшению суммарных невязок. Действительно, стало $\varepsilon^{30} = (-1,4; -1,9; -3,0; -5,7)$ и $\left| \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^{30} \right| = 12,0$.

Имеем также $\bar{\gamma}^{30} = \frac{1}{30} \sum_{t=1}^{30} \tilde{\gamma}^t = 0,76$. По данным таблицы динамика движется к теоретическому статичному равновесия Нэша.

На рис. 1 и рис. 2 наглядно видна «синхронизация» динамик частных и суммарных издержек. Очевидно, если сходятся невязки каждого из агентов, то сходятся их суммарные невязки. Но из утверждения 2 следует и обратное: из сходимости к нулю суммарных невязок следует сходимость к нулю невязок каждого из агентов.

4. Заключение

Особенность и новизна проведенного здесь исследования проблемы выявления условий сходимости к равновесию моделей коллективного поведения состоит в следующем. Традиционно, такие условия формулируются в виде диапазонов на значения параметров γ для каждого из агентов в каждом периоде: если каждый агент в каждом периоде выбирает свой параметр в таком диапазоне, то динамика гарантированно сходится. Здесь же условия сходимости формулируются по совокупности периодов (т.е. за временной промежуток) в виде диапазона на *среднее арифметическое значение параметров*, которые представляют собой *средние арифметические взвешенные* набора $\{\gamma_j^t\}_{j \in N}$ по каждому периоду t входящим в совокупность. Если среднее по совокупности периодов входит в диапазон, то динамика каждого из агентов приближается к положению равновесия. Если при этом совокупность периодов неограниченна, то динамика каждого из агентов гарантированно сходится к равновесию.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Вначале отметим, что статическое равновесие Нэша в модели (9) существует, единственно и $\varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$.

Справедливость утверждения 1 следует из того факта, что один процесс получается из другого преобразованием на основе невязок в качестве замены

переменных. Поэтому из сходимости процесса (5)–(6) сходимость (8) следует непосредственно.

Покажем также, основываясь на методе математической индукции, что из сходимости процесса (8) следует сходимость процесса (5)–(6).

Пусть ε^0 – вектор начальных условий процесса (8), при которых он сходится. Определим вектор начальных условий процесса (5)–(6) как $q^0 = q^* - \varepsilon^0$. Рассчитаем ε^1 по (8). С учетом $h_i = Q^* + q_i^*$ и (6) покажем, что $q^1 = q^* - \varepsilon^1$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 q_i^* - \varepsilon_i^1 &= q_i^* - \varepsilon_i^0 - \gamma_i^1 \left(-\frac{\sum_{j \neq i} \varepsilon_j^0}{2} - \varepsilon_i^0 \right) = \\
 &= q_i^0 - \gamma_i^1 \left(-\frac{\sum_{j \neq i} (q_j^* - q_j^0)}{2} - (q_i^* - q_i^0) \right) = \\
 &= q_i^0 + \gamma_i^1 \left(\frac{2q_i^* + \sum_{j \neq i} (q_j^* - q_j^0)}{2} - q_i^0 \right) = \\
 &= q_i^0 + \gamma_i^1 \left(\frac{Q^* + q_i^* - \sum_{j \neq i} q_j^0}{2} - q_i^0 \right) = \\
 &= q_i^0 + \gamma_i^1 \left(\frac{h_i - \sum_{j \neq i} q_j^0}{2} - q_i^0 \right) = q_i^0 + \gamma_i^1 (x_i(q_{-i}^0) - q_i^0) = q_i^1.
 \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что из $q^t = q^* - \varepsilon^t$ следует $q^{t+1} = q^* - \varepsilon^{t+1}$, если ε^{t+1} рассчитывается по (8). Поэтому, если $\varepsilon^t \rightarrow 0$, то $q^t \rightarrow q^*$.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Пусть $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \rightarrow 0$. Тогда $\forall \delta > 0 \exists t'$, что при $t > t'$ будет выполняться $\left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \right| < \delta$.

Положим $t = t' + 1$. Тогда по (8):

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon_i^{t+1}| &\leq (1 - \gamma_i^{t+1}/2) |\varepsilon_i^t| + \gamma_i^{t+1}/2 \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \right| < \\
 &< (1 - \gamma_i^{t+1}/2) |\varepsilon_i^t| + \delta \gamma_i^{t+1}/2 < (1 - \gamma_i^{t+1}/2) |\varepsilon_i^t| + \delta.
 \end{aligned}$$

Опять по (8), используя предыдущее неравенство, имеем:

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon_i^{t+2}| &\leq (1 - \gamma_i^{t+2}/2) |\varepsilon_i^{t+1}| + \gamma_i^{t+2}/2 \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} \right| < \\
 &< (1 - \gamma_i^{t+2}/2) |\varepsilon_i^{t+1}| + \delta \gamma_i^{t+2}/2 < \\
 &< (1 - \gamma_i^{t+2}/2)(1 - \gamma_i^{t+1}/2) |\varepsilon_i^t| + [(1 - \gamma_i^{t+2}/2) + \gamma_i^{t+2}/2] \delta < \\
 &< (1 - \gamma_i^{t+2}/2)(1 - \gamma_i^{t+1}/2) |\varepsilon_i^t| + \delta.
 \end{aligned}$$

Следуя методу математической индукции, предположим, что в некоторый $(t + m)$ -й период имеет место неравенство

$$|\varepsilon_i^{t+m}| < |\varepsilon_i^t| \times \prod_{l=1}^m (1 - \gamma_i^{t+l}/2) + \delta.$$

По (8) с учетом последнего неравенства:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i^{t+m+1}| &\leq (1 - \gamma_i^{t+m+1}/2) |\varepsilon_i^{t+m}| + \gamma_i^{t+m+1}/2 \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+m} \right| < \\ &< (1 - \gamma_i^{t+m+1}/2) |\varepsilon_i^{t+m}| + \delta \gamma_i^{t+m+1}/2 < \\ &< (1 - \gamma_i^{t+m+1}/2) \left[|\varepsilon_i^t| \times \prod_{l=1}^m (1 - \gamma_i^{t+l}/2) + \delta \right] + \delta \gamma_i^{t+m+1} = \\ &= |\varepsilon_i^t| \times \prod_{l=1}^{m+1} (1 - \gamma_i^{t+l}/2) + \delta. \end{aligned}$$

То есть такое же неравенство имеет место и для $(t + m + 1)$ -го периода.

В полученных для каждого периода неравенствах первое слагаемое стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ и $\gamma \neq 0$, а число δ может быть сколь угодно малым, что указывает на справедливость доказываемого утверждения.

Утверждение 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
2. *Гераськин М.И.* Обзор новейших достижений в теории игр олигополии // *АиТ.* 2023. № 6. С. 3–25.
Geraskin M.I. A Survey of the Latest Advances in Oligopoly Games // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 6. P. 565–578.
3. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
4. *Онойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
5. *Гераськин М.И.* Рефлексивный анализ равновесий в игре триполии при линейных функциях издержек агентов // *АиТ.* 2022. № 3. С. 110–131.
Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 389–406.
6. *Ougolnitsky G., Korolev A.* Game-Theoretic Models of Coopetition in Cournot Oligopoly // *Stats.* 2023. No. 6. P. 576–595. <https://doi.org/10.3390/stats602003>
7. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий // *АиТ.* 2023. № 2. С. 150–168.

- Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* The Interaction of Economic Agents in Cournot Duopoly Models under Ecological Conditions: A Comparison of Organizational Modes // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 2. P. 175–189.
8. *Fedyanin D.N.* Monotonicity of Equilibriums in Cournot Competition with Mixed Interactions of Agents and Epistemic Models of Uncertain Market // *Procedia Comput. Sci.* 2021. V. 186(3). P. 411–417.
9. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Влияние личностных качеств агентов на экзогенное формирование лидерства по Штакельбергу в модели коллективных действий // *Экономика и математические методы.* 2022. № 4. С. 113–122.
10. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // *АиТ.* 2022. № 3. С. 84–109.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
11. *Askar S.* On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information // *Appl. Math. Comput.* 2021. V. 393(3).
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125823>
12. *Anderson S.P., Erkal N., Piccinin D.* Aggregative games and oligopoly theory: short-run and long-run analysis // *RAND J. Econom.* 2020. V. 51. No. 2. P. 470–495.
13. *Wu R., Van Gorder R.A.* Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games // *Appl. Math. Comput.* 2018. V. 320. P. 240–250.
14. *Zewde A.B., Kassa S.M.* Multilevel Multi-Leader Multiple-Follower Games with Non-separable Objectives and Shared Constraints // *Comput. Management Sci.* 2021. V. 18(4). P. 455–475.
15. *Ueda M.* Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 362.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.049.124535>
16. *Long J., Huang H.* A Dynamic Stackelberg-Cournot Duopoly Model with Heterogeneous Strategies through One-Way Spillovers // *Discret. Dynam. Natur. Soc.* 2020. V. 2. P. 1–11.
17. *Nash J.* Non-Cooperative Games // *Ann. Math.* 1951. No. 54. P. 286–295.
18. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // *АиТ.* 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 2. P. 345–359.
19. *Корепанов В.О.* Модели рефлексивного группового поведения и управления // М.: ИПУ РАН, 2011. 127 с.
20. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in Mathematical Models of Decision-Making // *Int. J. Parallel, Emergent Distributed Syst.* 2018. V. 33. No. 3. P. 319–335.
21. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
22. *Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L.* Expectational Stability in Aggregative Games // *J. Evolut. Econom.* 2021. V. 31. No. 1. P. 235–249.
23. *Dzhabarova Y., Zlatanov B.A.* Note on the Market Equilibrium in Oligopoly with Three Industrial Players // *AIP. Conf. Proc.* 2022. 2449, 07001321.

24. Peng Y., Xiao Y., Lu Q., Wu X., Zhao Y. Chaotic Dynamics in Cournot Duopoly Model with Bounded Rationality Based on Relative Profit Delegation Maximization // Physica A: Statist. Mech. Appl. 2020. V. 560. 125174 p.
25. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Сходимость по норме динамики коллективного поведения в рефлексивной модели олигополии с лидерами // Информатика и автоматизация. 2023. Вып. 22(3). С. 616–646. <https://doi.org/10.15622/ia.22.3.5>
26. Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий // Экономика и математические методы. 2020. № 4. С. 103–115.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 31.05.2024

После доработки 10.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Глуценко А.И., Ласточкин К.А.** Адаптивный вспомогательный контур для компенсации по выходу ограниченных возмущений в линейных системах 3

Нелинейные системы

- Акманова С.В.** О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации 41
- Кулешов А.С., Гаджиев М.М.** Об устойчивости регулярных прецессий тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, в потоке частиц. 59
- Тхай В.Н.** Адаптивная схема стабилизации колебаний автономной системы 77

Стохастические системы

- Малинковский Ю.В., Евмененко С.Ю.** Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания 93
- Рыков В.В., Иванова Н.М.** О надежности восстанавливаемой дублированной системы с произвольными распределениями наработки до отказа и времени ремонта ее элементов 101

Управление в социально-экономических системах

- Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.** Агрегированные оценки динамики рефлексивного коллективного поведения в модели олигополии Курно 124

C O N T E N T S

Linear Systems

Glushchenko A.I., Lastochkin K.A. Adaptive Auxiliary Loop for Output-Based Compensation of Perturbations in Linear Systems	3
---	---

Nonlinear Systems

Akmanova S.V. On Stabilization of Nonlinear Continuously-Discrete Dynamic Systems with a Constant Discretization Step	41
Kuleshov A.S., Gadzhiev M.M. Stability of Regular Precessions of a Body with a fixed point bounded by the Ellipsoid of Revolution in a Flow of Particles	59
Tkhai V.N. Adaptive Scheme for Stabilizing Oscillations of an Autonomous System	77

Stochastic Systems

Malinkovskii Yu.V., Evmenenko S.Yu. Insensitivity of the Stationary Distribution of an open queuing network with an Exponential Restriction on the Time of Stay	93
Rykov V.V., Ivanova N.M. On Reliability of Repairable Hot Double Redundant System with Arbitrarily Distributed Life- and Repair Times of Its Elements	101

Control in Social Economic Systems

Algazin G.I., Algazina D.G. Aggregate Estimates of the Dynamics of Reflexive Collective Behavior in Cournot Oligopoly Model	124
--	-----