

# Стохастические системы

© 2025 г. А.П. ПОТАПОВ (potapov@ipu.ru),  
А.А. ГАЛЯЕВ, д-р техн. наук, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ТРАЕКТОРНОЕ ПРОТИВОДЕЙСТВИЕ ЛИНЕЙНОМУ НАБЛЮДАТЕЛЮ<sup>1</sup>

Рассматривается управляемая динамика трех объектов в  $n$ -мерном пространстве – Атакующего (А), Защитника (D) и Цели (Т). Атакующий осуществляет оценку относительного положения Цели при помощи фильтра Калмана–Бьюси, исходя из которой строит коллизионную траекторию. В качестве ответных действий Цель выпускает Защитника, который, воздействуя на приемный канал Атакующего, нарушает процесс построения оценки положения Цели, тем самым препятствуя перехвату. В результате формулируется задача построения оптимальной траектории движения Защитника, увеличивающей время до перехвата Цели Атакующим, и проводится численное моделирование динамики каждого из объектов с оценкой эффективности применения Защитника.

*Ключевые слова:* управление наблюдениями, фильтр Калмана–Бьюси, АДТ-игра, противодействие наведению, траекторная оптимизация.

DOI: 10.31857/S0005231025110058

### 1. Введение

Групповые задачи управления несколькими игроками привлекают внимание исследователей не только с прикладной точки зрения, связанной с развитием технологий применения беспилотных аппаратов, но и с академической, поскольку аналитические конструкции позволяют проводить анализ разработанных решений и алгоритмов. Прикладные задачи нескольких игроков, как и игровые задачи противодействия двух игроков, делятся на два противоположных по своим целям подкласса: задачи перехвата [1] и задачи уклонения [2, 3] или противодействия перехвату [4, 5]. Когда количество игроков, играющих за одну или другую сторону, увеличивается, то расширяются и их возможности по достижению поставленных ими целей.

Естественное и простое расширение игры двух игроков (Атакующего и Цели) получается добавлением защитника. Возникает так называемая АДТ (Атакующий–Защитник–Цель) игра [6]. Однако перед формализацией постановки задачи требуется выбрать политику каждого игрока. Одной из наиболее приближенных к приложениям постановкой является ситуация, в которой

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФ № 23-19-00134.

Атакующий принимает решения, опираясь на измерения своих сенсоров. Для этого ему требуется сформировать оценку своего состояния и/или состояния Цели, что производится с использованием теории управления наблюдениями [7], в частности при помощи аппарата калмановской фильтрации [8, 9], который активно развивается уже долгое время [10], в том числе с использованием технологий искусственного интеллекта [11, 12]. В последующем для успешного перехвата Цели Атакующему необходимо выбрать алгоритм наведения, наиболее известным из которых является закон пропорционального наведения [13].

Задачей самого Защитника при этом может являться как перехват атакующего объекта [14] (в таком случае говорят о «жестком» противодействии), так и воздействие на его приемный канал [15, 16] (в таком случае говорят о «мягком» противодействии). При этом в качестве критерия задачи может использоваться как расстояние между целью и атакующим в терминальный момент времени, так и время, требуемое на перехват.

В настоящий момент можно найти большое количество работ, в которых получено аналитическое решение задачи о «жестком» противодействии в той или иной постановке [17]. В то же время для решения задач о «мягком» противодействии чаще всего используются методы Монте-Карло [18] или же методы искусственного интеллекта [19], что не позволяет анализировать полученное решение. При этом теория управления наблюдениями и теория случайных процессов позволяют исследовать сложные динамические системы, учитывая используемые объектами методы принятия решений.

Целью настоящей работы является постановка задачи противодействия простейшему алгоритму наведения и ее аналитическое решение при помощи описанного математического аппарата. Спецификой постановки является тот факт, что в силу использования Защитника уравнение наблюдаемого процесса, исходя из которого Атакующий строит оценку относительного положения Цели, не совпадает с уравнением, которому этот наблюдаемый процесс подчиняется.

Структура работы имеет следующий вид. В разделе 2 формализуется АДТ-игра с неполной информацией, в которой каждый из игроков обладает линейной динамикой, а Атакующий получает информацию о внешнем мире из линейного канала наблюдения, зависящего от положения Цели и Защитника в относительной системе координат, связанной с Атакующим. Действуя в коалиции, посредством выбора своего направления движения Цель и Защитник должны отсрочить поимку Цели или же предотвратить ее, поэтому раздел 3 посвящен постановке задачи оптимального управления. В разделах 4 и 5 приводятся решение этой задачи и численное моделирование, показывающее эффективность применения Защитника. В Заключение предлагаются направления развития рассмотренной задачи.

## 2. Модель АДТ игры с неполной информацией

### 2.1. Описание исследуемой системы

Рассмотрим линейную систему, состоящую из трех типов игроков – Атакующего (А), Защитника (D) и Цели (Т). Уравнения движения такой системы запишем в виде уравнений Ито

$$(1) \quad \begin{cases} dx_A(t) = Fx_A(t)dt + B_Au(t)dt + \sigma_A dw_A(t), \\ dx_D(t) = Fx_D(t)dt + B_Dv(t)dt + \sigma_D dw_D(t), \\ dx_T(t) = Fx_T(t)dt + \sigma_T dw_T(t) \end{cases}$$

с некоторыми начальными условиями в нулевой момент времени.

Будем считать, что Атакующий получает информацию о системе посредством канала наблюдений, который описывается уравнением

$$(2) \quad dz(t) = \beta_e e(t)dt + \beta_\varepsilon \varepsilon(t)dt + \sigma_z dw_z(t),$$

где

$$\begin{aligned} x_A, x_D, x_T \in \mathbb{R}^n, \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B_D \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad v \in \mathbb{R}^m, \\ B_A \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad \beta_e, \beta_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times c}, \\ e(t) = x_A(t) - x_T(t), \quad \varepsilon(t) = x_A(t) - x_D(t). \end{aligned}$$

В уравнениях (1), (2)  $w_A, w_D, w_T, w_z$  – стандартные  $n$ -мерные винеровские процессы,  $\sigma_A, \sigma_D, \sigma_T, \sigma_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Таким образом, координаты всех игроков имеют размерность  $n$ , управляющие векторы Атакующего и Защитника имеют размерности  $r$  и  $m$  соответственно, а измеряемая величина  $z$  имеет размерность  $c$ .

При таком уравнении канала измерений оказывается удобнее перейти от уравнений (1) к уравнениям динамики относительных координат  $e, \varepsilon$ . Они имеют вид

$$(3) \quad \begin{cases} d\varepsilon(t) = F\varepsilon(t)dt + B_Au(t)dt - B_Dv(t)dt + \sigma_\varepsilon dw_\varepsilon(t), \\ de(t) = Fe(t)dt + B_Au(t)dt + \sigma_e dw_e(t), \end{cases}$$

где

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_A + \sigma_D, \quad \sigma_e = \sigma_A + \sigma_T.$$

Пусть атакующий игрок производит оценку относительного положения Цели. При этом считается, что он не знает о существовании защитника, а в качестве алгоритма оптимального оценивания использует фильтр Калмана [9]. Уравнения состояний и наблюдений, исходя из которых Атакующий производит оценку, запишем в виде

$$(4) \quad \begin{cases} de(t) = Fe(t)dt + B_Au(t)dt + \sigma_e dw_e(t), \\ dy(t) = \beta_e e(t)dt + \sigma_y dw_y(t). \end{cases}$$

*Предложение 1.* Для упрощения дальнейших рассуждений будем полагать, что в системе (4) пара  $(F, \sigma_e)$  управляема, пара  $(F, \beta_e)$  наблюдаема, а также  $\det \sigma_q \neq 0$ , где  $q$  – любой из символов  $A, D, T, z, y$ .

*Замечание 1.* Второе уравнение системы (4) не совпадает с уравнением наблюдений (2). Это объясняется тем фактом, что Атакующий не знает о существовании Защитника при формировании своей оценки. Именно с этим обстоятельством связано накопление ошибки в оценке относительного положения Цели и последующий промах Атакующего.

Для краткости записи зависимость от времени будем опускать.

Будем предполагать, что Атакующий для сближения с целью использует следующий закон управления (такой вид закона управления получается при решении некоторых линейно-квадратичных задач, см., например, [20]):

$$u = \lambda \hat{e}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n \times r},$$

где  $\hat{e}$  – оценка вектора  $e$ .

В таком случае оценка случайного вектора  $e$  описывается [7] решением уравнений

$$(5) \quad d\hat{e} = F\hat{e} dt + B_A u dt + \gamma \beta_e^T (\sigma_y \sigma_y^T)^{-1} (\beta_e e dt + \beta_e \varepsilon dt + \sigma_z dw_z - \beta_e \hat{e} dt),$$

$$(6) \quad \frac{d\gamma}{dt} = F\gamma + \gamma F^T + \sigma_e \sigma_e^T - \gamma \beta_e^T (\sigma_y \sigma_y^T)^{-1} \beta_e \gamma^T,$$

где  $\gamma$  – среднеквадратические ошибки фильтрации.

Тогда, обозначая  $\varphi(\gamma) = \gamma \beta_e^T (\sigma_y \sigma_y^T)^{-1}$  и затем подставляя выражение для управления  $u$  в уравнения фильтрации (5), (6), получим уравнение динамики оценки  $\hat{e}$  в следующем виде

$$d\hat{e} = \hat{F}(\gamma) \hat{e} dt + \varphi(\gamma) \beta_e \varepsilon dt + \varphi(\gamma) \beta_e e dt + \hat{\sigma}_e(\gamma) dw_z,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{F}(\gamma) &= F + B_A \lambda - \varphi(\gamma) \beta_e, \\ \hat{\sigma}_e(\gamma) &= \varphi(\gamma) \sigma_z. \end{aligned}$$

В результате уравнения динамики всех игроков и уравнения фильтра Калмана составляют систему

$$(7) \quad \begin{cases} d\varepsilon = F\varepsilon dt + B_A \lambda \hat{e} dt - B_D v dt + \sigma_\varepsilon dw_\varepsilon, \\ de = Fe dt + B_A \lambda \hat{e} dt + \sigma_e dw_e, \\ d\hat{e} = \hat{F}(\gamma) \hat{e} dt + \varphi(\gamma) \beta_e \varepsilon dt + \varphi(\gamma) \beta_e e dt + \hat{\sigma}_e(\gamma) dw_z, \\ \dot{\gamma} = F\gamma + \gamma F^T + \sigma_e \sigma_e^T - \gamma \beta_e^T (\sigma_y \sigma_y^T)^{-1} \beta_e \gamma^T. \end{cases}$$

## 2.2. Постановка задачи

Будем считать, что известны математические ожидания переменных системы (7) в начальный момент времени:

$$(8) \quad \mathbb{E} q(0) = \mu_q(0),$$

где  $q$  – любой из символов  $\varepsilon$ ,  $e$ ,  $\hat{e}$ . Начальные значения ковариационных матриц всех векторов будем, в свою очередь, считать неизвестными.

*Замечание 2.* Фактически задание начальных условий в таком виде означает, что коалиции Цель–Защитник из каких-либо соображений (например, по собственным измерениям) известно начальное положение Атакующего с точностью до некоторой ошибки измерения. Также предполагаем, что коалиции считается известным алгоритм оценки положения Цели Атакующим. Это приводит к следующей постановке задачи противодействия перехвату.

*Задача 1.* Для системы, динамика которой описывается уравнениями (7), математическое ожидание случайных процессов в начальный момент времени описывается (8), время движения ограничено  $t_*$ , требуется найти управление  $v(t)$ , ограниченное по модулю  $|v| \leq \varkappa$ , которое доставляет максимум критерию

$$(9) \quad J[e] = \mathbb{E} (e^T(t_*)e(t_*)).$$

*Замечание 3.* По своей сути критерий (9) является квадратичным промахом. Обратим также внимание на вид начальных условий (8) – дисперсия случайных векторов считается неизвестной. Как будет показано далее, в силу вида критерия (9) и управляющего воздействия сведения о дисперсии не понадобятся для решения задачи.

## 3. Приведение задачи к детерминированному виду

Несложно заметить, что критерий (9) можно преобразовать к виду

$$(10) \quad J[e] = \mathbb{E} (e^T(t_*)e(t_*)) = \text{tr} (\Sigma_e(t_*)) + \mu_e^T(t_*)\mu_e(t_*),$$

где  $\Sigma_e(t) = \text{Var} e(t)$  – дисперсия случайного вектора  $e(t)$ .

Очевидно также, что уравнения динамики математических ожиданий имеют вид

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{\mu}_\varepsilon = F\mu_\varepsilon + B_A\lambda\hat{\mu}_e - B_D v, \\ \dot{\mu}_e = F\mu_e + B_A\lambda\hat{\mu}_e, \\ \dot{\hat{\mu}}_e = \hat{F}(\gamma)\hat{\mu}_e + \varphi(\gamma)\beta_\varepsilon\mu_\varepsilon + \varphi(\gamma)\beta_e\mu_e, \\ \dot{\gamma} = F\gamma + \gamma F^T + \sigma_e\sigma_e^T - \gamma\beta_e^T(\sigma_y\sigma_y^T)^{-1}\beta_e\gamma^T. \end{cases}$$

Если говорить об уравнениях динамики дисперсий, то важной является следующая лемма, которая приводится без доказательства в силу ее общеизвестности.

*Лемма 1. Динамика дисперсии случайного процесса  $x(t)$ , заданного уравнением Ито вида*

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)v(t)dt + \sigma(t)dw(t)$$

*с детерминированными матрицами  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $\sigma(t)$  и управлением  $v(t)$ , описывается уравнением Рикатти*

$$\dot{\Sigma}(t) = A(t)\Sigma(t) + \Sigma(t)A^T(t) + \sigma(t)\sigma^T(t).$$

Применим лемму 1 к первым трем уравнениям (7). В таком случае дисперсия случайного вектора  $x = (\varepsilon^T \ e^T \ \hat{e}^T)^T$  описывается уравнением

$$(12) \quad \dot{\Sigma} = \Phi(\gamma)\Sigma + \Sigma\Phi^T(\gamma) + \sigma_{\text{total}}\sigma_{\text{total}}^T,$$

где

$$\Phi(\gamma) = \begin{pmatrix} F & 0 & B_A\lambda \\ 0 & F & B_A\lambda \\ \varphi(\gamma)\beta_\varepsilon & \varphi(\gamma)\beta_e & \hat{F}(\gamma) \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\text{total}} = \text{diag}(\sigma_\varepsilon, \sigma_e, \hat{\sigma}(\gamma)).$$

*Лемма 2.  $\text{tr}(\Sigma_e(t_*))$  не зависит от выбора управления  $v(t)$ .*

*Доказательство.* Несложно заметить, что уравнения системы (12) вместе с последним уравнением системы (7) образуют замкнутую систему, в которой отсутствует управление, что и приводит к утверждению леммы. Таким образом, максимизация критерия (10) по управлению эквивалентна максимизации только его второго слагаемого.

*Замечание 4.* По существу, в критерии (10) содержится 2 слагаемых, отвечающих за «промах» наблюдателя. Первое из них характеризует влияние на критерий зашумленности канала измерений, а значит, влияние излучаемого Защитником сигнала. Второе же слагаемое характеризует влияние на критерий собственно траекторий Защитника. Лемма 2 фактически утверждает, что отсутствие возможности управлять излучаемым Защитником сигналом приводит к невозможности влияния на первое слагаемое в критерии (10). Это слагаемое имело бы важное значение в случае, если бы можно было управлять излучаемым сигналом, а именно коэффициентом  $\beta_\varepsilon$ . Однако в исследуемой постановке это недоступно, а потому максимизация критерия будет происходить только с использованием второго слагаемого, отвечающего за траекторию наблюдателя и защитника.

С другой стороны, такой вид критерия позволяет на каждом шаге или при оценке всей миссии сравнить вклады каждого слагаемого в общий критерий задачи. При этом, рассматривая каждое слагаемое в отдельности, можно установить возможности Защитника по противодействию как при помощи маневрирования, так и при помощи воздействия на измерительные каналы.

Далее обратим внимание, что уравнение Риккати в системе (11) представляет собой независимое дифференциальное уравнение. В таком случае оставшиеся три уравнения системы, по сути, составляют линейную неавтономную систему дифференциальных уравнений. Это, в свою очередь, означает, что вместо исходной динамической системы (7) можно рассматривать систему математических ожиданий, описываемую уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\mu}_\varepsilon = F\mu_\varepsilon + B_A\lambda\hat{\mu}_\varepsilon - B_D v, \\ \dot{\mu}_e = F\mu_e + B_A\lambda\hat{\mu}_\varepsilon, \\ \dot{\hat{\mu}}_\varepsilon = \hat{F}(\gamma)\hat{\mu}_\varepsilon + \varphi(\gamma)\beta_\varepsilon\mu_\varepsilon + \varphi(\gamma)\beta_e\mu_e, \end{cases}$$

которую запишем более кратко в виде

$$(13) \quad \dot{\mu} = \Phi(\gamma)\mu + Bv,$$

где

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_\varepsilon \\ \mu_e \\ \hat{\mu}_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \Phi(\gamma) = \begin{pmatrix} F & 0 & B_A\lambda \\ 0 & F & B_A\lambda \\ \varphi(\gamma)\beta_\varepsilon & \varphi(\gamma)\beta_e & \hat{F}(\gamma) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -B_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а  $\gamma(t)$  – решение дифференциального уравнения

$$\dot{\gamma} = F\gamma + \gamma F^T + \sigma_e\sigma_e^T - \gamma\beta_e^T(\sigma_y\sigma_y^T)^{-1}\beta_e\gamma^T$$

с начальным условием  $\gamma(0) = \gamma_0$ .

Вместо критерия (9) с учетом леммы 2 для системы (13) запишем новый интегральный критерий

$$J'[e] = -\mu_e^T(t_*)\mu_e(t_*) = -\frac{1}{2} \int_0^{t_*} \langle \dot{\mu}, Q\mu \rangle dt = -\frac{1}{2} \int_0^{t_*} \langle A\mu, Q\mu \rangle dt,$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и сформулируем следующую задачу.

*Задача 2.* Для системы, динамика которой описывается уравнениями (13), начальные условия задаются равенствами (8), время движения ограничено  $t_*$ , требуется найти управление  $v(t)$ , ограниченное по модулю  $|v| \leq \varkappa$ , которое доставляет минимум критерию

$$(14) \quad J'[\mu] = -\frac{1}{2} \int_0^{t_*} \langle A\mu, Q\mu \rangle dt.$$

*Предложение 2.* Решение задачи 2 является решением задачи 1.

*Доказательство.* Доказательством, по сути, являются рассуждения, проведенные выше.

#### 4. Решение детерминированной задачи оптимального управления

Для решения задачи 2 воспользуемся принципом максимума Понтрягина [21]. Для этого составим функцию Понтрягина

$$H = \langle \psi, \Phi(\gamma)\mu + Bv \rangle + \frac{1}{2} \langle \Phi(\gamma)\mu, Q\mu \rangle.$$

Условие максимума

$$\langle \psi, Bv \rangle = \langle B^T \psi, v \rangle \longrightarrow \max_{|v| \leq \varkappa}$$

дает почти всюду следующий вид оптимального управления:

$$(15) \quad v^*(t) = -\varkappa |B_D^T \psi_1|^{-1} B_D^T \psi_1,$$

где  $\psi_i$  – компоненты вектора  $\psi = (\psi_1^T \quad \psi_2^T \quad \psi_3^T)^T$ .

Уравнения сопряженной системы при этом записываются в виде

$$(16) \quad \dot{\psi} = -\Phi^T(\gamma)\psi - \frac{1}{2} (\Phi^T(\gamma)Q + Q\Phi(\gamma)) \mu.$$

Начальные условия для системы (13) задаются в виде (8). При этом для сопряженных переменных из условий трансверсальности известны [21] значения на правом конце траектории в виде  $\psi(t_*) = 0$ .

Решение такой двухточечной задачи будем искать методом последовательных приближений, описанным в [22], решив перед этим отдельно дифференциальное уравнение Рикатти. Его суть заключается в следующем: в качестве начального приближения выбирается любое допустимое управление  $v_1(t)$ . Далее, на  $k$ -й итерации метода требуется:

- 1) решить задачу Коши для уравнения (13) с начальными условиями (8) и управлением  $v_k(t)$ . Тем самым получим траекторию  $\mu_k(t)$  на  $[0, t_*]$ ;
- 2) решить сопряженную систему (16) с терминальными условиями  $\psi(t_*) = 0$  от  $t_*$  до 0 при  $v(t) = v_k(t)$ ,  $\mu(t) = \mu_k(t)$ . Тем самым получим сопряженные переменные  $\psi_k(t)$  на  $[0, t_*]$ ;
- 3) согласно равенству (15) определить управление  $v_{k+1}(t)$  на  $[0, t_*]$ .

Алгоритм останавливается, когда величина

$$(17) \quad \text{Err} = \sum_{t=0}^{t_*} |v_{k+1}(t) - v_k(t)|$$

становится меньше заранее выбранного числа  $\bar{\delta}$ :  $\text{Err} < \bar{\delta}$ . Сумма в (17) при этом берется по всем точкам вводимой пользователем временной сетки на отрезке  $[0, t_*]$ .

*Замечание 5.* Решение такой краевой задачи может занимать значительное время. А именно, выполнение функции, написанной на языке MATLAB для расчета управления в разделе 6, в среднем занимает на процессоре Apple M1 0,0967 с. В случае высоких скоростей объектов такое время решения краевой задачи не позволит успешно выполнить защиту Цели.

## 5. Исследование линеаризованной системы

Заметим, что для линейных систем известно, что в случае наблюдаемости и управляемости системы ошибка фильтра Калмана  $\gamma$ , а следовательно, и сам коэффициент обратной связи  $\varphi(\gamma)$  сходятся при  $t \rightarrow \infty$  при любой начальной матрице  $\gamma(0)$  [23]. В таком случае, учитывая терминальный вид функционала (10), будет разумно рассматривать систему (13) начиная с некоторого большого момента времени  $t$  при постоянной матрице  $\gamma$ .

Согласно предложению 1 выполнены условия теоремы 3.7 [23, с. 237] о сходимости решения дифференциального уравнения Риккати. Следовательно, предельное значение ковариационной матрицы удовлетворяет алгебраическому уравнению Риккати

$$F\mathcal{P} + \mathcal{P}F^T + \sigma_e\sigma_e^T - \mathcal{P}\beta_e^T(\sigma_y\sigma_y^T)^{-1}\beta_e\mathcal{P}^T = 0.$$

Предельное значение коэффициента обратной связи находится согласно уравнению

$$\varphi = \mathcal{P}\beta_e^T(\sigma_y\sigma_y^T)^{-1}.$$

В таком случае при больших  $t$  вместо динамической системы (13) с нелинейным уравнением Риккати можно рассматривать линейную систему математических ожиданий, описываемую уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\mu}_\varepsilon = F\mu_\varepsilon + B_A\lambda\hat{\mu}_e - B_D v, \\ \dot{\mu}_e = F\mu_e + B_A\lambda\hat{\mu}_e, \\ \dot{\hat{\mu}}_e = \hat{F}\hat{\mu}_e + \varphi\beta_\varepsilon\mu_\varepsilon + \varphi\beta_e\mu_e, \end{cases}$$

которую запишем более кратко в виде

$$(18) \quad \dot{\mu} = A\mu + Bv,$$

где

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_\varepsilon \\ \mu_e \\ \hat{\mu}_e \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} F & 0 & B_A\lambda \\ 0 & F & B_A\lambda \\ \varphi\beta_\varepsilon & \varphi\beta_e & \hat{F} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -B_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача оптимального управления для системы (18) формулируется с использованием критерия (14) следующим образом:

*Задача 3. Для системы, динамика которой описывается уравнениями (18), начальные условия задаются равенствами (8), время движения ограничено  $t_*$ , требуется найти управление  $v(t)$ , ограниченное по модулю  $|v| \leq \varkappa$ , которое доставляет минимум критерию*

$$J'[\mu] = -\frac{1}{2} \int_0^{t_*} \langle A\mu, Q\mu \rangle dt.$$

В задаче 3 закон оптимального управления совпадает с (15), однако уравнения сопряженной системы в отличие от уравнений (16) записываются в виде

$$\dot{\psi} = -A^T \psi - \frac{1}{2} (A^T Q + Q A) \mu.$$

## 6. Численное моделирование

### 6.1. Параметры моделирования

Рассмотрим систему, которая представлена двойным интегратором. Динамика подобной системы описывается в простых движениях. Будем обозначать символом  $E_k$  единичную матрицу размера  $k \times k$ , а символом  $0_k$  – матрицу  $k \times k$ , каждый элемент которой равен 0. Далее предположим, что матрицы системы (1) имеют вид

$$(19) \quad F = \begin{pmatrix} 0_2 & E_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad B_A = B_D = \begin{pmatrix} 0_2 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad n = 4, \quad m = r = 2.$$

Другие постоянные зададим следующим образом:

$$(20) \quad \lambda = -6 \begin{pmatrix} E_2 & E_2 \end{pmatrix}, \quad \kappa = 6 \cdot 10^{-3}, \quad \beta_e = \beta_\varepsilon = E_4, \quad t_* = 50,$$

$$(21) \quad \sigma_A = \sigma_D = \sigma_T = \sigma_z = \sigma_y = 10^{-3} \cdot E_4,$$

$$(22) \quad \mathbb{E} x_A(0) = x_A^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} x_T(0) = \mathbb{E} x_D(0) = x_D^0 = x_T^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

*Замечание 6.* Для системы (4) с матрицами, выбираемыми согласно (19)–(22), выполнено предложение 1.

### 6.2. Результаты моделирования при успешной работе защитника на всем временном отрезке

Далее будем говорить о математических ожиданиях соответствующих случайных процессов, так как данная характеристика полностью отражает суть задачи.

Рассмотрим случай, когда Защитник оказывает расчетное воздействие на приемный канал, влияя на траекторию движения Атакующего в целом. При этом вплоть до терминального момента времени  $t_*$  считаем, что Атакующий не меняет тактику наведения, даже несмотря на то, что оценка в его приемном канале может ухудшаться со временем. Траектории, по которым объекты движутся при рассчитанном согласно равенству (15) и уравнениям (18) управлении в плоскости математических ожиданий их координат, представлены на рис. 1 в случае использования Защитника, а также на рис. 2 без использования Защитника. В первом случае значение критерия составляет

$$J'[\mu_1] = -53,06,$$

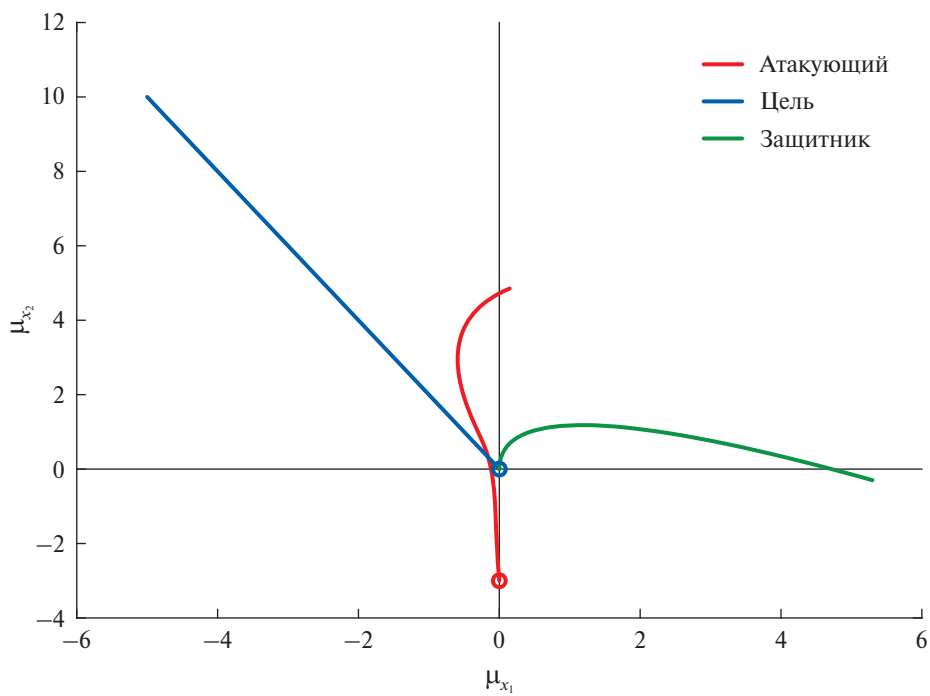


Рис. 1. Траектории движения объектов при использовании Защитника.

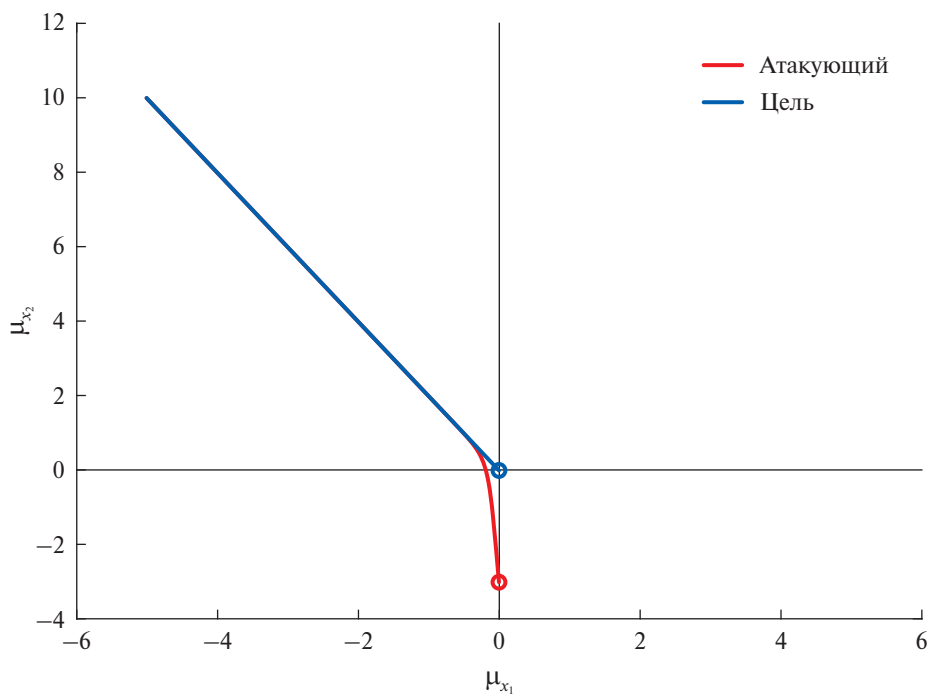


Рис. 2. Траектории движения объектов без использования Защитника.

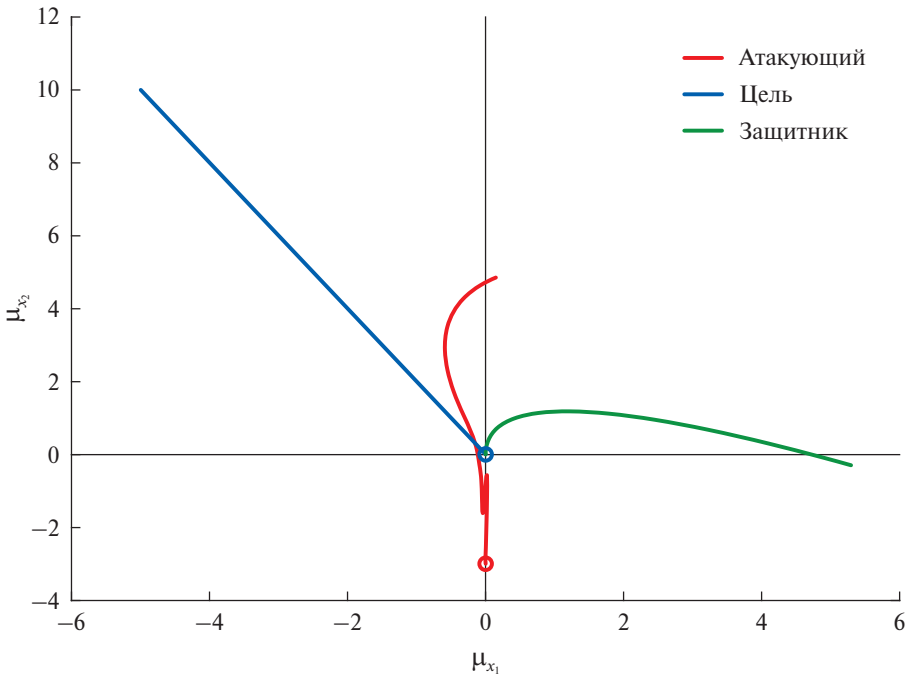


Рис. 3. Траектории движения объектов при использовании Защитника, рассчитанные согласно (13).

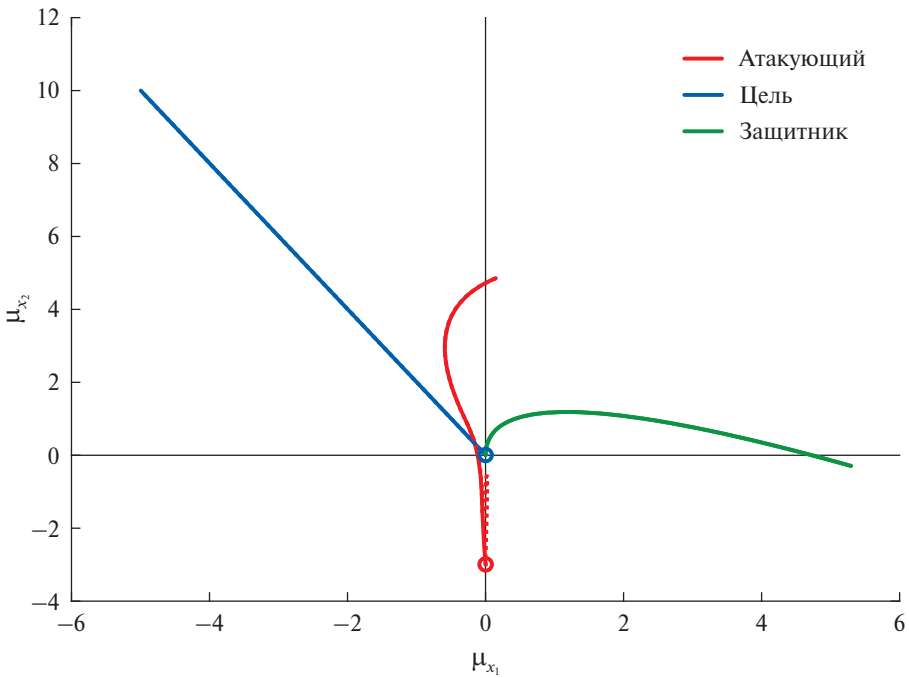


Рис. 4. Траектории движения объектов при использовании Защитника, рассчитанные согласно (18) и (13).

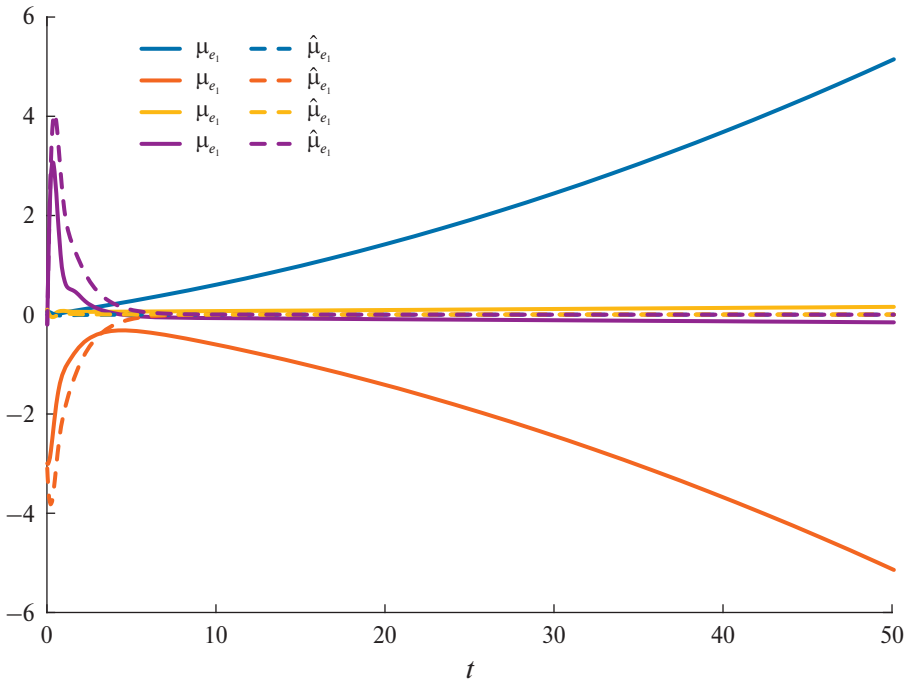


Рис. 5. Изменение компонент векторов  $\mu_e$  и  $\hat{\mu}_e$  с течением времени.

в то время как во втором

$$J'[\mu_2] \approx 0.$$

При этом траектории, по которым объекты движутся при рассчитанном согласно равенству (15) и уравнениям (13) управления в плоскости математических ожиданий их координат, представлены на рис. 3 (при  $\gamma_0 = 4 \cdot 10^{-4} E_4$ ). Как можно заметить, по прошествии некоторого времени, которое требуется для сходимости решения уравнения Риккати, математические ожидания координат объектов практически не отличаются. Это особенно хорошо видно на рис. 4, на котором сплошными линиями представлены траектории объектов, рассчитанные согласно уравнениям (18), а пунктирными – согласно (13).

Приведем также на рис. 5 графики изменения компонент математических ожиданий вектора относительных координат и его оценки.

### *6.3. Результаты моделирования при успешной работе защитника на части временного отрезка*

Предположим теперь, что в некоторый момент времени  $t = \tau$  сигнал, излучаемый Защитником, перестал влиять на выбор направления движения Атакующего. На практике такая ситуация может быть связана с отказом генерирующего сигнал элемента на борту Защитника или коррекцией работы алгоритмов наведения Атакующего. Для описания такого сценария, который назовем сценарием с коррекцией алгоритмов наведения, введем понятие мо-

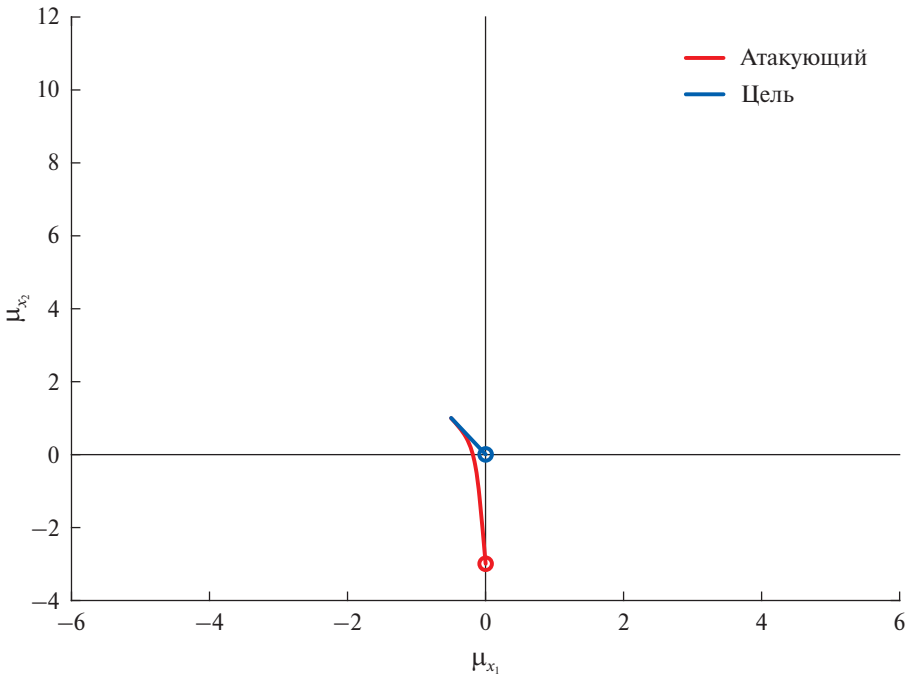


Рис. 6. Траектории движения объектов без использования Защитника до момента перехвата.

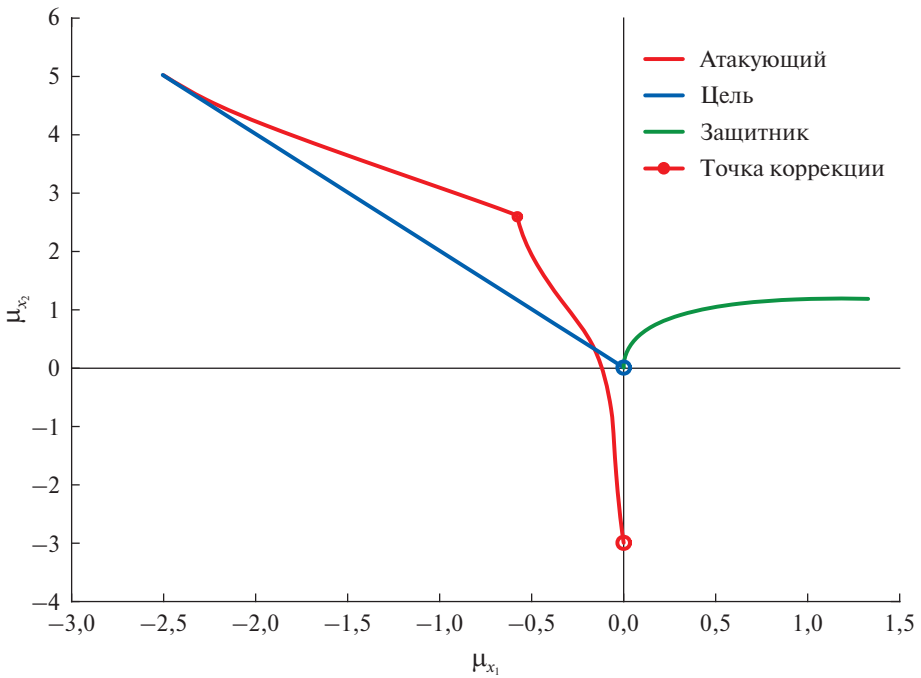


Рис. 7. Траектории движения объектов с использованием Защитника до момента перехвата. Момент коррекции алгоритмов наведения Атакующего обозначен сплошной красной точкой.

мента (времени) перехвата  $t^*$  согласно равенству

$$t^* = \min\{t : |\mu_e(t)| < r_0\}.$$

Выберем  $r_0 = 10^{-4}$ . Траектории движения всех объектов в плоскости математических ожиданий до момента перехвата в случае, если Защитник не используется, показаны на рис. 6. Время перехвата при этом равно  $t^* = 5,0$ .

Предположим, что при использовании Защитника коррекция алгоритмов наведения произошла при  $t = \tau = 20$ . Траектории движения объектов в плоскости математических ожиданий до момента перехвата в таком случае представлены на рис. 7. Время перехвата при этом равно  $t^* = 25,05$ .

Значительное увеличение времени перехвата делает использование даже одного Защитника целесообразным в случае, если алгоритмы наведения Атакующего предполагают коррекцию работы с учетом использования Целью Защитника. На практике это позволяет обеспечить Цель временным запасом для выполнения маневра уклонения, построения последующей стратегии защиты или выпуска других Защитников.

*Замечание 7.* Предлагаемый метод построения траектории Защитника предполагает также использование в случае, если известными являются не уравнения движения объектов в лабораторной системе отсчета (т.е. уравнения (1)), а уравнения движения объектов в связанной с Атакующим системой координат (т.е. уравнения (3)).

#### 6.4. Сравнение предлагаемой и альтернативных стратегий

Сравним значение критерия на оптимальной траектории, полученной в разделе 6.2, и на траекториях, получаемых при использовании более простых эвристических стратегий:

- 1) движение в сторону, противоположную Цели;
- 2) максимальное сближение с Атакующим.

Первую стратегию описывает закон управления

$$(23) \quad \tilde{v}(t) = -\varkappa \left| (x_T^0)_{3,4} \right|^{-1} (x_T^0)_{3,4} = \text{const},$$

а вторую –

$$(24) \quad \bar{v}(t) = -0,02 \left( (x_D(t))_{1,2} - (x_A(t))_{1,2} \right).$$

Траектории движения всех объектов в плоскости математических ожиданий при использовании Защитником закона управления (23) представлены на рис. 8. Значение критерия  $J'$  при этом составляет

$$J'[\mu_3] = -51,6962 > J'[\mu_1].$$

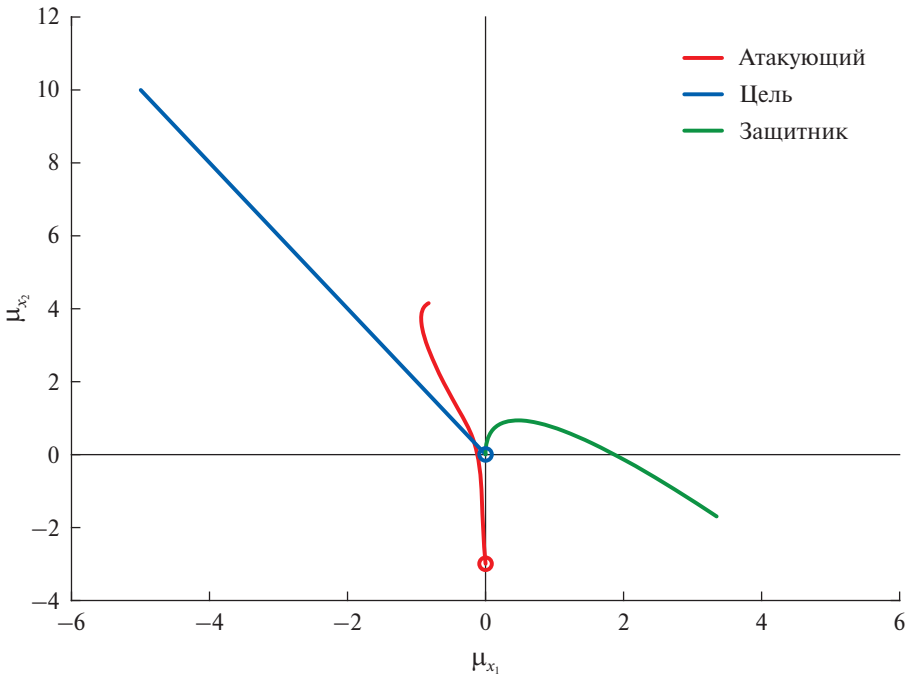


Рис. 8. Траектории движения объектов при использовании Защитником закона управления (23).

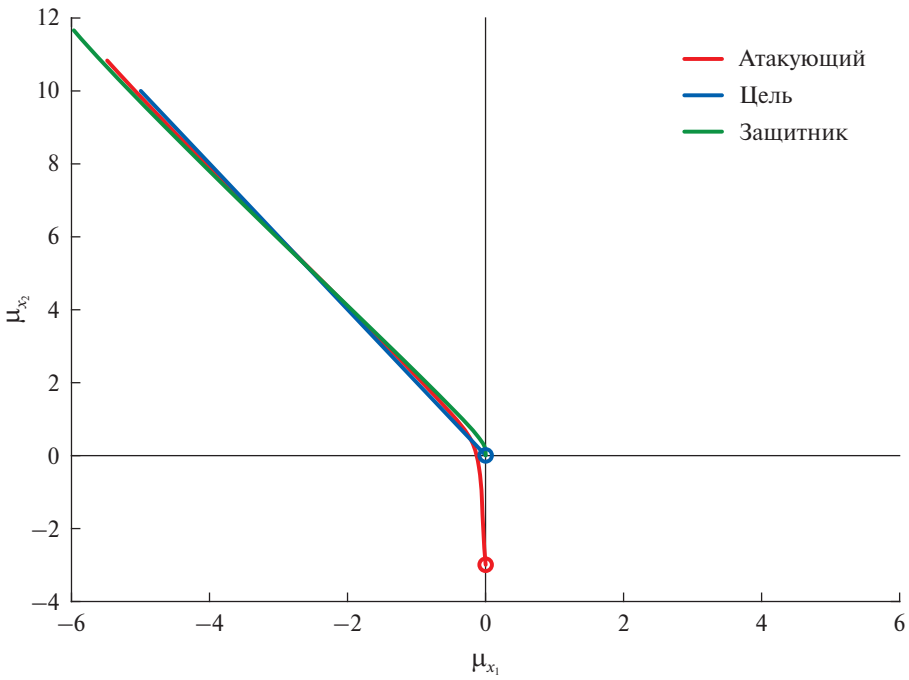


Рис. 9. Траектории движения объектов при использовании Защитником закона управления (24).

Траектории же движения объектов в случае использования Защитником закона управления (24) представлены на рис. 9. Значение критерия  $J'$  при этом составляет

$$J'[\mu_4] = -0,93297 > J'[\mu_1].$$

Как несложно заметить, предлагаемое оптимальное решение позволяет получить траекторию, обеспечивающую значительное уменьшение критерия по сравнению с более простыми стратегиями и, как следствие, улучшение тактической обстановки для Цели.

## 7. Заключение

В работе была показана эффективность использования Защитника в задаче отвлечения Атакующего от перехвата Цели. Предложенная в работе модель применения Защитника при воздействии на приемный канал Атакующего позволяет качественно моделировать и предсказывать изменения в алгоритмах наведения Атакующего, а также формализовывать постановки задач оптимизации траекторного уклонения Цели от перехвата в игре с неполной информацией трех игроков.

Дальнейшая работа будет направлена на формализацию и исследование задач перехвата с более сложными алгоритмами наведения, в том числе учитывающими возможность использования одного или нескольких Защитников с определением способов их применения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galyaev A.A., Lysenko P.V., Rubinovich E.Y.* Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // *Mathematics*. 2021. V. 19. No. 9. P. 2386.
2. *Leitmann G.* A differential game of pursuit and evasion // *Int. J. Non-Linear Mech.* 1969. V. 4. No. 1. P. 1–6.
3. *Рубинович Е.Я., Андреев К.В.* Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации // *АиТ*. 2016. № 1. С. 134–162.
4. *Васильев С.Н., Галяев А.А., Залетин В.В. и др.* Совместное использование мехатронных систем для организации эффективного противодействия скоординированному действию торпед противника // *Мехатроника. Автоматизация. Управление*. 2022. Т. 23. № 4. С. 197–208.
5. *Бузинов М.Э., Васильев С.Н., Галяев А.А. и др.* Модель группового противодействия системе самонаведения // *Материалы конференции «Управление в морских системах» (УМС-2022)*. СПб, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022. С. 95–97.
6. *Галяев А.А., Самохин А.С., Самохина М.А.* Моделирование отсрочки поимки цели в АДТ-игре с использованием одного или двух защитников // *Проблемы управления*. 2024. № 2. С. 83–94.
7. *Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А., Серебровский А.П.* Управление наблюдениями в автоматических системах. М.: Наука, 1986.

8. *Kalman R. E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering. 1960. P. 35–45.
9. *Лунцер П.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
10. *Julier S.J., Uhlmann J.K.* Unscented Filtering and Nonlinear Estimation // Proceedings of the IEEE. 2004. V. 92. No. 3. P. 401–422.
11. *Song F., Li Y., Cheng W. et al.* An Improved Kalman Filter Based on Long Short-Memory Recurrent Neural Network for Nonlinear Radar Target Tracking // Wireless Communications and Mobile Computing. 2022. P. 10.
12. *Coskun H., Achilles F., DiPietro R. et al.* Long Short-Term Memory Kalman Filters: Recurrent Neural Estimators for Pose Regularization // 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2017. P. 5525–5533.
13. *Girard A.R., Kabamba P.T.* Proportional Navigation: Optimal Homing and Optimal Evasion // SIAM Review. 2015. V. 57. No. 4. P. 611–624.
14. *Потапов А.П., Рубинович Е.Я.* Программная 3D-траектория защитника в АДТ-игре при неполной априорной информации у цели // Проблемы управления. 2024. № 5. С. 57–63.
15. *Потапов А.П., Галляев А.А.* Противодействие алгоритму наведения атакующего в игре трех игроков // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2024. Т. 25. № 11. С. 575–584.
16. *Потапов А.П., Галляев А.А.* Модель группового противодействия системе самонаведения // Материалы 27-й Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы защиты и безопасности». СПб, ФГБУ «Российской академии ракетных и артиллерийских наук», 2024. С. 71–73.
17. *Garcia Eloy, Casbeer David W., Pachter Meir.* The Complete Differential Game of Active Target Defense // J. Optim. Theor. Appl. 2021. V. 191. No. 2–3. P. 675–699.
18. *Akhil K.R., Ghose D., Rao S. Koteswara.* Optimizing deployment of multiple decoys to enhance ship survivability // 2008 American Control Conference. 2008.
19. *Chen Y.C., Guo Y.H.* Optimal Combination Strategy for Two Swim-Out Acoustic Decoys to Countermeasure Acoustic Homing Torpedo // 2017 4th International Conference on Information Science and Control Engineering (ICISCE). 2017. P. 1061–1065.
20. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. ЛЕНАНД, 2019.
21. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М: Наука, 1974.
22. *Чернуоусько Ф.Л., Банничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М: Наука, 1973.
23. *Kwaternaak H., Sivan R.* Linear optimal control system. Wiley, 1979.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.*

Поступила в редакцию 17.04.2025

После доработки 11.08.2025

Принята к публикации 18.08.2025