



А ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

3

МАРТ

Москва

2025

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартыхина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2025 г. А.И. МАЛИКОВ, д-р физ.-мат. наук (aimalikov@kai.ru)
(Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева – КАИ)

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ¹

Рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная система, подверженная воздействию ограниченных внешних возмущений. На основе метода матричных систем сравнения и техники дифференциально-разностных линейных матричных неравенств решаются задачи нахождения эллипсоида, ограничивающего состояния, подавления начальных отклонений и неопределенных возмущений с помощью обратной связи по состоянию, доступному в дискретные моменты времени. Предлагается способ синтеза дискретного управления, обеспечивающего на конечном интервале подавление начальных отклонений и влияние неопределенных ограниченных по L_∞ норме возмущений.

Ключевые слова: система с непрерывной и дискретной подсистемами, липшицевые нелинейности, неопределенные возмущения, оценивание состояния, дискретное управление, дифференциально-разностные линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231025030013, EDN: IEZXZO

1. Введение

Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения давно стали предметом исследования [1–6] в связи с изучением уравнений с частными производными и уравнений с запаздыванием. В литературе отмечалось (см. [3, 7] и ссылки в них), что многие сложные инженерные системы, представленные уравнениями в частных производных или с запаздыванием, можно аппроксимировать или представить более простыми моделями в виде дифференциально-разностных уравнений. Взаимосвязанные дифференциально-разностные уравнения также являются важным классом потому, что они представляют модели систем, в которых используются цифровые вычисления на компьютерах [3] или дискретные данные, получаемые через коммуникационную сеть [1] для активного управления объектами с непрерывным

¹ Работа выполнена частично за счет предоставленного в 2024 году Академией наук Республики Татарстан гранта на осуществление фундаментальных и прикладных научных работ.

временем. Они также возникают при моделировании производственных процессов, дорожного движения, биологических процессов в природе, которые развиваются непрерывно во времени, а также управляются дискретными событиями, которые изменяют их параметры или состояние [3].

Дифференциально-разностные уравнения относятся к классу гибридных систем, так как представляют разнородные взаимодействующие процессы, происходящие в непрерывном и дискретном времени. В последние годы большое внимание уделяется исследованию устойчивости систем с дискретными данными, которые также могут быть представлены дифференциально-разностными уравнениями (см. обзор [8] и ссылки в нем). Сюда же относятся задачи управления системой с непрерывным временем с помощью дискретного регулятора или управления сетевыми системами, в которых многие компоненты имеют динамику в непрерывном времени, в то время как другие развиваются только в дискретные моменты времени. В [8] рассмотрены существующие подходы к анализу устойчивости и синтезу систем с дискретными данными, в которых используется техника линейных матричных неравенств (ЛМН). Было отмечено, что несмотря на значительные достижения в этой области, проблемы получения конструктивных методов анализа устойчивости остаются открытыми даже для случая линейных систем.

При синтезе дискретного управления для непрерывных систем стремятся обеспечить устойчивость [14, 15] или оптимальное качество по H_2 или H_∞ критериям [16–18]. Способ синтеза динамического регулятора с обратной связью по выходу, обеспечивающего устойчивость для класса линейных непрерывных систем с аperiodическими импульсами, предложен в [14]. В [15] решается задача синтеза дискретного робастного управления на основе наблюдателя из условий устойчивости, установленных с использованием векторной функции Ляпунова для 2D систем. На основе принципа оптимальности Беллмана в [18] предлагается способ синтеза оптимальных по H_2 и H_∞ динамических регуляторов полного порядка с обратной связью по выходу периодических дискретных данных для линейных инвариантных систем с непрерывным временем. Условия устойчивости и показатели качества линейных систем с дискретными регуляторами сформулированы в виде ЛМН, зависящих от времени, которые могут быть решены численно. В [9] для непрерывных систем с липшицевыми нелинейностями, неопределенными возмущениями и дискретным управлением предложены способы оценивания в виде эллипсоидов, ограничивающих состояния для процессов с начальными данными из заданного эллипсоида. Получены условия ограниченности на конечном интервале в виде разрешимости задачи оптимизации с дифференциально-разностными линейными матричными неравенствами. При кусочно-линейной аппроксимации решения дифференциальных линейных матричных неравенств (ДЛМН) задачи оценивания состояния и синтеза дискретного управления сведены к совокупности задач оптимизации с ЛМН, для численного решения которых применены методы полуопределенного программирования. Разработанный в [9] подход был

применен в [10–13] для оценивания состояния и синтеза управления нелинейных систем с дискретными измерениями.

Во всех указанных работах по анализу устойчивости, показателей качества и синтезу дискретного управления для непрерывных систем показывается то, что определяющая изменение управления дискретная часть имеет частный вид и представлена, как правило, линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами. При этом не учитываются внешние возмущения, а влияние дискретной подсистемы на непрерывную осуществляется только через управление. В [7] предложено новое условие устойчивости для связанных дифференциально-функциональных уравнений, построен функционал Ляпунова–Красовского для частного случая линейных дифференциально-разностных уравнений со взаимодействием не только по управлению. Условие устойчивости представлено в форме ЛМН, удобной для численного расчета. Там же отмечено, что проблема имеет дополнительные трудности, которые необходимо преодолеть, так как задачи анализа устойчивости и синтеза управления требуют использования смешанных методов непрерывного и дискретного времени из-за гибридного характера всей системы. Кроме того, управление обычно получается в виде разрывной функции в точках выборки дискретной подсистемы. Следует отметить что в последние годы появились работы [19–23], в которых предлагаются другие подходы к решению задач стабилизации дискретно-непрерывных систем.

Цель данной статьи – представить способы оценивания состояния в виде ограничивающего эллипсоида и синтеза дискретного управления для класса непрерывно-дискретных систем с липшицевыми нелинейностями и неопределенными ограниченными по норме возмущениями. Предложенный в [24] и развитый в [25, 26] подход с использованием квадратичной функции Ляпунова с изменяющимися коэффициентами и ДЛМН применяется для решения задач оценивания состояния, синтеза дискретного управления для указанного класса систем. В результате задачи оценивания состояния на конечном интервале и синтеза дискретного управления сводятся к совокупности задач оптимизации с ЛМН, получающихся при кусочно-линейной аппроксимации решения ДЛМН [27]. Результаты иллюстрируются на примере.

2. Непрерывно-дискретная система

Рассматривается система, состоящая из непрерывной и дискретной подсистем, взаимодействующих между собой:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + \Phi_1 \varphi_1(t, x_1(t)) + A_{12} x_2(t_k) + D_1 w_1(t), \\ x_2(t_{k+1}) &= A_2 x_2(t_k) + \Phi_2 \varphi_2(t_k, x_2(t_k)) + A_{21} x_1(t_k) + D_2 w_2(t_k), \end{aligned}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ – вектор состояния непрерывной подсистемы, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ – вектор состояния дискретной подсистемы, $x_2(t) = x_2(t_k)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k \in \Theta = \{t_k, t_k = t_{k-1} + h, k = 1, \dots, N\}$, h – шаг изменения дискретного времени,

$w_1(t) \in W_1 \subset \mathbb{R}^{r_1}$, $w_2(t) \in W_2 \subset \mathbb{R}^{r_2}$ – векторы неопределенных внешних возмущений, $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i}$, $\Phi_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$ – известные матрицы с постоянными элементами, $t \in T$, $T = [t_0, t_N]$, t_0, t_N – начальный и конечный моменты времени.

Нелинейные векторные функции $\varphi_i(t, x_i)$ являются непрерывными, ограниченными и удовлетворяют условию

$$(2) \quad \|\varphi_i(t, x_i)\|^2 \leq \mu_i \|C_{fi}x_i\|^2 \quad \forall t \in T, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, 2,$$

где $C_{fi} \in \mathbb{R}^{q_i \times n_i}$ – известные матрицы с постоянными элементами. Здесь и далее $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$ – известные константы.

Неопределенные возмущения являются непрерывными ограниченными в каждый момент времени функциями:

$$(3) \quad W_i = \left\{ w_i(t) \in \mathbb{R}^{r_i} : \|w_i(t)\|^2 \leq 1 \quad \forall t \in T \right\}, \quad i = 1, 2.$$

3. Задача оценивания состояния

Пусть в начальный момент времени состояния $x_i(t_0) = x_{i0}$ непрерывной и дискретной подсистем принадлежат заданным эллипсоидам

$$(4) \quad E(Q_{i0}) = \{x_i \in \mathbb{R}^{n_i} : x_i^T Q_{i0}^{-1} x_i \leq 1\},$$

где Q_{i0} ($i = 1, 2$) – заданные положительно определенные матрицы.

Обозначим: $x(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t) = x_2^T(t_k))^T$ – вектор состояния непрерывно-дискретной системы.

Введем следующее

Определение 1. Эллипсоид $E(Q_x(t)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q_x^{-1}(t)x \leq 1\}$ является ограничивающим для процессов $x(t, t_0, x_0)$ непрерывно-дискретной системы (1), стартующих из начального эллипсоида $E(Q_{x0} = \text{diag}(Q_{10}, Q_{20}))$, если $x(t, t_0, x_0) \in E(Q_x(t))$ при всех $t \in [t_0, t_N]$, нелинейностях из (2) и возмущениях из (3).

Решается следующая

Задача 1. Требуется найти на рассматриваемом интервале $[t_0, t_N]$ матрицу $Q_x(t)$ эллипсоида $E(Q_x(t))$, ограничивающего множество процессов исходной системы (1) с начальными данными из (4), нелинейностями из (2) и возмущениями из (3).

Отметим, что ограничивающий эллипсоид будет представлять собой верхнюю оценку области достижимости рассматриваемой системы.

Для решения данной задачи введем расширенный вектор состояния $z(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t) = x_2^T(t_k), x_3^T(t) = x_1^T(t_k))^T$, на интервалах непрерывности $[t_k, t_k + h)$ компоненты $x_1(t)$ которого изменяются согласно уравнению (1),

а компоненты $x_2(t), x_3(t)$ остаются постоянными. В дискретные моменты $t_k \in \Theta$ компоненты $x_2(t), x_3(t)$ изменяются скачком согласно уравнению (2) и соотношению $x_3(t_k) = x_1(t_k)$. Теперь исходную непрерывно-дискретную систему (1) можно представить в виде непрерывной системы (5) с импульсами (6):

$$(5) \quad \dot{z}(t) = A_{z1}z + \Phi_{z1}\varphi(t, z(t)) + D_{z1}w(t), \quad t \neq t_k,$$

$$(6) \quad z(t_{k+1}) = A_{z2}z(t_k) + \Phi_{z2}\varphi(t_k, z(t_k)) + D_{z2}w(t_k), \quad t_k \in \Theta,$$

где

$$w(t) = (w_1^T(t), w_2^T(t))^T, \quad A_{z1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{z1} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{z1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{z2} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_{21} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При этом

$$z(t_0) = z_0 = (x_{10}^T, x_{20}^T, x_{10}^T)^T \in E(Q_0), \quad Q_0 = \text{diag}(Q_{10}, Q_{20}, Q_{10}),$$

$$x_1(t) = C_1 z(t), \quad x_2(t) = C_2 z(t),$$

$$C_1 = (I_{n_1} \quad 0_{n_1 \times (n_2+n_1)}), \quad C_2 = (0_{n_2 \times n_1} \quad I_{n_2} \quad 0_{n_2 \times n_1}),$$

I_{n_i} – единичная $(n_i \times n_i)$ -матрица ($i = 1, 2$).

Сначала будем решать задачу нахождения матрицы $Q(t)$ эллипсоида, ограничивающего состояния расширенной системы (5), (6). При этом матрица $Q_x(t)$ определится как $Q_x = C_{12}Q(t)C_{12}^T$, где $C_{12} = (C_1^T, C_2^T)^T$.

На интервалах непрерывности $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) для нахождения матрицы $Q(t)$ эллипсоида $E(Q(t))$, ограничивающего состояния расширенной системы, будут использоваться теоремы 1 и 2 из [25], которые здесь приводятся в единой формулировке для рассматриваемого ограничения на нелинейности.

Теорема 1 (см. [25]). *Для того чтобы эллипсоид $E(Q(t))$ являлся ограничивающим для траекторий системы (5), стартовавших из начального эллипсоида $E(Q_k)$, достаточно выполнения при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$ одного из условий:*

1) *существует решение $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$ дифференциального матричного уравнения*

$$(7) \quad \begin{aligned} dQ(t)/dt = & A_{z1}Q + QA_{z1}^T + \alpha_1 Q + \frac{1}{\alpha_1} D_{z1}D_{z1}^T + \\ & + \beta_1 \Phi_{z1}\Phi_{z1}^T + \frac{\mu_1}{\beta_1} QC_1^T C_{f1}^T C_{f1} C_1 Q; \end{aligned}$$

2) существует решение $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$ дифференциального линейного (при фиксированном $\alpha_1 > 0$) матричного неравенства

$$(8) \quad \begin{bmatrix} -dQ(t)/dt + A_{z1}Q + QA_{z1}^T + \alpha_1 Q + \beta_1 \Phi_{z1} \Phi_{z1}^T & D_{z1} & QC_1^T C_{f1}^T \\ D_{z1}^T & -\alpha_1 I & 0 \\ C_{f1} C_1 Q & 0 & -\frac{\beta_1}{\mu_1} I \end{bmatrix} \leq 0.$$

Здесь $Q(t_0) = Q_0$.

Доказательство теоремы 1 представлено в [25].

В [9] получены аналитические выражения для свободных параметров β_1, α_1 :

$$\beta_1(Q(t)) = + \sqrt{\frac{\mu_1 \text{trace}(Q(t) C_1^T C_{f1}^T C_{f1} C_1 Q(t))}{\text{trace}(\Phi_{z1} \Phi_{z1}^T)}},$$

$$\alpha_1(Q(t)) = \sqrt{\frac{\text{trace}(D_{z1} D_{z1}^T)}{\text{trace}(Q(t))}},$$

при которых получаются локально оптимальные оценки по критерию следа матрицы $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k)$, определяющего сумму длин полуосей ограничивающего эллипсоида.

Процедура для вычисления матрицы $Q(t)$ эллипсоида, ограничивающего состояния (5) с использованием ДЛМН (8), сводится (при каждом фиксированном α_1 и варьируемой переменной β_1) в результате дискретизации к совокупности задач оптимизации $\text{trace}(Q(t_k)) \rightarrow \min_{Q(t_k), \beta_1(t_k)}$ с ограничениями в виде ЛМН, представлена в конце данного раздела.

В моменты $t_{k+1}, k = 0, \dots, N-1$ поведение системы представлено разностным уравнением (6). В этом случае для вычисления матрицы $Q(t_{k+1})$ эллипсоида, ограничивающего состояния расширенной системы в дискретные моменты времени t_{k+1} , будет использоваться теорема 1 из [26], которая здесь приводится применительно к разностному уравнению (6).

Теорема 2 (см. [26]). *Для того чтобы эллипсоид $E(Q(t_{k+1}))$ ограничивал состояния системы в момент t_{k+1} при условии, что $z(t_k) \in E(Q(t_k))$, достаточно выполнения при $0 < \alpha_2 < 1$ одного из условий:*

1) существует решение $Q(t_{k+1}) > 0$ разностного матричного уравнения

$$(9) \quad Q(t_{k+1}) = A_{z2} Q(t_k) \left[\alpha_2 Q(t_k) - \frac{\mu_2}{\beta_2} Q(t_k) C_2^T C_{f2}^T C_{f2} C_2 Q(t_k) \right]^{-1} Q(t_k) A_{z2}^T +$$

$$+ \frac{1}{1 - \alpha_2} D_{z2} D_{z2}^T + \beta_2 \Phi_{z2} \Phi_{z2}^T;$$

2) существует решение $Q(t_{k+1}) > 0$ разностного линейного матричного неравенства (РЛМН)

$$(10) \quad \begin{bmatrix} Q(t_{k+1}) - \beta_2 \Phi_{z2} \Phi_{z2}^T & A_{z2} Q(t_k) & D_{z2} & 0 \\ Q(t_k) A_{z2}^T & \alpha_2 Q(t_k) & 0 & Q(t_k) C_2^T C_{f2}^T \\ D_{z2}^T & 0 & (1 - \alpha_2) I & 0 \\ 0 & C_{f2} C_2 Q(t_k) & 0 & \frac{\beta_2}{\mu_2} I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Доказательство теоремы для дискретной системы (6) с нелинейностями из (2) и неопределенными возмущениями из (3) представлено в [26].

Будем предполагать, что дискретное время изменяется с постоянным шагом $t_{k+1} - t_k = h = \text{const}$, $k = 1, \dots, N$. Отметим, что случай изменения дискретного времени с изменяющимся, но известным шагом h_k может быть рассмотрен аналогично. Случай, когда h_k неизвестны и могут изменяться в заданном диапазоне $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$, требует отдельного рассмотрения.

Итак, для непрерывно-дискретой системы, в которой дискретное время изменяется с постоянным шагом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Эллипсоид $E(Q(t))$, где $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ – решение матричной системы дифференциально-разностных уравнений (7), (9) или задачи оптимизации $\text{trace}(Q(t, t_0, Q_0)) \rightarrow \min$ с ограничениями ДЛМН (8) и РЛМН (10), будет ограничивающим для состояний системы (5), (6) и состояний исходной непрерывно-дискретой системы (1) при всех нелинейностях из (2) и возмущениях из (3).*

Доказательство основывается на последовательном применении теоремы 1 на интервалах непрерывности $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) для получения матрицы $Q(t, t_k, Q(t_k)) > 0$ эллипсоида, ограничивающего состояние $z(t, t_k, z(t_k))$ системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида с матрицей $Q(t_k)$ при всех нелинейностях из (2) и возмущениях из (3), и применении теоремы 2 в точках t_{k+1} , ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) для получения матрицы $Q(t_{k+1}) > 0$, ограничивающей состояние $z(t_{k+1}, t_k, z(t_k))$ системы (5), (6) в момент t_{k+1} при условии $z(t_k) \in E(Q(t_k))$.

Таким образом, при периодическом изменении дискретного времени состояние системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида $E(Q_0)$ будет ограничено эллипсоидом с матричной функцией $Q(t, t_0, Q_0)$, являющейся решением матричной системы сравнения (7) с импульсами (9) или задачи оптимизации $\text{trace}(Q(t, t_0, Q_0)) \rightarrow \min$ с ограничениями ДЛМН (8) и РЛМН (10) при $t \in T$. При этом матрица $Q_x(t, t_0, Q_0)$ определится как $Q_x(t, t_0, Q_0) = C_{12} Q(t, t_0, Q_0) C_{12}^T$, где $C_{12} = (C_1^T, C_2^T)^T$.

При численном решении задачи оптимизации с ДЛМН (8) проводится дискретизация на рассматриваемом интервале $[t_0, t_N]$ [27]. Производная $dQ(t)/dt$ на интервалах $[t_k, t_{k+1})$ считается постоянной и представляется как $dQ(t)/dt = Z(t_k)$, где $t_k = t_0 + kh$, $k = 1, \dots, N$, и N есть целая часть отно-

шения $(t_N - t_0)/h$. Тогда для $t \in [t_k, t_{k+1})$ матрица $Q(t)$ определится как

$$(11) \quad Q(t) = Q(t_k) + (t - t_k)Z(t_k),$$

причем $Q(t_0) = Q_0$. Для того чтобы матрица $Q(t)$ удовлетворяла неравенству $Q(t) > 0$ и ДЛМН (8) при всех $t \in [t_k, t_{k+1})$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла им в двух крайних точках t_k и $t_k + h$, т.е. при каждом $k = 0, \dots, N - 1$ одновременно должны выполняться неравенства [27]:

$$(12) \quad Q(t_k) > 0, \quad Q(t_k + h) > 0,$$

$$(13) \quad \begin{bmatrix} -Z(t_k) + F(Q(t_k)) + \beta_1 \Phi_{z1} \Phi_{z1}^T & D_{z1} & Q(t_k) C_1^T C_{f1}^T \\ D_{z1}^T & -\alpha_1 I & 0 \\ C_{f1} C_1 Q(t_k) & 0 & -\frac{\beta_1}{\mu_1} I \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$(14) \quad \begin{bmatrix} -Z(t_k) + F(Q(t_k + h)) + \beta_1 \Phi_{z1} \Phi_{z1}^T & D_{z1} & Q(t_k + h) C_1^T C_{f1}^T \\ D_{z1}^T & -\alpha_1 I & 0 \\ C_{f1} C_1 Q(t_k + h) & 0 & -\frac{\beta_1}{\mu_1} I \end{bmatrix} \leq 0,$$

где $Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ(t_k) = Q(t_{k+1} - 0)$, $F(G) = A_{z1}G + GA_{z1}^T + \alpha_1 G$.

В результате линейной аппроксимации (11) решения ДЛМН (8) нахождение матрицы $Q(t) > 0$ эллипсоида, ограничивающего состояния системы сводится к последовательному решению совокупности задач оптимизации: $\text{trace}(Q(t_{k+1})) \rightarrow \min_{Q(t_{k+1}) > 0, \beta_1(t_{k+1}) > 0}$ при ЛМН ограничениях (10), (12)–(14) для $k = 0, \dots, N - 1$. На первой итерации при $k = 0$ по заданной матрице $Q(t_0) = Q_0$ в результате решения указанной задачи оптимизации с ЛМН вычисляются матрицы $Q(t_0 + h)$ и $Q(t_1)$ с минимальным следом, которые определяют матрицу эллипсоида, ограничивающую состояния системы (5), (6) на интервале $[t_0, t_1]$. Затем при $k = 1, \dots, N - 1$ по матрице $Q(t_k)$ вычисляются матрицы $Q(t_k + h)$ и $Q(t_{k+1})$, которые определяют матрицу эллипсоида, ограничивающую состояния системы (5), (6) на последующих интервалах $[t_k, t_{k+1}]$.

Следует отметить, что для численного решения на каждой итерации задач оптимизации с ЛМН могут использоваться существующие программные средства полуопределенного программирования (CVX, Sedumi, Yalmip и др.).

4. Задача синтеза дискретного управления, обеспечивающего подавление начальных отклонений и неопределенных возмущений непрерывно-дискретной системы

Рассматривается непрерывно-дискретная система (1) с дискретным управлением:

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u(t_k) + \Phi_1 \varphi_1(t, x_1(t)) + A_{12} x_2(t_k) + D_1 w_1(t), \\ x_2(t_{k+1}) &= A_2 x_2(t_k) + B_2 u(t_k) + \Phi_2 \varphi_2(t_k, x_2(t_k)) + A_{21} x_1(t_k) + D_2 w_2(t_k). \end{aligned}$$

Задача 2. Задача состоит в нахождении управления в виде обратной связи по состоянию, доступному в дискретные моменты времени t_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, стабилизирующего замкнутую систему и подавляющего начальные отклонения и воздействие внешних возмущений в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для состояний непрерывно-дискретной системы.

Управление для каждой подсистемы берется в форме обратной связи по состоянию всей системы в моменты времени t_k

$$(16) \quad u_i(t) = K_{i1}(t_k)x_1(t_k) + K_{i2}(t_k)x_2(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad i = 1, 2.$$

Здесь $K_{ij}(t_k) - (m_i \times n_j)$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$ – матрицы коэффициентов усиления дискретных регуляторов, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Управление $u_i(t)$ должно удовлетворять ограничению

$$(17) \quad u_i(t) \in \{u_i : u_i^T U_i^{-1} u_i \leq 1\}, \quad t \in T,$$

где U_i – заданная симметрическая положительно определенная $(m_i \times m_i)$ -матрица ($i = 1, 2$).

Представим систему (15) с дискретным управлением (16) в следующем виде:

$$(18) \quad \dot{z}(t) = A_{z1}z + \Phi_{z1}\varphi_1(t, z(t)) + D_{z1}w(t), \quad t \neq t_k,$$

$$(19) \quad z(t_{k+1}) = A_{z2}z(t_k) + \Phi_{z2}\varphi_2(t_k, z(t_k)) + D_{z2}w(t_k), \quad t_k \in \Theta,$$

где $z(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t_k), x_1^T(t_k), u^T(t_k))^T$ – вектор состояния размерности $n = n_1 + n_2 + n_1 + m$, $u(t_k) = (u_1^T(t_k), u_2^T(t_k))^T$ – вектор управления размерности $m = m_1 + m_2$, $t \in [t_k, t_{k+1})$,

$$A_{z1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{z2} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_{21} & B_2 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{z1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{z1} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{12}(t_k) & K_{11}(t_k) \\ K_{22}(t_k) & K_{21}(t_k) \end{bmatrix}.$$

Задача синтеза управления для системы (18), (19) с учетом рассмотренного в разделе 3 способа численного решения ДЛМН (8) сводится к задаче оптимизации при ограничениях в виде разностных линейных матричных неравенств. В качестве критерия берется след матрицы $Q(t_k)$, определяющий размер эллипсоида $E(Q(t_k))$, ограничивающего состояния $z(t_k)$ для всех t_k , $k = 1, \dots, N$.

Матрица K коэффициентов усиления регуляторов входит только в разностное уравнение (6). Представим (6) в следующем виде:

$$(20) \quad z(t_{k+1}) = (\bar{A}_{z2} + \bar{B}KC)z(t_k) + \Phi_{z2}\varphi(t_k, z(t_k)) + D_{z2}w(t_k), \quad t_k \in \Theta,$$

$$\text{где } \bar{A}_{z2} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_{21} & B_2 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{m_1} & 0 \\ 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть при некоторых $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 > 0$ и всех t_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$ найдется решение $Q(t_{k+1}) > 0$, $Q(t_{k+1} - 0) = Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ(t_k) > 0$, $Y(t_k)$ задачи

$$\text{trace}[Q(t_{k+1})] \rightarrow \min$$

при ограничениях (12)–(14) и (21), (22):

$$(21) \quad \begin{bmatrix} Q(t_{k+1}) - \beta_2 \Phi_{z2} \Phi_{z2}^T & \bar{A}_{z2} Q(t_k) C^T + B Y_k & D_{z2} & 0 \\ C Q(t_k) \bar{A}_{z2}^T + Y_k^T \bar{B}^T & \alpha_2 C Q(t_k) C^T & 0 & C Q(t_k) C_2^T C_{f2}^T \\ D_{z2}^T & 0 & (1 - \alpha_2) I & 0 \\ 0 & C_{f2} C_2 Q(t_k) C^T & 0 & \frac{\beta_2}{\mu_2} I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$(22) \quad \begin{pmatrix} U & Y_k \\ Y_k^T & C Q(t_k) C^T \end{pmatrix} \geq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q(t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_k \in \mathbb{R}^{m \times (n_2 + n_1)}$, $Z(t_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, скалярным переменным $\beta_1(t_k), \beta_2(t_k) > 0$. Тогда матрица коэффициентов дискретного управления по состоянию, стабилизирующего непрерывно-дискретную систему, определится как $K(t_k) = Y_k(CQ(t_k)C^T)^{-1}$. При этом ошибки стабилизации будут оцениваться ограничивающим для вектора состояния $z(t)$ эллипсоидом, матрица $Q(t)$ которого определится согласно (11).

Отметим, что матрица $CQ(t_k)C^T$ будет положительно определенной, так как является средним блоком размерности $(n_2 + n_1) \times (n_2 + n_1)$ матрицы $Q(t_k)$.

5. Иллюстративный пример

Рассматривается непрерывно-дискретная система (15) с нелинейностями $\varphi_i(x_i)$, $i = 1, 2$ из (2), возмущениями $w_i(t)$, $i = 1, 2$ из (3) и следующими значениями параметров:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5,04 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,36 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,87 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,95 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 1 & 1,25 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0,5, \quad C_{f1} = C_{f2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решается задача синтеза дискретного управления, обеспечивающего на конечном интервале стабилизацию при максимальном периоде дискретности h .

На основе теоремы 4 и численного решения при $q_1 = 0,03$, $q_2 = 0,79$, $Q_0 = \text{diag}\{0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0 \ 0\}$ совокупности задач оптимизации с ЛМН ограничениями и периоде дискретности $h = 2,5$ с получен регулятор (16) с переменными коэффициентами $K(t_k)$. Изменения коэффициентов усиления регуляторов на рассматриваемом интервале $[0, 60 \text{ с}]$ для непрерывной и дискретной подсистем показаны на рис. 1.

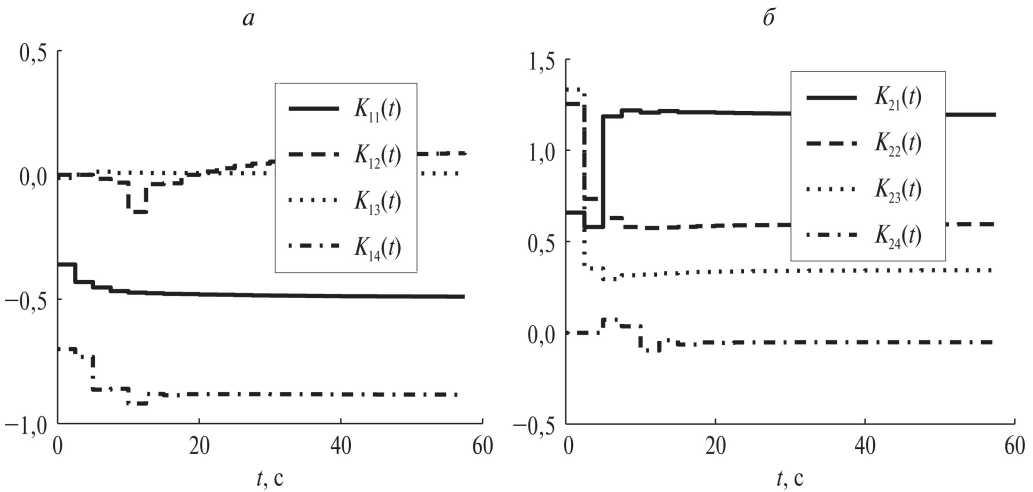


Рис. 1. Изменения коэффициентов усиления регулятора: *а* – для непрерывной подсистемы; *б* – для дискретной подсистемы.

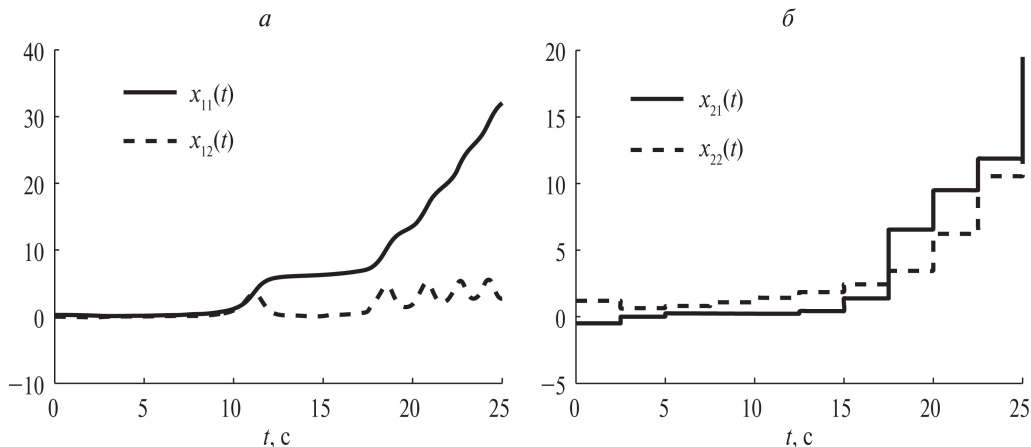


Рис. 2. Изменения координат состояния системы без регулятора и возмущений: a – непрерывной подсистемы; b – дискретной подсистемы.

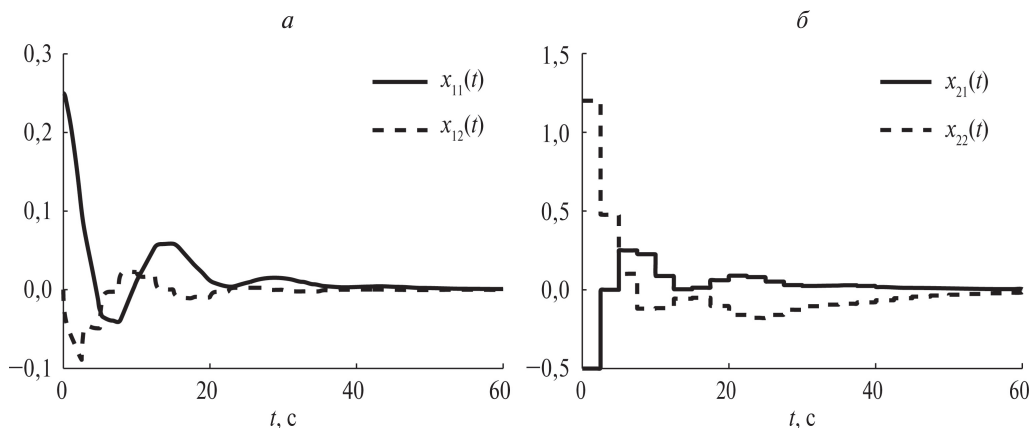


Рис. 3. Изменение координат состояния без учета возмущений: a – непрерывной подсистемы; b – дискретной подсистемы.

Моделирование рассматриваемой дискретно-непрерывной системы проводилось при конкретных нелинейностях $\varphi_1(x_1) = \sin(C_{f1}x_1)$, $\varphi_2(x_2) = 0,7071|C_{f2}x_2|$, удовлетворяющих условию (2). Результаты моделирования системы без регулятора и возмущений с периодом дискретности $h = 2,5$ с показаны на рис. 2. Из графиков видно, что система без регулятора является неустойчивой.

Проведено моделирование непрерывно-дискретной системы с полученным регулятором при различных начальных условиях. На рис. 3 представлены переходные процессы в непрерывной и дискретной подсистемах с полученным регулятором при начальных условиях $x_0 = [0,25 \ 0 \ -0,5 \ 1,2]^T$ без возмущений. На рис. 4 показаны переходные процессы в непрерывной и дискретной подсистемах с полученным регулятором при тех же начальных условиях с

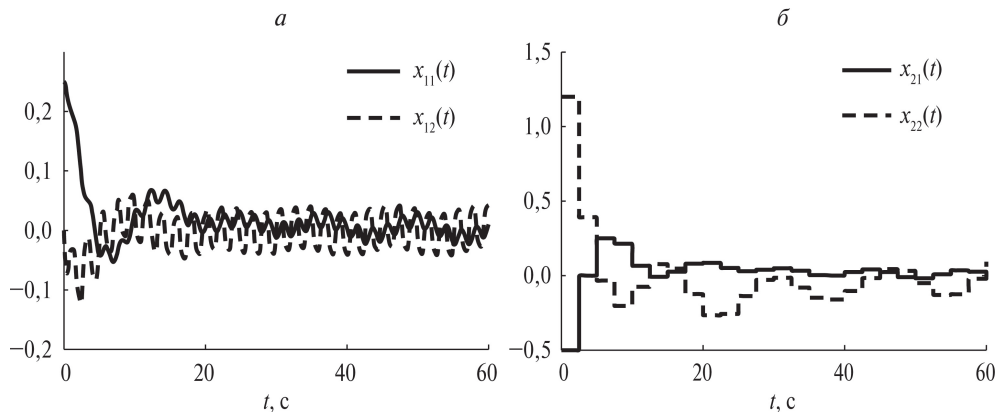


Рис. 4. Изменение координат состояния с учетом возмущений: *а* – непрерывной подсистемы; *б* – дискретной подсистемы.

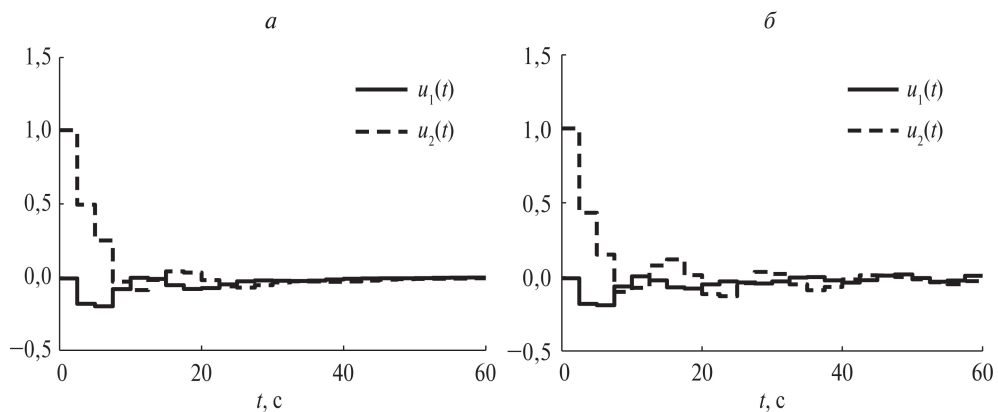


Рис. 5. Изменение управляющего сигнала непрерывной и дискретной подсистем: *а* – без учета возмущений; *б* – с учетом возмущений.

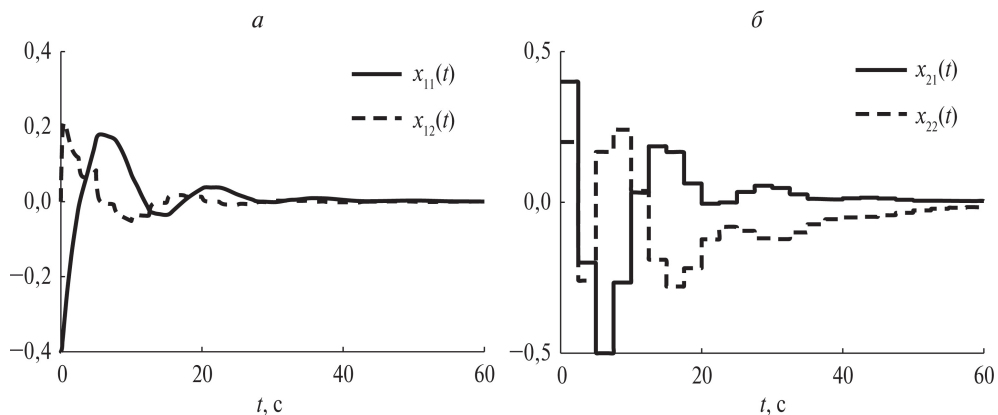


Рис. 6. Изменение координат состояния без учета возмущений с начальными условиями $x_0 = [-0,4 \ 0 \ 0,4 \ 0,2]^T$: *а* – непрерывной подсистемы; *б* – дискретной подсистемы.

учетом возмущений, заданных функциями $w_1(t) = \sin(2 \cos(3t))/5$ и $w_2(t_k) = \sin(k)/10$. При этом изменения управляющих сигналов непрерывной и дискретной подсистем представлены на рис. 5.

На рис. 6 показаны изменения координат состояния непрерывной и дискретной подсистем, полученные при моделировании с другими начальными условиями: $x_0 = [-0,4 \ 0 \ 0,4 \ 0,2]^T$.

Как видно из рис. 3–6, синтезированный дискретный регулятор обеспечивает стабилизацию рассматриваемой непрерывно-дискретной системы при $h = 2,5$ с.

6. Заключение

Для непрерывно-дискретных систем с липшицевыми нелинейностями, неопределенными возмущениями предложены способы оценивания состояния в виде эллипсоидов, ограничивающих состояния для процессов с начальными данными из заданного эллипсоида, и синтеза дискретного управления, обеспечивающего подавление начальных отклонений и влияние неопределенных возмущений. С использованием квадратичной функции Ляпунова с изменяющимися параметрами получены условия ограниченности на конечном интервале в виде разрешимости задачи оптимизации с дифференциально-разностными линейными матричными неравенствами. При кусочно-линейной аппроксимации решения ДЛМН задачи оценивания состояния и синтеза дискретного управления сведены к совокупности задач оптимизации с ЛМН, для численного решения которых применены методы полуопределенного программирования. Результаты применены для оценивания состояния и синтеза дискретного управления, обеспечивающего стабилизацию на конечном интервале конкретной непрерывно-дискретной системы с неопределенными возмущениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 4. В случае периодического дискретного управления ($h_k = h = \text{const} > 0$), как показано в разделе 3, задача построения оценки состояния в виде ограничивающего эллипсоида сводится к совокупности задач оптимизации $\text{trace}(Q(t_{k+1})) \rightarrow \min$ с ЛМН ограничениями (10), (12)–(14) для всех $k = 0, \dots, N-1$. С учетом (20) матричное неравенство (10) здесь принимает вид:

$$\begin{bmatrix} Q(t_{k+1}) - \beta_2 \Phi_{z2} \Phi_{z2}^T & (\bar{A}_{z2} + \bar{B}KC)Q(t_k) & D_{z2} & 0 \\ Q(t_k)(\bar{A}_{z2} + \bar{B}KC)^T & \alpha_2 Q(t_k) & 0 & Q(t_k)C_2^T C_{f2}^T \\ D_{z2}^T & 0 & (1 - \alpha_2)I & 0 \\ 0 & C_{f2}C_2 Q(t_k) & 0 & \frac{\beta_2}{\mu_2} I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Далее, умножая последнее неравенство слева на матрицу $\text{diag}(I, C, I, I)$, а справа – на $\text{diag}(I, C^T, I, I)$ и вводя замену $Y_k = KCQ(t_k)C^T$, приходим к РЛМН (21) относительно матричных переменных $Q(t_{k+1})$ и Y_k . Ограничение на управление (17) обеспечивается ЛМН (22), где $U = \text{diag}(U_1, U_2)$.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. University of California Press, 1958.
2. *Bellman R., Cooke K.L.* Differential-Difference Equations. New York; London, 1963.
3. *De la Sen M.* Adaptive Control of Single-Input Single-Output Hybrid Systems Possessing Interacting Discrete- and Continuous-Time Dynamics // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2005. No. 3. P. 229–239.
4. *Pepe P.* On the Asymptotic Stability of Coupled Delay Differential and Continuous Time Difference equations // Automatica. 2005. V. 41. No. 1. P. 107–112.
5. *Pepe P., Jiang Z.-P., Fridman E.* A new Lyapunov-Krasovskii Methodology for Coupled Delay Differential and Difference Equations // Int. J. Control. 2008. V. 81. No. 1. P. 107–115.
6. *Marchenko V.M., Loiseau J.-J.* On the Stability of Hybrid Difference-Differential Systems // Differential Equations. 2009. V. 45. No. 5. P. 743–756.
7. *Gu K., Liu Y.* Lyapunov–Krasovskii Functional for Uniform Stability of Coupled Differential-functional Equations // Automatica. 2009. V. 45. P. 798–804.
8. *Hetel L., Fiter C., Omran H., Seuret A., Fridman E., Richard J.-P., Niculescu S.* Recent developments on the stability of Systems with Aperiodic Sampling: An Overview // Automatica. 2017. V. 76. P. 309–335.
9. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация нелинейных систем с дискретным управлением и неопределенными возмущениями // АиТ. 2021. № 4. С. 96–120.
Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Nonlinear Systems with Sampled-Data Control and Uncertain Disturbances // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 4. P. 634–653.
10. *Malikov A.I.* State Observer for Continuous Lipschitz Systems with Discrete Measurements and Uncertain Disturbances // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. No. 9. P. 2172–2178.
11. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и управление линейных аperiodических импульсивных систем при неопределенных возмущениях // Изв. ВУЗов. Математика. 2021. № 6. С. 43–54.
Malikov A.I. State Estimation and Control for Linear Aperiodic Impulsive Systems with Uncertain Disturbances // Russian Mathematics. 2021. V. 65. No. 6. P. 36–46.
12. *Malikov A.I.* State Estimation of the Nonlinear Lipschitz Systems with Impulses under Uncertain Disturbances // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43. No. 5. P. 1152–1158.
13. *Malikov A.I.* Observer Based Control for Continuous Systems with Discrete Measurements and Uncertain Disturbances // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. No. 5. P. 1728–1737.

14. *Holicki T., Carsten W., Scherer C.W.* Output Feedback Synthesis for a Class of Aperiodic Impulsive Systems // IFAC PapersOnLine. 2020. V. 53. Is. 2. P. 7299–7304.
15. *Rios H., Hetel L., Efimov D.* Robust Output-Feedback Control for Uncertain Linear Sampled-Data Systems: A 2D Impulsive System Approach // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2019. P. 177–201.
16. *Hu L.S., Lam J., Cao Y.Y., Shao H.H.* An LMI Approach to Robust H2 Sampled-Data Control for Linear Uncertain Systems // IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics. 2003. V. 33. No. 1. P. 149–155.
17. *Kim J.H., Hagiwara T.* Extensive Theoretical/Numerical Comparative Studies on H2 and Generalized H2 Norms in Sampled-data Systems // Int. J. Control. 2017. V. 90. No. 11. P. 2538–2553.
18. *Geromel J.C., Colaneri P., Bolzern P.* Differential Linear Matrix Inequality in Optimal Sampled-Data Control // Automatica. 2019. V. 100. P. 289–298.
19. *Бирюков Р.С.* Обобщенное H_2 -управление линейным непрерывно-дискретным объектом на конечном горизонте // АиТ. 2020. № 8. С. 40–53.
Birukov R.S. Generalized H_2 -optimal Control of Continuous-discrete Linear Plant on Finite Horizont // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 8. P. 1394–1404.
20. *Марченко В.М., Борковская И.М.* К вопросу о стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. 2020. Серия 3. № 2. С. 5–11.
21. *Rasina I.V., Fesko O.V., Usenko O.V.* Analytical Design of Controllers for Discrete-continuous Systems with Linear Control // Program. Syst. Theor. Appl. 2021. V. 12. No. 2(49). P. 121–135.
22. *Taousser F.Z., Djouadi S.M., Tomsovic K.* A Dwell Time Approach for the Stabilization of Mixed Continuous/Discrete switched systems // Automatica. 2022. V. 142. Article 110386.
23. *Акманова С.В.* О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации // АиТ. 2024. № 9. С. 41–58.
Akmanova S.V. Stabilization of Nonlinear Continuous-Discrete Dynamic Systems with a Constant Sampling Step // Autom. Remote Control. 2024. V. 85. No. 9. P. 864–878.
24. *Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., De Tommasi G.* Finite Time Stability and Control. London: Springer-Verlag, 2014.
25. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2016. № 5. С. 19–36.
Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Continuous Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 764–778.
26. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2019. № 11. С. 59–82.
Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Discrete-time Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1976–1995.

27. Маликов А.И., Дубакина Д.И. Численные способы решения задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами // Изв. ВУЗов. Математика, 2020. № 4. С. 74–86.
Malikov A.I., Dubakina D.I. Numerical Methods for Solving Optimization Problems with Differential Linear Matrix Inequalities // Russian Mathematics. 2020. V. 64. No. 4. P. 64–74.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.А. Мунасыповым.

Поступила в редакцию 04.09.2024

После доработки 21.11.2024

Принята к публикации 10.12.2024

© 2025 г. А.В. ПЛАТОНОВ, канд. физ.-мат. наук (a.platonov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Исследуется проблема устойчивости для одного класса нестационарных механических систем, находящихся под действием линейных диссипативных и нелинейных потенциальных сил. Предполагается, что система имеет переменную структуру. Переключения между разными режимами функционирования связаны со сменой потенциала системы, а также с разрывами нестационарных коэффициентов, присутствующих в системе. Рассматриваются два подхода к анализу устойчивости таких систем. Один связан с построением разрывной функции Ляпунова, другой опирается на построение непрерывной функции Ляпунова. Изучается влияние на устойчивость нестационарных возмущающих сил. Особенностью работы является то, что нестационарные параметры как в самой системе, так и в возмущениях могут быть неограниченными относительно времени или, напротив, могут сколь угодно близко приближаться к нулю. Таким образом, возникает задача сравнения скорости роста или убывания всех этих нестационарностей для получения условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость заданного положения равновесия системы.

Ключевые слова: нелинейные нестационарные механические системы, переключения, асимптотическая устойчивость, возмущения.

DOI: 10.31857/S0005231025030024, **EDN:** IEPRSI

1. Введение

В последние десятилетия активно развивается теория дифференциальных систем с разрывной правой частью. Такие системы находят множество практических приложений в различных областях человеческой деятельности. Методы А.М. Ляпунова, разработанные им для анализа устойчивости непрерывных систем, могут быть успешно распространены и на разрывные системы. В частности, значимые результаты в этом направлении были получены Е.А. Барбашиным, А.И. Лурье, А.М. Летовым, М.А. Айзерманом, А.А. Андроновым, Н.Н. Красовским, В.И. Зубовым, А.Ф. Филипповым, С.В. Емельяновым, В.М. Матросовым, А.Х. Гелигом, Г.А. Леоновым, В.А. Якубовичем, D. Liberzon, J.P. Hespanha, A.S. Morse и многими другими известными учеными (см., например, монографии [1, 2] и обзорные статьи [3, 4]). Важным классом разрывных систем являются системы с

переключениями, способные функционировать в разных режимах [2]. Правило активации того или иного режима задается некоторой специальной функцией, называемой законом переключений. Проблеме оценки влияния переключений на различные динамические характеристики изучаемой системы посвящено множество работ, в том числе и в последние годы (см., например, [2, 5–12] и цитируемую там литературу). Так, в настоящее время актуальны направления исследований, связанные с анализом влияния переключений в сочетании с какими-то другими факторами, такими как нестационарность, возмущения, запаздывание, случайность, импульсные эффекты, сложность и гибридность внутренних взаимосвязей между различными переменными в системе и т.д. Рассматриваются законы переключений, зависящие как от времени, так и от текущего состояния системы. Активно развиваются подходы к построению как единой для всех режимов функции Ляпунова, так и составной функции Ляпунова, образованной из частных функций, соответствующих разным режимам. Отдельный интерес представляют нестационарные системы с переключениями [6–8]. Здесь на плавную динамику системы, вызванную непрерывным изменением нестационарных параметров, накладываются резкие колебания, вызванные разрывами нестационарных параметров или сменой структуры самой системы. Особенностью здесь является то, что количество возможных режимов функционирования системы становится, вообще говоря, бесконечным. Анализ таких систем усложняется, если нестационарные параметры в системе могут быть неограниченными или неотделенными от нуля.

Важным примером динамических систем являются механические системы. Известно, что присутствие в механических системах нестационарных параметров может приводить к принципиально новым динамическим эффектам [13, 14]. В настоящей работе изучается один класс нелинейных механических систем с разрывными нестационарными параметрами и переключаемыми силовыми полями. Закон переключений предполагается зависящим от времени. Таким образом, правые части исследуемой системы оказываются разрывными по времени и непрерывными по вектору состояния. Предлагаются разные способы построения подходящей функции Ляпунова. Наиболее естественным здесь является подход, связанный с использованием отдельных непрерывных функций Ляпунова на гладких промежутках функционирования системы и с конструированием из них итоговой разрывной функции Ляпунова. Однако такой подход может привести к достаточно жестким условиям устойчивости. Поэтому в работе также разрабатывается подход к построению единой непрерывной функции Ляпунова для всей гибридной системы. Кроме того, в работе исследуется влияние нестационарных возмущений на устойчивость заданного положения равновесия механической системы. Важно отметить, что искомые оценки на возмущения, вообще говоря, будут зависеть от ограничений, наложенных на закон переключений в исходной системе. Полученные в работе результаты могут применяться для анализа робастности нестационарных систем с переключениями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную механическую систему, находящуюся под воздействием линейных диссипативных сил и нелинейных потенциальных сил:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} - p(t) \frac{\partial \Pi_\sigma(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

Здесь $\mathbf{q} \in R^n$ и $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ — векторы обобщенных координат и скоростей соответственно; кинетическая энергия $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ системы задается квадратичной формой $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ с симметричной и непрерывно-дифференцируемой при $\mathbf{q} \in R^n$ матрицей $\mathbf{A}(\mathbf{q})$; $\sigma = \sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow S = \{1, \dots, N\}$ — кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключений потенциалов системы; потенциалы $\Pi_s(\mathbf{q})$ описываются непрерывно дифференцируемыми при $\mathbf{q} \in R^n$ однородными порядка $\mu + 1$ функциями, $\mu > 1$, $s = 1, \dots, N$; компоненты симметричной матрицы $\mathbf{B}(t)$ кусочно-непрерывны при $t \geq 0$; скалярная функция $p(t)$ кусочно-непрерывно дифференцируема при $t \geq 0$. Не умаляя общности, считаем, что множество точек разрыва функции $p(t)$ и ее производной содержится во множестве точек разрыва функции $\sigma(t)$ (в противном случае объединим указанные два множества в одно и будем считать это новым множеством точек переключений потенциальных сил).

Следуя стандартным предположениям, полагаем, что кинетическая энергия удовлетворяет при всех $\mathbf{q} \in R^n$, $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ оценкам:

$$k_1 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq k_2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \\ \left\| \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\| \leq k_3 \|\dot{\mathbf{q}}\|, \quad \left\| \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq k_4 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2,$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — некоторые положительные постоянные.

Таким образом, на динамику системы (1) влияют как плавные изменения нестационарных параметров, так и резкие скачки, вызванные разрывами нестационарных параметров либо сменой потенциала.

Целью настоящей статьи является установление условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1), а также оценка влияния на устойчивость возможных нестационарных возмущающих сил. Отметим, что переключаемая система вида (1) со стационарными параметрами исследовалась в [15]. Там переключения происходили между конечным набором возможных режимов функционирования системы. Присутствие нестационарных параметров s , вообще говоря, бесконечным числом точек разрыва усложняет задачу, поскольку теперь количество возможных режимов становится бесконечным. Кроме того, если эти нестационарные параметры могут неограниченно возрастать или, напротив, сколь угодно близко приближаться к нулю, то полученные в [15] результаты будут неприменимы к такой нестационарной системе.

3. Использование разрывной функции Ляпунова

Пусть последовательность $\{\tau_i\}_{i=0}^{+\infty}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$, задает моменты переключений потенциальных сил. Полагаем, что на любом конечном временном промежутке число этих моментов переключений конечно, в то время как их общее число на интервале $[0, +\infty)$ бесконечно. Для определенности будем считать, что элементы матрицы $\mathbf{B}(t)$, а также функции $\sigma(t)$ и $p(t)$ непрерывны справа в своих точках разрыва.

Сделаем следующие предположения.

Предположение 1. При всех $t \geq 0$ и $\mathbf{z} \in R^n$ справедливы неравенства

$$b_1(t)\|\mathbf{z}\|^2 \leq \mathbf{z}^T \mathbf{B}(t) \mathbf{z} \leq b_2(t)\|\mathbf{z}\|^2,$$

где $b_1(t), b_2(t)$ – кусочно-непрерывные положительные функции, имеющие положительный левосторонний предел в точках разрыва.

Предположение 2. Потенциалы $\Pi_s(\mathbf{q})$ положительно определены.

Из предположения 2 вытекает существование таких положительных констант c_{1s}, c_{2s} , для которых при всех $\mathbf{q} \in R^n$ будут справедливы неравенства

$$c_{1s}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1} \leq \Pi_s(\mathbf{q}) \leq c_{2s}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}, \quad s = 1, \dots, N.$$

Предположение 3. Выполнены условия:

1) функция $p(t)$ положительна при всех $t \geq 0$, причем $p(\tau_i - 0) > 0$, $i = 1, 2, \dots$;

2) при всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$, верно неравенство

$$-p'(t) \leq \frac{l}{k_2} p(t) b_1(t).$$

Здесь $l = \text{const} \in (0, 1)$.

Если параметр $p(t)$ возрастает в некоторый момент времени t , то неравенство в условии 2) предположения 3 будет автоматически выполнено для этого момента. Таким образом, указанное неравенство накладывает ограничение лишь на допустимую скорость убывания параметра $p(t)$.

Построим разрывную функцию Ляпунова

$$(2) \quad V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{p(t)} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Pi_\sigma(\mathbf{q}) + r \gamma(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

где r – положительная постоянная, $\gamma(t)$ – некоторая кусочно-непрерывно дифференцируемая положительная при $t \geq 0$ функция. Как и в случае с функцией $p(t)$, полагаем, что разрывы у функции $\gamma(t)$ и у ее производной могут происходить только в точках разрыва функции $\sigma(t)$.

Продифференцируем функцию $V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ в силу системы (1) на интервалах (τ_i, τ_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots$. Получим

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(1)} = & -\frac{1}{p(t)} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(t) \dot{\mathbf{q}} - r\gamma(t)p(t)(\mu + 1) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \Pi_\sigma(\mathbf{q}) - \\ & - r\gamma(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q}^T \mathbf{B}(t) \dot{\mathbf{q}} + r\gamma(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \\ & + r\gamma(t) \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q} \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{p'(t)}{p^2(t)} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + r\gamma'(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \end{aligned}$$

Тогда при $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in R^n$, $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$, приходим к оценкам:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + c_{1\sigma} \|\mathbf{q}\|^{\mu+1} - r\gamma(t)k_3 \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{q}\|^\mu & \leq V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \\ & \leq \frac{k_2}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + c_{2\sigma} \|\mathbf{q}\|^{\mu+1} + r\gamma(t)k_3 \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{q}\|^\mu, \\ \dot{V}|_{(1)} & \leq -\frac{b_1(t)}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - r\gamma(t)p(t)(\mu + 1)c_{1\sigma} \|\mathbf{q}\|^{2\mu} + \\ & + r\gamma(t)b_2(t) \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{q}\|^\mu + r\gamma(t)k_4 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{q}\|^\mu + r\gamma(t)k_3 a \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} + \\ & + \max \left\{ 0; \frac{-p'(t)k_2}{p^2(t)} \right\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + r|\gamma'(t)|k_3 \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{q}\|^\mu. \end{aligned}$$

Здесь a – положительная постоянная, выбранная так, чтобы при всех $\mathbf{q} \in R^n$ имело место соотношение $\left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q} \right) \right\| \leq a \|\mathbf{q}\|^{\mu-1}$.

Для дальнейшего анализа понадобится один вспомогательный результат.

Пусть задана функция

$$W(t, \mathbf{z}) = -\alpha(t)z_1^p - \beta(t)z_2^q + \delta(t)z_1^u z_2^v,$$

где $t \geq 0$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$, $z_1, z_2 \in [0, +\infty)$; p и q – положительные постоянные; u и v – неотрицательные постоянные, $u + v > 0$; функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\delta(t)$ кусочно-непрерывны и положительны при $t \geq 0$.

Лемма 1 [16]. Пусть выполнено неравенство

$$(3) \quad \frac{u}{p} + \frac{v}{q} > 1$$

и существует константа ε , удовлетворяющая ограничениям

$$\max\{0; v - q\} \leq \varepsilon \leq \min \left\{ v; v - \frac{(p - u)q}{p} \right\},$$

такая что функция

$$(4) \quad \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} \left(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \right)^{\frac{v-\varepsilon}{q}}$$

ограничена при $t \geq 0$. Тогда для любого $M \in (0, 1)$ можно выбрать $H > 0$ так, что оценка

$$(5) \quad W(t, \mathbf{z}) \leq M(-\alpha(t)z_1^p - \beta(t)z_2^q)$$

будет справедлива при $t \geq 0$, $\|\mathbf{z}\| < H$.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что если функция $\alpha(t)/\beta(t)$ ограничена сверху при $t \geq 0$, то тогда ограниченность функции (4) в условиях леммы 1 достаточно проверить для $\varepsilon = \max\{0; v - q\}$. Если же функция $\alpha(t)/\beta(t)$ ограничена снизу положительной константой при $t \geq 0$, то тогда ограниченность функции (4) достаточно проверить для $\varepsilon = \min\{v; v - (p - u)q/p\}$. Если неравенство (3) заменить на равенство и предположить, что функция (4) ограничена сверху на интервале $[0, +\infty)$ константой, достаточно близкой к нулю, то тогда для некоторого $M \in (0, 1)$ можно получить соотношение (5), справедливое при всех $t \geq 0$, $z_1, z_2 \in [0, +\infty)$.

Применим лемму 1 к оценкам, полученным ранее на функцию Ляпунова (2) и на ее производную в силу системы (1). Для любых значений $a_1 \in (0, 1)$ и $a_2 > 1$ функцию $\gamma(t)$, а также положительные константы r , a_3 , a_4 и H можно выбрать таким образом, чтобы имели место неравенства

$$(6) \quad a_1 \left(\frac{k_1}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + c_{1\sigma} \|\mathbf{q}\|^{\mu+1} \right) \leq V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq a_2 \left(\frac{k_2}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + c_{2\sigma} \|\mathbf{q}\|^{\mu+1} \right)$$

при $t \geq 0$, $\|(\mathbf{q}^T, \mathbf{z}^T)^T\| < H$,

$$(7) \quad \dot{V}|_{(1)} \leq -a_3 \left(\frac{b_1(t)}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{1\sigma} \|\mathbf{q}\|^{2\mu} \right) \leq -a_4\lambda(t)V^{1+\xi}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$, $\|(\mathbf{q}^T, \mathbf{z}^T)^T\| < H$. Здесь $\mathbf{z} = \dot{\mathbf{q}}/\sqrt{p(t)}$, $\xi = (\mu - 1)/(\mu + 1)$, $\lambda(t) = \min\{b_1(t); \gamma(t)p(t)\}$. В самом деле, согласно лемме 1 для получения оценок (6), (7) требуется, чтобы функции

$$(8) \quad \gamma(t)\sqrt{p(t)}, \quad \gamma(t)\frac{b_2^2(t)}{b_1(t)}, \quad \frac{\gamma(t)p(t)}{b_1(t)},$$

$$(9) \quad \frac{(\gamma'(t))^2}{\gamma(t)b_1(t)}$$

были ограниченными при $t \geq 0$. Для достижения ограниченности функций (8) достаточно построить функцию $\gamma(t)$ согласно соотношению

$$(10) \quad 0 \leq \gamma(t) \leq N \min \left\{ 1/\sqrt{p(t)}; b_1(t)/b_2^2(t); b_1(t)/p(t) \right\} \quad \text{при } t \geq 0,$$

где N – некоторая положительная постоянная. Ограниченность функции (9) будет гарантированно иметь место, если, например, функцию $\gamma(t)$ строить в

виде кусочно-постоянной функции (тогда получим $\gamma'(t) = 0$ при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$).

Положим

$$\varkappa_i = \frac{a_2}{a_1} \max \left\{ \frac{k_2 p(\tau_i - 0)}{k_1 p(\tau_i)}; \frac{c_{2\sigma(\tau_i)}}{c_{1\sigma(\tau_i - 0)}} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда при $\|(\mathbf{q}^T, \mathbf{z}^T)^T\| < H$ имеем, что

$$(11) \quad V(\tau_i, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \varkappa_i V(\tau_i - 0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Для любых значений $t \geq t_0 \geq 0$ можно найти натуральное число m и неотрицательное целое число k такие, что $t_0 \in [\tau_{m-1}, \tau_m)$, $t \in [\tau_{m-1+k}, \tau_{m+k})$. В результате получаем, что величина $m = m(t_0)$ определяется выбором t_0 , а величина $k = k(t_0, t)$ равна числу моментов переключений потенциала в исследуемой системе на промежутке $[t_0, t]$.

Построим вспомогательную функцию $\psi(t_0, t)$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \psi(t_0, t) &= \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \quad \text{при} \quad k = 0, \\ \psi(t_0, t) &= (\varkappa_m \dots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} \int_{t_0}^{\tau_m} \lambda(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} (\varkappa_{m+j} \dots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} \int_{\tau_{m-1+j}}^{\tau_{m+j}} \lambda(\tau) d\tau + \int_{\tau_{m-1+k}}^t \lambda(\tau) d\tau \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Функция $\psi(t_0, t)$ положительная и кусочно-непрерывная на интервале $[t_0, +\infty)$. Моменты переключений потенциальных сил являются, вообще говоря, точками разрыва данной функции. Заметим, что функция $\psi(t_0, t)$ при некотором фиксированном значении t_0 отличается от функции $\psi(0, t)$ лишь сдвигом на константу, зависящую от выбора t_0 . Для построения функции $\psi(0, t)$ следует в выписанных выше формулах положить $t_0 = 0$, $m = m(0) = 1$, $k = k(0, t)$ – количество переключений на промежутке $[0, t]$.

Рассмотрим решение $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ системы (1), выходящее в момент времени $t_0 \geq 0$ из начальной точки $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$, такой что $\|(\mathbf{q}_0^T, \mathbf{z}_0^T)^T\| < H$ (здесь $\mathbf{z}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0 / \sqrt{p(t_0)}$). Интегрируя дифференциальные неравенства (7) и используя соотношения (11), получаем, что если на промежутке времени $[t_0, t]$ решение системы остается в области $\|(\mathbf{q}^T, \mathbf{z}^T)^T\| < H$, то будут справедливы оценки

$$\begin{aligned} V^{-\xi}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &\geq V^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) + a_4 \xi \psi(t_0, t) \quad \text{при} \quad k = 0, \\ V^{-\xi}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) &\geq (\varkappa_m \dots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} V^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) + a_4 \xi \psi(t_0, t) \\ &\quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда, учитывая неравенства (6) и проделывая аналогичные рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 из [17], придем к следующему результату.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1–3 и построены оценки (6), (7), (11). Тогда если $\psi(0, t) \rightarrow +\infty$ и $p^{-\xi}(t)\psi(0, t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Замечание 2. Условия асимптотической устойчивости, сформулированные в теореме 1, можно заменить более грубым, но более простым дискретным вариантом. Положим

$$\lambda_i = \inf_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} \lambda(t), \quad p_k = \sup_{[\tau_k, \tau_{k+1}]} p(t), \quad \psi_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\varkappa_{i+1} \dots \varkappa_k)^{-\xi} \lambda_i T_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь $T_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда для асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) достаточно выполнения условий: $\psi_k \rightarrow +\infty$ и $p_k^{-\xi} \psi_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Таким образом, найденные условия асимптотической устойчивости определяются через соотношения, связывающие между собой длины промежутков между последовательными переключениями потенциальных сил в системе (1), величины скачков функции Ляпунова, вызванные разрывами параметра $p(t)$ и сменами потенциала, а также скорости изменения функций $b_1(t)$, $b_2(t)$, $p(t)$.

Предположим теперь, что на исследуемую систему действуют еще некоторые возмущающие силы:

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} - p(t) \frac{\partial \Pi_\sigma(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Будем считать, что функция $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ определена в области

$$(13) \quad t \geq 0, \quad \|(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T\| < \Delta$$

и удовлетворяет там условиям, гарантирующим существование, единственность решений системы (12) и их непрерывную зависимость от начальных данных.

Пусть в области (13) справедливы оценки

$$\|\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq h(t)\|\mathbf{q}\|^\omega + g(t)\|\dot{\mathbf{q}}\|^\eta,$$

где ω и η – положительные постоянные, $h(t)$ и $g(t)$ – неотрицательные кусочно-непрерывные функции. Отметим, что функции $h(t)$ и $g(t)$ могут быть неограниченными на интервале $[0, +\infty)$.

Достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (12) можно получить, как и ранее, путем применения леммы 1 к функции Ляпунова (2) и ее производной в силу системы (12).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда если

$$(14) \quad \omega > \mu, \quad \eta > 1$$

и, кроме того, функции

$$(15) \quad \chi_1(t) = \frac{h(t)}{\gamma^{1/2}(t) b_1^{1/2}(t) p(t)}, \quad \chi_2(t) = \frac{g(t) p^{(\eta-1)/2}(t)}{b_1(t)}$$

ограничены на интервале $[0, +\infty)$, то положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (12) асимптотически устойчиво.

Действительно, при сделанных в следствии 1 предположениях применение леммы 1 снова приведет к оценкам вида (6), (7), (11), и соответственно выполнение условий теоремы 1 будет гарантировать требуемое свойство для возмущенной системы.

Если какие-то из функций (15) неограничены на интервале $[0, +\infty)$, то для установления условий асимптотической устойчивости можно применить подход, предложенный в [18], где использовались непрерывные функции Ляпунова. Покажем, что применение разрывных функций Ляпунова также допустимо в рамках указанного подхода.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если справедливы неравенства (14) и имеют место предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1(t) &= \chi_1(t) \psi^{-(\omega-\mu)/(\mu-1)}(0, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \\ \tilde{\chi}_2(t) &= \chi_2(t) \psi^{-(\eta-1)/(2\xi)}(0, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

то положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (12) асимптотически устойчиво.

Доказательство следствия 2 приведено в Приложении.

Пример 1. Пусть выполнены предположения 1–3, причем существуют такие положительные постоянные L_1, L_2, L_3, L_4 и $\hat{t}$, что справедливы неравенства

$$L_1 t \leq p(t) \leq L_2 t, \quad L_3 \sqrt{t} \leq b_1(t) \leq b_2(t) \leq L_4 \sqrt{t} \quad \text{при } t \geq \hat{t}.$$

Тогда, выбирая $\gamma(t) = N/\sqrt{\tau_{i+1}}$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ ($N = \text{const} > 0$), $i = 0, 1, \dots$, получаем, что функции (8), (9) будут ограниченными. Заметим, что в рассматриваемом случае $p(\tau_i - 0)/p(\tau_i) \leq L_2/L_1$ при всех значениях индекса i , таких что $\tau_i \geq \hat{t}$. Значит, найдется такое $\varkappa > 1$, что $\varkappa_i \leq \varkappa, i = 1, 2, \dots$. Имеем

$$\lambda(t) \geq \min \left\{ L_3 \sqrt{t}; N L_1 t / \sqrt{\tau_{i+1}} \right\} \geq \min \{ L_3; N L_1 \} t / \sqrt{\tau_{i+1}}$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i \geq \hat{t}$. Применяя теорему 1, находим, что для асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) достаточно

выполнения условия

$$\frac{1}{\tau_{k+1}^\xi} \sum_{i=0}^{k-1} \varkappa^{-\xi(k-i)} \frac{\tau_{i+1} + \tau_i}{\sqrt{\tau_{i+1}}} T_i \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow +\infty.$$

Предположим, например, что $T_i = \text{const} > 0$, $i = 0, 1, \dots$ (т.е. переключения потенциальных сил происходят через фиксированные интервалы времени). Тогда установленное условие асимптотической устойчивости будет выполнено, если $\xi < 1/2$, т.е. если $\mu < 3$. При этом найдется такая константа $L_5 > 0$, что $\psi(0, t) \geq L_5 \sqrt{t}$ при $t \geq \hat{t}$. Значит, согласно следствию 2 асимптотическая устойчивость заданного положения равновесия сохранится для возмущенной системы (12), если выполнены неравенства (14) и имеют место соотношения

$$h(t)t^{-\frac{\omega+\mu-2}{2(\mu-1)}} \rightarrow 0, \quad g(t)t^{-\frac{\eta+4\xi-2\xi\eta-1}{4\xi}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

4. Использование непрерывной функции Ляпунова

Наличие множителей $\varkappa_i$, $i = 1, 2, \dots$, в оценках (11) вызвано разрывами функции Ляпунова (2), и оно в теореме 1 может привести к достаточно жестким ограничениям на закон переключений потенциальных сил. В настоящем разделе построим непрерывную функцию Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ систем (1) и (12).

Заменим предположение 2 на более слабое.

Предположение 4. Потенциал $\Pi_1(\mathbf{q})$ положительно определен.

С учетом предположения 4 получаем, что существуют такие положительные константы c_{11} , c_{2s} , c_{3s} , $s = 1, \dots, N$, для которых при всех $\mathbf{q} \in R^n$ будут справедливы неравенства:

$$c_{11}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1} \leq \Pi_1(\mathbf{q}) \leq c_{21}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}, \quad |\Pi_s(\mathbf{q})| \leq c_{2s}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}, \quad s = 2, \dots, N,$$

$$\left\| \frac{\partial \Pi_s(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq c_{3s}\|\mathbf{q}\|^\mu, \quad s = 1, \dots, N.$$

Например, можно считать, что при $\sigma(t) = 1$ действует некоторое стабилизирующее управление, а при $\sigma(t) \neq 1$ оно отключается. Тогда требуется найти соотношение между длинами интервалов включения этого управления и длинами интервалов его отключения, гарантирующее сохранение асимптотической устойчивости заданного положения равновесия. Пусть последовательность $\{\tilde{\tau}_i\}_{i=0}^{+\infty}$, где $0 = \tilde{\tau}_0 < \tilde{\tau}_1 < \dots$, задает моменты переключений, в которых значение $\sigma(t)$ меняется с 1 на какое-то другое или наоборот. Для определенности будем считать, что $\sigma(t) = 1$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$ и $\sigma(t) \neq 1$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$; $j = 0, 1, \dots$.

Вместо предположения 3 будем использовать следующее

Предположение 5. Выполнены условия:

- 1) функция $p(t)$ положительна при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, причем $p(\tilde{\tau}_{2j+1} - 0) > 0$, $j = 0, 1, \dots$;
- 2) при всех $t \in (\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$ верно неравенство

$$-p'(t) \leq \frac{l}{k_2} p(t) b_1(t)$$

и, кроме того,

$$p(\tilde{\tau}_{2j+1} - 0) - p(\tilde{\tau}_{2(j+1)}) \leq \frac{l}{k_2} (\tilde{\tau}_{2(j+1)} - \tilde{\tau}_{2j+1}) p(\tilde{\tau}_{2(j+1)}) \inf_{(\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})} b_1(t).$$

Здесь $l = \text{const} \in (0, 1)$, $j = 0, 1, \dots$.

Условие 2) в предположении 5 накладывает ограничение на допустимую скорость убывания параметра $p(t)$ при $\sigma(t) = 1$, а также на допустимое уменьшение значения $p(t)$ с момента отключения режима $\sigma(t) = 1$ до его очередного включения.

Построим непрерывную функцию $\tilde{p}(t)$, такую что $\tilde{p}(t) = p(t)$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $j = 0, 1, \dots$. На интервалах $[\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots$, функцию $\tilde{p}(t)$ определим как линейную (т.е. непрерывные куски функции $p(t)$, соответствующие режиму $\sigma(t) = 1$, «склеиваем» с помощью отрезков).

Сконструируем непрерывную функцию Ляпунова

$$(16) \quad \tilde{V}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{\tilde{p}(t)} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Pi_1(\mathbf{q}) + r \tilde{\gamma}(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

где r – положительная постоянная, $\tilde{\gamma}(t)$ – некоторая непрерывная кусочно-дифференцируемая положительная при $t \geq 0$ функция.

На интервалах $[\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $j = 0, 1, \dots$, построим функцию $\gamma(t)$, как и в предыдущем разделе статьи, например, в виде констант, удовлетворяющих оценке (10). Доопределим найденную функцию $\gamma(t)$ до функции $\tilde{\gamma}(t)$ путем непрерывной «склейки» построенных кусков так, чтобы выполнялось условие

$$0 \leq \tilde{\gamma}(t) \leq N \min \left\{ 1/\sqrt{\tilde{p}(t)}; b_1(t)/\tilde{p}(t) \right\} \quad \text{при } t \geq 0.$$

На интервалах $[\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $j = 0, 1, \dots$, данное условие следует из (10), поэтому достаточно «склейку» $\tilde{\gamma}(t)$ осуществить так, чтобы указанное условие сохранилось и на интервалах $[\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots$. Учитывая непрерывность функции $\tilde{p}(t)$ и кусочную непрерывность функции $b_1(t)$, это, очевидно, можно сделать, если на выбор $\gamma(t)$ наложить дополнительные требования:

$$\gamma(\tilde{\tau}_{2j+1} - 0) \leq N \frac{b_1(\tilde{\tau}_{2j+1})}{p(\tilde{\tau}_{2j+1} - 0)}, \quad \gamma(\tilde{\tau}_{2(j+1)}) \leq N \frac{b_1(\tilde{\tau}_{2(j+1)} - 0)}{p(\tilde{\tau}_{2(j+1)})}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Тогда, применяя лемму 1, как и ранее, придем к оценкам:

$$(17) \quad \tilde{a}_1 \left(\frac{k_1}{\tilde{p}(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + c_{11} \|\mathbf{q}\|^{\mu+1} \right) \leq \tilde{V}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \tilde{a}_2 \left(\frac{k_2}{\tilde{p}(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + c_{21} \|\mathbf{q}\|^{\mu+1} \right),$$

справедливым при $t \geq 0$, $\|(\mathbf{q}^T, \tilde{\mathbf{z}}^T)^T\| < \tilde{H}_1$, и оценкам:

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{V}}|_{(1), (\sigma=1)} &\leq -\tilde{a}_3 \left(\frac{b_1(t)}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{11} \|\mathbf{q}\|^{2\mu} \right) \leq \\ &\leq -\tilde{a}_4 \lambda(t) \tilde{V}^{1+\xi}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \end{aligned}$$

справедливым при $t \in (\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $j = 0, 1, \dots$, $\|(\mathbf{q}^T, \tilde{\mathbf{z}}^T)^T\| < \tilde{H}_1$. Здесь $\tilde{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{q}}/\sqrt{\tilde{p}(t)}$, $\tilde{H}_1$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_3$, $\tilde{a}_4$ – некоторые положительные постоянные, $\lambda(t) = \min\{b_1(t); \gamma(t)p(t)\}$, $\xi = (\mu-1)/(\mu+1)$.

Продифференцируем теперь функцию Ляпунова (16) в силу системы (1) на интервалах $(\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots$. Получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}|_{(1), (\sigma \neq 1)} &= -\frac{1}{\tilde{p}(t)} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(t) \dot{\mathbf{q}} - r\tilde{\gamma}(t)p(t)(\mu+1) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \Pi_\sigma(\mathbf{q}) - \\ &\quad - r\tilde{\gamma}(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q}^T \mathbf{B}(t) \dot{\mathbf{q}} + r\tilde{\gamma}(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \\ &\quad + r\tilde{\gamma}(t) \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q} \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\tilde{p}'(t)}{\tilde{p}^2(t)} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \\ &\quad + r\tilde{\gamma}'(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{p(t)}{\tilde{p}(t)} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \Pi_\sigma(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \Pi_1(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Тогда при $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in R^n$, $t \in (\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots$, с учетом предположения 5 приходим к оценке:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}|_{(1), (\sigma \neq 1)} &\leq -(1-l) \frac{b_1(t)}{\tilde{p}(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + r\tilde{\gamma}(t)|p(t)|(\mu+1)c_{2\sigma} \|\mathbf{q}\|^{2\mu} + \\ &\quad + r\tilde{\gamma}(t)k_4 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{q}\|^\mu + r\tilde{\gamma}(t)k_3 a \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{q}\|^{\mu-1} + \\ &\quad + \left(r\tilde{\gamma}(t)b_2(t) + r|\tilde{\gamma}'(t)|k_3 + \frac{|p(t)|}{\tilde{p}(t)} c_{3\sigma} + c_{31} \right) \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{q}\|^\mu. \end{aligned}$$

Воспользуемся далее неравенством Йенсена

$$z_1^u z_2^v = \left(\frac{z_1}{\theta} \right)^u \left(\theta^{u/v} z_2 \right)^v \leq u \frac{z_1}{\theta} + v \theta^{u/v} z_2,$$

верным для любых положительных значений z_1, z_2, u, v, θ , если только $u + v = 1$.

Выберем некоторое число $L > 0$ так, чтобы выполнялось условие:

$$-(1-l) + 1/(2L) < 0.$$

Тогда найдутся такие $\tilde{H}_2 > 0$ и $\tilde{a}_5 > 0$, что при $t \in (\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots$, $\|(\mathbf{q}^T, \tilde{\mathbf{z}}^T)^T\| < \tilde{H}_2$ будут иметь место оценки

$$(19) \quad \dot{V}|_{(1), (\sigma \neq 1)} \leq \tilde{\lambda}(t) \|\mathbf{q}\|^{2\mu} \leq \tilde{a}_5 \tilde{\lambda}(t) \tilde{V}^{1+\xi}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Здесь

$$\tilde{\lambda}(t) = r\tilde{\gamma}(t)|p(t)|(\mu+1)c_{2\sigma} + \frac{L}{2} \left(r\tilde{\gamma}(t)b_2(t) + r|\tilde{\gamma}'(t)|k_3 + \frac{|p(t)|}{\tilde{p}(t)}c_{3\sigma} + c_{31} \right)^2 \frac{\tilde{p}(t)}{b_1(t)}.$$

Построим функцию $\Lambda(t)$ по следующему правилу: $\Lambda(t) = \tilde{a}_4\tilde{\lambda}(t)$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $\Lambda(t) = -\tilde{a}_5\tilde{\lambda}(t)$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots$. Положим $\Psi(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau$ при $t \geq t_0 \geq 0$. Тогда приходим к теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 4, 5 и построены оценки (17)–(19). Тогда если $\Psi(0, t) \rightarrow +\infty$ и $\tilde{p}^{-\xi}(t)\Psi(0, t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Замечание 3. Все константы, присутствующие в (17)–(19), могут быть несложным образом оценены и выбраны. Таким образом, проверка условий асимптотической устойчивости, определяемых теоремой 2, сводится к анализу поведения заданных функций $p(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, а также построенных вспомогательных функций $\tilde{p}(t)$, $\gamma(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$. Как и в предыдущем разделе статьи (см. замечание 2), для облегчения вычислений все эти функции можно грублять константами на каждом из интервалов $[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда придем к более грубому, но более простому дискретному варианту условий асимптотической устойчивости.

Пример 2. Пусть выполнены предположения 1, 4, 5, причем существуют такие положительные постоянные L_1 , L_2 , L_3 , L_4 и $\hat{t}$, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} L_1 t \leq p(t) \leq L_2 t \quad \text{при} \quad t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1}), \quad \tilde{\tau}_{2j} \geq \hat{t}, \\ L_3 \sqrt{t} \leq b_1(t) \leq b_2(t) \leq L_4 \sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t}. \end{aligned}$$

Тогда получим $L_1 t \leq \tilde{p}(t) \leq L_2 t$ при $t \geq \hat{t}$. Выберем $\gamma(t) = N/\sqrt{\tilde{\tau}_{2j+1}}$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$ ($N = \text{const} > 0$), $j = 0, 1, \dots$. В рассматриваемом случае для определения непрерывной функции $\tilde{\gamma}(t)$ достаточно построенные куски $\gamma(t)$ «склеить» отрезками на интервалах $[\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots$. Тогда придем к оценкам (17)–(19). Константы в этих оценках могут быть найдены для конкретно заданной системы (1) с помощью как аналитических, так и численных методов.

Рассмотрим теперь возмущенную систему (12).

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда если справедливы неравенства (14) и имеют место предельные соотношения:

$$\delta_1(t) = \frac{h(t)}{\tilde{p}^{1/2}(t) b_1(t)} \Psi^{-(\omega-\mu)/(\mu-1)}(0, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

$$\tilde{\delta}_1(t) = \Psi^{-1}(0, t) \int_{\hat{T}}^t \delta_1(\tau) b_1(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

$$\delta_2(t) = \frac{g(t) \tilde{p}^{(\eta-1)/2}(t)}{b_1(t)} \Psi^{-(\eta-1)/2\xi}(0, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

$$\tilde{\delta}_2(t) = \Psi^{-1}(0, t) \int_{\hat{T}}^t \delta_2(\tau) b_1(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty$$

(здесь $\hat{T}$ – некоторая положительная константа, такая что $\Psi(0, t) > 0$ при $t \geq \hat{T}$), то положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (12) асимптотически устойчиво.

Доказательство следствия 3 приведено в Приложении.

5. Заключение

В работе были рассмотрены различные подходы к оценке влияния переключений, вызванных как структурными изменениями в механической системе, так и разрывами нестационарных коэффициентов, на устойчивость заданного положения равновесия. Поскольку выбор подходящей функции Ляпунова, как правило, опирается на структуру и коэффициенты системы, то это приводит к построению, вообще говоря, разрывной функции Ляпунова. Учет перескоков, совершаемых функцией Ляпунова в точках разрыва, может наложить слишком жесткие ограничения на допустимые законы переключений. Поэтому отдельный интерес представляет возможность построения непрерывной функции Ляпунова. Кроме того, в настоящей работе было исследовано влияние на устойчивость возможных нестационарных возмущений, действующих на систему. Показано, что известные методы, применяемые ранее к гладким системам, могут быть адаптированы к разрывным системам. Отметим, что условия на возмущения зависят от полученных ограничений на закон переключений в исходной механической системе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство следствия 2. Продифференцируем функцию Ляпунова (2) в силу системы (12) при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$. Получаем, что если $\|(\mathbf{q}^T, \mathbf{z}^T)^T\| < H$ и при этом $\|(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T\| < \Delta$, то тогда

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(12)} \leq & -a_3 \left(\frac{b_1(t)}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{1\sigma} \|\mathbf{q}\|^{2\mu} \right) + \\ & + \left(\frac{k_3}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}\| + r\gamma(t) \|\mathbf{q}\|^\mu \right) (h(t) \|\mathbf{q}\|^\omega + g(t) \|\dot{\mathbf{q}}\|^\eta). \end{aligned}$$

Покажем, что постоянные $D_0 > 0$, $D > 0$ и $\hat{t} \geq 0$ можно выбрать так, что если

$$(П.1) \quad t_0 \geq \hat{t}, \quad \frac{1}{p(t_0)} \|\dot{\mathbf{q}}(t_0)\|^2 + \|\mathbf{q}(t_0)\|^{\mu+1} < D_0 \psi^{-1/\xi}(0, t_0),$$

то тогда

$$(П.2) \quad \frac{1}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + \|\mathbf{q}(t)\|^{\mu+1} < D \psi^{-1/\xi}(0, t) \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t}.$$

Здесь $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ – решение системы (12). Действительно, зададим указанные постоянные согласно условиям

$$(П.3) \quad D_0 \leq D, \quad -(a_2 \bar{c} D_0)^{-\xi} + (a_4 \xi)/2 < 0, \quad -(a_1 \hat{c} D)^{-\xi} + (a_4 \xi)/2 > 0,$$

$$(П.4) \quad D^{2/(\mu+1)} \psi^{-2/(\mu-1)}(0, t) + D p(t) \psi^{-1/\xi}(0, t) < \Delta^2 \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t},$$

$$(П.5) \quad D^{2/(\mu+1)} \psi^{-2/(\mu-1)}(0, t) + D \psi^{-1/\xi}(0, t) < H^2 \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t},$$

$$(П.6) \quad \max \{\tilde{\chi}_1(t); \tilde{\chi}_2(t)\} < d \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t},$$

где $\bar{c} = \max\{k_2; c_{21}; \dots; c_{2N}\}$, $\hat{c} = \min\{k_1; c_{11}; \dots; c_{1N}\}$, d – некоторая положительная постоянная. Условия (П.3)–(П.6) совместны. В самом деле, сначала выбираем константы D_0 и D исходя из соотношений (П.3), а затем выбираем константу $\hat{t}$ исходя из соотношений (П.4)–(П.6).

Пусть начальные данные решения $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ удовлетворяют неравенствам (П.1). Предположим, что существует такое $t_1 > t_0$, что при $t = t_1$ неравенство (П.2) обратится в равенство. Применяя лемму 1, получаем, что если константа d в условии (П.6) выбрана достаточно маленькой, то тогда на промежутке $[t_0, t_1]$ (за исключением точек разрыва) будут справедливы оценки

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(12)} &\leq -\frac{a_3}{2} \left(\frac{b_1(t)}{p(t)} \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{1\sigma} \|\mathbf{q}(t)\|^{2\mu} \right) \leq \\ &\leq -\frac{a_4}{2} \lambda(t) V^{1+\xi}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)). \end{aligned}$$

Условия (П.4) и (П.5) гарантируют, что на промежутке $[t_0, t_1]$ рассматриваемое решение остается в областях $\|(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T\| < \Delta$ и $\|(\mathbf{q}^T, \mathbf{z}^T)^T\| < H$.

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} V^{-\xi}(t_1, \mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1)) &\geq V^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) + \frac{a_4 \xi}{2} \psi(t_0, t_1) \quad \text{при} \quad k = 0, \\ V^{-\xi}(t_1, \mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1)) &\geq (\varkappa_m \dots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} V^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) + \\ &\quad + \frac{a_4 \xi}{2} \psi(t_0, t_1) \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь значения $m = m(t_0)$ и $k = k(t_0, t_1)$ определяются так же, как и ранее при исследовании невозмущенной системы.

Заметим, что $\psi(t_0, t_1) = \psi(0, t_1) - (\varkappa_m \dots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} \psi(0, t_0)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \psi(0, t_1) \left(-(a_1 \hat{c} D)^{-\xi} + (a_4 \xi)/2 \right) \leq \\ & \leq (\varkappa_m \dots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} \psi(0, t_0) \left(-(a_2 \bar{c} D_0)^{-\xi} + (a_4 \xi)/2 \right). \end{aligned}$$

Левая часть полученного неравенства положительна, в то время как правая – отрицательна (см. условия (П.3)). Полученное противоречие показывает, что неравенство (П.2) должно сохраняться при всех $t \geq t_0$. Используя доказанное свойство решений системы (12), а также их непрерывную зависимость от начальных данных, приходим к требуемому. Следствие доказано.

Доказательство следствия 3. Как и при доказательстве следствия 2, покажем, что постоянные $D_0 > 0$, $D > 0$ и $\hat{t} \geq 0$ можно выбрать так, что если начальные данные решения $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ системы (12) удовлетворяют условиям

$$(П.7) \quad t_0 \geq \hat{t}, \quad \frac{1}{\tilde{p}(t_0)} \|\dot{\mathbf{q}}(t_0)\|^2 + \|\mathbf{q}(t_0)\|^{\mu+1} < D_0 \Psi^{-1/\xi}(0, t_0),$$

то тогда получим

$$(П.8) \quad \frac{1}{\tilde{p}(t)} \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + \|\mathbf{q}(t)\|^{\mu+1} < D \Psi^{-1/\xi}(0, t) \quad \text{при} \quad t \geq t_0.$$

В самом деле, зададим указанные постоянные согласно условиям

$$(П.9) \quad D_0 \leq D, \quad -(\tilde{a}_2 \bar{c} D_0)^{-\xi} + \xi < 0, \quad -(\tilde{a}_1 \hat{c} D)^{-\xi} + \xi > 0,$$

$$(П.10) \quad D^{2/(\mu+1)} \Psi^{-2/(\mu-1)}(0, t) + D \tilde{p}(t) \Psi^{-1/\xi}(0, t) < \Delta^2 \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t} \geq \hat{T},$$

$$(П.11) \quad D^{2/(\mu+1)} \Psi^{-2/(\mu-1)}(0, t) + D \Psi^{-1/\xi}(0, t) < H^2 \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t} \geq \hat{T},$$

$$(П.12) \quad \max \{ \delta_1(t); \delta_2(t) \} < d_1 \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t} \geq \hat{T},$$

$$(П.13) \quad \max \{ \tilde{\delta}_1(t); \tilde{\delta}_2(t) \} < d_2 \quad \text{при} \quad t \geq \hat{t} \geq \hat{T},$$

где $\bar{c} = \max\{k_2; c_{21}\}$, $\hat{c} = \min\{k_1; c_{11}\}$, $H = \min\{\tilde{H}_1; \tilde{H}_2\}$, d_1 и d_2 – некоторые положительные постоянные.

Пусть для решения $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ системы (12) справедливы неравенства (П.7). Предположим, что существует такое $t_1 > t_0$, что при $t = t_1$ неравенство (П.8) обратится в равенство. На промежутке $[t_0, t_1]$ рассматриваемое решение остается в областях $\|(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T\| < \Delta$ и $\|(\mathbf{q}^T, \tilde{\mathbf{z}}^T)^T\| < H$ (см. условия (П.10) и (П.11)). Если константа d_1 в условии (П.12) выбрана достаточно малой, то тогда, применяя лемму 1 и неравенство Йенсена, придем на промежутке $[t_0, t_1]$ (за исключением точек переключения) к оценке

$$\dot{\tilde{V}}|_{(12)} \leq \left(-\Lambda(t) + A b_1(t) (\delta_1(t) + \delta_2(t)) \right) \tilde{V}^{1+\xi}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)).$$

Здесь A – некоторая положительная постоянная (зависящая от выбора D). Проинтегрируем данное дифференциальное неравенство на промежутке $[t_0, t_1]$. Получим

$$\tilde{V}^{-\xi}(t_1, \mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1)) \geq \tilde{V}^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) + \xi \Psi(t_0, t_1) - A \xi \int_{t_0}^{t_1} b_1(\tau) (\delta_1(\tau) + \delta_2(\tau)) d\tau.$$

Отсюда имеем

$$(П.14) \quad \Psi(0, t_1) \left(-(\tilde{a}_1 \hat{c} D)^{-\xi} + \xi - 2 A \xi d_2 \right) \leq \Psi(0, t_0) \left(-(\tilde{a}_2 \bar{c} D_0)^{-\xi} + \xi \right).$$

Если константа d_2 в условии (П.13) выбрана достаточно малой, то (см. условия (П.9)) левая часть неравенства (П.14) будет положительной, в то время как правая – отрицательной. Установленное противоречие показывает, что оценка (П.8) должна быть справедливой при всех $t \geq t_0$. Учитывая непрерывную зависимость решений системы (12) от начальных данных, получаем требуемое. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов В.И.* Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1957.
2. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhauser, 2003.
3. *Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., et al.* The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // 2020 European Control Conference Proceedings. 2020. P. 769–774.
4. *Leonov G., Kuznetsov N., Kiseleva M., Mokaev R.* Global problems for differential inclusions. Kalman and Vyshnegradskii problems and Chua circuits // Differential Equations. 2017. V. 53. No. 13. P. 1671–1702.
5. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A.N.* Disturbance attention properties of time-controlled switched systems // J. Franklin Institute. 2001. V. 338. No. 7. P. 765–779.
6. *Lu J., She Z., Feng W., Ge S.S.* Stabilisability of time-varying switched systems based on piecewise continuous scalar functions // IEEE Transact. Autom. Control. 2019. V. 64. No. 6. P. 2637–2644.
7. *Wang R., Xing J., Xiang Z., Yang Q.* Finite-time stability and asynchronously switching control for a class of time-varying switched nonlinear systems // Transact. Instit. Measurement and Control. 2020. V. 42. No. 6. P. 1215–1224.
8. *Gao X., Liberzon D., Liu J., Basar T.* Unified stability criteria for slowly time-varying and switched linear systems // Automatica. 2018. V. 96. P. 110–120.
9. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости гибридных систем // АиТ. 2017. № 12. С. 3–25.
10. *Liu X., Liu D.* Links between different stabilities of switched homogeneous systems with delays and uncertainties // Int. J. Robust Nonl. Control. 2016. V. 26. No. 1. P. 174–184.

11. *Yang H., Zhao D., Jiang B., Ding S.* On robust stability of switched homogeneous systems // IET Control Theor. Appl. 2021. V. 15. No. 5. P. 758–770.
12. *Пестерев А.В.* Глобальная устойчивость аффинной системы второго порядка с переключениями // АиТ. 2023. № 9. С. 95–105.
13. *Козлов В.В.* Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 12–19.
14. *Андреев А.С.* Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 388–396.
15. *Aleksandrov A.Yu., Lakrisenko P.A., Platonov A.V.* Stability analysis of nonlinear mechanical systems with switched force fields // Proc. of 21th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'13). June 25–28, 2013. Platania-Chania, Crite – Greece. P. 628–633.
16. *Платонов А.В.* Исследование устойчивости решений уравнения Лъенара с разрывными коэффициентами // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 226–240.
17. *Платонов А.В.* Об асимптотической устойчивости нелинейных нестационарных систем с переключениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 6. С. 20–32.
18. *Александров А.Ю.* Об устойчивости решений нелинейных систем с неограниченными возмущениями // Мат. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 3–8.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 14.04.2024

После доработки 04.12.2024

Принята к публикации 23.12.2024

© 2025 г. Я.Г. САПУНКОВ, канд. физ.-мат. наук (iptmuran@san.ru),
А.В. МОЛОДЕНКОВ, д-р техн. наук (molalexei@yandex.ru)
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов)

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ПОЛУЧЕННОЕ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ПУАНСО

Рассматривается кинематическая задача поиска оптимального по быстродействию программного углового ускорения космического аппарата как твердого тела при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата. Соответственно классической концепции Пуансо об угловом движении твердого тела как обобщенном коническом движении и на основе принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи, которое доведено до алгоритма. Приводятся подтверждающие аналитические и числовые примеры, показывающие в зависимости от граничных условий либо близость квазиоптимального решения к оптимальному решению, либо их полное совпадение.

Ключевые слова: оптимальное и квазиоптимальное управление, космический аппарат, твердое тело, угловое ускорение, концепция Пуансо, аналитическое решение, алгоритм.

DOI: 10.31857/S0005231025030035, EDN: IEOIHR

1. Введение

При решении многих задач наведения и управления космическими аппаратами требуется знать оптимальное в том или ином смысле программное угловое ускорение космического аппарата (КА) при произвольных заданных граничных условиях [1–5]. Как правило, в литературе такое ускорение ищется либо численно, либо строится аналитически (например, [5]) на основе полиномов (сплайнов) посредством представления кватерниона ориентации КА полиномами и выражения вектора угловой скорости через этот кватернион. Однако никаких гарантий (доказанных теорем или соображений из теоретической механики), что на всей совокупности угловых движений КА, при любых граничных условиях эти аналитические решения будут достаточно хорошо аппроксимировать оптимальную траекторию углового движения КА, не приводится.

В статье исследуется кинематическая задача поиска оптимального по быстродействию программного углового ускорения КА при произвольных

граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА. Получить оптимальное аналитическое решение этой задачи при произвольных граничных условиях затруднительно, так как точное решение задачи нахождения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости (задачи Дарбу) в общем случае не известно [6, 7]. Соответственно классической концепции Пуансо об угловом движении твердого тела как обобщенном коническом движении задача поиска оптимального углового ускорения КА переперформулирована в этом классе движений. Траектория КА задана явными выражениями, которые содержат произвольные кватернионные и скалярные постоянные и две произвольные скалярные функции, которые являются параметрами обобщенного конического движения. Применительно к этим параметрам и их производным ставится и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих параметров. При этом общность исходной задачи практически не нарушается, так как известное точное решение классической задачи поиска оптимального углового ускорения в случае плоского поворота КА [4] или в новом частном случае регулярной прецессии, который приводится в статье, и аналогичные решения задачи в рамках рассматриваемой концепции полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах решения исходной задачи и предлагаемого аналитического решения относительная погрешность между значениями функционала оптимизации, который является определяющей характеристикой задачи, составляет не более одного процента, включая повороты КА на большие углы. Поэтому предлагаемое аналитическое решение задачи может трактоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче поиска оптимального углового ускорения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, посредством дифференцирования выражения вектора угловой скорости получена явная формула углового ускорения КА; записан аналитический алгоритм решения задачи, который может быть использован на борту КА.

Предлагаемый в статье аналитический метод решения ранее был успешно применен в динамических задачах оптимальных разворотов КА различных конфигураций с различными критериями оптимизации [8, 9].

2. Постановка классической задачи

Угловое движение КА как твердого тела вокруг центра масс описывается системой дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме:

$$(2.1) \quad 2 \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix},$$

$$(2.2) \quad [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T,$$

которой эквивалентна краткая запись [4]:

$$(2.3) \quad 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega},$$

$$(2.4) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]^T$ или $\lambda_0(t) + \lambda_1(t)\mathbf{i}_1 + \lambda_2(t)\mathbf{i}_2 + \lambda_3(t)\mathbf{i}_3$ – нормированный кватернион, описывающий угловое положение КА ($||\mathbf{\Lambda}|| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$); $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]^T$ или $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ – вектор его угловой скорости, который может рассматриваться как кватернион с нулевой скалярной частью $\boldsymbol{\omega} = [0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]^T$; $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T$ – вектор углового ускорения КА; мнимые единицы Гамильтона $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ соответствуют ортам трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, символ « $\circ$ » означает произведение кватернионов; « T » – знак транспонирования векторов. Соответственно, фазовые координаты $\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\omega}$ положены непрерывными функциями, а угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ (рассматриваемое как управление) – кусочно-непрерывной функцией [10].

Вектор углового ускорения ограничен по модулю:

$$(2.5) \quad |\boldsymbol{\varepsilon}| \leq \varepsilon_{\max}.$$

Краевые условия по ориентации и угловой скорости КА произвольны и заданы:

$$(2.6) \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T,$$

$$(2.7) \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T.$$

Необходимо найти оптимальное управление $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)$, доставляющее минимум функционалу

$$(2.8) \quad J = T.$$

Постановка задачи (2.1)–(2.8) является кинематической, так как не учитывает динамическую конфигурацию КА. Следует отметить, что оптимальное угловое ускорение КА можно искать как производную от оптимальной угловой скорости КА и в полной динамической задаче оптимального разворота КА, где вместо векторного уравнения (2.4) используются динамические уравнения Эйлера, а функцией управления является приложенный к КА вектор внешнего управляющего момента [8, 9].

3. Безразмерные переменные

Переформулируем задачу, заменяя исходные размерные переменные на безразмерные:

$$t^{\text{безраз}} = t\varepsilon_{\max}^{1/2}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\omega}\varepsilon_{\max}^{1/2}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\varepsilon}\varepsilon_{\max}^{1/2}.$$

при этом все выражения, кроме ограничения на модуль вектора углового ускорения

$$(3.1) \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

не изменятся. Ниже будем решать задачу (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8), (3.1) в безразмерных переменных, где верхние индексы в постановке задачи убраны.

4. Применение принципа максимума

Применяя принцип максимума Понтрягина [4, 10], введем сопряженные переменные $\Psi(t)$, $\varphi(t)$ – кватернион и вектор соответственно, сопряженные к фазовым переменным. Функция Гамильтона–Понтрягина есть

$$(4.1) \quad H = (\Psi, \Lambda \circ \omega) / 2 + (\varphi, \varepsilon),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов.

Сопряженная система уравнений имеет вид

$$(4.2) \quad \begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega, \\ \dot{\varphi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) / 2, \end{cases}$$

где $\langle \text{vect}(\cdot) \rangle$ – векторная часть кватерниона, а символ $\tilde{\cdot}$ означает сопряжение кватерниона. Линейные дифференциальные системы уравнений для переменных Ψ и Λ совпадают, следовательно, их решения различаются на кватернионную константу $\mathbf{C}$:

$$(4.3) \quad \Psi = \mathbf{C} \circ \Lambda.$$

Условие трансверсальности [10] в момент времени $t = T$:

$$(4.4) \quad \text{scal}(\Psi(T) \circ \tilde{\Lambda}(T)) = 0,$$

где $\langle \text{scal}(\cdot) \rangle$ – скалярная часть кватерниона. Выражение $\text{scal}(\Psi \circ \tilde{\Lambda})$ является первым интегралом для системы уравнений (4.2), отсюда и соответственно (4.4)

$$(4.5) \quad \text{scal}(\Psi(t) \circ \tilde{\Lambda}(t)) \equiv 0.$$

Из (4.3), (4.5) $\text{scal } \mathbf{C} = 0$ и $\mathbf{C} = \mathbf{c}_v$, где $\mathbf{c}_v$ – постоянный вектор. При этом равенство (4.3) примет вид

$$(4.6) \quad \Psi = \mathbf{c}_v \circ \Lambda.$$

Если ввести обозначение [4]

$$(4.7) \quad \mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda,$$

система уравнений (4.2) будет выглядеть так:

$$(4.8) \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2. \end{cases}$$

Таким образом, в силу самосопряженности линейной дифференциальной системы уравнений (2.1) ((2.3)) размерность краевой задачи принципа максимума понижается на четыре [4].

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (4.1) на ограниченном и замкнутом множестве (3.1) дает следующую структуру оптимального управления:

$$(4.9) \quad \epsilon^{\text{опт}} = \varphi/|\varphi|.$$

Следует отметить, что случай особого управления $\varphi \equiv 0$ нарушает требование условия принципа максимума о существовании нетривиальных сопряженных переменных φ , Ψ [10], так как из формул (4.8) следует, что $\mathbf{p} \equiv 0$, $\mathbf{c}_v \equiv 0$ и из (4.6) – $\Psi \equiv 0$.

Соответственно (2.3), (2.4), (4.8), (4.9) получим:

$$(4.10) \quad \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}],$$

$$(4.11) \quad \mathbf{p} = -2|\varphi| \frac{d^2 \boldsymbol{\omega}}{dt^2} - 2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \frac{d|\varphi|}{dt},$$

где « $[\cdot, \cdot]$ » обозначает векторное произведение векторов.

Подставим выражение (4.11) в уравнение (4.10) и получим

$$(4.12) \quad \frac{d^3 \boldsymbol{\omega}}{dt^3} = \left[\frac{d^2 \boldsymbol{\omega}}{dt^2}, \boldsymbol{\omega} \right] + \frac{1}{|\varphi|} \left(\frac{d|\varphi|}{dt} \left(\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \boldsymbol{\omega} \right] - 2 \frac{d^2 \boldsymbol{\omega}}{dt^2} \right) - \frac{d^2 |\varphi|}{dt^2} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right).$$

Оптимальная угловая скорость КА на всем интервале времени движения удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению третьего порядка (4.12) (ранее подобный факт был установлен для особых режимов управления в задаче оптимальной переориентации сферически-симметричного КА [11]). На основе (4.7) функция Гамильтона–Понтрягина (4.1) примет вид:

$$(4.13) \quad H = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})/2 + (\varphi, \epsilon).$$

5. Точное решение задачи поиска оптимального углового ускорения КА в частном случае

Представим новое частное решение задачи поиска оптимального по быстродействию ускорения КА в классе регулярных конических движений, для

этого модуль вектора φ положим постоянным на всем интервале времени движения

$$(5.1) \quad |\varphi| = c.$$

В этом случае сопряженные переменные $\mathbf{p}$, φ и управление ε выражаются через вектор угловой скорости по формулам

$$(5.2) \quad \varphi = c\dot{\omega}, \quad \mathbf{p} = -2c\dot{\omega}, \quad \varepsilon = \dot{\omega},$$

а сам вектор угловой скорости удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(5.3) \quad \ddot{\omega} = [\ddot{\omega}, \omega].$$

Тем самым задача оптимального управления (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8), (3.1) сводится к краевой задаче (2.3), (5.3), (2.6), (2.7). Не нарушая общности, константу c можно положить равной 1.

Оптимальная угловая скорость КА в классе регулярных конических движений имеет вид

$$(5.4) \quad \omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \alpha \sin \Omega t + \mathbf{i}_2 \alpha \cos \Omega t + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K},$$

где $\mathbf{K}$ (кватернион), α , Ω – произвольные постоянные; при этом

$$(5.5) \quad \|\mathbf{K}\| = K_0^2 + K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 1.$$

Кватернион $\mathbf{K}$ отвечает за поворот вектора, стоящего в круглой скобке в формуле (5.4), вокруг некоторой постоянной оси, проходящей через неподвижную точку КА. Покажем, что угловая скорость (5.4) удовлетворяет уравнению (5.3). Для этого последовательно дифференцируем формулу (5.4) три раза по переменной t : $\dot{\omega} = \alpha \Omega \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \Omega t - \mathbf{i}_2 \sin \Omega t) \circ \mathbf{K}$, $\ddot{\omega} = -\alpha \Omega^2 \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \sin \Omega t + \mathbf{i}_2 \cos \Omega t) \circ \mathbf{K}$, $\ddot{\omega} = \alpha \Omega^3 \tilde{\mathbf{K}} \circ (-\mathbf{i}_1 \cos \Omega t + \mathbf{i}_2 \sin \Omega t) \circ \mathbf{K}$. Подставляя (5.4) и полученные выражения производных в (5.3), можно убедиться в выполнении равенства, при этом $\ddot{\omega} = [\ddot{\omega}, \omega] = (\ddot{\omega} \circ \omega - \omega \circ \ddot{\omega})/2$.

Траектория движения КА при угловой скорости (5.4) из (2.3), (2.6) находится явно и имеет вид регулярной прецессии

$$(5.6) \quad \Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha t/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Omega t/2\} \circ \mathbf{K},$$

где « $\exp\{.\}$ » обозначает экспоненциальную функцию с кватернионным показателем [4].

В выражения (5.4)–(5.6) входят пять произвольных постоянных α , Ω , K_i , $i = 0, 1, 2$ (константа K_3 связана с условием (5.5)). Ограничение на модуль вектора углового ускорения ε (3.1) выполняется при условии

$$(5.7) \quad \alpha^2 \Omega^2 = 1.$$

Удовлетворим краевые условия (2.6), (2.7). Из-за недостаточного количества произвольных констант в (5.4) на величины $|\omega_0|$ и ω_T наложим требования по ходу решения задачи, при этом единичный вектор $\omega_0^e = \omega_0/|\omega_0|$ произволен и задан. В точке $t = 0$ по формуле (5.4):

$$(5.8) \quad \omega_0 = |\omega_0| \omega_0^e = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_2\alpha + \mathbf{i}_3\Omega) \circ \mathbf{K},$$

$$(5.9) \quad \|\omega_0\| = \|\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_2\alpha + \mathbf{i}_3\Omega) \circ \mathbf{K}\| = \|\tilde{\mathbf{K}}\| \|\mathbf{i}_2\alpha + \mathbf{i}_3\Omega\| \|\mathbf{K}\| = \alpha^2 + \Omega^2,$$

на правом конце траектории КА при $t = T$ из (2.6) и (5.6) имеем

$$(5.10) \quad \Lambda_T = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2\alpha T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\Omega T/2\} \circ \mathbf{K},$$

при этом

$$(5.11) \quad \text{scal}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T) = \text{scal}(\exp\{\mathbf{i}_2\alpha T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\Omega T/2\}).$$

По формулам (5.5), (5.7)–(5.10) определим величины T , $|\omega_0|$, α , Ω , $\mathbf{K}$.

Представим (5.8), (5.10) в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_2\alpha + \mathbf{i}_3\Omega) \circ \mathbf{K} - \mathbf{K} \circ \omega_0 &= 0, \\ \exp\{\mathbf{i}_2\alpha/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\Omega/2\} \circ \mathbf{K} - \mathbf{K} \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T &= 0, \end{aligned}$$

или та же запись на основе m- и n- матриц, изоморфных кватернионам [12]:

$$(5.12) \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha & -\Omega \\ 0 & 0 & -\Omega & \alpha \\ \alpha & \Omega & 0 & 0 \\ \Omega & -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{01} & -\omega_{02} & -\omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & \omega_{03} & -\omega_{02} \\ \omega_{02} & -\omega_{03} & 0 & \omega_{01} \\ \omega_{03} & \omega_{02} & -\omega_{01} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.13) \quad \left(\begin{bmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ m_1 & m_0 & -m_3 & m_2 \\ m_2 & m_3 & m_0 & -m_1 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & m_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & n_0 & n_3 & -n_2 \\ n_2 & -n_3 & n_0 & n_1 \\ n_3 & n_2 & -n_1 & n_0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где матрица коэффициентов линейной алгебраической системы (5.13) определяется компонентами кватернионов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$:

$$(5.14) \quad \begin{cases} \mathbf{m} = \exp\{\mathbf{i}_2\alpha/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\Omega/2\}, \\ m_0 = \cos(\alpha/2) \cos(\Omega/2), \quad m_1 = \sin(\alpha/2) \sin(\Omega/2), \\ m_2 = \sin(\alpha/2) \cos(\Omega/2), \quad m_3 = \cos(\alpha/2) \sin(\Omega/2), \end{cases}$$

$$(5.15) \quad \mathbf{n} = \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T,$$

нормы которых равны $\|\mathbf{m}\| = 1$, $\|\mathbf{n}\| = 1$; при этом ранги матриц коэффициентов систем (5.12), (5.13) равны 2. Выбирая в (5.12), (5.13) по два линейно

независимых уравнения, получим однородную систему

$$(5.16) \quad \begin{bmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} - \alpha & \omega_{03} - \Omega \\ -\omega_{01} & 0 & -(\omega_{03} + \Omega) & \omega_{02} + \alpha \\ m_1 - n_1 & 0 & -(m_3 + n_3) & m_2 + n_2 \\ 0 & n_1 - m_1 & n_2 - m_2 & n_3 - m_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для существования нетривиальных решений определитель матрицы коэффициентов системы (5.16) должен быть равен 0. Исходя из этого и учитывая (5.8), (5.9), (5.14), (5.15), получим

$$(5.17) \quad |\omega_0| = (m_2\alpha + m_3\Omega)/(n_1\omega_{01}^e + n_2\omega_{02}^e + n_3\omega_{03}^e).$$

Из (5.7)–(5.9), (5.11), (5.17) получим систему трех уравнений для нахождения α , Ω , T :

$$(5.18) \quad \begin{cases} \alpha^2\Omega^2 - 1 = 0, \\ (\alpha^2 + \Omega^2)(n_1\omega_{01}^e + n_2\omega_{02}^e + n_3\omega_{03}^e)^2 - (m_2\alpha + m_3\Omega)^2 = 0, \\ \text{scal}(\tilde{\mathbf{A}}_0 \circ \mathbf{A}_T) - \cos(\alpha T/2) \cos(\Omega T/2) = 0. \end{cases}$$

Компоненты кватерниона $\mathbf{K}$ определяются по формулам:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} K_3 &= \pm \left[1 + (A_0/D)^2 + (A_1/D)^2 + (A_2/D)^2 \right]^{-1/2}, & K_0 &= A_0 K_3 / D, \\ K_1 &= A_1 K_3 / D, & K_2 &= A_2 K_3 / D, \end{aligned}$$

где

$$(5.20) \quad \begin{cases} A_0 = -(m_2 + n_2)(\omega_{03} + \Omega) + (m_3 + n_3)(\omega_{02} + \alpha), \\ A_1 = (m_1 - n_1)\omega_{01} + (m_3 + n_3)(\Omega - \omega_{03}) + (m_2 + n_2)(\alpha - \omega_{02}), \\ A_2 = (m_1 - n_1)(\omega_{02} + \alpha) + (m_2 + n_2)\omega_{01}, \\ D = (m_1 - n_1)(\omega_{03} + \Omega) + (m_3 + n_3)\omega_{01}. \end{cases}$$

Краевое условие по угловой скорости КА при $t = T$ должно выглядеть так:

$$(5.21) \quad \omega(T) = \omega_T = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \alpha \sin \Omega T + \mathbf{i}_2 \alpha \cos \Omega T + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K}.$$

В итоге, если краевые условия по угловой скорости КА ω удовлетворяют требованиям (5.17), (5.21), траектория углового движения КА находится в классе регулярных конических движений и определяется явными выражениями (5.4), (5.6) ($\omega(t) \forall t \in [0, T]$) принадлежит конической поверхности, которая определяется в пространстве произвольными заданными граничными условиями по положению $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_T$ и произвольным заданным направлением вектора своего начального значения ω_0^e).

Оптимальное угловое ускорение из (2.4), (5.4) будет

$$(5.22) \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \alpha \Omega \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \Omega t - \mathbf{i}_2 \sin \Omega t) \circ \mathbf{K},$$

$$(5.23) \quad |\varepsilon|^2 = \alpha^2 \Omega^2 = 1,$$

тем самым ограничение на модуль вектора управления (3.1) выполнено.

Сопряженные переменные φ и $\mathbf{p}$ находятся из выражений (5.2). Задача при введенных ограничениях полностью решена.

Запишем алгоритм решения задачи поиска оптимального углового ускорения КА в классе регулярных конических движений:

1) с использованием известных величин $\mathbf{\Lambda}_0$, $\mathbf{\Lambda}_T$ из (2.6), $\omega_0^e = \omega_0/|\omega_0|$ из (2.7), (5.17), (5.18) и с учетом (5.14), (5.15) находятся неизвестные α , Ω , T , $|\omega_0|$;

2) по формулам (5.19), (5.20) и $\mathbf{\Lambda}_0$, $\mathbf{\Lambda}_T$, α , Ω , T , $|\omega_0|$ находится кватернион $\mathbf{K}$;

3) по формулам $\omega_0^{\text{выч}} = |\omega_0| \omega_0^e$, $\omega_T^{\text{выч}} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \alpha \sin \Omega T + \mathbf{i}_2 \alpha \cos \Omega T + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K}$ определяются граничные векторы $\omega_0^{\text{выч}}$, $\omega_T^{\text{выч}}$;

4) вычисленные $\omega_0^{\text{выч}}$, $\omega_T^{\text{выч}}$ сравниваются с заданными граничными условиями (2.6).

5) если в п. 4 выполняется равенство, то оптимальное решение задачи находится в классе регулярных конических движений; угловая скорость КА, его траектория, вектор углового ускорения и время быстрогодействия T вычисляются по формулам (5.4), (5.6), (5.22) и п. 1;

6) сопряженные переменные φ и $\mathbf{p}$ вычисляются по формулам (5.2).

Полученное в классе регулярных конических движений оптимальное решение задачи и известное ранее [4] точное решение в классе плоских эйлеровых разворотов (при условии $\omega_0, \omega_T \parallel \text{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 \circ \mathbf{\Lambda}_T)$) для частных случаев граничных условий по угловой скорости КА будут использованы как аналитические подтверждения при построении квазиоптимального решения задачи поиска углового ускорения КА в классе обобщенных конических движений. Также приведем наводящие соображения, которые получены на основе численного решения задачи поиска оптимального углового ускорения КА при произвольных граничных условиях.

6. Обоснование предлагаемого подхода на основе числовых решений задачи

Численно решается краевая задача принципа максимума, полученная в разделе 3 статьи для исходной кинематической задачи поиска оптимального ускорения КА (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8), (3.1):

$$(6.1) \quad \begin{cases} 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \omega, \\ \dot{\omega} = \varepsilon, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2, \\ \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{c}_v = \text{const}, \end{cases}$$

$$(6.2) \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \omega(0) = \omega_0,$$

$$(6.3) \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T, \quad \omega(T) = \omega_T,$$

$$(6.4) \quad \varepsilon^{\text{опт}} = \varphi/|\varphi|,$$

$$(6.5) \quad H^{\text{опт}}(T) = (\mathbf{p}, \omega)/2 + (\varphi, \varepsilon)|_{t=T} = 1,$$

откуда необходимо найти $\varepsilon^{\text{опт}}$, $T^{\text{опт}}$, $\mathbf{\Lambda}^{\text{опт}}$, $\omega^{\text{опт}}$, $\mathbf{c}_v$.

Условия в конечный момент времени (6.3) целесообразно записать в фазовом пространстве $\mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{\omega}$ размерности 7 [8, 9, 11]:

$$(6.6) \quad \text{vect } (\mathbf{\Lambda}(T) \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_T) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T.$$

Метод численного решения подобных задач описан в [8, 9, 11]. Также для сравнения приводятся кинематические характеристики по результатам расчетов в полной динамической задаче оптимального разворота КА как твердого тела различных динамических конфигураций [8] в безразмерных переменных при тех же граничных условиях по угловому положению в пространстве и угловой скорости КА:

$$(6.7) \quad \mathbf{\Lambda}_0 = (0,7951, 0,2981, -0,3975, 0,3478), \quad \boldsymbol{\omega}_0 = (0,2739, -0,2388, -0,3),$$

$$(6.8) \quad \mathbf{\Lambda}_T = (0,8443, 0,3984, -0,3260, 0,1485), \quad \boldsymbol{\omega}_T = (0,0, 0,0, -0,59).$$

КА 1. Произвольный КА $I_1 = 0,9869$, $I_2 = 1,1843$, $I_3 = 0,7895$.

КА 2. $I_1 = 0,9506$, $I_2 = 1,3308$, $I_3 = 0,5704$.

КА 3. Международная космическая станция (МКС) в своей ранней версии [13] $I_1 = 4853\,000 \text{ кг} \times \text{м}^2$, $I_2 = 23\,601\,000 \text{ кг} \times \text{м}^2$, $I_3 = 26\,278\,000 \text{ кг} \times \text{м}^2$ или безразмерные величины $I_1 = 0,2358$, $I_2 = 1,1466$, $I_3 = 1,2766$.

КА 4. КА «Спейс Шаттл», у которого характеристики, почти как у динамически-симметричного твердого тела: $I_1 = 3\,400\,648 \text{ кг} \times \text{м}^2$, $I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \times \text{м}^2$ или $I_1 = 0,1967$, $I_2 = 1,2168$, $I_3 \approx I_2$.

В табл. 1 показаны значения кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, полученные при решении задачи поиска оптимального углового ускорения (6.1)–(6.6) и при решении динамической задачи оптимального разворота [8] для указанных четырех КА в промежуточных точках $t_* = 0,4508$, $t_1 = 0,4504$, $t_2 = 0,4502$, $t_3 = 0,4513$, $t_4 = 0,4515$, интервалов времени движения $[0, T^{\text{опт}}]$, $[0, T_k^{\text{опт}}]$, $k = 1, 2, 3, 4$ (время оптимальной переориентации для каждого из случаев $T^{\text{опт}} = 0,8965$, $T_1^{\text{опт}} = 0,8858$,

Таблица 1

КА	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
КА 1 (t_1)	0,80480	0,36812	−0,37874	0,27082	−0,03497	−0,03416	−0,57245
КА 2 (t_2)	0,80582	0,36894	−0,37740	0,26853	−0,03943	−0,03158	−0,60068
КА 3 (t_3)	0,80405	0,36949	−0,38005	0,26935	−0,04073	−0,04253	−0,58311
КА 4 (t_4)	0,80311	0,37231	−0,37955	0,27171	−0,03412	−0,03576	−0,55873
Значения величин в задаче (6.1)–(6.6) (t_*)	0,80437	0,36758	−0,37955	0,27171	−0,03412	−0,03576	−0,55873
Значения величин в модиф. задаче	0,80452	0,36763	−0,37817	0,27309	−0,03246	−0,03050	−0,55603

Таблица 2

КА	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
КА 3 (t_3^0)	0,82396	0,35523	-0,36235	0,25220	0,02834	-0,05283	-0,61018
КА 4 (t_4^0)	0,82698	0,35296	-0,36222	0,24560	0,02813	-0,04666	-0,61162
Значения величин в задаче (6.1)–(6.6) (t_*^0)	0,83121	0,36278	-0,35560	0,22588	0,02843	-0,04552	-0,60910
Значения величин в модиф. задаче	0,83228	0,36140	-0,35278	0,22855	0,02987	-0,05517	-0,60373

$T_2^{\text{опт}} = 0,8654$, $T_3^{\text{опт}} = 0,8774$, $T_4^{\text{опт}} = 0,8728$). При этом промежуточные точки t_* , t_k настолько близки друг к другу, насколько позволяет программа счета с переменным шагом по времени t , и ориентированы приблизительно на середину наибольшего интервала времени движения $[0, T^{\text{опт}}]$ кинематической задачи (6.1)–(6.6). Также в последней строке табл. 1 для сравнения приводятся данные, полученные при решении модифицированной задачи поиска углового ускорения КА (в точке $t = \tau_* = 0,4491$), о которой пойдет речь в разделах 7–8 статьи.

В табл. 2 приводятся значения фазовых координат КА, полученные при решении тех же задач для КА 3, 4 в случае, когда разворот происходит из положения покоя в положение покоя

$$(6.9) \quad \omega_0 = \omega_T = (0,0, 0,0, 0,0),$$

а начальные и конечные условия по ориентации КА задаются выражениями (6.7), (6.8); оптимальное время переориентации при этом $T^{\text{опт}} = 1,3916$, $T_3^{\text{опт}} = 1,5645$, $T_4^{\text{опт}} = 1,5278$.

Приблизительно близкие друг к другу промежуточные точки t_*^0 :

$$t_*^0 = 0,7809, \quad t_3^0 = 0,7823, \quad t_4^0 = 0,7815.$$

Такие же вычисления проводились и для других граничных условий. Из табл. 1, 2 и других расчетов следует, что в динамической задаче оптимального разворота фазовые координаты КА существенно зависят от его начального и конечного состояний, менее существенно зависят от его конфигурации и достаточно близки к результатам кинематической задачи поиска оптимального углового ускорения КА. Следует отметить, что в задаче оптимального по энергии разворота КА с фиксированным временем [9] указанный эффект более явный, так как отрезок времени движения КА и его средний момент времени одинаковы во всех примерах. Отсюда следует, что кинематическая задача поиска оптимального углового ускорения (6.1)–(6.6), вообще говоря, носит общий характер для КА произвольных конфигураций. При этом выражения для кватерниона ориентации и угловой скорости ки-

нематической задачи можно построить аналитически в явном виде на основе решения модифицированной задачи оптимальной переориентации КА в классе обобщенных конических движений, а управляющее угловое ускорение определить посредством дифференцирования вектора угловой скорости. Изложим это более подробно.

7. Модифицированная задача поиска оптимального углового ускорения КА

Общее решение фундаментальной задачи определения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости (2.1), (2.3), называемой задачей Дарбу, не известно. Поэтому получим решение задачи в классе обобщенных конических движений, для этого определим вектор угловой скорости $\omega(t)$ как

$$(7.1) \quad \omega(t) = \mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t),$$

где функции $f(t)$ и $g(t)$ (параметры обобщенного конического движения) произвольны. В этом случае уравнение (2.3) имеет точное решение [8, 9], удовлетворяющее начальному условию (2.5):

$$(7.2) \quad \Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}.$$

Как видно, выражения (7.1), (7.2) включают в себя выражения для угловой скорости и траектории КА в точных решениях задачи поиска оптимального углового ускорения КА, когда вектор его угловой скорости сохраняет постоянное направление на всем интервале времени движения КА [4] или совершает регулярную прецессию (раздел 5 статьи). Следует отметить, что с помощью взаимно однозначных замен переменных (описано в [8, 9]) задачу Дарбу в общем случае можно свести к решению уравнения типа (2.3), где угловая скорость как (7.1), но противоположна по направлению

$$\omega^*(t) = -\omega(t)$$

и находится в классе подобных движений (кватернионное дифференциальное уравнение (2.3) с угловой скоростью $\omega^*(t)$ по-прежнему не имеет явного решения). Таким образом, вид вектора угловой скорости типа (7.1) соответствует классической концепции Пуансо об угловом движении твердого тела как обобщенном коническом движении [7].

Вводя в формулы (7.1), (7.2) произвольный постоянный кватернион $\mathbf{K}$, $\|\mathbf{K}\| = 1$, дополнительно обобщим их:

$$(7.3) \quad \omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K},$$

$$(7.4) \quad \Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}.$$

Пусть вторые производные от функций f и g рассматриваются как управления. Вводя обозначения

$$(7.5) \quad \dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1,$$

составим управляемую систему:

$$(7.6) \quad \dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_1, \quad \dot{g}_1 = u_2,$$

где f, f_1, g, g_1 есть фазовые координаты этой задачи, а u_1, u_2 – управления. Кватернион $\mathbf{K}$ зададим так:

$$(7.7) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1 / 2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2 / 2\},$$

где α_1, α_2 – произвольные константы. Следует отметить, кватернионы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ поворачивают вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (7.1) вокруг осей $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. За счет аддитивной постоянной, входящей в функцию $g(t)$, поворот вокруг оси $\mathbf{i}_3$ уже учтен в выражениях (7.1), (7.3). Сопряжение кватерниона выглядит так:

$$(7.8) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1 \alpha_1 / 2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2 \alpha_2 / 2\}.$$

Удовлетворение краевым условиям (2.6), (2.7) функций $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Lambda}$ (7.3), (7.4) с учетом (7.7), (7.8) запишется так:

$$(7.9) \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0,$$

$$(7.10) \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T,$$

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_T. \end{aligned}$$

Из уравнения (2.4) путем дифференцирования определяется управляющее угловое ускорение КА, соответствующее решению модифицированной задачи; с учетом формул (7.1), (7.5), (7.6) получим:

$$(7.12) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 (u_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) + \mathbf{i}_2 (u_1 \cos g - f_1 g_1 \sin g) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}.$$

С учетом (7.5), (7.7), (7.8) компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ из (7.3), (7.12) имеют явный вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 \sin g \cos \alpha_2 - g_1 \sin \alpha_2, \\ \omega_2 &= f_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \cos \alpha_1) + g_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \omega_3 &= f_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + g_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \varepsilon_1 &= u_1 (\sin g + f_1 g_1 \cos g) \cos \alpha_2 - u_2 \sin \alpha_2, \\ \varepsilon_2 &= u_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + \\ &\quad + f_1 g_1 (\cos g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin g \cos \alpha_1) + u_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \varepsilon_3 &= u_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + \\ &\quad + f_1 g_1 (\cos g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin g \sin \alpha_1) + u_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Ограничение на модуль вектора углового ускорения КА из (3.1), (7.12):

$$(7.13) \quad |\varepsilon| = |u_1^2 + f_1^2 g_1^2 + u_2^2| \leq 1.$$

Для выполнения условия (7.13) на управления u_1, u_2 наложим ограничение

$$(7.14) \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq u_*,$$

где константа u_* ($0 < u_* < 1$) задается исходя из выполнения условия (7.13).

Оптимизационная задача для управляемой системы (7.6) выглядит так: найти оптимальные управления $u_1(t), u_2(t)$, переводящие систему (7.6) из состояния

$$(7.15) \quad f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0)$$

в состояние

$$(7.16) \quad f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T),$$

которые удовлетворяют соотношениям (7.9)–(7.11), где параметры α_1, α_2 подлежат определению, и исполняют критерий оптимальности

$$(7.17) \quad J = T \longrightarrow \min.$$

Выражения (7.9)–(7.11) запишем так:

$$(7.18) \quad (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \omega_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2,$$

$$(7.19) \quad (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \omega_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2,$$

$$(7.20) \quad \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \\ = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\mathbf{L}}_0 \circ \mathbf{L}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2.$$

Поставленную задачу назовем модифицированной задачей поиска оптимального углового ускорения КА, ее точное решение допустимо как приближенное или квазиоптимальное решение классической оптимальной задачи (2.3)–(2.8), (3.1) ((6.1)–(6.6)).

8. Решение модифицированной задачи поиска углового ускорения КА

Функция Гамильтона–Понтрягина задачи (7.6):

$$(8.1) \quad H = -1 + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2,$$

где сопряженные переменные удовлетворяют дифференциальной системе

$$(8.2) \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2.$$

Общее решение системы (8.2) имеет вид

$$(8.3) \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4,$$

где $c_1, \dots, c_4$ – произвольные постоянные.

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (8.1) на ограниченном и замкнутом множестве (7.14) дает выражения для оптимальных управлений:

$$(8.4) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_*(-c_1 t + c_3) / \sqrt{(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2}, \\ u_2 &= u_*(-c_2 t + c_4) / \sqrt{(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя формулы (8.4) в уравнения (7.6), находим их общее решение, которое содержит 8 неопределенных констант $c_1, \dots, c_8$:

$$(8.5) \quad \begin{aligned} f &= -c_1 u_* \{t/2 - A/2 - B c_2 / c_1\} F(t) + \\ &\quad + B[B/2 + (t - A)c_2 / c_1] \ln(t - A + F(t)) / C + c_5 t + c_6, \\ g &= -c_2 u_* \{t/2 - A/2 - B c_1 / c_2\} F(t) + \\ &\quad + B[-B/2 + (t - A)c_1 / c_2] \ln(t - A + F(t)) / C + c_7 t + c_8, \\ f_1 &= -c_1 u_* [F(t) + B \ln(t - A + F(t)) c_2 / c_1] / C + c_5, \\ g_1 &= -c_2 u_* [F(t) + B \ln(t - A + F(t)) c_1 / c_2] / C + c_7, \\ A &= (c_1 c_3 + c_2 c_4) / C^2, \quad B = (c_1 c_4 - c_2 c_3) / C^2, \quad C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \\ F(t) &= \sqrt{(t - A)^2 + B^2}. \end{aligned}$$

Исходя из формулы (7.4), в выражении для функции f (8.5) положим константу c_6 равной 0. Для определения девяти неизвестных постоянных задачи $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 и времени T служат девять уравнений системы (7.18)–(7.20) (из-за требования $\|\mathbf{\Lambda}\| = 1$ три скалярных уравнения независимы в кватернионной записи (7.20)) и условие равенства 0 в конечный момент времени функции Гамильтона–Понтрягина (8.1). На основе (7.3), (7.4), (8.5) получим явные зависимости, определяющие законы изменения угловой скорости и траектории КА в задаче поиска оптимального по быстродействию углового ускорения КА в классе обобщенных конических движений. Формула (7.12) с учетом (8.4), (8.5) даст аналитическое выражение для вектора углового ускорения ϵ . Модифицированная задача поиска оптимального углового ускорения КА полностью решена.

Управления u_1, u_2 и фазовые координаты f, f_1, g, g_1 , заданные (8.4), (8.5), если $c_1 c_4 - c_2 c_3 \neq 0$, соответствуют непрерывным управлениям u_1, u_2 и по формуле (7.12) непрерывному управляющему угловому ускорению ϵ . В случаях $c_1 c_4 - c_2 c_3 = 0$ допустимы разрывы первого рода функций управления u_1, u_2 и углового ускорения ϵ , при этом постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 подчинены условию

$$(8.6) \quad c_3 / c_1 = c_4 / c_2 = t_*.$$

В этих случаях функции управлений (8.4) принимают кусочно-постоянный вид

$$(8.7) \quad u_1 = -c_1 u_* \text{sign}(t - t_*)/C, \quad u_2 = -c_2 u_* \text{sign}(t - t_*)/C.$$

Если $t_* \in [0, T]$, то по (8.7) имеем двухэтапное управление с постоянными участками или, в противном случае, одноэтапное постоянное управление. На основе (7.6) и (8.7) получим выражения для фазовых координат в виде полиномов 1-й и 2-й степени t :

$$(8.8) \quad \begin{aligned} f &= -c_1 u_* (t - t_*)^2 \text{sign}(t - t_*)/2C + c_5 (t - t_*) + c_6, \\ g &= -c_2 u_* (t - t_*)^2 \text{sign}(t - t_*)/2C + c_7 (t - t_*) + c_8, \\ f_1 &= -c_1 u_* (t - t_*)^2 \text{sign}(t - t_*)/2C + c_5 = c_1 u_* |t - t_*|/C + c_5, \\ g_1 &= -c_2 u_* (t - t_*)^2 \text{sign}(t - t_*)/2C + c_7 = c_2 u_* |t - t_*|/C + c_7, \end{aligned}$$

где f, f_1, g, g_1 непрерывны в точке разрыва управлений $t = t_*$.

Следует отметить, что $c_6 = 0$, а $c_1 = \pm 1$ ((8.7), (8.8) допустимо переформулировать, когда c_2, c_3, c_4 фигурируют как отношения к c_1); тогда, выражения (8.7), (8.8) будут содержать 5 произвольных констант c_2, c_5, c_7, c_8, t_* . Для определения их и неизвестных величин T, α_1, α_2 служат девять скалярных уравнений (7.18)–(7.20). Из этих выражений следует, что решения задачи с кусочно-постоянными управлениями u_1, u_2 возникают при определенной взаимосвязи между заданными величинами граничных условий задачи (2.6), (2.7). При варьировании величин $c_2, c_5, c_7, c_8, T, \alpha_1, \alpha_2$ из уравнений (7.18)–(7.20) получается множество значений $\omega_0, \Lambda_T, \omega_T$, при которых решение задачи поиска оптимального углового ускорения КА будет получено при разрыве управлений u_1, u_2 и, следовательно, при разрыве углового ускорения ε .

Если в задаче поиска оптимального по быстродействию углового ускорения КА векторы граничных условий по угловой скорости ω_0 и ω_T коллинеарны вектору $\text{vect}(\Lambda_0 \circ \Lambda_T)$ (случай плоского эйлерового поворота КА [4]), то решения исходной и модифицированной задач совпадут. Это же справедливо, когда решение исходной задачи найдено в классе регулярных конических движений (раздел 5 статьи). При этом в (7.13) $f_1^2 g_1^2 = 0$, а модуль вектора углового ускорения КА в модифицированной задаче равен величине ограничения и, следовательно, постоянен.

В задаче поиска оптимального по быстродействию углового ускорения КА из (4.9) модуль вектора углового ускорения равен $|\varepsilon| \equiv 1$; в модифицированной задаче из (8.4) следует $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = u_*$, где u_* определяется из условия, чтобы вычисленное угловое ускорение удовлетворяло условию $|\varepsilon| \leq 1$. Угловое ускорение, полученное при решении модифицированной задачи, может не выполнять условие $|\varepsilon| \equiv 1$. В связи с этим время быстродействия в модифицированной задаче может немного отличаться от времени быстродействия классической задачи.

Запишем алгоритм решения задачи поиска минимального по времени углового ускорения КА при произвольных заданных краевых условиях.

1. По имеющимся краевым условиям $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_T$ (2.6), $\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_T$ (2.7) по формулам (7.7), (7.8), девяти скалярным уравнениям из (7.18)–(7.20) и равенству $H(T) = 0$ (8.1), принимая во внимание (8.3)–(8.5), находятся девять произвольных констант $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 время T и определяются $f(t), f_1(t), g(t), g_1(t)$.

2. Вычисляется кватернион $\mathbf{K}$ по формуле (7.7).

3. Закон изменения угловой скорости КА по (7.3):

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}.$$

4. Закон изменения траектории углового движения КА по (7.4):

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}.$$

5. Вектор углового ускорения КА строится по формуле (7.12).

9. Числовые примеры

Сравниваются результаты численного решения исходной (классической) задачи поиска оптимального углового ускорения КА и квазиоптимального решения этой задачи по аналитическому алгоритму раздела 8 статьи. Величины $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_5, c_7, c_8, u_*$ в квазиоптимальном решении задачи при развороте КА с граничными условиями (6.7), (6.8):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0,04218, \quad \alpha_2 = -0,22280, \quad c_1 = 1,0, \quad c_2 = -1,03798, \\ c_3 &= 0,67161 \quad c_4 = -0,70520, \quad c_5 = -0,01875, \\ c_7 &= -0,73653, \quad c_8 = -0,73932, \quad u_* = 0,99450. \end{aligned}$$

Величины квазиоптимального и оптимального времени быстрогодействия таковы: $T^{\text{квазиопт}} = 0,8982, T^{\text{опт}} = 0,8965$ (разд. 6); разность $\Delta T = T^{\text{квазиопт}} - T^{\text{опт}} = 0,0017$, относительная погрешность $(\Delta T / T^{\text{опт}}) \times 100\% = 0,19\%$. На рис. 1, 2 приведены графики изменения в зависимости от t проекций вектора угловой скорости КА $\omega_i(t)$, компонент кватерниона поворота КА $\Lambda_i(t)$ и проекций вектора углового ускорения КА $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, которые для двух задач достаточно похожи. В табл. 3 приводятся значения проекций вектора углового ускорения КА $\varepsilon(t)$ при решении классической ($\varepsilon^{\text{опт}}$) и модифицированной ($\varepsilon^{\text{квазиопт}}$) задач на концах и в промежуточных точках $t_* = 0,4508, \tau_* = 0,4491$ интервалов времени движения КА в этих двух решениях.

Таблица 3

t	$\varepsilon_1^{\text{опт}}$	$\varepsilon_2^{\text{опт}}$	$\varepsilon_3^{\text{опт}}$	t	$\varepsilon_1^{\text{квазиопт}}$	$\varepsilon_2^{\text{квазиопт}}$	$\varepsilon_3^{\text{квазиопт}}$
0	-0,65603	0,48884	-0,57503	0	-0,63762	0,51267	-0,57285
t_*	-0,70530	0,41389	-0,57554	τ_*	-0,72143	0,38795	-0,56710
$T^{\text{опт}}$	0,78625	-0,29616	0,54230	$T^{\text{квазиопт}}$	0,84240	-0,07923	0,52813

$T = 0,8965$

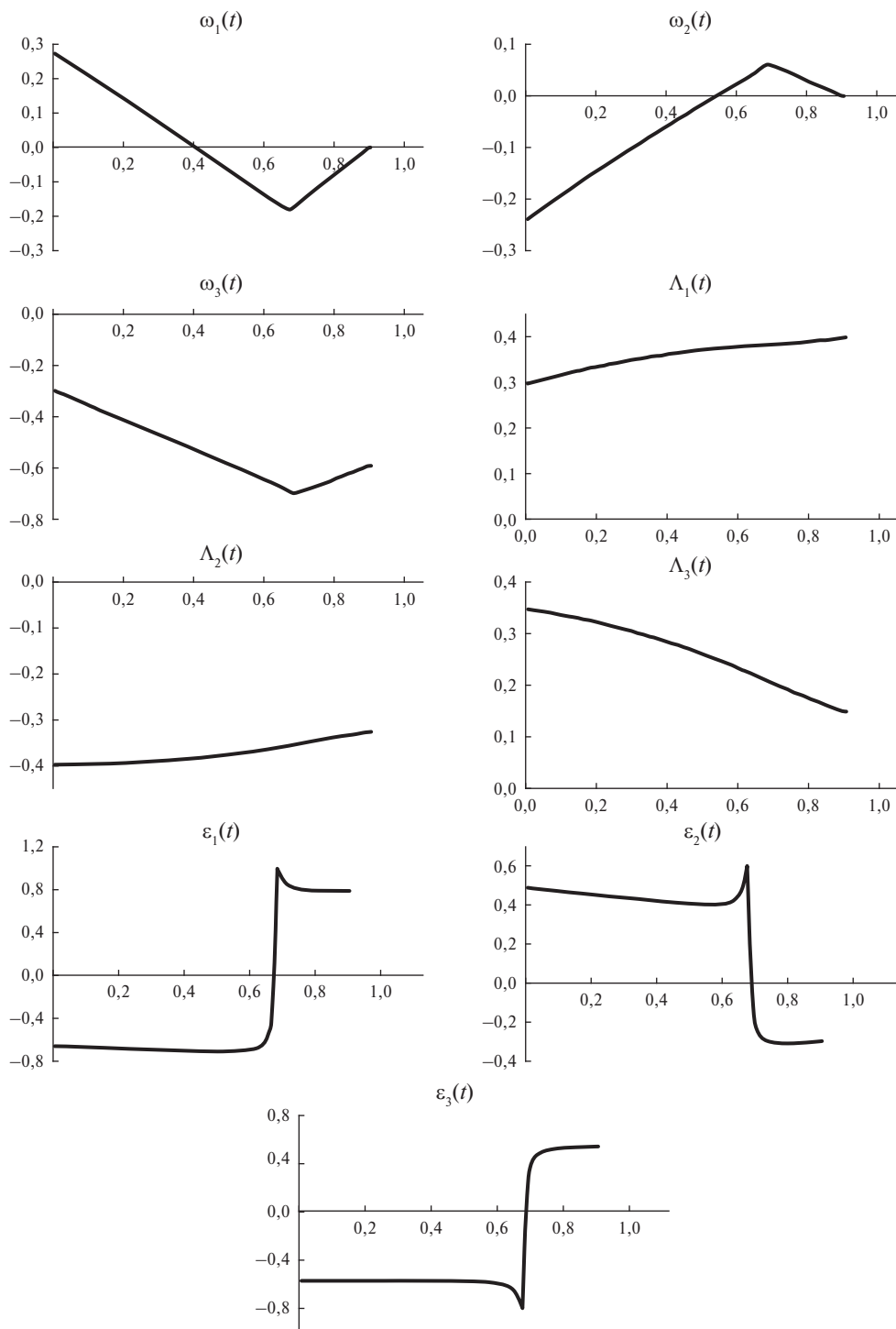


Рис. 1. Результаты решения классической задачи при произвольных граничных условиях.

$$T = 0,8982$$

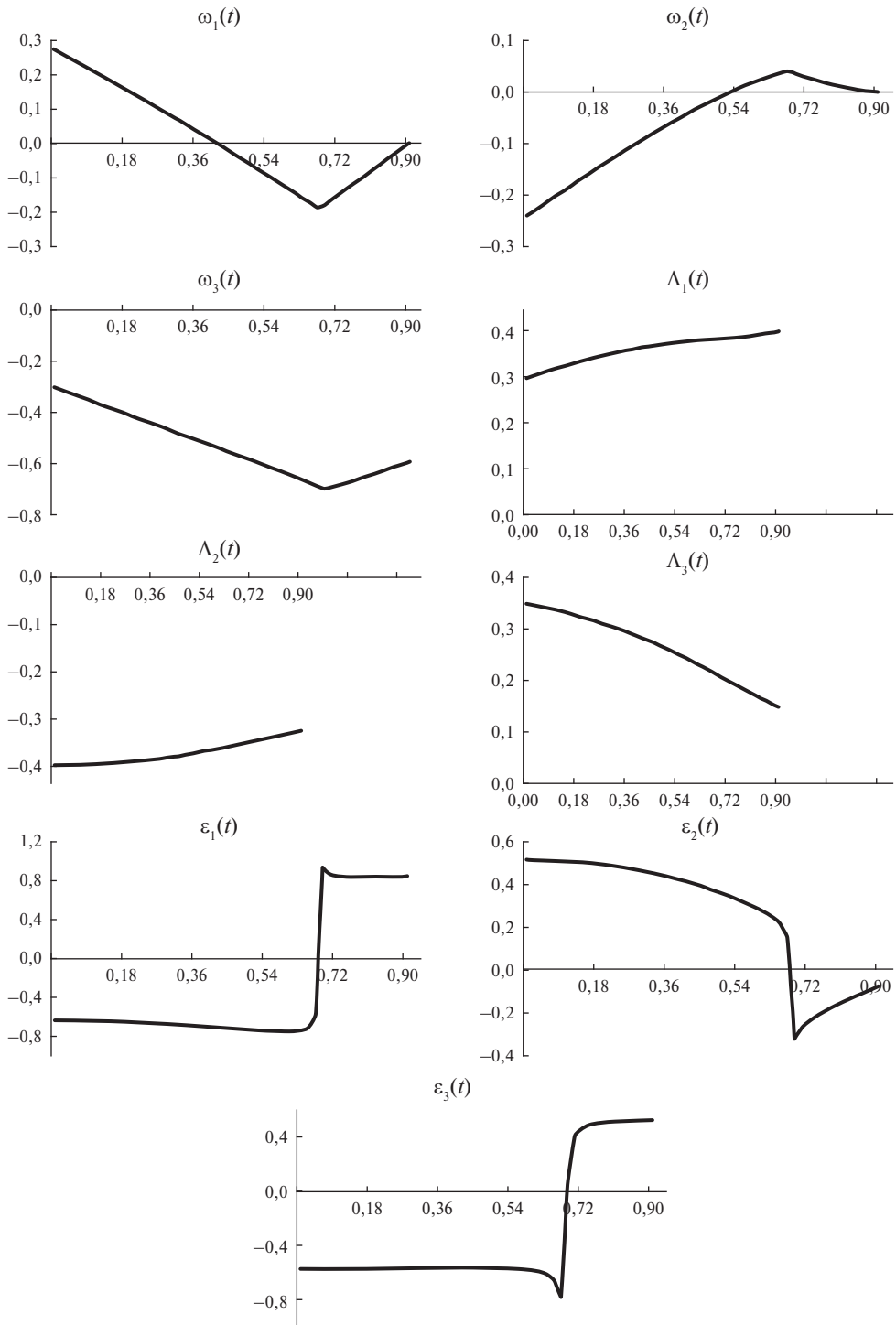


Рис. 2. Результаты решения модифицированной задачи при произвольных граничных условиях.

$T = 1,2967$

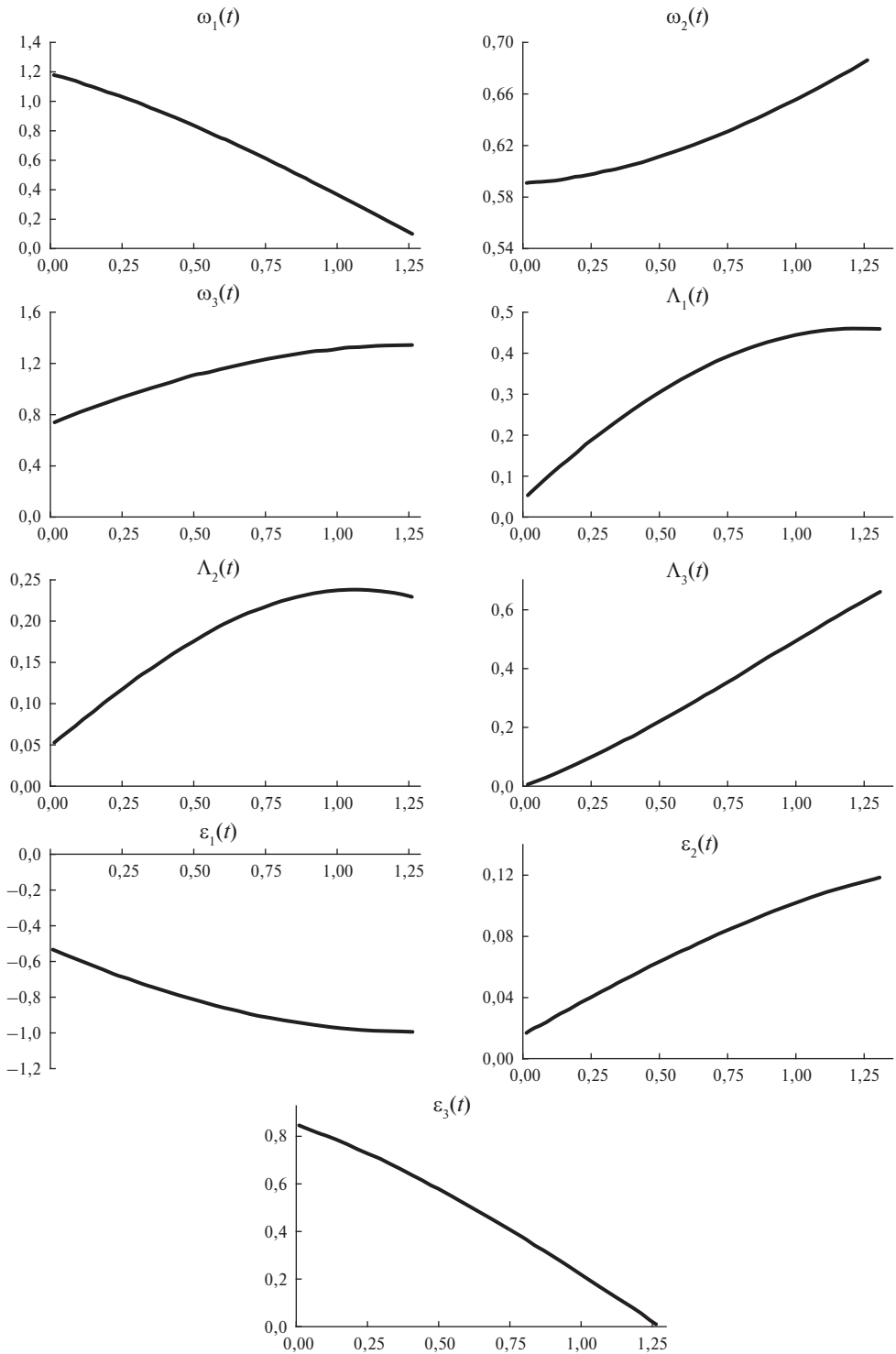


Рис. 3. Результаты решения классической задачи в случае регулярного конического движения.

Из расчетов для различных краевых условий следует близость решений классической и модифицированной задач поиска углового ускорения КА, что позволяет рассматривать решение модифицированной задачи как квазиоптимальное решение классической задачи поиска оптимального углового ускорения КА.

Также для примера показаны результаты решения кинематической задачи поиска оптимального углового ускорения КА в классе регулярных конических движений по аналитическому алгоритму раздела 5. На рис. 3 приводятся графики проекций переменных $\omega(t)$, $\Lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ для величин граничных условий $\Lambda_0 = (0,9975, 0,0504, 0,0504, 0)$, $\Lambda_T = (0,5495, 0,4582, 0,2291, 0,6598)$, $\omega_0 = (1,1811, 0,5906, 0,7382)$, $\omega_T = (0,0093, 0,6860, 1,3447)$, которые удовлетворяют требованиям раздела 5. В первую очередь, при решении исходя из (5.17)–(5.20) определялись постоянные α_1 , Ω , T , $|\omega_0|$, K_0 , K_1 , K_2 , K_3 ($\alpha_1 = 1,3041$, $\Omega = -0,7668$, $T = 1,2967$, $|\omega_0| = 1,5129$, $K_0 = 0,5810$, $K_1 = -0,6561$, $K_2 = -0,3122$, $K_3 = 0,3669$), потом из (5.4), (5.22), (5.6) строились векторы ω , ε и кватернион Λ .

10. Заключение

Аналитический квазиоптимальный алгоритм решения кинематической задачи поиска программного оптимального углового ускорения КА при произвольных краевых условиях достаточно теоретически обоснован и с допустимой точностью решает оптимальную кинематическую задачу определения углового ускорения КА. Предложенный алгоритм не требует численного решения краевой задачи принципа максимума или иного сложного численного решения и являет собой готовые аналитические законы квазиоптимального программного управления и изменения программной траектории, которые могут быть установлены на борт КА. В связи с этим полученные результаты могут быть применены для КА нанокласса, которые имеют ограничения на вычислительные мощности. Кроме этого, на основе полученных результатов с использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди [12], позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на бикватернионные формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, может быть получен аналитический квазиоптимальный по быстродействию алгоритм программного управления пространственным движением (маневрированием) КА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scrivenner S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control Dynam. 1994. V. 17. No. 2. P. 225–233.
2. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. N.Y.: Elsevier, 1986.
3. *Crassidis J.L., Markley F.L.* Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. N.Y.: Springer, 2014.

4. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
5. *Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сомова Т.Е.* Автономное наведение и управление миниспутниками в низкоорбитальной группировке при площадной сканирующей съемке // Сб. тр. XXX Юбил. С.-Петербург. междунар. конф. по интегрир. навигац. сист. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2023.
6. *Иванова Е.А.* Об одном подходе к решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 45–52.
7. *Molodenkov A.V., Perehlyayev S.E.* Solution of Approximate Equation for Modified Rodrigues Vector and Attitude Algorithm Design // J. Guidance, Control Dynam. 2021. V. 44. No. 6. P. 1224–1227.
8. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи минимального по времени поворота космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 142–156.
9. *Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.* Quasioptimal Spacecraft Attitude Control Constructed According to the Poinot Concept // Aerospace. 2023. V. 10. No. 5. P. 402–417.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
11. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Особый режим управления в задаче оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 47–54.
12. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006.
13. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А. и др.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации // Препринт № 57. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 14.03.2024

После доработки 28.11.2024

Принята к публикации 02.12.2024

Стохастические системы

© 2025 г. А.А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук (nazarov.tsu@gmail.com),
Е.А. ФЁДОРОВА, канд. физ.-мат. наук (ekat_fedorova@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

МЕТОД МАРГИНАЛЬНОГО АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФфуЗИОННОГО АНАЛИЗА МУЛЬТИКЛАССОВОЙ RQ-СИСТЕМЫ $M_n/GI_n/1$ ¹

Исследована система массового обслуживания с повторными вызовами и разными типами заявок, т.е. мультиклассовая RQ-система. На вход системы поступает конечное число входящих простейших потоков (классов заявок). В системе имеется один прибор. Если входящая заявка застаёт прибор свободным, она занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения. Если прибор занят, заявка переходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, распределённую по экспоненциальному закону, после которой она снова обращается к прибору. Для исследования модели предлагается метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа в условии согласованной большой задержки на орбите заявок всех классов, кроме выделенного. В результате найдены асимптотические маргинальные распределения вероятностей числа заявок выделенного класса на орбите.

Ключевые слова: мультиклассовая RQ-система, маргинальный асимптотически-диффузионный анализ, большая задержка.

DOI: 10.31857/S0005231025030041, **EDN:** IEOGSP

1. Введение

RQ-системы (Retrial queueing systems), или системы массового обслуживания с повторными вызовами, являются одними из наиболее распространённых моделей, используемых для анализа и оптимизации информационных систем. Возникновение таких моделей как нового направления теории массового обслуживания (ТМО) связано с развитием телекоммуникаций и информационных технологий. Было показано, что классические модели теории массового обслуживания не подходят для описания систем, где имеют место повторные вызовы. Так, например, при неуспешной попытке дозвониться абонент будет пробовать снова звонить через некоторое случайное время. Аналогично в сетях передачи данных при неуспешной передаче пакета (ошибки, коллизии, недоступность сервера) имеет место некоторая задержка перед

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00454).

повторной передачей. В [1, 2] описано несколько примеров их применения к реальным call-центрам, сетям сотовой связи, компьютерным сетям, центрам распределенных вычислений и т.д.

Наиболее подробное описание RQ-моделей представлено в монографиях [1, 3]. Несмотря на большое количество работ в данной тематике, модели с несколькими типами заявок исследуются крайне редко. Это связано в первую очередь с тем, что сами RQ-системы отличаются большей сложностью аналитического исследования, чем классические модели ТМО (так, аналитические формулы удается получить лишь для самых простых задач). Во-вторых, с возрастанием числа различаемых классов заявок увеличивается размерность решаемой задачи – для исследования RQ-системы с N типами заявок необходимо исследовать $(N + 1)$ -мерный случайный процесс. При использовании матричных методов исследования [4, 5] рост размерности задачи в зависимости от количества классов имеет степенной закон. Те же сложности возникают при численном исследовании и имитационном моделировании [6, 7], хотя некоторые авторы предлагают определенные алгоритмы оптимизации вычислений [8].

В реальных сетях связи разнородность данных совсем не редкость [9, 10]. Различные типы передаваемой информации или типы запросов в вычислительных системах требуют различные стратегии и характеристики обслуживания. Таким образом, исследование гетерогенных (или мультиклассовых) моделей ТМО является актуальной научной проблемой.

Мультиклассовые RQ-системы исследуются группами ученых под руководством Е.В. Морозова [11–13] и А. Krishnamoorthy [14]. Также отдельные исследования для RQ с несколькими потоками отражены в работах В. Kim [15, 16], Y. Shin [17], С.Н. Степанова [8, 18] и др. Большинство работ в данной области [11–13, 15, 16] посвящено анализу стабильности функционирования таких моделей (как классических RQ, так и RQ с динамическим протоколом доступа или RQ с постоянной суммарной интенсивностью повторных обращений «RQ with constant retrial rate»). Однако в перечисленных работах не находятся выражения для распределений вероятностей числа заявок в системе, обычно только средние характеристики. Безусловно, получение средних и анализ стабильности имеет важное значение для анализа сетей связи, но дисперсия и тем более вид распределений дает более полную картину. Это особенно актуально для информационных систем, где важно не допустить перегрузки системы или потери важных пакетов информации.

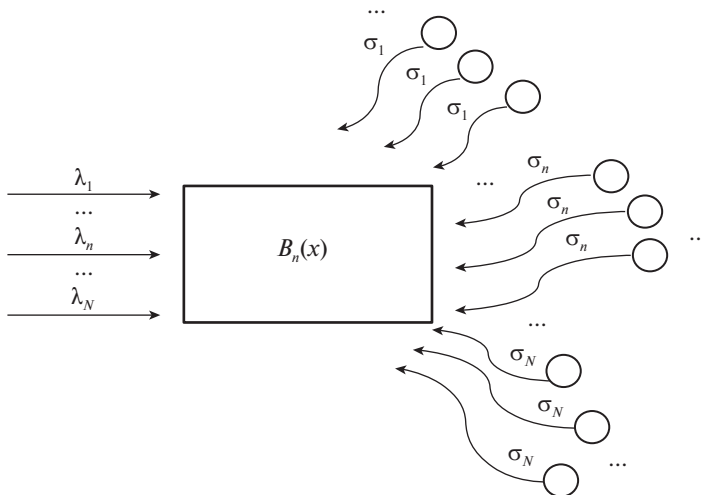
В данной статье предлагается оригинальный метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа для исследования мультиклассовых RQ-систем, являющегося развитием метода, изложенного в [19, 20] на случай исследования многомерных случайных процессов. Работа является расширением исследований [21] на случай произвольного закона времени обслуживания.

2. Математическая модель

Рассмотрим мультиклассовую RQ-систему типа $M_n/GI_n/1$, на вход которой поступает N независимых простейших потоков заявок (N классов) с интенсивностями λ_n , где $n = \overline{1, N}$. В системе имеется один обслуживающий прибор. Если входящая заявка (любого типа) застаёт прибор свободным, она занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B_n(x)$. Предполагается, что заданное распределение имеет конечные моменты первого и второго порядка. Если прибор занят, заявка уходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Время задержки заявки n -го потока на орбите распределено по экспоненциальному закону с параметром σ_n . По истечении случайного времени заявка осуществляет повторную попытку обратиться к прибору. Если прибор свободен, она встает на обслуживание, если занят – мгновенно возвращается на орбиту. Все заявки на орбите действуют независимо друг от друга, т.е. реализуется протокол множественного случайного доступа. Интервалы наступления событий входящих потоков, времени обслуживания и задержки заявок каждого класса на орбите также независимы. Рассматриваемая модель схематически изображена на рисунке.

Заметим, что для математического исследования не имеет значения, является ли орбита общей для всех заявок (но с разными параметрами задержки для каждого класса заявок) или имеется отдельная орбита для каждого класса, важно знать количество заявок того или иного класса в системе в текущий момент времени.

Пусть $i_n(t)$ – количество заявок n -го типа на орбите, где $n = \overline{1, N}$; случайный процесс $k(t)$ характеризует состояние прибора следующим образом: $k(t) = 0$, если прибор свободен, $k(t) = n$, если на приборе обслуживается за-



Мультиклассовая RQ-система $M_n/GI_n/1$.

явка n -го класса; $z(t)$ – остаточное время обслуживания текущей заявки, занимающей прибор.

Обозначим: $P\{k(t) = 0, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_N(t) = i_N\} = P(0, \mathbf{i}, t)$ и $P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_N(t) = i_N, z(t) < z\} = P(k, \mathbf{i}, z, t)$ – вероятность того, что прибор находится в состоянии k и имеется $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_N\}$ заявок на орбитах в момент времени t , а оставшееся время обслуживания текущей заявки меньше z .

Многомерный процесс $\{k(t), \mathbf{i}(t), z(t)\}$ является марковским, составим уравнения Колмогорова для вероятностей $P(0, \mathbf{i}, t)$ и $P(k, \mathbf{i}, t)$:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P(0, \mathbf{i}, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial P(n, \mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} - \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N i_n \sigma_n \right) P(0, \mathbf{i}, t), \\ \frac{\partial P(k, \mathbf{i}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(k, \mathbf{i}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(k, \mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} - \\ - \sum_{n=1}^N \lambda_n P(k, \mathbf{i}, z, t) + \lambda_k P(0, \mathbf{i}, t) B_k(z) + \\ + (i_k + 1) \sigma_k P(0, \mathbf{i} + \mathbf{e}_k, t) B_k(z) + \sum_{n=1}^N \lambda_n P(k, \mathbf{i} - \mathbf{e}_n, z, t), \end{array} \right.$$

где $\mathbf{e}_k$ – вектор размера $1 \times N$ с единичным k -м элементом и остальными нулевыми и $\frac{\partial P(k, \mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial P(k, \mathbf{i}, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$, $k = \overline{1, N}$.

Перейдем к частичным характеристическим функциям:

$$\begin{aligned} H(0, \mathbf{u}, t) &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_N=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} \dots e^{ju_N i_N} P(0, \mathbf{i}, t), \\ H(k, \mathbf{u}, z, t) &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_N=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} \dots e^{ju_N i_N} P(k, \mathbf{i}, z, t). \end{aligned}$$

Тогда система (1) переписывается в следующем виде:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H(0, \mathbf{u}, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial H(n, \mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} - H(0, \mathbf{u}, t) \sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N j \sigma_n \frac{\partial H(0, \mathbf{u}, t)}{\partial u_n}, \\ \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} + \\ + \sum_{n=1}^N \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H(k, \mathbf{u}, z, t) + \lambda_k H(0, \mathbf{u}, t) B_k(z) - \\ - j \sigma_k e^{-ju_k} \frac{\partial H(0, \mathbf{u}, t)}{\partial u_k} B_k(z), \quad k = \overline{1, N}. \end{array} \right.$$

Прямое решение системы (2) довольно затруднительно, поэтому предлагается оригинальный метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа для ее исследования. Данный метод был разработан авторами и апробирован для более простой модели в [21], где была показана достаточно высокая точность метода при сравнении одномерных характеристик системы с имитационным моделированием, а в данной работе предлагается расширение исследований на случай произвольного закона обслуживания.

3. Маргинальный асимптотически-диффузионный анализ

Метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа является развитием метода асимптотически-диффузионного анализа [19] на случай исследования многомерных случайных процессов. В качестве асимптотического условия в данном исследовании было выбрано условие большой задержки заявок на орбите.

Данный метод состоит из нескольких этапов, которые выделим в отдельные параграфы:

1) вывод «маргинальных» асимптотических уравнений для одномерного случайного процесса $i_n(t)$ (т.е. количества заявок «выделенного» класса);

2) нахождение асимптотических характеристик системы: среднего числа заявок каждого класса на орбите и стационарного распределения состояний прибора;

3) применение метода асимптотически-диффузионного анализа для процесса $i_n(t)$.

Заметим, что применение маргинального асимптотического метода, т.е. нахождение маргинальных характеристик модели по каждому классу, не означает, что процессы $i_n(t)$ независимы. Этот метод является, скорее, вынужденной мерой, в силу невозможности исследования многомерного случайного процесса известными аналитическими методами, однако он позволяет найти все характеристики одномерных процессов.

3.1. Маргинальные асимптотические уравнения

Первый этап предлагаемого метода состоит в выводе асимптотических уравнений для маргинального распределения вероятностей количества заявок выделенного класса. Рассмотрим n -й класс заявок, т.е. выделим случайный процесс $i_n(t)$.

Любой асимптотический метод включает в себя введение некоторого малого параметра. В данном случае будем предполагать, что параметры задержки равны $\sigma_\nu = \gamma_\nu \sigma$, для $\nu = \overline{1, N}, \nu \neq n$, где $\sigma \rightarrow 0$. Таким образом, имеет место асимптотическое условие большой задержки или условие согласованно растущего времени задержки на орбите заявок всех классов.

Обозначив $\sigma = \varepsilon$, подставим в систему (2) следующие замены:

$$u_\nu = \varepsilon w_\nu \quad \text{для } \nu = \overline{1, N}, \quad \nu \neq n; \quad u_n = u;$$

$$\mathbf{w}^{(n)} = \{w_1, \dots, w_{n-1}, u, w_{n+1}, \dots, w_N\};$$

$$H(0, \mathbf{u}, t) = F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t), \quad H(k, \mathbf{u}, z, t) = F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t).$$

Используя введенные обозначения, из системы (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим следующие уравнения:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial t} = -F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t) \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^N j\gamma_\nu \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial w_\nu} + \\ & + j\sigma_n \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial u_n} + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial F(\nu, \mathbf{w}^{(n)}, 0, t)}{\partial z}, \\ & \frac{\partial F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t)}{\partial t} = (\lambda_n (e^{ju_n} - 1)) F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t) + \\ & + \frac{\partial F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial F(k, \mathbf{w}^{(n)}, 0, t)}{\partial z} + \lambda_k F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t) B_k(z) - \\ & - j\gamma_k \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial w_k} B_k(z), \quad k \neq n, \\ & \frac{\partial F(n, \mathbf{w}^{(n)}, z, t)}{\partial t} = (\lambda_n (e^{ju_n} - 1)) F(n, \mathbf{w}^{(n)}, z, t) + \\ & + \frac{\partial F(n, \mathbf{w}^{(n)}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial F(n, \mathbf{w}^{(n)}, 0, t)}{\partial z} + \\ & + \lambda_n F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t) B_n(z) - j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t)}{\partial u_n} B_n(z). \end{aligned} \right.$$

Из вида уравнений (3) можно сделать вывод, что решение этой системы имеет следующий вид:

$$(4) \quad \begin{aligned} F(0, \mathbf{w}^{(n)}, t) &= H_n(0, u_n, t) \times \exp \left\{ \sum_{\nu \neq n} jw_\nu x_\nu \right\}, \\ F(k, \mathbf{w}^{(n)}, z, t) &= H_n(k, u_n, z, t) \times \exp \left\{ \sum_{\nu \neq n} jw_\nu x_\nu \right\}, \end{aligned}$$

где x_n – неизвестные величины, а функции $H_n(0, u_n, t)$ и $H_n(k, u_n, z, t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_n(0, u_n, t)}{\partial t} = -H_n(0, u_n, t) \left(\sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^N \gamma_\nu x_\nu \right) + \\ + j\sigma_n \frac{\partial H_n(0, u_n, t)}{\partial u_n} + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial H_n(\nu, u_n, 0, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_n(k, u_n, z, t)}{\partial t} = \lambda_n(e^{ju_n} - 1)H_n(k, u_n, z, t) + \frac{\partial H_n(k, u_n, z, t)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial H_n(k, u_n, 0, t)}{\partial z} + H_n(0, u_n, t)(\lambda_k + \gamma_k x_k)B_k(z), \quad k \neq n, \\ \frac{\partial H_n(n, u_n, z, t)}{\partial t} = \lambda_n(e^{ju_n} - 1)H_n(n, u_n, z, t) + \frac{\partial H_n(n, u_n, z, t)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial H_n(\nu, u_n, 0, t)}{\partial z} + \lambda_n H_n(0, u_n, t)B_n(z) - \\ - j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial H_n(0, u_n, t)}{\partial u_n} B_n(z). \end{array} \right.$$

Неизвестные функции $H_n(k, u_n, z, t)$ имеют смысл асимптотических частичных характеристических функций числа заявок выделенного класса на орбите. Таким образом, решая систему (5), можно получить маргинальные распределения для каждого класса заявок. Однако в данных уравнениях фигурируют неизвестные величины x_k , имеющие смысл асимптотических средних. В следующем параграфе получим выражения для их определения.

3.2. Асимптотические средние

Чтобы найти параметры x_k , $k = \overline{1, N}$, необходимо вернуться к системе (2), записав ее в стационарном режиме:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N \frac{\partial H(n, \mathbf{u}, 0)}{\partial z} - H(0, \mathbf{u}) \sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N j\sigma_n \frac{\partial H(0, \mathbf{u})}{\partial u_n} = 0, \\ \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, z)}{\partial z} - \frac{\partial H(k, \mathbf{u}, 0)}{\partial z} + \sum_{n=1}^N \lambda_n(e^{ju_n} - 1)H(k, \mathbf{u}, z) + \\ + \lambda_k H(0, \mathbf{u})B_k(z) - j\sigma_k e^{-ju_k} \frac{\partial H(0, \mathbf{u})}{\partial u_k} B_k(z) = 0, \quad k = \overline{1, N}. \end{array} \right.$$

Суммируем уравнения по всем $k = \overline{0, N}$ и запишем результат при $z \rightarrow \infty$, получим так называемое согласованное уравнение:

$$(7) \quad \sum_{n=1}^N (e^{ju_n} - 1) \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N H(k, \mathbf{u}) + j\sigma_k e^{-ju_k} \frac{\partial H(0, \mathbf{u})}{\partial u_k} \right) = 0.$$

Подставим в уравнения (6) и (7) следующие асимптотические замены:

$$\sigma_n = \gamma_n \sigma, \sigma = \varepsilon, u_n = \varepsilon w_n, H(0, \mathbf{u}) = F(0, \mathbf{w}, \varepsilon), H(k, \mathbf{u}, z) = F(k, \mathbf{w}, z, \varepsilon).$$

Получим следующую систему:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N \frac{\partial F(n, \mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} - F(0, \mathbf{w}, \varepsilon) \sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N j \gamma_n \frac{\partial F(0, \mathbf{w}, \varepsilon)}{\partial w_n} = O(\varepsilon), \\ \frac{\partial F(k, \mathbf{w}, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F(k, \mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \sum_{n=1}^N \lambda_n (e^{j \varepsilon w_n} - 1) F(k, \mathbf{w}, z, \varepsilon) + \\ + \lambda_k F(0, \mathbf{w}, \varepsilon) B_k(z) - j \gamma_k e^{-j \varepsilon w_k} \frac{\partial F(0, \mathbf{w}, \varepsilon)}{\partial w_k} B_k(z) = O(\varepsilon), \quad k = \overline{1, N}, \\ \sum_{n=1}^N (e^{j \varepsilon w_n} - 1) \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N F(k, \mathbf{w}, z, \varepsilon) + j \gamma_k e^{-j \varepsilon w_k} \frac{\partial F(0, \mathbf{w}, \varepsilon)}{\partial w_k} \right) = O(\varepsilon). \end{array} \right.$$

После некоторых преобразований при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N \frac{\partial F(n, \mathbf{w}, 0)}{\partial z} - F(0, \mathbf{w}) \sum_{n=1}^N \lambda_n + \sum_{n=1}^N j \gamma_n \frac{\partial F(0, \mathbf{w})}{\partial w_n} = 0, \\ \frac{\partial F(k, \mathbf{w}, z)}{\partial z} - \frac{\partial F(k, \mathbf{w}, 0)}{\partial z} + \\ + \lambda_k F(0, \mathbf{w}) B_k(z) - j \gamma_k \frac{\partial F(0, \mathbf{w})}{\partial w_k} B_k(z) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \\ \sum_{n=1}^N j w_n \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N F(k, \mathbf{w}, z) + j \gamma_k \frac{\partial F(0, \mathbf{w})}{\partial w_k} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Решение этой системы имеет вид

$$F(0, \mathbf{w}) = r_0 \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^N j w_n x_n \right\}, \quad F(k, \mathbf{w}, z) = r_k(z) \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^N j w_n x_n \right\}.$$

Тогда из системы (9) получаем следующие уравнения:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N r'_n(0) - r_0 \sum_{n=1}^N (\lambda_n + \gamma_n x_n) = 0, \\ r'_k(z) - r'_k(0) + r_0 B_k(z) (\lambda_k + \gamma_k x_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \\ \lambda_n \sum_{k=1}^N r_k(z) - \gamma_n x_n r_0 = 0, \quad n = \overline{1, N}, \end{array} \right.$$

$$\text{где } r'_n(0) = \left. \frac{dr_n(z)}{dz} \right|_{z=0}.$$

Обозначим: $\kappa_n = \lambda_n + \gamma_n x_n$. Из системы (10) нетрудно получить:

$$(11) \quad r_k(z) = r_0 \kappa_k \int_0^z (1 - B_k(x)) dx \quad \text{или} \quad r_k = \lambda_k b_k^{(1)},$$

где $\kappa_k = \lambda_k/r_0$, $k = \overline{1, N}$, $b_k^{(1)} = \int_0^\infty (1 - B_k(x)) dx$, а выражение для r_0 можно получить из условия нормировки:

$$(12) \quad r_0 = 1 - \sum_{k=1}^N r_k \quad \text{или} \quad r_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^N \kappa_k b_k^{(1)}\right)^{-1}.$$

Таким образом, асимптотические средние значения числа заявок на орбите вычисляются как $x_k = (\kappa_k - \lambda_k)/\gamma_k$, где $\kappa_k = \lambda_k/r_0$.

3.3. Асимптотически-диффузионный анализ

Вернемся к уравнениям для выделенного класса заявок (5). Запишем согласованное уравнение путем суммирования всех уравнений при $z \rightarrow \infty$.

$$(13) \quad \frac{\partial H_n(u_n, t)}{\partial t} = (e^{ju_n} - 1) \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N H_u(k, u_n, t) + j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial H_n(0, u_n, t)}{\partial u_n} \right).$$

3.3.1. Первая асимптотика

Обозначим:

$$\sigma_n = \varepsilon, \quad \sigma_n t = \varepsilon t = \tau, \quad u_n = \varepsilon w, \\ H_n(0, u_n, t) = F_n(0, w, \tau, \varepsilon), \quad H_n(k, u_n, z, t) = F_n(k, w, \tau, z, \varepsilon).$$

Подставляем в (5):

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial F_n(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= -F_n(0, w, \tau, \varepsilon) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v \right) + \\ &+ j \frac{\partial F_n(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{v=1}^N \frac{\partial F_n(v, w, \tau, 0, \varepsilon)}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{\partial F_n(k, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \lambda_n (e^{j\varepsilon w} - 1) F_n(k, w, \tau, \varepsilon) + \frac{\partial F_n(k, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial z} - \\ &- \frac{\partial F_n(k, w, \tau, 0, \varepsilon)}{\partial z} + F_n(0, w, \tau, \varepsilon) \kappa_k B_k(z), \quad k \neq n, \\ \varepsilon \frac{\partial F_n(n, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \lambda_n (e^{j\varepsilon w} - 1) F_n(n, w, \tau, z, \varepsilon) + \\ &+ \frac{\partial F_n(n, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_n(n, w, \tau, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \lambda_n F_n(0, w, \tau, \varepsilon) B_n(z) - \\ &- j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_n(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} B_n(z). \end{aligned} \right.$$

Из (13) имеем:

$$(15) \quad \varepsilon \sum_{k=0}^N \frac{\partial F_n(k, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} =$$

$$= (e^{j\varepsilon w} - 1) \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N F_n(k, w, \tau, \varepsilon) + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_n(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \right).$$

Выполним предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ в (14):

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} -F_n(0, w, \tau) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v \right) + j \frac{\partial F_n(0, w, \tau)}{\partial w} + \\ + \sum_{v=1}^N \frac{\partial F_n(v, w, 0, \tau)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial F_n(k, w, z, \tau)}{\partial z} - \frac{\partial F_n(k, w, 0, \tau)}{\partial z} + F_n(0, w, \tau) \kappa_k B_k(z) = 0, \quad k \neq n, \\ \frac{\partial F_n(n, w, z, \tau)}{\partial z} - \frac{\partial F_n(n, w, 0, \tau)}{\partial z} + \lambda_n F_n(0, w, \tau) B_n(z) - \\ - j \frac{\partial F_n(0, w, \tau)}{\partial w} B_n(z) = 0. \end{array} \right.$$

Из вида уравнений (16), можно сделать вывод, что функции $F_n(0, w, \tau)$ и $F_n(k, w, z, \tau)$ будут иметь вид

$$(17) \quad F_n(0, w, \tau) = R_0(x) e^{jw \times x(\tau)}, \quad F_n(k, w, z, \tau) = R_k(x, z) e^{jw \times x(\tau)},$$

где у обозначений $R_0(x)$ и $R_k(x, z)$ опущен индекс n (номер выделенного класса заявок), однако следует помнить, что значения этих функций будут отличаться для каждого класса. Далее также для упрощения записи будем писать x вместо $x(\tau)$.

Подставляя (17) в (16), получим следующую систему:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{v=1}^N \frac{\partial R_v(x, 0)}{\partial z} = R_0(x) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v + x \right), \\ \frac{\partial R_k(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial R_k(x, 0)}{\partial z} - R_0(x) \kappa_k B_k(z) = 0, \quad k \neq n, \\ \frac{\partial R_n(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial R_n(x, 0)}{\partial z} - R_0(x) B_n(z) (\lambda_n + x). \end{array} \right.$$

Откуда нетрудно получить

$$(19) \quad \begin{aligned} R_k(x, z) &= R_0(x) \kappa_k \int_0^z (1 - B_k(x)) dx, \quad k \neq n, \\ R_n(x, z) &= R_0(x) (\lambda_n + x) \int_0^z (1 - B_n(x)) dx. \end{aligned}$$

При $z \rightarrow \infty$:

$$(20) \quad R_k(x) = R_0(x) \kappa_k b_k^{(1)}, \quad k \neq n, \quad R_n(x) = R_0(x) (\lambda_n + x) b_n^{(1)},$$

где $R_0(x)$ определяется из условия нормировки:

$$(21) \quad R_0(x) = \left(1 + (\lambda_n + x) b_n^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_k b_k^{(1)} \right)^{-1}.$$

Вернемся к уравнению (15). Выполним ряд преобразований, после чего при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial F_n(k, w, \tau)}{\partial \tau} = jw \left(j \frac{\partial F_n(0, w, \tau)}{\partial w} + \lambda_n \sum_{k=1}^N F_n(k, w, \tau) \right).$$

Подставляя (17), окончательно получим, что величина $x(\tau)$, имеющая смысл асимптотического среднего числа заявок n -го класса на орбите, определяется уравнением

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = a(x(\tau)),$$

где

$$(22) \quad a(x) = \lambda_n (1 - R_0(x)) - R_0(x) x$$

имеет смысл коэффициента сноса исследуемого случайного процесса.

3.3.2. Вторая асимптотика

В системе (5) выполним подстановки:

$$\begin{aligned} H_n(0, u_n, t) &= H_n^{(2)}(0, u_n, t) \exp \left\{ \frac{j u_n}{\sigma_n} x(\sigma_n t) \right\}, \\ H_n(k, u_n, z, t) &= H_n^{(2)}(k, u_n, z, t) \exp \left\{ \frac{j u_n}{\sigma_n} x(\sigma_n t) \right\}. \end{aligned}$$

Далее для упрощения выражений будем писать x вместо $x(\sigma_n t)$.

Получим следующую систему уравнений:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial H_n^{(2)}(0, u_n, t)}{\partial t} + ju_n a(x) H_n^{(2)}(0, u_n, t) = \\ & = -H_n^{(2)}(0, u_n, t) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v \right) + j\sigma_n \frac{\partial H_n^{(2)}(0, u_n, t)}{\partial u_n} - \\ & - x H_n^{(2)}(0, u_n, t) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_n^{(2)}(k, u_n, 0, t)}{\partial z}, \\ & \frac{\partial H_n^{(2)}(k, u_n, z, t)}{\partial t} + ju_n a(x) H_n^{(2)}(k, u_n, z, t) = \\ & = \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H_n^{(2)}(k, u_n, z, t) + \frac{\partial H_n^{(2)}(k, u_n, z, t)}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial H_n^{(2)}(k, u_n, 0, t)}{\partial z} + H_n^{(2)}(0, u_n, t) B_k(z) \kappa_k, \quad k \neq n, \\ & \frac{\partial H_n^{(2)}(n, u_n, z, t)}{\partial t} + ju_n a(x) H_n^{(2)}(n, u_n, z, t) = \\ & = \lambda_n (e^{ju_n} - 1) H_n^{(2)}(n, u_n, z, t) + \frac{\partial H_n^{(2)}(n, u_n, z, t)}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial H_n^{(2)}(n, u_n, 0, t)}{\partial z} + \lambda_n H_n^{(2)}(0, u_n, t) B_n(z) \\ & - j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial H_n^{(2)}(0, u_n, t)}{\partial u_n} B_n(z) + e^{-ju_n} H_n^{(2)}(0, u_n, t) x B_n(z). \end{aligned} \right.$$

Из согласованного уравнения (6) имеем:

$$(24) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial H_n^{(2)}(u_n, t)}{\partial t} + ju_n a(x) H_n^{(2)}(u_n, t) = (e^{ju_n} - 1) \times \\ & \times \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N H_n^{(2)}(k, u_n, t) + \right. \\ & \left. + j\sigma_n e^{-ju_n} \frac{\partial H_n^{(2)}(0, u_n, t)}{\partial u_n} - e^{-ju_n} H_n^{(2)}(0, u_n, t) x \right). \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\sigma_n = \varepsilon^2, \quad \sigma_n t = \varepsilon^2 t = \tau, \quad u_n = \varepsilon w,$$

$$H_n^{(2)}(0, u_n, t) = F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon), \quad H_n^{(2)}(k, u_n, z, t) = F_n^{(2)}(k, w, z, \tau, \varepsilon).$$

Из уравнения (23) после некоторых преобразований получим следующие асимптотические уравнения:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) = \\ & = -F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v \right) + j\varepsilon \frac{\partial F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - \\ & - x F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_n^{(2)}(k, w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2), \\ & \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(k, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(k, w, \tau, z, \varepsilon) = \\ & = \lambda_n \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) F_n^{(2)}(n, w, z, \tau, \varepsilon) + F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) B_k(z) \kappa_k + \\ & + \frac{\partial F_n^{(2)}(k, w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_n^{(2)}(k, w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2), \quad k \neq n, \\ & \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(n, w, \tau, z, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(n, w, \tau, z, \varepsilon) = \\ & = \lambda_n \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) F_n^{(2)}(n, w, z, \tau, \varepsilon) + \lambda_n F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) B_n(z) + \\ & + \frac{\partial F_n^{(2)}(n, w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_n^{(2)}(n, w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \\ & - j\varepsilon(1 - j\varepsilon w) \frac{\partial F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} B_n(z) + \\ & + \left(1 - j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) x B_n(z) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \right.$$

Из уравнения (24) имеем

$$(26) \quad \begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) \times \\ & \times \left(\lambda_n \sum_{k=1}^N F_n^{(2)}(k, w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon(1 - j\varepsilon w) \frac{\partial F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - \right. \\ & \quad \left. - x \left(1 - j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (25)–(26) в виде

$$(27) \quad \begin{aligned} F_n^{(2)}(0, w, \tau, \varepsilon) &= \Phi(w, \tau)(R_0(x) + jw\varepsilon f_0(x)) + O(\varepsilon^2), \\ F_n^{(2)}(k, w, z, \tau, \varepsilon) &= \Phi(w, \tau)(R_k(x, z) + jw\varepsilon f_k(x, z)) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Подставляя в (25)–(26) и учитывая (16) и (18), после некоторых преобразований при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем следующую систему уравнений:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & -f_0(x) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v + x \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_k(x, 0)}{\partial z} = \\ & = a(x)R_0(x) - R_0(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{w\Phi(w, \tau)}, \\ & \frac{\partial f_k(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial f_k(x, 0)}{\partial z} + f_0(x)\kappa_k B_k(z) = R_k(x, z)(a(x) - \lambda_n), \quad k \neq n, \\ & f_0(x)(\lambda_n + x) + \frac{\partial f_n(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial f_n(x, 0)}{\partial z} = \\ & = R_n(x, z)(a(x) - \lambda_n) + xR_0(x)B_n(z) + R_0(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{w\Phi(w, \tau)} B_n(z). \end{aligned} \right.$$

Сравнивая полученную систему с (18) и используя принцип суперпозиции, нетрудно заметить, что решение (28) можно записать в виде

$$(29) \quad \begin{aligned} f_0(x) &= CR_0(x) + g_0(x) - \phi_0(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{w\Phi(w, \tau)}, \\ f_k(x, z) &= CR_k(x, z) + g_k(x, z) - \phi_k(x, z) \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{w\Phi(w, \tau)}, \end{aligned}$$

где C – нормирующая константа, а неизвестные функции $g_k(x, z)$ и $\phi_k(x, z)$ определяются следующими системами уравнений:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\phi_0(x) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v + x \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \phi_k(x, 0)}{\partial z} = R_0(x), \\ & \frac{\partial \phi_k(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \phi_k(x, 0)}{\partial z} + \phi_0(x)\kappa_k B_k(z) = 0, \quad k \neq n, \\ & \frac{\partial \phi_n(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \phi_n(x, 0)}{\partial z} + (\lambda_n + x)\phi_0(x)B_n(z) = -R_0(x)B_n(z), \end{aligned} \right.$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & -g_0(x) \left(\lambda_n + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_v + x \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial g_k(x, 0)}{\partial z} = a(x)R_0(x), \\ & \frac{\partial g_k(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial g_k(x, 0)}{\partial z} + g_0(x)\kappa_k B_k(z) = R_k(x, z)(a(x) - \lambda_n), \quad k \neq n, \\ & \frac{\partial g_n(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial g_n(x, 0)}{\partial z} + g_0(x)(\lambda_n + x)B_n(z) = \\ & = R_n(x, z)(a(x) - \lambda_n) + xR_0(x)B_n(z). \end{aligned} \right.$$

Для единственности решений дополним системы условиями:

$$\sum_{k=1}^N \phi_k(x) = -\phi_0(x), \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^N g_k(x) = -g_0(x).$$

Тогда решение системы (30) запишется в виде

$$\begin{aligned} \phi_n(x, z) &= \phi_0(x) \int_0^z (\lambda_n(1 - B_n(y) - x)) dy, \\ \phi_k(x, z) &= \phi_0(x) \kappa_k \int_0^z (1 - B_k(y)) dy, \quad k \neq n, \end{aligned}$$

откуда можно заметить, что при $z \rightarrow \infty$

$$(32) \quad \phi_k(x) = R'_k(x).$$

Аналогично из системы (31) можно получить:

$$\begin{aligned} g_k(x, z) &= g_0(x) \kappa_k \int_0^z (1 - B_k(y)) dy + \\ &+ (a(x) - \lambda_n) \int_0^z (R_k(x, y) - R_k(x)) dy, \quad k \neq n, \\ g_n(x, z) &= (\lambda_n + x) g_0(x) \int_0^z (\lambda_n(1 - B_n(y)) dy + \\ &+ (a(x) - \lambda_n) \int_0^z (R_n(x, y) - R_n(x)) dy - x R_0(x) \int_0^z ((1 - B_n(y)) dy, \end{aligned}$$

где

$$(33) \quad g_0(x) = R_0(x) \frac{(\lambda_n - a(x)) \left((\lambda_n + x) b_n^{(2)} + 2x b_n^{(1)} + (\lambda_n - a(x)) \right) \sum_{\substack{k=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_k b_k^{(2)}}{2 \left(1 + (\lambda_n + x) b_n^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ v \neq n}}^N \kappa_k b_k^{(1)} \right)},$$

и

$$b_k^{(1)} = \int_0^\infty x dB_k(x), \quad b_k^{(2)} = \int_0^\infty x^2 dB_k(x).$$

Последним шагом асимптотического анализа является нахождение функции $\Phi(w, \tau)$. Для этого подставим замены (27) в уравнение (26). После некоторых преобразований запишем полученное уравнение при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = & \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) \times \\ & \times \left(a(x) + 2x(R_0(x) - g_0(x)) - 2\lambda_n g_0(x) + \right. \\ & \left. + (2\phi_0(x)(x + \lambda_n) + 2R_0(x)) \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \frac{1}{w\Phi(w, \tau)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что $\Phi(w, \tau)$ определяется уравнением

$$(34) \quad \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} a'(x) + \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) b(x),$$

где

$$(35) \quad b(x) = a(x) + 2x(R_0(x) - g_0(x)) - 2\lambda_n g_0(x).$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (34) и обозначив

$$P(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwy} \Phi(w, \tau) dw,$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} (P(y, \tau) y a'(x)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (P(y, \tau) b(x)),$$

являющееся уравнением Фоккера–Планка для плотности распределения вероятностей $P(y, \tau)$ диффузионного процесса $y(\tau)$, который является решением стохастического дифференциального уравнения:

$$dy(\tau) = y(\tau) a^*(x) d\tau + \sqrt{b(x)} dw(\tau).$$

3.4. Результат асимптотически-диффузионного анализа

Объединяя результаты обеих асимптотик, введем процесс $z(\tau) = x(\tau) + \sqrt{\sigma_n} \times y(\tau)$, являющийся решением стохастического уравнения

$$dz(\tau) = a(z) + \sqrt{\sigma_n b(z)} dw(\tau),$$

где $w(\tau)$ – винеровский процесс.

Плотность распределения вероятностей $P(z, \tau)$ диффузионного процесса $z(\tau)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial P(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z} (P(z, \tau)a(z)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (P(z, \tau)\sigma_n b(z)).$$

Тогда стационарные вероятности процесса $z(\tau)$ вычисляются как

$$P(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left(\frac{\sigma_n}{2} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right).$$

Возвращаясь к цели исследования, обращаем внимание, что в результате применения метода маргинального асимптотически-диффузионного анализа предлагается аппроксимировать распределение вероятностей $i_n(t)$ числа заявок n -го класса на орбите в виде

$$(36) \quad P(i_n) \approx \frac{C}{b(\sigma_n i_n)} \exp \left(\frac{\sigma_n}{2} \int_0^{\sigma_n i_n} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right),$$

где $C = \text{const}$, получаемая из условия нормировки $\sum_{i_n=0}^{\infty} P(i_n) = 1$.

Заметим, что по формуле (36) могут быть вычислены маргинальные распределения для всех классов заявок, однако стоит помнить, что параметры $a(x)$, $b(x)$ в (22) и (35), а также $R_k(x)$, $g_k(x)$, $\phi_k(x)$ в (20), (32)–(33) будут различны для каждого класса.

Таким образом, получены асимптотические маргинальные распределения вероятностей числа заявок для выделенного класса, которые позволяют найти все необходимые характеристики функционирования рассмотренной системы, например, математическое ожидание числа заявок выделенного класса $m_n = \kappa_n - \lambda_n$, вероятность простоя прибора r_0 по формуле (12), моменты любого порядка и квантили нужного порядка и т.д.

4. Заключение

В статье исследована мультиклассовая RQ-система типа $M_n/GI_n/1$. Для ее исследования применен авторский метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа. В результате получено выражение для аппроксимации распределения вероятностей числа выделенного класса заявок на орбите, с помощью которого можно оценить любые характеристики функционирования системы. Стоит отметить, что в исследовании не устанавливаются какие-либо критерии, позволяющие «выделять» класс заявок. Таким образом, полученные в работе формулы могут быть использованы для расчета распределения вероятностей числа заявок каждого класса. В будущих исследованиях асимптотические результаты могут быть применены для моделирования и оптимизации реальных телекоммуникационных сетей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. Berlin: Springer, 2008.
2. *Phung-Duc T.* Retrial Queueing Models: A Survey on Theory and Applications // Stochastic Operations Research in Business and Industry. World Scientific Publisher. 2017. P. 1–26.
3. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. London: Chapman and Hall, 1997.
4. *Dudin A., Lee M., Dudina O., Lee S.* Analysis of Priority Retrial Queue With Many Types of Customers and Servers Reservation as a Model of Cognitive Radio System // IEEE Transact. Communicat. 2017. V. 65(1). P. 186–199.
5. *Gómez-Corral A.G.* A bibliographical guide to the analysis of retrial queues through matrix analytic techniques // Ann. Oper. Res. 2006. V. 141. 163–191.
6. *Artalejo J.R., Pozo M.* Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue // Ann. Oper. Res. 2002. V. 116. P. 41–56.
7. *Neuts M.F., Rao B.M.* Numerical investigation of a multiserver retrial model // Queueing Syst. 1990. V. 7. No. 2. P. 169–189.
8. *Степанов С.Н.* Оптимизация численного расчета характеристик многопоточковых моделей с повторными вызовами // Пробл. передачи информ. 1989. Т. 25:2. С. 67–78.
9. *Pakulova E., Ryndin A., Basov O., Struev D.* Principles of Constructing Polymodal Infocommunication Systems for Information Space User Service // IEEE 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT), Moscow, Russia. 2017. P. 1–5.
10. *Naumov V., Gaidamaka Yu., Yarkina N., Samouylov K.* Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems. Springer Nature. Switzerland, 2021.
11. *Nekrasova R.* Stability Analysis of a Multi-class Retrial Queue with General Retrials and Classical Retrial Policy // 2021 28th Conference of Open Innovations Association (FRUCT). Moscow, Russia. 2021. P. 328–333.
12. *Morozov E., Rumyantsev A., Dey S., Deepak T.G.* Performance analysis and stability of multiclass orbit queue with constant retrial rates and balking // Performance Evalut. 2019. V. 134. No. 102005.
13. *Avrachenkov K.* Stability and partial instability of multi-class retrial queues // Queueing Syst. 2022. V.100. No. 3–4. P. 177–179.
14. *Krishnamoorthy A., Joshua V.C., Mathew A.P.* A Retrial Queueing System with Multiple Hierarchical Orbits and Orbital Search // Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2018). Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham. 2018. V. 919. P. 224–233.
15. *Kim B., Kim J.* Proof of the conjecture on the stability of a multi-class retrial queue with constant retrial rates // Queueing Syst. 2023. V. 104. P. 175–185.
16. *Kim B., Kim J.* Stability of a multi-class multi-server retrial queueing system with service times depending on classes and servers // Queueing Syst. 2020. V. 94. P. 129–146.
17. *Shin Y.W., Moon D.H.* M/M/c Retrial Queue with Multiclass of Customers // Method. Comput. Appl. Probab. 2014. V. 16. P. 931–949.
18. *Иверсен В.Б., Степанов С.Н.* Оценка характеристик многопоточковых моделей с фиксированным числом повторений // АиТ. 2001. № 5. С. 105–115.

19. *Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S., Lizura O.* Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2019. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham. 2019. V. 11965. P. 207–222.
20. *Danilyuk E., Plekhanov A., Moiseeva S., Sztrik J.* Asymptotic Diffusion Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Servers // Axioms. 2022. V. 11. No. 699.
21. *Nazarov A., Fedorova E., Kostryukov N.* The Method of Marginal Asymptotic-Diffusion Analysis for Multiclass Retrial Queues // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM WRQ 2023. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham. 2024. V. 2163. P. 300–315.

Статъя представена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 01.08.2024

После доработки 01.12.2024

Принята к публикации 03.12.2024

Управление в технических системах

© 2025 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук (vnchest@yandex.ru),
Д.В. ШАТОВ, канд. техн. наук (dvshatov@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

Рассматриваются линейные многомерные объекты управления, подверженные действию неизвестных ограниченных внешних возмущений. Предлагается метод синтеза дискретных регуляторов по выходу, который обеспечивает желаемые или достижимые показатели качества: точность, быстродействие и запасы устойчивости по каждому контуру управления на входе объекта. Предлагаемый подход к синтезу основан на стандартной процедуре H_∞ -оптимизации, сформулированной особым образом. Робастные свойства синтезированных систем исследуются с помощью годографов Найквиста отдельных контуров управления, разомкнутых по входам объекта. Доказана абсолютная устойчивость замкнутой системы с секторными нелинейностями на входе объекта и связь с радиусами запасов устойчивости. Численный пример демонстрирует эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: линейные многомерные системы, синтез дискретных регуляторов, ограниченные внешние возмущения, ошибки регулирования, радиус запасов устойчивости, время регулирования, абсолютная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231025030059, EDN: IEKSYA

1. Введение

Цифровые регуляторы заняли главенствующее положение в промышленности, энергетике, авиации, робототехнике и многих других отраслях, поэтому задача синтеза дискретных регуляторов многомерных систем по инженерным показателям качества приобретает невиданную ранее актуальность и важность в связи с реальными запросами инженеров-проектировщиков.

Вместе с тем современные техники синтеза регуляторов по измеряемому выходу H_2 , H_∞ , L_1 (l_1), μ -синтеза, а также методы модального управления, как правило, учитывают лишь отдельные показатели качества либо не учитывают их вовсе.

В классической теории автоматического управления, которая базировалась на частотных методах, опирающихся на критерий Найквиста, инженерные показатели качества напрямую использовались при построении регуляторов одномерных систем [1, 2]. Эти результаты были обобщены во многом благодаря усилиям В.В. Солодовникова в знаменитом методе ЛАЧХ [3, 4],

который показал непревзойденную и по сей день практическую эффективность на протяжении последних 75 лет. В дискретном случае он приобрел законченный вид благодаря работам В.А. Бесекерского и др. [5, 6]. Однако уже в одномерном случае была очевидна противоречивость инженерных показателей качества, характеризующих точность, быстродействие и запасы устойчивости. К сожалению, метод ЛАЧХ по самой его сути невозможно в общем случае использовать для многомерных систем. Трудности математической формализации инженерных показателей качества и развитие соответствующего аппарата долгое время оставались вне поля зрения математиков, и только с появлением теории L_1 - (l_1 -) оптимизации [7, 8] и H_∞ -оптимизации [9–11] критерии точности (максимальная ошибка по каждой регулируемой переменной) при произвольных ограниченных внешних возмущениях и H_∞ -норма матрицы чувствительности стали использоваться в качестве показателей точности и робастности в теории многомерных систем. Вместе с тем анализ простейших примеров показывает [12], что l_1 -регуляторы дают максимально возможный коэффициент усиления разомкнутой системы при условии устойчивости замкнутой системы. Это, однако, ведет к малым запасам устойчивости по фазе и модулю, определяемым с помощью годографа Найквиста разомкнутой системы, что недопустимо на практике. Помимо этого, порядок дискретных l_1 -регуляторов может быть непредсказуемо высоким [8], что так же не приветствуется на практике и одновременно приводит к неизбежному снижению запасов устойчивости [12]. Непрерывные L_1 -регуляторы вообще имеют иррациональные передаточные функции [7], что сильно снижает их практический потенциал.

Метод инвариантных эллипсоидов [13] снял принципиальные ограничения реализуемости L_1 - (l_1 -) регуляторов, однако вопрос о запасах устойчивости по фазе и модулю, приемлемых с практической точки зрения, пока еще открыт в этом перспективном подходе.

В настоящей работе запасы устойчивости системы оцениваются радиусом запасов устойчивости [14, 15]. Он определяется максимальным радиусом круга с центром в критической точке $(-1, j0)$, который не пересекается годографом Найквиста разомкнутой системы, см., например, [16], где эта величина называется “stability radius”.

Синтез дискретных регуляторов по измеряемому выходу осложняется следующими важными факторами:

1. Даже регулятор по полному вектору состояния [12, 17], вообще говоря, не обеспечивает приемлемый на практике радиус запасов устойчивости. Это заведомо возможно только для устойчивых объектов при малом периоде дискретности.
2. Достижимая ошибка регулирования для дискретных регуляторов по полному вектору состояния (и тем более по выходу) ограничена снизу некоторой величиной, меньше которой не может обеспечить никакой линейный регулятор [18].

3. Даже в непрерывном случае быстроедействие системы (характеризуемое степенью устойчивости) ограничено абсолютным значением вещественной части нуля объекта, ближайшего к мнимой оси [16, 19, 20]. При этом увеличение степени устойчивости приводит к катастрофическому уменьшению радиуса запасов устойчивости, что неприменимо на практике. Аналогичные явления имеют место и в дискретном случае [12, 17].

Настоящая работа посвящена проблеме синтеза дискретных регуляторов для многомерных объектов по заданным или достижимым инженерным показателям качества: ошибке регулирования по каждой регулируемой переменной, времени регулирования и радиусу запасов устойчивости на входе объекта. Решение такой задачи опирается на специальным образом сконструированную задачу H_∞ -оптимизации. В этом смысле предлагаемый подход развивает результат работы [17] введением в рассмотрение неизмеряемых полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами (с ограниченной суммой амплитуд гармоник по каждой компоненте возмущения), частотами и неограниченным их числом. Такой класс внешних возмущений покрывает все реально действующие на практике сигналы, приводящие в системах стабилизации к отклонению регулируемых переменных от нуля [21]. Настоящая работа является расширенным изложением докладов авторов [22, 23].

2. Постановка задачи

Рассматривается управляемая и наблюдаемая дискретная модель непрерывного объекта управления, описываемая разностными уравнениями

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B[u(k) + w(k)], \\ y(k) &= Cx(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ – управление (вход объекта), $y(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ – измеряемый и одновременно регулируемый выход объекта (вход регулятора), $w(k) \in \mathbb{R}^m$ – вектор внешних возмущений. Матрицы объекта A, B, C известны.

Объект (1) замыкается дискретным стабилизирующим динамическим регулятором по выходу:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c y(k), \\ u(k) &= C_c x_c(k) + D_c y(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $x_c(k) \in \mathbb{R}^{n_c}$ – вектор состояния регулятора ($n_c \leq n$), и A_c, B_c, C_c, D_c – матрицы чисел.

Компоненты возмущения w являются ограниченными функциями:

$$(3) \quad w_i(k) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \sin(\omega_j k h + \phi_{ij}), \quad i = \overline{1, m},$$

где h – период дискретности. Амплитуды $w_{ij} \geq 0$, фазы ϕ_{ij} , $i = \overline{1, m}$ и частоты ω_j , $j = \overline{1, \infty}$ компонент внешнего возмущения неизвестны.

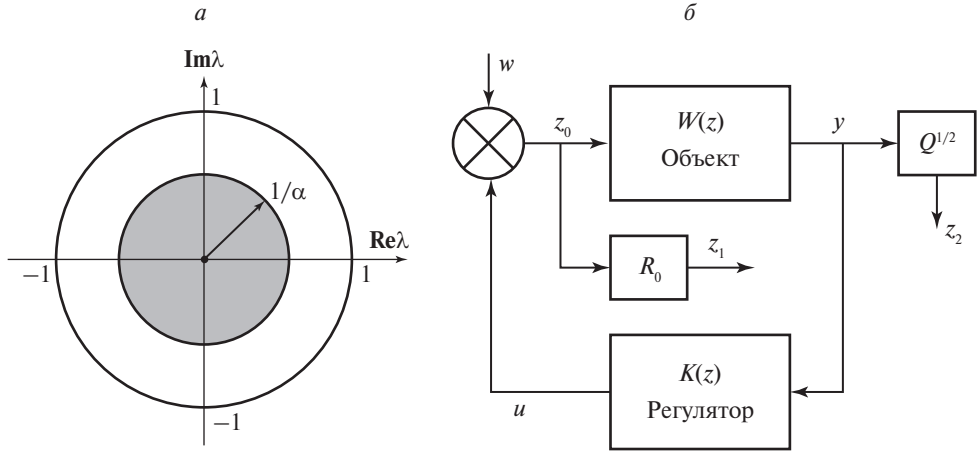


Рис. 1. *а* – Область расположения собственных чисел A_{cl} ; *б* – структурная схема замкнутой системы управления.

Предполагается, что внешнее возмущение ограничено в следующем смысле:

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \leq w_i^*, \quad i = \overline{1, m},$$

где w_i^* – заданные числа. Это означает, что $\forall k: |w_i(k)| \leq w_i^*$.

Ошибки по регулируемым переменным определяются следующими соотношениями:

$$(5) \quad y_{i,st} = \sup_{k \geq k_p} |y_i(k)|, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где k_p – число, определяющее время регулирования системы $t_p = k_p h$.

Число тактов k_p определяется степенью устойчивости дискретной системы $1/\alpha$, что означает выполнение условия:

$$|\lambda_i(A_{cl})| \leq \frac{1}{\alpha}, \quad i = \overline{1, n + n_c},$$

где $\lambda_i(\cdot)$ – собственные числа матрицы A_{cl} замкнутой системы (1), (2):

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}.$$

Геометрическая интерпретация последнего неравенства для $\lambda_i(A_{cl})$ приведена на рис. 1, *а*.

В практических задачах требуемое значение α выбирается исходя из желаемого значения k_p ($t_p = k_p h$) по условию [17]:

$$(6) \quad \alpha \approx e^{(3h)/t_p},$$

которое следует из известной связи $\alpha = e^{\beta h}$ между собственными значениями непрерывной и дискретной систем (имеется в виду, что степень устойчивости непрерывной системы β связана с временем регулирования приближенным соотношением $t_p \approx 3/\beta$). Соотношение (6) дает приемлемую с инженерной точки зрения точность оценки при условии, что среди собственных чисел матрицы A_{cl} нет кратных, которые лежат ближе всего к окружности радиуса $1/\alpha$, что, как правило, всегда выполняется в практических задачах.

Замкнутая система (1), (2) обладает радиусами запасов устойчивости $0 < r_i < 1, i = \overline{1, m}$ на физическом входе объекта, если для диагональной матрицы радиусов $R = \text{diag}[r_1, \dots, r_m]$ выполняется следующее частотное неравенство [22]:

$$(7) \quad \left[I + W(e^{-j\omega h}) \right]^T \left[I + W(e^{j\omega h}) \right] > R^2, \quad \omega \in [0, \pi/h],$$

где $W(z) = -K(z)W_0(z)$ – передаточная матрица системы (1), (2) с точками размыкания на физическом входе объекта, а $W_0(z) = C(zI - A)^{-1}B$ – передаточная матрица объекта по управлению, $K(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c + D_c$ – передаточная матрица регулятора.

Требования к точности системы выражаются неравенствами вида

$$(8) \quad y_{i,st} \leq y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $y_i^* > 0$ – заданные числа (желаемые ошибки регулирования).

Неравенства (8) не всегда являются реализуемыми (не для любых $y_i^*, i = \overline{1, m_2}$ можно найти соответствующий регулятор), так же как требования (6) и (7) для времени регулирования и радиусов запасов устойчивости. Все эти требования являются взаимно противоречивыми [12].

Задача 1. Найти стабилизирующий регулятор (2) такой, что:

1) *выполняются требования к точности:*

$$(9) \quad y_{i,st} \leq \gamma y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $\gamma > 0$ – некоторое достижимое число;

2) *система (1), (2) обладает некоторыми достижимыми радиусами запасов устойчивости $r_i, i = \overline{1, m}$ в неравенстве (7);*

3) *собственные числа матрицы A_{cl} замкнутой системы (1), (2) удовлетворяют условию $|\lambda_i(A_{cl})| \leq 1/\alpha, i = \overline{1, n + n_c}$, где $\alpha > 1$ – некоторое достижимое число.*

В условиях (9) коэффициент γ – некоторое число (обычно $\gamma > 1$), которое показывает степень завышенности исходных требований к точности (8) по сравнению с реально достижимыми (9).

3. Решение задачи, основанное на H_∞ -оптимизации

Для решения задачи 1 с помощью H_∞ -оптимизации необходимо представить уравнения замкнутой системы (1), (2) в терминах передаточных матриц:

$$(10) \quad \begin{aligned} y &= W_0(z)z_0, \quad u = K(z)y, \\ z_0 &= u + w, \quad z_1 = R_0z_0, \quad z_2 = Q^{1/2}y, \end{aligned}$$

где $z_1 \in \mathbb{R}^m$ и $z_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ – векторы регулируемых переменных, используемые при синтезе, причем z_1 определяет желаемые радиусы запасов устойчивости на входе объекта, а z_2 обеспечивает точность; $R_0 = \text{diag}[r_1^0, \dots, r_m^0]$, $r_i^0 \in (0, 1)$, $i = \overline{1, m}$ – матрица желаемых радиусов запасов устойчивости, $Q^{1/2}$ – диагональная весовая матрица. Система уравнений (10) изображена в виде структурной схемы на рис. 1,б.

Векторы w и z_0 связаны передаточной матрицей чувствительности по входу

$$T_{z_0w} = [I + W(z)]^{-1},$$

которая используется при синтезе для обеспечения запасов устойчивости (7).

Вектор регулируемых переменных $z_2 = Q^{1/2}y$ вводится для обеспечения требований к точности (8), (9). Он представляет собой вектор y , взвешенный диагональной матрицей $Q = \text{diag}[q_1, \dots, q_{m_2}]$ с положительными элементами $q_i > 0$, $i = \overline{1, m_2}$. Выбор элементов матрицы Q обеспечивает требуемую (или достижимую) точность по регулируемым переменным y_i , $i = \overline{1, m_2}$, что доказывается далее.

Введем расширенный вектор регулируемых переменных $z^\top = [z_1^\top, z_2^\top]$, а матрицу, связывающую z с вектором w , обозначим через T_{zw} , тогда

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{zw}w = \begin{bmatrix} T_{z_1w} \\ T_{z_2w} \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} R_0T_{z_0w} \\ Q^{1/2}T_{yw} \end{bmatrix} w,$$

где $T_{yw} = W_0(z)[I + W(z)]^{-1}$ – передаточная матрица, связывающая w и y .

Желаемое время регулирования обеспечивается, если собственные числа матрицы A_{cl} замкнутой системы (1), (2) удовлетворяют неравенству $|\lambda_i(A_{cl})| \leq 1/\alpha$. Для обеспечения этого условия используется прием [24]: матрицы объекта управления A , B заменяются на смещенные $\tilde{A} = \alpha A$, $\tilde{B} = \alpha B$, после чего ищется смещенный регулятор, стабилизирующий смещенную замкнутую систему:

$$(11) \quad \begin{aligned} |\lambda_i(\tilde{A}_{cl})| &= |\lambda_i(A_{cl})|\alpha < 1, \quad i = \overline{1, n + n_c}, \\ \tilde{A}_{cl} &= \begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{B}D_cC & \tilde{B}C_c \\ \tilde{B}_cC & \tilde{A}_c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\tilde{A}_c$, $\tilde{B}_c$, C_c , D_c – матрицы смещенного регулятора.

Регулятор по выходу (2) для исходной, не смещенной, задачи, который обеспечивает желаемую степень устойчивости системы (а также требования к запасам устойчивости и точности), имеет матрицы [17, 24]:

$$(12) \quad A_c = \tilde{A}_c/\alpha, \quad B_c = \tilde{B}_c/\alpha, \quad C_c, \quad D_c.$$

Замечание 1. В иностранной литературе хорошо известен аналог приема [24], но исключительно для регуляторов по полному вектору состояния (см., например, [25]). Для регуляторов же по измеряемому выходу в непрерывном и дискретном случаях такой подход впервые появился в отечественной литературе (см. [24] и библиографию там).

Пусть регулятор с матрицами $\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, C_c, D_c$ решает задачу минимизации H_∞ -нормы передаточной матрицы смещенной замкнутой системы (с матрицами $\tilde{A}, \tilde{B}$):

$$(13) \quad \|T_{zw}(e^{(-\beta+j\omega)h})\|_\infty < \gamma,$$

где γ – заданное или минимизируемое число.

Замечание 2. Если решена смещенная задача (13), то регулятор (2) с матрицами (12) также обеспечивает выполнение соответствующих частотных неравенств для несмещенной передаточной матрицы [17, 24], поэтому для решения смещенной задачи (13) справедливо

$$(14) \quad \|T_{zw}(e^{j\omega h})\|_\infty < \gamma,$$

тогда каждый блок этой матрицы удовлетворяет условию, аналогичному (14), в частности см. [26]:

$$(15) \quad \|R_0 T_{z_0 w}(e^{j\omega h})\|_\infty < \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{yw}(e^{j\omega h})\|_\infty < \gamma.$$

Первое неравенство в (15) можно представить в эквивалентной форме [17, 19]

$$[I + W(e^{-j\omega h})]^\top [I + W(e^{j\omega h})] > R^2, \quad \omega \in [0, \pi/h],$$

где $R = R_0/\gamma$ (см. [27]), и представляет собой целевое неравенство (7).

Второе неравенство в (15) имеет следующую эквивалентную форму:

$$(16) \quad T_{yw}^\top(e^{-j\omega h}) Q T_{yw}(e^{j\omega h}) < \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \pi/h].$$

Лемма 1. Пусть выполняется неравенство (16), тогда ошибки по регулируемым переменным устойчивой замкнутой системы (1), (2), подверженной действию возмущений из класса (3), (4), удовлетворяют неравенствам:

$$(17) \quad q_i y_{i,st}^2 < \gamma^2 \left(\sum_j^m w_j^* \right)^2, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Если выбрать элементы диагональной весовой матрицы Q согласно равенствам

$$(18) \quad q_i = \frac{\left(\sum_j^m w_j^*\right)^2}{(y_i^*)^2}, \quad i = \overline{1, m_2},$$

тогда из неравенств (17) следует выполнение целевых неравенств (9) поставленной задачи.

Суммируя, сформулируем главный результат статьи.

Теорема 1. Регулятор (2) с матрицами (12) разрешает задачу 1, если коэффициенты весовой матрицы Q в смещенной H_∞ -задаче (13) выбраны согласно равенствам (18). Радиусы запасов устойчивости на входе объекта управления определяют диагональную матрицу $R = R_0/\gamma$, где γ получено в результате решения задачи (13).

Здесь число γ (обычно $\gamma \geq 1$) определяет также и степень достижимости радиусов запасов устойчивости, определяемых диагональной матрицей R_0 .

Можно заметить, что переход от неравенств (13) к (14), (15) добавляет свойство достаточности представленным результатам.

4. Физическая интерпретация радиусов запасов устойчивости

Важный с практической точки зрения результат можно получить, изучая матричное частотное неравенство (7), при размыкании не всех контуров управления по входу, а только по одному i -му входу. Такой подход к анализу запасов систем соответствует инженерной практике, так как допускает экспериментальную проверку на реальном объекте. Введем следующие обозначения: $w_i(z)$ – для передаточной функции системы, разомкнутой по i -му входу, и $t_i(z)$ – для передаточной функции, связывающей i -ю компоненту вектора w с i -й компонентой вектора z_1 (когда все остальные входы на рис. 1,б равны нулю). Схематично такое размыкание можно представить блочной диаграммой в левой части рис. 2, где $\tilde{w}(z)$ – передаточная функция, полученная замыканием всех обратных связей на рис. 1,б, кроме одной i -й.

Правая часть рис. 2 иллюстрирует эквивалентный вид, включающий $w_i(z)$, при этом очевидно $w_i(z) = -\tilde{w}(z)$.

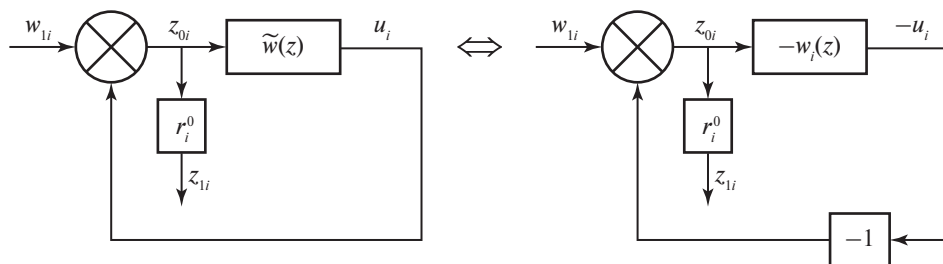


Рис. 2. Блок-схема с передаточной функцией $w_i(z)$.

Передаточные функции $t_i(z)$ и $w_i(z)$ связаны между собой соотношением

$$(19) \quad t_i(z) = r_i^0 [1 + w_i(z)]^{-1}.$$

С другой стороны, передаточная функция (19) представляет собой i -й диагональный элемент передаточной матрицы $T_{z_1 w}$. Эта матрица удовлетворяет первому неравенству в (15), тогда для ее i -го диагонального элемента можно записать [26]

$$|t_i(e^{-j\omega h})| < \gamma \Leftrightarrow t_i(e^{-j\omega h})t_i(e^{j\omega h}) < \gamma^2,$$

что, учитывая (19), окончательно приводит к скалярному аналогу (7):

$$[1 + w_i(e^{-j\omega h})][1 + w_i(e^{j\omega h})] > r_i^2, \quad i = \overline{1, m}, \quad \omega \in [0, \pi/h],$$

где $r_i = r_i^0/\gamma$.

Геометрическая интерпретация этого условия [17, 26] приводит к следующему результату.

Теорема 2. Пусть выполняется матричное частотное неравенство (7), тогда годограф Найквиста системы (1), (2), разомкнутой по i -му входу объекта, не касается круга радиусом r_i с центром в критической точке $(-1, j0)$.

Радиус запасов устойчивости r_i может быть определен через реальный эксперимент, что критически важно в практических приложениях. Если разомкнутая система на рис. 2 устойчива, то можно напрямую построить годограф Найквиста для $w_i(e^{j\omega h})$. В противном неустойчивом случае необходимо снять частотную характеристику замкнутой системы, изображенной на рис. 2, которая представляет собой передаточную функцию $t(e^{j\omega h})$, связывающую i -ю компоненту вектора w_1 с i -й компонентой вектора z_0 : $t(z) = [1 + w_i(z)]^{-1}$. Тогда радиус запасов устойчивости равен $r_i = 1/\|t\|_\infty$, см. [11, 15–17], т.е. он определяется обратным значением максимума модуля частотной характеристики функции чувствительности $t(e^{j\omega h})$ контура, изображенного на рис. 2.

Согласно теореме 2 годограф Найквиста $w(e^{j\omega h})$ не пересекает закрытый интервал вещественной оси $[-1 - r_i, -1 + r_i]$. В свою очередь круговой критерий абсолютной устойчивости [28] утверждает, что в этом случае система (1), (2) сохраняет устойчивость, если в i -й входной канал объекта вводится секторная нестационарная нелинейность из сектора $\left[\frac{1}{1+r_i}, \frac{1}{1-r_i}\right]$. Например, это может быть нестационарный коэффициент усиления $l_i(t)$, который может менять свое значение в указанном интервале произвольным образом.

Многомерный круговой критерий позволяет усилить этот результат на случай, когда нелинейности вводятся в каждом входном канале. Уравнения замкнутой системы переписываются в следующей форме:

$$(20) \quad u = -W(z)\zeta, \quad \zeta = u.$$

Такая система асимптотически устойчива (принимая во внимание метод построения регулятора (2)), так что условие минимальной устойчивости кругового критерия выполняется. Второе (линейное) уравнение в (20) заменяется на векторную нелинейность:

$$(21) \quad \zeta = \phi[k, u(k)],$$

где каждая компонента нестационарной вектор-функции $\zeta \in \mathbb{R}^m$ лежит в секторе:

$$(22) \quad \alpha_i \leq \frac{\phi_i[k, u_i(k)]}{u_i(k)} \leq \beta_i, \quad \phi_i[k, 0] = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\alpha_i < 1$ и $\beta_i > 1$ – нижняя и верхняя границы секторной нелинейности.

Согласно круговому критерию [29, 30] для абсолютной устойчивости системы (20)–(22) требуется выполнение следующего частотного неравенства:

$$(23) \quad \operatorname{Re} \left\{ [I + \alpha W(e^{-j\omega h})]^\top \tau [I + \beta W(e^{j\omega h})] \right\} > 0, \quad \omega \in [-\pi/h, \pi/h],$$

где $\operatorname{Re} \{Y\} = [Y^\top (e^{-j\omega h}) + Y(e^{j\omega h})]/2$ – выделенная эрмитова часть комплексной матрицы Y . Матрица τ – положительно-определенная диагональная матрица, $\alpha = \operatorname{diag} \{\alpha_i\}$ и $\beta = \operatorname{diag} \{\beta_i\}$, $i = \overline{1, m}$ – диагональные матрицы.

Условие (23) с матрицами $\alpha = \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{1+r_i} \right\}$, $\beta = \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{1-r_i} \right\}$ и $\tau = \operatorname{diag} \{(1+r_i)(1-r_i)\}$, $i = \overline{1, m}$ приводят к неравенству

$$\operatorname{Re} \left\{ [I + R + W(e^{-j\omega h})]^\top [I - R + W(e^{j\omega h})] \right\} > 0, \quad \omega \in [-\pi/h, \pi/h],$$

где $R = \operatorname{diag} \{r_i\}$ – диагональная матрица. Последнее неравенство приводит к следующему:

$$\operatorname{Re} \left\{ [I + W(e^{-j\omega h})]^\top [I + W(e^{j\omega h})] - R^2 + V(e^{j\omega h}) \right\} > 0, \quad \omega \in [-\pi/h, \pi/h],$$

где косо-эрмитова матрица $V(e^{j\omega h}) = RW(e^{j\omega h}) - W^\top(e^{j\omega h})R$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \{V(e^{j\omega h})\} = 0$. Это неравенство может быть представлено в форме (7), что приводит к следующему результату.

Теорема 3. Пусть задача 1 решена и/или матричное неравенство (7) выполнено, тогда нелинейная система (1), (2), (12) с секторными нестационарными нелинейностями (21) из класса (22) с $\alpha_i = 1/(1+r_i)$ и $\beta_i = 1/(1-r_i)$, $i = \overline{1, m}$, которые введены по каждому физическому входному каналу объекта (1), абсолютно устойчива (для $w = 0$).

В частном случае нелинейности могут рассматриваться в качестве нестационарных коэффициентов усиления $l_i(k)$: $\zeta_i(k) = l_i(k)u_i(k)$ с границами α_i и β_i , $i = \overline{1, m}$ из теоремы 3, которые могут независимо и произвольно менять свои значения в указанных интервалах. Это подчеркивает робастные свойства синтезируемых систем.

5. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу синтеза регулятора для дискретизированной модели многодвигательного электропривода трубозлектросварочного агрегата (ТЭСА), использовавшейся в непрерывном времени в [21, 31]. Подобные системы имеют ясное практическое применение и известны в литературе как параллельные системы, см. раздел “Parallel systems” в [32, гл. 11].

На рис. 3 показана структурная блок-схема ТЭСА. Управления u_1 и u_2 представляют собой напряжения, подаваемые на тиристорные преобразователи, которые моделируются инерционными звеньями с параметрами $k_{\text{тир}i}$ и $T_{\text{тир}i}$, $i = 1, 2$ соответственно. Их выходы x_i , $i = 1, 2$, – выходные напряжения тиристорных преобразователей, подаваемые в якорные цепи двигателей, которые моделируются стандартным образом, используя параметры T_{ei} и k_i , $i = 1, 2$, – электромагнитные постоянные времени якорных цепей и соответствующие коэффициенты передачи; c_{mi} и c_{ei} , $i = 1, 2$, – конструктивные постоянные двигателей. Состояния x_3 и x_4 представляют собой якорные токи приводных двигателей. Моменты, развиваемые двигателями, обозначаются как $M_i = c_{mi}x_{i+2}$, $i = 1, 2$; $f = M_H$ – суммарный момент сопротивления нагрузки, J – суммарный момент инерции, приведенный к одному из валов двигателей. Состояние $x_5 = \omega$ – угловая скорость валов двигателей (главная регулируемая переменная). Измеряемыми переменными являются токи двигателей и угловая скорость их валов. Численные эксперименты показали, что если в качестве регулируемой переменной рассматривать только угловую скорость двигателей $y_3 = x_5$, то требование равнонагруженности двигателей может не выполняться и, самое главное, запасы устойчивости на выходе объекта по измеряемым переменным $y_1 = x_3$ и $y_2 = x_4$ (токам двигателей) могут быть весьма малыми [33], что недопустимо на практике. Поэтому в качестве регулируемых выбраны $y_1 = x_3$, $y_2 = x_4$ и $y_3 = x_5$. Конкретные числовые параметры модели описаны в [33].

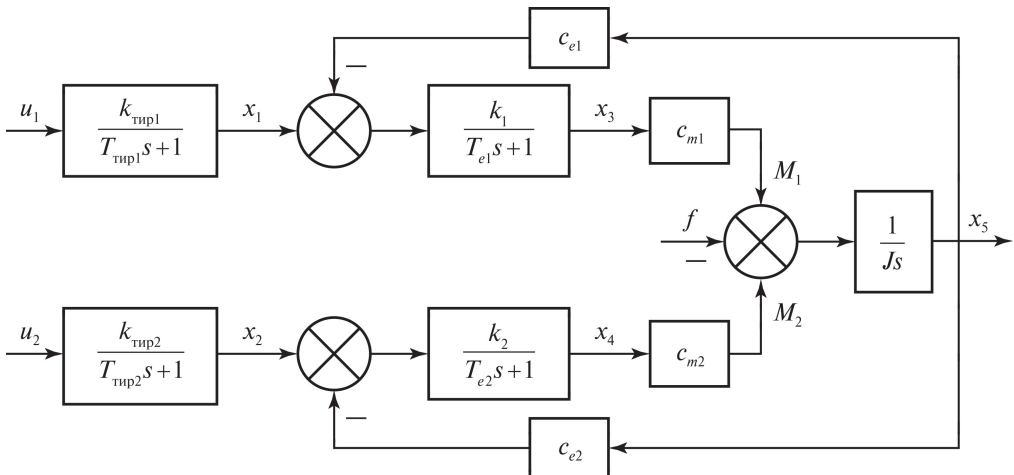


Рис. 3. Блок-схема ТЭСА.

Отметим важную особенность этой модели: управления u_1 и u_2 и внешнее возмущение приложены в существенно разных точках структурной схемы на рис. 3. Это не позволяет напрямую использовать описанный выше подход к синтезу. При этом внутренние обратные связи, образуемые коэффициентами c_{ei} , $i = 1, 2$, уменьшают влияние возмущения f на главную регулируемую переменную $x_5 = \omega$ – угловую скорость валов двигателей. Если этими связями пренебречь, что ухудшает объект управления с точки зрения обеспечения точности, то, выделив из $f = f_1 + f_2$ моменты сопротивления f_1 и f_2 , приложенные соответственно к первому и второму двигателю (как фактически и происходит на практике) и полагая $f_1 = f_2$, легко привести эти возмущения ко входам объекта u_1 и u_2 в виде возмущений w_1 и w_2 . В этом случае границы возмущений f_1^* и f_2^* пересчитываются в границы w_1^* и w_2^* по формулам

$$w_i^* = \frac{f_i^*}{k_i c_{mi} k_{тиpi}}, \quad i = 1, 2,$$

что справедливо, если f_1 и f_2 – константы. Далее показано, что наихудшее возмущение для замкнутой системы с регулятором, построенным согласно предложенному в статье подходу, действительно мало отличается от ступенчатого по отношению к величине ошибки регулирования.

Уравнения непрерывной модели ТЭСА в пространстве состояний имеют вид

$$\dot{x} = Ax + B_2 u + B_1 f, \quad y = Cx,$$

где соответствующие матрицы имеют следующие числовые значения:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -83,33 & 0 & 0 & 0 \\ 137,81 & 0 & -11,29 & 0 & -1123,16 \\ 0 & 132,46 & 0 & -11,07 & -1101,13 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,03 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 16120 & 0 \\ 0 & 13702 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Описанная система дискретизируется с периодом $h = 0,01$ с.

В соответствии с задачей 1 к показателям качества замкнутой системы предъявляются следующие требования:

- желаемые ошибки по регулируемым переменным при $|f| \leq f^* = 600$ Нм:

$$y_1^* = y_2^* = 375 \text{ А}, \quad y_3^* = 1 \text{ рад/с},$$

также к системе дополнительно предъявляется требование равнонагруженности двигателей $y_{1,st} \approx y_{2,st}$;

- обеспечить в системе достижимые радиусы запасов устойчивости по управлениям u_1 и u_2 ;

- желаемое быстродействие системы $t_p = 0,25$ с., что дает $\alpha = e^{(3h)/t_p} = 1,0618$ и, следовательно, $|\lambda_i(A_{cl})| < 1/\alpha = 0,9418$.

Синтез регулятора проводился в среде MATLAB, где была сформирована и решена H_∞ -задача (13). Для формирования диагональной весовой матрицы $Q^{1/2}$ найдем границы эквивалентных внешних возмущений w_i , $i = 1, 2$, приложенных согласно с управлениями. Используя найденные ранее формулы для w_i^* , $i = 1, 2$, получим

$$w_1^* = \frac{f_1^*}{k_1 c_{m1} k_{\text{тир1}}} = 0,0188 \text{ В}, \quad w_2^* = \frac{f_2^*}{k_2 c_{m2} k_{\text{тир2}}} = 0,0185 \text{ В},$$

где $f_1^* = f_2^* = 300$ Нм, а параметры приводов соответствуют [33]: $k_1 = 12,21$ 1/Ом, $c_{m1} = 8,1$ Нм/А, $k_{\text{тир1}} = 161,2$ и $k_2 = 11,965$ 1/Ом, $c_{m2} = 8,262$ Нм/А, $k_{\text{тир2}} = 164,424$. Окончательно согласно (18) для весовых коэффициентов получим

$$q_1^{1/2} = \frac{w_1^* + w_2^*}{y_1^*} \approx 10^{-4} \text{ Ом}, \quad q_2^{1/2} = q_1^{1/2} \approx 10^{-4} \text{ Ом}, \quad q_3^{1/2} = \frac{w_1^* + w_2^*}{y_3^*} = 0,037 \frac{\text{Вс}}{\text{рад}}.$$

Матрица R_0 желаемых радиусов запасов устойчивости по входу выбрана как

$$R_0 = \text{diag} [r^0 \quad r^0], \quad r^0 = 0,7.$$

В результате решения H_∞ -задачи был найден дискретный регулятор $K(z)$, матрицы которого в пространстве состояний имеют вид:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0,345956 & -0,009928 & -0,000697 & 0,0025 & -0,056187 \\ -0,008343 & -0,767521 & -0,017857 & -0,047834 & 0,007471 \\ 0,073728 & -0,017642 & -0,698692 & -6,373 \times 10^{-5} & -0,009095 \\ -0,100859 & 0,798642 & -0,001513 & 0,030154 & -0,088679 \\ 2,788025 & 0,022924 & 0,041603 & 0,024368 & -0,465253 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0,000617 & -0,017424 & -2,871137 \\ 0,792006 & -1,103803 & 1,684791 \\ -0,99029 & -0,770164 & 12,026577 \\ -0,582481 & 0,746858 & -0,299745 \\ 0,011564 & 0,039367 & 11,985945 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0,006534 & 0,005311 \\ 0,000239 & -0,001499 \\ -0,002763 & -0,002579 \\ 0,000115 & -9,579 \times 10^{-5} \\ -0,000843 & -0,001116 \end{bmatrix}^\top,$$

$$D_c = \begin{bmatrix} -0,002889 & -0,001835 & -5,217 \times 10^{-6} \\ -0,001533 & -0,003218 & -4,493 \times 10^{-6} \end{bmatrix},$$

при этом $\gamma = 0,866$, что дает гарантированный радиус запасов устойчивости на входах объекта $r_1 = r_2 = r^0/\gamma = 0,808$ и является весьма значительным с инженерной точки зрения. Фактические значения r_1 и r_2 будут определены ниже.

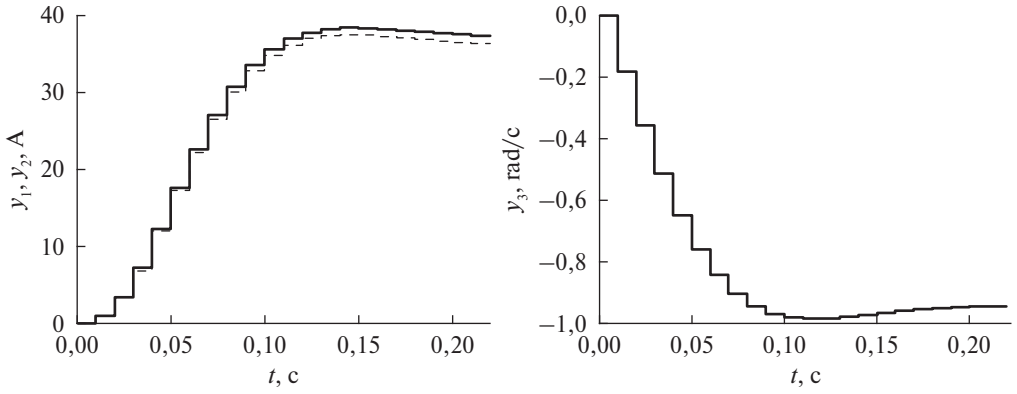


Рис. 4. Моделирование замкнутой системы при $f = 600$ Нм: слева – выходы y_1 и y_2 , справа – y_3 .

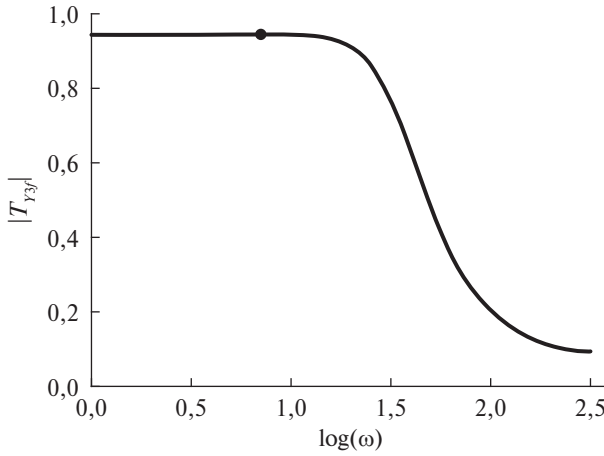


Рис. 5. Модуль частотной характеристики $|T_{y_3f}|$.

Собственные значения матрицы замкнутой системы A_{cl} удовлетворяют неравенству

$$\max |\lambda_i(A_{cl})| = 0,8019 < 1/\alpha,$$

из которого следует, что требования к быстродействию системы удовлетворены.

Результаты моделирования замкнутой системы при действии ступенчатого внешнего возмущения $f = 600$ Нм показаны на рис. 4. Графики переходных процессов (слева изображены сплошной линией – y_1 , прерывистой – y_2 , справа – y_3) демонстрируют, что требования к точности выполняются по всем регулируемым переменным, а для y_1 и y_2 также выполняется требование равнонагруженности приводов. Этот же рисунок демонстрирует, что фактическое время регулирования соответствует заданному желаемому $t_p = 0,25$ с.

На рис. 5 изображена амплитудно-частотная характеристика передаточной функции замкнутой системы от внешнего возмущения к главной ре-

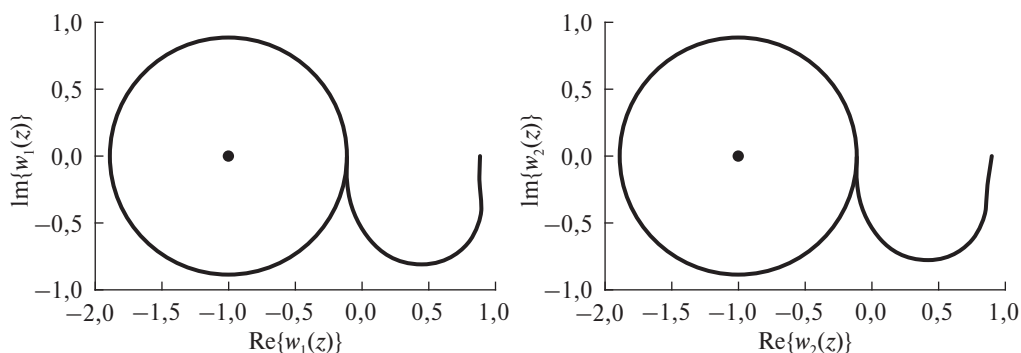


Рис. 6. Радиусы запасов устойчивости и годографы Найквиста (по входам): слева – $w_1(z)$, справа – $w_2(z)$.

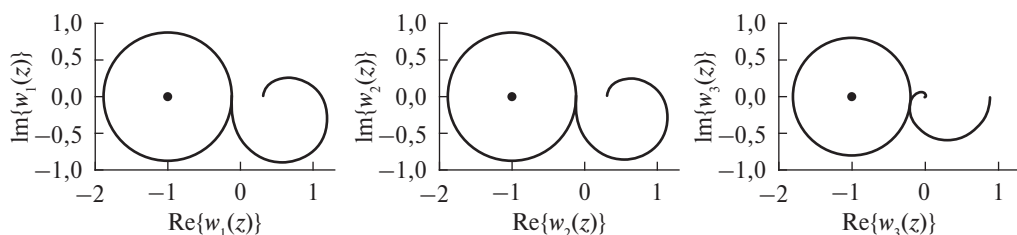


Рис. 7. Радиусы запасов устойчивости и годографы Найквиста (по выходам).

гулируемой переменной $|T_{y_3f}|$ (промасштабированная амплитудой возмущения 600). Ее максимум приходится на частоту $\omega = 7,14$ рад/с и равняется 0,945 рад/с, при этом значение модуля частотной характеристики для ступенчатого возмущения (при $\omega = 0$) равно 0,944 рад/с, т.е. ошибка при наихудшем возмущении действительно мало отличается от ошибки при ступенчатом возмущении, как и было оговорено ранее.

Заметим, что установившаяся ошибка по главной регулируемой переменной оказалась весьма близкой к заданной, что говорит о невысокой степени достаточности метода синтеза по этому показателю.

Фактические робастные свойства замкнутой системы на входе и выходе определяются с помощью годографов Найквиста разомкнутой системы, построенных при размыкании в соответствующих точках.

На рис. 6 показаны годографы Найквиста разомкнутой системы: слева при размыкании по входу u_1 , справа – u_2 . На рис. 6 показаны также критические точки $(-1, j0)$, вокруг которых построены окружности с радиусами слева $r_1 = 0,881$, справа $r_2 = 0,889$, которые определяют фактические радиусы запасов устойчивости на входе объекта управления.

На рис. 7 также показаны годографы Найквиста системы при размыкании по выходам: слева направо изображены соответственно случаи размыкания по y_1 , y_2 и y_3 . Как и для входов, на рис. 7 изображены окружности, радиусы

которых равны соответствующим фактическим радиусам запасов устойчивости по выходам: $r_1 = 0,882$, $r_2 = 0,887$, $r_3 = 0,803$.

Отметим, что синтезированный регулятор обеспечивает высокие запасы устойчивости по всем входам и выходам.

Отдельно заметим, что системы, разомкнутые по отдельным входам и выходам объекта, устойчивы, что весьма важно при возможном насыщении соответствующих сигналов и выходе их на полку.

Следует особо подчеркнуть, что построенный дискретный регулятор обеспечивает значительно более высокие радиусы запасов устойчивости по всем управляющим и измеряемым переменным (кроме главной – угловой скорости), нежели построенные ранее для данного объекта непрерывные регуляторы [21, 31, 33]. В частности, в [21] радиус запасов устойчивости по всем выходам (где он и обеспечивался) и входам составил величину порядка 0,45, а по главной регулируемой переменной – 0,99.

6. Заключение

В статье предложен подход к синтезу дискретных регуляторов по выходу многомерных систем, которые обеспечивают желаемые или достижимые показатели качества управления: ошибки по каждой регулируемой переменной, время регулирования и радиусы запасов устойчивости на входе объекта управления.

Класс внешних возмущений, рассматриваемых в статье, достаточно широк и охватывает поэлементно ограниченные функции $\forall k |w_i(k)| \leq w_i^*$, $i = \overline{1, m}$. Надо отметить, что непрерывным прообразом таких возмущений являются непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции времени, что позволяет их представить абсолютно сходящимся рядом Фурье [21], подобные возмущения только и встречаются в инженерной практике.

Укажем на некоторые положительные черты метода синтеза, выгодно отличающие его от известных:

1. Решение задачи сводится к стандартной дискретной процедуре H_∞ -оптимизации, в рамках которой даны аналитические формулы для выбора весовых коэффициентов функционала оптимизации по заданной точности.

2. Дана весьма важная с инженерной точки зрения физическая интерпретация частотного матричного неравенства для передаточной матрицы разомкнутой системы (гарантирующего в отличие от [21] собственные индивидуальные радиусы запасов устойчивости) на языке годографов Найквиста разомкнутой системы по i -му входу объекта.

3. Доказана абсолютная устойчивость замкнутой системы с секторными нелинейностями, которые могут присутствовать на всех физических входах объекта, причем размер сектора нелинейности по каждому входу однозначно определяется радиусами запасов устойчивости, гарантируемыми построенным регулятором, что также важно с инженерной точки зрения.

4. Порядок регулятора не превышает порядка объекта, что весьма ценно в практических приложениях.

5. Степень достаточности метода существенно ниже ранее предложенных [21, 31] за счет двукратного уменьшения числа блочных элементов передаточной матрицы замкнутой системы (13), к которой применяется техника H_∞ -оптимизации.

Последнее стало возможным благодаря приложению внешнего возмущения согласно с управлением. Это условие можно считать выполненным для подавляющего большинства электромеханических систем, поскольку физически управление с цифрового регулятора не прямо подается на объект управления, а через исполнительное устройство, которое является усилителем мощности с коэффициентом усиления много больше единицы. Это объясняет существенно более значительное влияние возмущения, приложенного согласно с управлением, на регулируемые переменные, нежели возмущения, приложенного как момент нагрузки. Предложенный подход к синтезу регуляторов иллюстрируется примером, непосредственно связанным с инженерной практикой (ТЭСА – агрегат, работающий на Электростальском заводе тяжелого машиностроения).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Вынужденные колебания (при $k \rightarrow \infty$) на выходе системы (1), (2) описываются выражением:

$$(П.1) \quad y_i(k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_i(\omega_j) \sin(\omega_j kh + \phi_i(\omega_j)), \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $a_i(\omega_j) \geq 0$ и $\phi_i(\omega_j)$ – соответственно амплитуды и фазы колебаний на выходе объекта, вызванные j -й гармоникой во входном сигнале (3).

Сигнал (П.1) описывает установившийся процесс на выходе объекта. В момент времени $t_p = k_p h$ он отличается от фактического значения выхода объекта не более чем на 5% из-за дискретной функции $e_i(k)$, которая сходится к нулю со скоростью геометрической прогрессии, поэтому в дальнейшем выходной сигнал объекта $y_i(k)$ рассматривается без этих составляющих.

Амплитуды колебаний каждой координаты вектора y с частотой ω_j в (П.1) представляют собой абсолютные значения соответствующих компонент комплексно-сопряженных векторов $T_{yw}(e^{j\omega_j h})w_+^{(j)}$ и $T_{yw}(e^{-j\omega_j h})w_-^{(j)}$, где

$$\begin{aligned} w_+^{(j)} &= [w_{1j}e^{j\phi_{1j}}, w_{2j}e^{j\phi_{2j}}, \dots, w_{mj}e^{j\phi_{mj}}]^\top, \\ w_-^{(j)} &= [w_{1j}e^{-j\phi_{1j}}, w_{2j}e^{-j\phi_{2j}}, \dots, w_{mj}e^{-j\phi_{mj}}]^\top. \end{aligned}$$

В самом деле можно переписать j -ю гармонику входного вектора w как $(w_+^{(j)}e^{j\omega_j kh} - w_-^{(j)}e^{-j\omega_j kh})/(2j)$.

Ищем частное решение $x_{cl}(k)$ уравнений замкнутой системы (1), (2) при $w(k) = w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh}$, обозначая уравнения замкнутой системы следующим образом:

$$(П.2) \quad \begin{aligned} x_{cl}(k+1) &= A_{cl}x_{cl}(k) + B_{cl}w(k), \\ y(k) &= C_{cl}x_{cl}(k), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где матрица A_{cl} описана ранее, $B_{cl} = [B^\top, 0^\top]^\top$, $C_{cl} = [C, 0]$. Подставляя $w(k) = w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh}$ в первую формулу в (П.2), получаем

$$x_{cl}(k+1) = A_{cl}x_{cl}(k) + B_{cl}w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh}.$$

Частное решение системы представляется в форме $x_{cl}(k) = x^{(j)} e^{j\omega_j kh}$, где $x^{(j)} \in \mathbb{C}^{n+n_c}$ – вектор комплексных чисел, тогда $x_{cl}(k+1) = x^{(j)} e^{j\omega_j (k+1)h} = x^{(j)} e^{j\omega_j h} e^{j\omega_j kh}$. После подстановки последнего выражения в (П.2) имеем

$$x^{(j)} e^{j\omega_j h} e^{j\omega_j kh} = A_{cl}x^{(j)} e^{j\omega_j kh} + B_{cl}w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh},$$

что после некоторых упрощений дает

$$x^{(j)} = \left(e^{j\omega_j kh} I - A_{cl} \right)^{-1} B_{cl}w_+^{(j)}.$$

Тогда $x_{cl}(k) = \left(e^{j\omega_j kh} I - A_{cl} \right)^{-1} B_{cl}w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh}$ и, учитывая $y(k) = C_{cl}x_{cl}(k)$, можно записать:

$$y_+(k) = T_{yw}(e^{j\omega_j h})w(k),$$

где $T_{yw}(e^{j\omega_j h}) = C_{cl} \left(e^{j\omega_j kh} I - A_{cl} \right)^{-1} B_{cl}$ – передаточная матрица от w к y . По аналогии для $w(k) = w_-^{(j)} e^{-j\omega_j kh}$ можно получить $y_-(k) = T_{yw}(e^{-j\omega_j h})w_-^{(j)} e^{-j\omega_j kh}$.

Согласно принципу суперпозиции для j -й гармоники выходного вектора y с компонентами из (П.1) выводится

$$(y_+ - y_-)/(2j) = \left[T_{yw}(e^{j\omega_j h})w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh} - T_{yw}(e^{-j\omega_j h})w_-^{(j)} e^{-j\omega_j kh} \right] / (2j).$$

Очевидно, что $a_i^2(\omega_j) = y_{i-} - y_{i+}$, где y_{i-} и y_{i+} соответственно i -ые компоненты векторов y_- и y_+ . Тогда, принимая во внимание диагональную структуру матрицы Q , можно записать:

$$\sum_{i=1}^{m_2} q_i a_i^2(\omega_j) = y_-^\top Q y_+ = w_-^{(j)\top} T_{yw}^\top(e^{-j\omega_j h}) Q T_{yw}(e^{j\omega_j h}) w_+^{(j)},$$

и рассматривая правую часть неравенства (16), получаем

$$\sum_{i=1}^{m_2} q_i a_i^2(\omega_j) \leq \gamma^2 w_-^{(j)\top} w_+^{(j)} = \gamma^2 \sum_{p=1}^m w_{pj}^2,$$

тогда $q_i a_i^2(\omega_j) \leq \gamma^2 w_-^{(j)\top} w_+^{(j)} = \gamma^2 \sum_{p=1}^m w_{pj}^2$, $i = \overline{1, m_2}$.

После извлечения квадратных корней из обеих частей последнего неравенств получаем:

$$\sqrt{q_i}a_i(\omega_j) \leq \gamma \sqrt{\sum_{p=1}^m w_{pj}^2} \leq \gamma \sqrt{\left(\sum_{p=1}^m w_{pj}\right)^2}, \quad i = \overline{1, m_2},$$

откуда следует, что $\sqrt{q_i}a_i(\omega_j) \leq \gamma \sum_{p=1}^m w_{pj}$, $i = \overline{1, m_2}$. Просуммировав по всем частотам, имеем

$$\sqrt{q_i} \sum_{j=1}^{\infty} a_i(\omega_j) \leq \gamma \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} w_{pj}, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Далее, учитывая $y_{i,st} \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_i(\omega_j)$, $i = \overline{1, m_2}$ и (4), окончательно получим:

$$\sqrt{q_i}y_{i,st} \leq \gamma \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} w_{pj} \leq \gamma \sum_{p=1}^m w_p^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

что подразумевает (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления: автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980.
2. *MacFarlane A.G.J.* The development of frequency-response methods in automatic control // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. 24. No. 2. P. 250–265.
3. Основы автоматического регулирования / под ред. Солодовникова В.В. М.: Гос. научн.-техн. изд-во машиностроит. лит-ры, 1954.
4. *Солодовников В.В.* Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 1,2. М.: Машиностроение, 1967.
5. *Бесекерский В.А., Фабрикант Е.А.* Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. Л.: Судостроение, 1968.
6. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.
7. *Барабанов А.Е.* Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996.
8. *Dahleh M., Diaz-Bobillo I.J.* Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach. N.J.: Prentice-Hall, 1995.
9. *Zhou K., Doyle J., Glover K.* Robust and Optimal Control. N.J.: Prentice-Hall, 1996.
10. *Zhou K., Doyle J.* Essentials of Robust Control. N.J.: Prentice-Hall, 1998.
11. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. N.J.: John Wiley & Sons, 2006.

12. Честнов В.Н. Фундаментальные особенности дискретных систем управления и достижимые инженерные показатели качества // Материалы 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). 2024. С. 75–79.
13. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
14. Александров А.Г. Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1980. С. 3–14.
15. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ -оптимизации // АиТ. 1999. № 7. С. 100–109.
Chestnov V.N. Synthesis of Controllers for Multivariate Systems with a Given Radius of Stability Margin by the H_∞ -optimization Method // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 986–993.
16. Åström K.J., Murray R.M. Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. N.J.: Princeton University Press, 2008.
17. Честнов В.Н. Синтез дискретных H_∞ -регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости и времени регулирования // АиТ. 2014. № 9. С. 65–82.
Chestnov V.N. Synthesis of Discrete H_∞ -Controllers with Given Stability Margin Radius and Settling Time // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 9. P. 1593–1607.
18. Честнов В.Н. Предельно достижимая точность линейных систем с дискретными регуляторами // АиТ. 2014. № 2. С. 193–214.
Chestnov V.N. Maximum Achievable Precision of Linear Systems with Discrete Controllers // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 2. P. 333–350.
19. Честнов В.Н. Синтез робастных H_∞ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // АиТ. 2007. № 3. С. 199–205.
Chestnov V.N. Design of Robust H_∞ -controllers of Multivariable Systems Based on the Given Stability Degree // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 557–563.
20. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и H_∞ -подходы // Проблемы управления. 2019. № 2. С. 2–8.
21. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе H_∞ -оптимизации // АиТ. 2019. № 10. С. 132–152.
Chestnov V.N. Synthesis of Multivariable Systems According to Engineering Quality Criteria Based on H_∞ -Optimization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1861–1877.
22. Chestnov V.N., Shatov D.V. Design of H_∞ Discrete-Time Controllers for Multivariable Systems Via Given Engineering Performance Indices // Proc. of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019). 2019. P. 424–429.
23. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез дискретных регуляторов многомерных систем по инженерным критериям качества // Материалы 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). 2024. С. 418–422.
24. Честнов В.Н. Синтез H_∞ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // АиТ. 2011. № 10. С. 170–185.

- Chestnov V.N.* Synthesizing H_∞ -Controllers for Multidimensional Systems with Given Accuracy and Degree of Stability // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 10. P. 2161–2175.
25. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods, NJ: Prentice-Hall, 1989.
 26. The Control Handbook / *Ed. Levine W.S.* IEEE Press, 1996
 27. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез робастных регуляторов многомерных систем при нестационарных параметрических и ограниченных внешних возмущениях // *АиТ*. 2024. № 6. С. 19–37.
Chestnov V.N., Shatov D.V. Robust Controller Design for Multivariable Systems under Nonstationary Parametric Variations and Bounded External Disturbances // *Autom. Remote Control*. 2024. V. 85. No. 6. P. 562–575.
 28. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.
 29. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I // *АиТ*. 1967. № 9. С. 59–72.
Yakubovich V.A. Absolute Stability of Pulse Systems with Several Nonlinear or Linear Non-Stationary Blocks. I // *Autom. Remote Control*. 1967. V. 28. No. 9. P. 1301–1313.
 30. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. II // *АиТ*. 1968. № 2. С. 81–101.
Yakubovich V.A. Absolute Stability of Pulse Systems with Several Nonlinear or Linear Non-Stationary Blocks. II // *Autom. Remote Control*. 1968. V. 29. No. 2. P. 244–263.
 31. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Multivariable Systems Design of Desired Accuracy Based on LQ and H_∞ Optimization Procedures // *Proc. of the 2018 European Control Conference (ECC-2018)*. 2018. P. 2511–2516.
 32. *Åström K.J., Hagglund T.* Advanced PID control. NC: ISA, 2006.
 33. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез многомерных следящих систем по инженерным критериям качества на основе H_∞ -подхода // *Проблемы управления*. 2021. № 3. С. 33–41.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 20.03.2024

После доработки 06.12.2024

Принята к публикации 17.12.2024

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. О.А. ГОЛОВАНОВ (golovanov.oa@uiec.ru)
(Институт экономики Уральского отделения РАН, Екатеринбург),
А.Н. ТЫРСИН, д-р техн. наук (at2001@yandex.ru)
(Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург;
Научно-инженерный центр
«Надежность и ресурс больших систем и машин»
Уральского отделения РАН, Екатеринбург)

УСТОЙЧИВОЕ РЕГРЕССИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: МЕТОДЫ ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ, СИМПЛЕКС-МЕТОД, СПУСК ПО УЗЛОВЫМ ПРЯМЫМ

Рассмотрен вопрос реализации метода наименьших модулей для устойчивого оценивания линейных регрессионных зависимостей с помощью алгоритмов внутренних точек. Реализованы два аффинно-масштабирующих алгоритма внутренних точек для устойчивого оценивания регрессии. Проведен сравнительный анализ этих алгоритмов с симплекс-методом и спуском по узловым прямым. Их вычислительная сложность оказалась сопоставимой с симплекс-методом, однако они проигрывают последнему по времени вычислений. Также установлено, что алгоритмы внутренней точки значительно проигрывают модифицированному спуску по узловым прямым как по вычислительной сложности, так и по фактическому времени вычислений. Приведены примеры использования алгоритмов внутренних точек для практических задач.

Ключевые слова: метод наименьших модулей, линейная регрессия, метод внутренней точки, вычислительная эффективность.

DOI: 10.31857/S0005231025030063, EDN: IEBGHN

1. Введение

Множественная линейная регрессия является одной из распространенных математических моделей в различных предметных областях. Она имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\text{где } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}. \quad \text{Здесь } \mathbf{y} - \text{вектор значений зависимой переменной } Y;$$

$\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{n \times m}$ – матрица значений объясняющих переменных $X_1, \dots, X_m$, $\mathbf{x}_i^T = (1, x_{i2}, \dots, x_{im})$; α – вектор неизвестных коэффициентов a_j уравнения регрессии, ε – вектор ненаблюдаемых случайных отклонений.

Традиционный линейный регрессионный анализ берет начало с работ А.М. Лежандра (1806 г.) и К.Ф. Гаусса (1809 г.), в которых они независимо изложили свои версии метода наименьших квадратов (МНК), и трудами А.А. Маркова через 100 лет, в которых были изложены его теоретические обоснования. Эти предпосылки определяют требования к переменным X_i , параметрам α и случайным отклонениям ε и позволяют исследовать свойства и статистическое содержание оценок коэффициентов регрессии [1]:

- 1°) На вектор α не наложено ограничений, т.е. $\mathbf{A} = \mathbb{R}^m$, где $\mathbf{A}$ – множество априорных значений параметров α ;
- 2°) Матрица $\mathbf{X}$ детерминирована, т.е. x_{ij} не являются случайными переменными;
- 3°) $\text{rank}(\mathbf{X}) = m < n$;
- 4°) Вектор ε – случайный, т.е. вектор $\mathbf{y}$ – также случайный вектор;
- 5°) Математические ожидания $E(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $E(\varepsilon) = 0$;
- 6°) $\forall i \neq k \text{ cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = 0$, $\forall i E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$, $i, k = 1, \dots, n$, σ^2 – дисперсия отклонений.

Последние две предпосылки относятся к свойствам случайных отклонений. Поскольку ε_i ненаблюдаемы и их свойства априори неизвестны, то выбор метода оценивания параметров α неоднозначен. Если распределение отклонений ε не зависит от $\mathbf{X}$ и является нормальным, то МНК позволяет получить наилучшую оценку $\tilde{\alpha}$ коэффициентов регрессии [2].

Однако априори предполагать нормальность случайных отклонений нельзя, во многих случаях фактические распределения могут существенно отличаться и имеет более вытянутые хвосты по сравнению с нормальным законом, что снижает точность МНК-оценок коэффициентов регрессии [3–6]. Для МНК особенно критична ситуация, когда наблюдения «засорены» относительно редкими выбросами или промахами, нарушающими предпосылки 5° и 6° [2]. Засорение может возникнуть, например, при развитии деградиационных процессов в процессе эксплуатации механических и иных нагруженных систем [7]. Случайная компонента вибросигнала может быть на 10–20% засорена помехами в виде импульсов, резких изменений уровня или корреляционной структуры, приводящими к «утяжелению» хвостов распределения относительно нормального закона [3].

В этих случаях для обеспечения устойчивости оценок необходимы другие методы. Наиболее известным среди них является метод наименьших модулей (МНМ) [8]. Однако МНМ и другие устойчивые методы проигрывают в быст-

родействии МНК во многих приложениях, особенно когда приходится анализировать выборки большого размера, а также при анализе данных в режиме реального времени [3, 9]. Это ограничивает возможности использования регрессионного анализа для этих приложений в условиях стохастической неоднородности данных, когда МНК не обеспечивает устойчивости оценивания параметров моделей. Поэтому актуальна задача повышения вычислительной эффективности устойчивых алгоритмов регрессионного моделирования.

Рассмотренный подход обычно называют моделью «пассивного» эксперимента, при котором существуют только факторы в виде входных контролируемых, но неуправляемых переменных. Задача планирования сводится к оптимальной организации сбора информации и выбору метода обработки результатов измерений. Основные недостатки – диапазон изменений факторов ограничен, а влияние возмущающих параметров может оказаться более существенным, чем изменение контролируемых факторов.

Отметим, что если есть возможность воздействия на ход процесса и выбора в каждом опыте уровней факторов, то предпочтительнее использовать «активный» эксперимент. Основы теории оценивания заложил R. Fisher в 1937 г. в книге «The Design of Experiments». Это расширяет традиционную регрессионную модель. При активном эксперименте на вход исследуемого объекта подаются определенные воздействия, которые заранее планируются в соответствии с некоторым оптимальным критерием. В последние 50 лет активно исследовались схемы при случайной природе набора регрессоров $\mathbf{X}$. В работах О.Н. Граничина, Б.Т. Поляка, А.Б. Цыбакова, М.С. Campi, Lei Guo, L. Ljung и др. рандомизация при выборе регрессоров позволяла формулировать более быстрые алгоритмы и изучать их состоятельность при невыполнении традиционных предположений о помехах [10–13]. Отметим, что активный эксперимент позволяет быстрее и эффективнее решать задачи исследования, но не всегда реализуем, более сложен и затратен и может помешать нормальному ходу технологического процесса.

В статье далее будем рассматривать вариант пассивного эксперимента.

Задача оценивания множественной линейной регрессионной зависимости по выборке данных $(\mathbf{x}_i^T, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, с помощью МНМ имеет вид [14]:

$$(1) \quad Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \left| y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right| \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m},$$

где $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)^T$ – вектор оценок неизвестных коэффициентов a_j уравнения регрессии $Y = a_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m + \varepsilon$.

Одним из путей определения параметров $\mathbf{a}$ является сведение (1) к задаче линейного программирования (ЛП) и ее решение с помощью симплекс-метода [14]. Вычислительная эффективность симплекс-метода для решения задачи (1) была исследована в [15] и оказалась недостаточна для динамических приложений.

Для решения задач ЛП альтернативой симплекс-методу являются методы внутренней точки. Они вначале использовались для решения нелинейных задач. Применительно к задаче ЛП методы внутренней точки в явном или неявном виде используют барьер на допустимом множестве в форме неотрицательного ортанта. В отличие от симплекс-метода здесь генерируется последовательность точек, для которых строго выполняются ограничения-неравенства.

Совокупность существующих методов внутренних точек можно условно разделить на полиномиальные и аффинно-масштабируемые. Впервые алгоритм, основанный на аффинном масштабировании, был предложен в 1967 г. И.И. Дикиным [16]. Однако широкую популярность методы внутренней точки получили в 1984 г. после статьи Н. Кармаркара [17], в которой был описан полиномиальный алгоритм, основанный на проективных преобразованиях. Но было установлено, что оптимизационные методы градиентного типа с аффинно-масштабируемыми преобразованиями оказались более эффективными. У методов внутренних точек на основе проективных преобразований [18, 19]:

- сложность сильно зависит (растет) от размерности решаемой задачи;
- итерации требуют больших вычислительных затрат по сравнению с оптимизационными методами, использующими аффинно-масштабируемые преобразования;
- многие полиномиальные алгоритмы затруднительны в применении для широкого круга задач в связи с необходимостью поиска начального приближения.

Данное направление развивается многими исследователями, см. работы [20–23]. История методов внутренней точки описана в [19].

Целевая функция $Q(\mathbf{a})$ в (1) является непрерывной, выпуклой и ограниченной снизу, что гарантирует наличие единственного минимума. Однако у задачи (1) есть специфические особенности. Во-первых, функция $Q(\mathbf{a})$ имеет множество изломов в виде отрезков прямых. Стенки изломов представляют собой выпуклые линейные грани. При приближении к минимуму геометрия функции $Q(\mathbf{a})$ ухудшается – стенки изломов становятся все более мелкими и почти параллельными, что затрудняет сходимость алгоритмов вблизи минимума.

Во-вторых, соответствующие (1) задачи ЛП имеют высокую размерность.

В литературе не обнаружено специального исследования методов внутренней точки применительно к классу задач ЛП, соответствующих (1). Поскольку многие авторы отмечают, что методы внутренних точек могут конкурировать на практике с симплекс-методом [19], представляется целесообразным провести сравнительный анализ вычислительной эффективности методов внутренней точки с другими известными точными методами именно для решения задачи (1).

Точным считаем алгоритм, позволяющий за конечное число итераций найти глобальный минимум функции $Q(\mathbf{a})$. Вычисления осуществляются с погрешностями, а техника безошибочных вычислений очень трудоемка, поэтому в качестве точного решения примем то, которое вычисляется с минимальными вычислительными погрешностями. К числу точных отнесем алгоритмы МНМ-оценивания, основанные на решении задачи (ЛП) симплекс-методом [7, 24, 25] и алгоритмы спуска по узловым прямым [26, 27].

Отметим, что известен еще ряд алгоритмов, основанных на задаче (ЛП), например, алгоритмы, которые на каждой итерации используют фундаментальную операцию нахождения взвешенных медиан по локальному множеству базисных решений [28–30]. Их сложность для решения задачи (1) сопоставима с симплекс-методом.

2. Методы исследования

Сформируем эквивалентную (1) задачу ЛП. Представим каждую невязку $y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij}$ в виде

$$0 \leq \left| y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right| \leq z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда получим систему

$$\begin{cases} z_i + \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \geq y_i, & i = 1, \dots, n, \\ z_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \geq -y_i, & i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

и, обозначив $a_j = a_j^{(1)} - a_j^{(2)}$, сформируем прямую задачу ЛП как

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n z_i \rightarrow \min_{a_j^{(k)}, z_i \in \mathbb{R}}, \\ z_i + \sum_{j=1}^m (a_j^{(1)} - a_j^{(2)}) x_{ij} \geq y_i, & i = 1, \dots, n, \\ z_i - \sum_{j=1}^m (a_j^{(1)} - a_j^{(2)}) x_{ij} \geq -y_i, & i = 1, \dots, n, \\ a_j^{(k)}, z_i \geq 0, & k = 1, 2, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{y}} \rightarrow \min, \\ \mathbf{A} \tilde{\mathbf{y}} \geq \mathbf{C}, \\ \tilde{\mathbf{y}} \geq 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{b}^T = (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^n, \overbrace{0, \dots, 0}^{2m})$ – вектор размерностью $1 \times (n + 2m)$, $\tilde{\mathbf{y}}$ – вектор значений целевой функции размерностью $(n + 2m) \times 1$, $\mathbf{C}$ – вектор правой части ограничений размерностью $2n \times 1$, $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов небазисных переменных размерностью $2n \times (n + 2m)$.

Далее рассмотрим алгоритмы внутренней точки с аффинно-масштабируемыми преобразованиями, учитывая указанные выше их преимущества перед полиномиальными. Знаковыми среди них являются алгоритм И.И. Дикина [16] (алгоритм $\mathbf{B}$), фактически являющийся прародителем соответствующей группы алгоритмов, и его модификация – алгоритм В.И. Зоркальцева [20] (алгоритм $\mathbf{A}$). Оба алгоритма совмещают в себе особенности решения взаимно двойственных задач ЛП:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &\rightarrow \min, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0; \\ \mathbf{b}^T \mathbf{u} &\rightarrow \max, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \end{aligned}$$

где заданы матрица $\mathbf{A}$ размера $n \times m$, векторы $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Векторы $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ являются переменными задач.

2.1. Аффинно-масштабирующий алгоритм A

Опишем алгоритм решения задачи.

Шаг 1. На k -й итерации вычисляем вектор невязок ограничений-равенств, здесь в качестве $\mathbf{x}^{(0)}$ выступает любой вектор с положительными компонентами

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Шаг 2. Формируем матрицу весовых коэффициентов

$$\mathbf{D}_k = \text{diag } \mathbf{d}^{(k)},$$

где $d_j^{(k)}$ зададим согласно [20]. Тогда $d_j^{(k)} = (x_j^{(k)})^p$, $j = 1, \dots, m$ при заданном $p \geq 1$. Причем при $p > 1$ требуется дополнительное условие $0 < \gamma \leq 2/(p + 1)$.

Шаг 3. Вычисляем вектор переменных $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u}^{(k)} = (\mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{c}).$$

Шаг 4. Находим направление и шаг корректировки решения

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(k)} &= -\mathbf{D}_k\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}), \\ \lambda_k &= \min\{1, \bar{\lambda}_k\}, \quad \text{если } \mathbf{r}^{(k)} \neq 0, \\ \lambda_k &= \bar{\lambda}_k, \quad \text{если } \mathbf{r}^{(k)} = 0, \end{aligned}$$

где $\bar{\lambda}_k = \gamma \min \left\{ -x_j^{(k)} / s_j^{(k)} : s_j^{(k)} < 0 \right\}$.

Если $\mathbf{s}^{(k)} \geq 0$ при $\mathbf{r}^{(k)} \neq 0$, то полагаем $\lambda_k = 1$. В зависимости от необходимой точности при $\max_{j=1,\dots,m} |s_j^{(k)}| \approx 0$ выходим из алгоритма, иначе переходим к шагу 5.

Шаг 5. Проведем итеративный переход

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{s}^{(k)}, \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= (1 - \lambda_k) \mathbf{r}^{(k)}.\end{aligned}$$

Переход к шагу 2.

Точным решением будем называть достижение методом $\mathbf{s}^{(k)} = 0$, при котором каждый последующий $\mathbf{x}^{(k)}$ не будет изменяться. Однако на практике достигается лишь некоторое значение в бесконечно малой окрестности δ около нуля, варьирующейся в зависимости от среды разработки и используемых в ней переменных. Таким образом, чтобы избежать неконтролируемого роста времени работы алгоритма и приведения его к единообразию вне зависимости от средств реализации, необходимо ограничить точность алгоритма вплоть до достижения некоторого знака после запятой.

Замечание 1. При $\mathbf{r}^{(k)} = 0$ для каждой последующей итерации происходит оптимизация в области допустимых решений

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = 0, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{(k+1)} < \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{(k)}.$$

Пусть решается задача с ограничениями-равенствами для квадратной матрицы $\mathbf{A}$, достигшей на текущей итерации нуля для вектора ограничений-неравенств $\mathbf{r}^{(k)} = 0$. Тогда, согласно формуле шага 3, получим $\mathbf{u}^{(k)} = (\mathbf{A} \mathbf{D}_k \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{D}_k \mathbf{c})$. Упростим выражение, заменив $\mathbf{A} \mathbf{D}_k = \mathbf{B}$, в результате $\mathbf{u}^{(k)} = (\mathbf{B} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{c})$. Согласно свойствам обратной матрицы имеем $(\mathbf{B} \mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B}^{-1}$. Раскроем скобки и, используя ассоциативность умножения матриц, вычислим вектор переменных $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}^{(k)} = (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{c} = (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{E} \mathbf{c} = (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c}$. Тогда $\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} = \mathbf{c} - \mathbf{E} \mathbf{c} = 0$. Следовательно, на текущей итерации $\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{D}_k \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}) = 0$ и было достигнуто решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), и дальнейшая оптимизация не требуется.

Замечание 2. Вектор направления $\mathbf{s}^{(k)}$ определяем, решая вспомогательную задачу

$$\mathbf{c}^T \mathbf{s} + 1/2 \mathbf{s}^T \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{s} \rightarrow \min, \quad \mathbf{A} \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}.$$

Следовательно, $\mathbf{A} \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}$, $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)})$.

Таким образом, частный случай для матрицы $\mathbf{A}$ с ненулевым определителем можно решить, пропуская шаги 2 и 3, сократив вычислительную сложность и влияние накопительных ошибок, что особенно полезно при увеличении анализируемой выборки.

В рамках исследования был проведен ряд вычислительных экспериментов, рассмотрим некоторые из них.

Пример 1. Решим задачу ЛП с прямоугольной матрицей $\mathbf{A}$: $F = \min(2x_1 - x_2)$; $x_1 + x_2 = 2$; $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$ [31]. Оптимальным решением является $\mathbf{x} = (0; 2)$ с $F_{\min} = -2$. В качестве начальной точки будем использовать $\mathbf{x}^{(0)} = (7; 1)$. В силу прямоугольного вида матрицы нельзя воспользоваться замечанием 2.

На первой итерации вектор ограничений-неравенств будет равен $\mathbf{r}^{(1)} = -6$. При $p = 2$ вектор весовых коэффициентов $\mathbf{d}^{(1)} = (49; 1)$ с $\gamma = 0,67$, откуда $\mathbf{u}^{(1)} = 1,82$. Далее, определив вектор $\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(1)}) = (0,18; -2,82)$, найдем направление и шаг корректировки решения $\mathbf{s}^{(1)} = (-8,82; 2,82)$, $\lambda_1 = 0,53$. Таким образом, после итеративного перехода получим $\mathbf{x}^{(2)} = (2,33; 2,49)$ и $\mathbf{r}^{(2)} = -2,83$. На пятой итерации $\lambda_5 = 1$, поэтому $\mathbf{r}^{(6)} = 0$. Поскольку число параметров модели больше числа наблюдений и обратная для матрицы $\mathbf{A}$ не находится в силу равенства нулю ее определителя, возможно провести оптимизацию в области допустимых решений. Таким образом, $\lambda_6 = 3,5$ и $\mathbf{x}^{(6)} = (0,02; 1,98)$. Продолжив оптимизацию, получим решение примера 1, которое будет примерно равно $x_1 \approx 0$, $x_2 \approx 2$ с $F_{\min} \approx -2$ при заданной точности 10^{-8} , что соответствует глобальному минимуму задачи. Решение не изменяется в зависимости от начальной точки решения.

Пример 2. Расширим матрицу до квадратной: $F = \min(x_1 + 3x_2 + 2x_3)$; $5x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3$; $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$; $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$; $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Минимум будет равен $F_{\min} = 0,75$ при $\mathbf{x} = (1/4; 0; 1/4)$. Начальную точку зададим как $\mathbf{x}^{(0)} = (1; 1; 1)$. Поскольку матрица $\mathbf{A}$ квадратная и можно вычислить ее обратную, воспользуемся замечанием 2: $\mathbf{r}^{(1)} = (-13; -9; -5)$; $\mathbf{s}^{(1)} = (-0,75; -1; -0,75)$; $\lambda_1 = 0,67$. Тогда $\mathbf{x}^{(2)} = (0,5; 0,33; 0,5)$ и $\mathbf{r}^{(2)} = (-4,33; -3; -1,67)$. Вектор ограничений-равенств $\mathbf{r}$ стал равен нулю на 12-й итерации, с решением $\mathbf{x}^{(12)} \approx (0,25; 0; 0,25)$ и $F_{\min} \approx 0,75$. Действительно, так как матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную, $\mathbf{s}^{(12)} = 0$ и было достигнуто решение СЛАУ, дальнейшая оптимизация не требуется.

Пример 3. Видоизменим задачу, чтобы ее глобальный минимум не был равен решению СЛАУ, для чего введем в пример 2 ограничения-неравенства: $F = \min(x_1 + 3x_2 - 2x_3)$; $5x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 3$; $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2$; $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$; $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. В таком случае минимум будет достигнут в $\mathbf{x} = (0; 0; 1/3)$ и будет равен $F_{\min} = -2/3$. Для учета ограничений-неравенств расширим матрицу $\mathbf{A}$ единичной матрицей размером 3×3 . В результате работы алгоритма при заданной точности в 10^{-8} за 24 итерации было найдено решение $\mathbf{x}^{(24)} \approx (0; 0; 0,3)$ и $F_{\min} \approx -0,66$, что соответствует глобальному минимуму.

Утверждение 1. Вычислительная сложность прямого аффинно-масштабирующего алгоритма A решения приведенной задачи (2) будет составлять $O(n^{3,1})$.

Результаты свидетельствуют, что алгоритм способен формально привести к точному решению за конечное число итераций. Однако в связи с экспоненциальным ростом времени работы алгоритма при устремлении к нулю заданной точности его применение для серии экспериментов с достаточно большим числом наблюдений ($n \geq 50$) затруднительно.

2.2. Аффинно-масштабирующий алгоритм В

Решением двойственной задачи ЛП будем называть вектор $\mathbf{u}$, удовлетворяющий системе уравнений [16]

$$\sum_{t=1}^n b_{st} u_t = d_s,$$

где $b_{st} = \sum_{j=1}^m x_j^2 a_{sj} a_{tj}$, $d_s = \sum_{j=1}^m x_j^2 c_j a_{sj}$, $s = 1, \dots, n$.

Положим

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m x_j^2 \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} u_i(\mathbf{x}) - c_j \right)^2, \quad s_j(\mathbf{x}) = x_j^2 \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} u_i(\mathbf{x}) - c_j \right).$$

Алгоритм решения состоит в следующем. Пусть $x_j^{(0)} > 0$. Тогда $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda_k s_j(\mathbf{x}^{(k)})$, где $\lambda_k = 1/\sqrt{\Phi(\mathbf{x}^{(k)})}$ при $j = 1, \dots, m$. Контроль вычислений на каждой итерации основывается на выполнении условия [31]

$$(4) \quad \sum_{j=1}^m c_j \sigma_j^{(k)} \delta_j^{(k)} = -\Phi(\mathbf{x}^{(k)}),$$

где $\sigma_j^{(k)} = (x_j^{(k)})^2$, $\delta_j^{(k)} = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i^{(k)} - c_j$ при $j = 1, \dots, m$.

Решения примеров 1–3 при помощи описанного метода соответствуют точному вне зависимости от начальной точки $\mathbf{x}^{(0)} > 0$. Рассмотрим дополнительный пример.

Пример 4. $F = \min(3x_1 + 2x_2 + x_3); \quad x_2 + x_3 \geq 4; \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6; \quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2; \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$. С точным решением $F = 4$ в $\mathbf{x} = (0; 0; 4)$ для прямой задачи ЛП и в $\mathbf{y} = (1; 0; 0)$ для двойственной. Приведем результаты для первой и последней итераций алгоритма. На

первой итерации получим $\mathbf{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}^{(1)} = (3; 10; 6)$, откуда

$\mathbf{u}^{(1)} = (-0,12; 1,19; -0,22)$ и $\Phi(\mathbf{x}^{(1)}) = 3,78$. Расчет для точности 10^{-8} был

окончен за 15 итераций с результатами: $\mathbf{B}^{(15)} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 8 & 16 & 16 \\ 8 & 16 & 20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}^{(15)} = (4; 8; 8)$,

откуда $\mathbf{u}^{(15)} = (0; 0,5; 0)$ и $\Phi(\mathbf{x}^{(15)}) = 4,5 \times 10^{-8}$ с решением $F_{\max} \approx 3$, что не соответствует точному, хотя условие (4) было выполнено на каждой итерации.

В результате проведения ряда вычислительных экспериментов, связанных с решением приведенной задачи (2), было выявлено, что решение при помощи алгоритма стремится к нулю. Это может являться следствием невыполнения условия в [32], согласно которому все ограничения-неравенства должны выполняться в строгой форме. Тем не менее определение зависимости среднего времени вычисления от размера выборки невозможно в связи с отсутствием сходимости метода.

Утверждение 2. Вычислительная сложность одной итерации прямого аффинно-масштабирующего алгоритма В решения приведенной задачи (2) будет составлять $O(n^3)$, что с учетом числа итераций сопоставимо с алгоритмом А.

Алгоритм градиентного спуска по узловым прямым описан в [26]. Он состоит в следующем. Пусть имеем m -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ со стандартным ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$, где $\mathbf{e}_k^T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{m-k})$. Каждое невырожденное наблюдение $(\mathbf{x}_i^T, y_i) = (1, x_{i2}, \dots, x_{im}, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, формирует в $\mathbb{R}^m$ гиперплоскость $\Omega_i : y_i - \mathbf{a}^T \mathbf{x}_i = 0$ в ортогональной системе координат $Oa_1 : a_m$. Пересечение m независимых гиперплоскостей образует узловую точку

$$\mathbf{u} = \cap_{s \in M} \Omega_s, \quad M = \{k_1, \dots, k_m\}, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_m, \quad k_l \in \{1, \dots, n\}.$$

Пересечение $(m - 1)$ независимых гиперплоскостей образует узловую прямую

$$l_{(k_1, \dots, k_{m-1})} : \cap \Omega_i, \quad i \in \{k_1, \dots, k_{m-1}\}, \quad k_l \in \{1, \dots, n\}.$$

Решение задачи (1) всегда находится в узловой точке. Алгоритм осуществляет спуск из произвольной начальной узловой точки по узловым прямым. Любая узловая точка применительно к задаче ЛП представляет собой ее базисное решение. Выигрыш по сравнению с симплекс-методом состоит в том, что переход по узловой прямой происходит более эффективно, в отличие от симплекс-метода здесь в преобразовании на каждом шаге участвуют не все данные, а только расположенные на соответствующей узловой прямой n точек. Кроме этого, на каждом шаге спуск осуществляется в точку с минимальным значением на всех пересекающих ее m узловых прямых.

С целью снижения вычислительных затрат при спуске анализируются не значения целевой функции, а ее производные по направлению узловой прямой. В модифицированном варианте алгоритма начальная узловая точка (начальное приближение) определяется на части выборки и исключены вычисления значений целевой функции в минимумах узловых прямых [27].

3. Обсуждение результатов

В результате сравнения алгоритмов внутренней точки с симплекс-методом можно утверждать, что в плане вычислительной сложности они им как ми-

нимум не уступают. Так, аффинно-масштабирующие алгоритмы А и В с учетом числа итераций имеют сложность $O(n^{3,1})$, в то время как решение прямой и двойственной задач ЛП при помощи симплекс-метода – $O(n^{3,2}m^{0,2})$ и $O(n^3m^{0,5})$ соответственно [15]. Однако при $n \gg m$ они все еще значительно уступают модифицированному градиентному спуску, сложность которого равна $O(n^{1,5}m^{1,8})$ [27].

Основным отличием градиентного спуска по узловым прямым от алгоритмов, основанных на решении задач ЛП при помощи симплекс-метода и алгоритмов внутренней точки, является оперирование только исходными данными вплоть до нахождения глобального минимума. Это гарантирует сходимость к точному решению вне зависимости от числа итераций и простоту реализации метода. Последние же на каждой последующей итерации используют информацию из предыдущей, содержащуюся в симплекс-таблице и векторах соответственно, что в результате накопления вычислительных погрешностей может привести к смещенной оценке. Тем не менее, учитывая этот факт при реализации, можно добиться пренебрежимо малого числа отклонений, однако это также увеличит вычислительные затраты.

Сравнение алгоритмов на основе оценки вычислительной сложности в нотации *Big O* необходимо, но недостаточно. Ее упрощенность приводит к игнорированию констант, множественных второстепенных слагаемых, а также потребления памяти алгоритмом. Поэтому могут возникать ситуации, когда два алгоритма с одинаковыми *Big O* будут иметь существенно отличающееся расчетное время вычислений или, наоборот, у алгоритмов с различными *Big O* окажется одинаковым расчетное время вычислений.

3.1. Сравнительный анализ алгоритмов на модельных данных

Для более полной оценки воспользуемся методом Монте-Карло и сравним время работы алгоритмов для 1000 экспериментов при $m = 2, 3, \dots, 7$ и $n = 50, 100, \dots, 500$. Поскольку целью является исследование вычислительной эффективности алгоритмов, а не точности МНМ-оценивания регрессионных моделей, то в генерируемых выборках данных используем стандартное нормальное распределение случайных ошибок ε . Генерация произведена при помощи встроенных функций языка программирования C++ в среде Microsoft Visual Studio 2019. Вычислительные эксперименты будем проводить на ноутбуке Dell G5 5587 с 6-ядерным процессором i7-8750H с тактовой частотой до 4,1 ГГц. Точность для алгоритма А равна $\delta = 10^{-5}$.

В результате определения зависимости времени работы алгоритмов от числа наблюдений и параметров модели для аффинно-масштабирующего алгоритма А получим $t_1 = 0,0001 \times n^{3,4}$ с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,96$. Как было отмечено ранее, алгоритм В неприменим при решении приведенной задачи (2), в связи с чем исключим его из дальнейшего сравнения. Зависимости для решений прямой и двойственной задачи ЛП симплекс-методом, а также для модифицированного градиентного спуска будут составлять – $t_2 =$

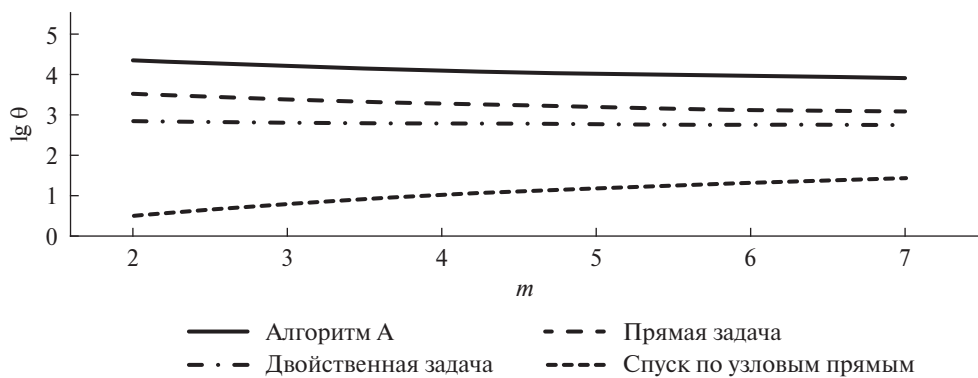


Рис. 1. Десятичные логарифмы отношений времени вычислений с помощью алгоритмов МНМ ко времени вычисления МНК при $n = 300$.

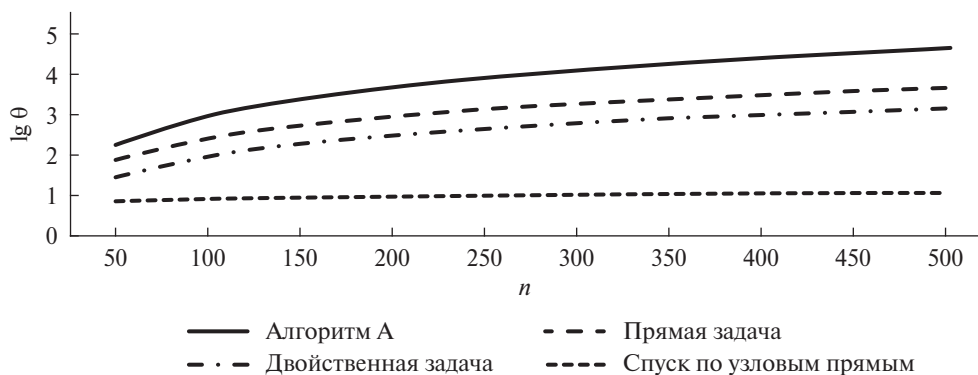


Рис. 2. Десятичные логарифмы отношений времени вычислений с помощью алгоритмов МНМ ко времени вычисления МНК при $m = 4$.

$= 0,0004 \times m^{0,001} n^{2,8}$, $t_3 = 0,0001 \times m^{0,6} n^{2,7}$, $t_4 = 0,00059 \times m^{2,51} n^{1,21}$ [27]. Для наглядности на рис. 1 и 2 приведем графики десятичных логарифмов отношений времени вычисления рассматриваемых алгоритмов ко времени расчета с помощью МНК.

В результате можно констатировать, что аффинно-масштабирующий алгоритм А на порядок уступает симплекс-методу и на несколько порядков – градиентному спуску.

3.2. Сравнительный анализ алгоритмов на практических примерах

Теперь рассмотрим три практических примера регрессионного моделирования на реальных данных. В качестве точного решения задачи (1) во всех примерах использовались результаты расчета с помощью полного перебора всех узловых точек [15]. Результаты расчетов с помощью симплекс-метода и алгоритма градиентного спуска по узловым прямым во всех трех примерах совпали с полным перебором. Таким образом, симплекс-метод и алгоритм градиентного спуска нашли точные решения $\mathbf{a}^*$ задачи (1).

Таблица 1. Результаты расчетов параметров коэффициентов **a** для примера 5

Алгоритм	a_1	a_2	a_3	a_4	$Q(\mathbf{a})$	s	d
Решение $\mathbf{a}^*$	-3,822	1,403	-0,053	0,802	638,43	–	–
A ($\delta = 10^{-3}$)	-5,127	1,118	-0,042	0,847	644,90	20,0%	100,0%
A ($\delta = 10^{-4}$)	-2,451	1,223	-0,065	0,800	642,69	17,8%	111,7%
A ($\delta = 10^{-5}$)	-4,170	1,538	-0,053	0,794	640,76	5,0%	123,7%
A ($\delta = 10^{-6}$)	-3,615	1,534	-0,060	0,793	639,32	7,1%	135,0%
A ($\delta = 10^{-7}$)	-3,91	1,471	-0,057	0,804	638,45	3,6%	194,0%
A ($\delta = 10^{-8}$)	-3,855	1,428	-0,054	0,803	638,44	1,3%	206,7%

Таблица 2. Результаты расчетов параметров коэффициентов **a** для примера 6

Алгоритм	a_1	a_2	a_3	a_4	$Q(\mathbf{a})$	s	d
Решение $\mathbf{a}^*$	-0,394	0,0072	0,5160	184,2	6190,5	–	–
A ($\delta = 10^{-3}$)	7,240	0,0034	0,8684	235,5	6538,2	521,3%	100,0%
A ($\delta = 10^{-4}$)	0,403	0,0079	0,4549	166,8	6233,9	58,3%	112,3%
A ($\delta = 10^{-5}$)	-4,661	0,0055	0,7103	196,7	6227,7	337,6%	122,7%
A ($\delta = 10^{-6}$)	-1,716	0,0079	0,4730	173,1	6205,5	89,9%	167,5%
A ($\delta = 10^{-7}$)	1,520	0,0066	0,5205	195,1	6198,6	125,1%	192,0%
A ($\delta = 10^{-8}$)	1,459	0,0065	0,5394	196,7	6198,6	122,9%	208,2%

Пример 5. Определим параметры модели среднего экономического ущерба от пожаров в муниципальных образованиях (МО) Свердловской области за 2012 г. по данным, приведенным в [33]. Модель задается как $\hat{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4$, где $\hat{Y}$ – средний прогноз ущерба от пожаров в текущем году, млн руб.; $X_1 = 1$; X_2 – количество зданий и сооружений на территории МО, тыс. шт.; X_3 – общая протяженность автодорог на территории МО, км; X_4 – годовые потери от пожаров в предыдущем году, млн руб.; **a** – вектор искомых параметров модели; $n = 58$. Модель статистически значимая, коэффициент детерминации $R^2 = 0,68$. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Пример 6. Для оценки относительной производительности центральных процессоров (ЦП) в [34] приведены данные об их характеристиках и относительной производительности; $n = 209$. Машины представляли широкий спектр производительностей и производителей.

Прогнозирование относительной производительности ЦП выполнено по модели $\hat{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4$, где $\hat{Y}$ – оценка относительной производительности ЦП; $X_1 = 1$; X_2 – размер основной памяти = (минимальный размер основной памяти + максимальный размер основной памяти)/2; X_3 – размер кэш-памяти; X_4 – пропускная способность канала = (минимальное количество каналов + максимальное количество каналов)/(2 × машинное время цикла); **a** – вектор искомых параметров модели. Модель статистически значимая, коэффициент детерминации $R^2 = 0,89$. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 3. Результаты расчетов параметров коэффициентов **a** для примера 7

Алгоритм	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$Q(\mathbf{a})$	s	d
Решение a*	610,2	1,918	-0,132	2,526	-62,92	4,019	5,02	–	–
A ($\delta = 10^{-3}$)	134,8	3,366	-0,287	-5,294	-13,87	4,438	9,57	111,4%	100,0%
A ($\delta = 10^{-4}$)	1292,8	2,891	-0,248	1,590	-133,1	-1,828	7,20	90,6%	113,8%
A ($\delta = 10^{-5}$)	584,7	3,209	-0,393	-1,360	-60,30	8,597	6,84	90,0%	124,1%
A ($\delta = 10^{-6}$)	593,0	3,274	-0,360	-1,288	-61,15	6,882	6,67	78,4%	137,9%
A ($\delta = 10^{-7}$)	192,1	2,938	-0,268	-0,632	-19,86	5,056	6,11	73,8%	213,8%
A ($\delta = 10^{-8}$)	675,5	2,217	-0,194	1,832	-69,57	0,274	5,71	34,0%	237,9%

Пример 7. Рассмотрим задачу моделирования урожайности пшеницы в Киркуке по климатическим и социально-экономическим показателям по данным с 2020 по 2022 гг. ($n = 23$) [35]. Имеем регрессионную модель модели $\hat{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4$, где $\hat{Y}$ – оценка урожайности пшеницы, т/га; $X_1 = 1$; X_2 – население Киркука, млн чел.; X_3 – валовой внутренний продукт Ирака на душу населения в ценах 2023 г. (для учета инфляции), тыс. долл. США; X_4 – нормализованный вегетационный индекс; X_5 – поверхностное давление, кПа/10; X_6 – скорость ветра на расстоянии не менее 10 метров, м/с; **a** – вектор искомых параметров модели. Модель статистически значимая, коэффициент детерминации $R^2 = 0,81$. Результаты расчетов приведены в табл. 3.

В табл. 1–3 обозначено: s – среднее значение абсолютных относительных погрешностей вычисления коэффициентов **a** (в %); d – отношение времени расчета алгоритмом A при точности δ ко времени расчета при точности $\delta_0 = = 10^{-3}$.

Выводы по примерам 5–7:

- в рассмотренном диапазоне точности с уменьшением δ время расчета растет в 2–2,5 раза;
- скорость сходимости алгоритма A к минимуму целевой функции $Q(\mathbf{a})$ с увеличением размерности задачи и объема выборки данных снижается, причем более критичным является рост m .

4. Заключение

На примере аффинно-масштабирующих алгоритмов В.И. Зоркальцева (алгоритм A) и И.И. Дикина (алгоритм B) была проанализирована эффективность методов внутренней точки для МНМ-оценивания регрессионных моделей.

Анализ алгоритмов внутренних точек A и B показал, что при решении задачи (1):

- их вычислительная сложность сопоставима с симплекс-методом, однако они проигрывают последнему по времени вычислений,

- они значительно (более чем на порядок) проигрывают модифицированному спуску по узловым прямым как по вычислительной сложности, так и по фактическому времени вычислений,
- скорость сходимости алгоритма A к минимуму целевой функции $Q(\mathbf{a})$ с увеличением размерности задачи и объема выборки данных снижается, причем более критичным является рост размерности,
- рост точности увеличивает длительность работы алгоритма A , однако это менее критично по сравнению с размерностью задачи и объемом анализируемой выборки данных.

Результаты свидетельствуют, что алгоритм A без учета вычислительных погрешностей способен привести к точному решению за конечное число итераций. Однако зависимость времени работы от заданной точности, размерности задачи и объема выборки данных ограничивает область его применения для решения задач вида (1) величинами $\delta \geq 10^{-8}$, $m \leq 4$, $n \leq 100$.

Проигрыш алгоритма A симплекс-методу по времени при примерно одинаковой сложности вызван наличием у целевой функции в окрестности минимума множества почти параллельных очень малых граней, что усложняет и снижает эффективность использования барьеров.

В статье были рассмотрены только два алгоритма реализации методов внутренней точки. Но поскольку пока отсутствует информация о кардинальном (на порядок и более) фактическом повышении быстродействия современных алгоритмов, то можно утверждать, что спуск по узловым прямым для вычисления параметров линейных регрессионных моделей по экспериментальным данным более эффективен по сравнению с методами внутренней точки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Вычислительная сложность умножения матриц $(m \times n)$ на $(n \times l)$ равна $O(mnl)$, а нахождения обратной методом Гаусса–Жордана для квадратной матрицы размерности $(n \times n)$ равна $O(n^3)$. Пусть $n_1 = 2n$; $n_2 = 3n + 2m$, тогда размеры матриц для приведенной задачи (2) будут: $\mathbf{A} - (n_1 \times n_2)$; $\mathbf{x} - (n_2 \times 1)$; $\mathbf{b} - (n_1 \times 1)$; $\mathbf{c} - (n_2 \times 1)$. Учтем, что при $n \gg m$ в нотации *Big O* вес числа операций n_1 и n_2 будет сопоставим. Определим сложность каждого шага алгоритма для решения приведенной к ЗЛП задачи (1):

Шаг 1. $\mathbf{Ax}^{(k)}$ является умножением матрицы размером $(n_1 \times n_2)$ на $(n_2 \times 1)$ и будет вычисляться за $O(n_1 n_2)$ операций. Вместе с операцией вычитания полная сложность шага будет составлять $O(n_1 + n_1 n_2)$ или $P_1 = O(n_1 n_2)$.

Шаг 2. Производится возведение в степень p вектора $\mathbf{x}$ и формирование из него диагональной матрицы. Так как возведение в $p = 2$ равноценно умножению числа на само себя, его сложность равна $P_2 = O(n_2)$, что и будет составлять сложность шага в силу того, что диагональная матрица задается путем инициализации из полученного вектора.

Шаг 3. Разберем его поэтапно:

- 1) произведение матриц $\mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{A}^T$ будет вычислено за $(n_1n_2^2 + n_1^2n_2)$ операций;
- 2) обратная от найденной матрицы будет определена за (n_1^3) операций;
- 3) выражение $(\mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{c})$ за $(n_1n_2^2 + n_1n_2 + n_1)$ операций;
- 4) умножение полученных матриц будет выполнено за (n_1^2) операций.

Общая вычислительная сложность будет равна $O(n_1^3 + 2n_1n_2^2 + n_1^2n_2 + n_1^2 + n_1n_2 + n_1)$ или $P_3 = O(n_1^3)$ для $n \gg m$.

Шаг 4. Вектор $\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)})$ находится за $(n_1n_2 + n_2)$ операций. Тогда общая сложность будет равна $O(n_2^2 + n_1n_2 + n_2)$ или $P_4 = O(n_2^2)$.

Шаг 5. Итеративный переход осуществляется за $P_5 = O(n_2)$.

Шаги 2–5 находятся в цикле вплоть до достижения точки останова. Таким образом, общая вычислительная сложность алгоритма будет составлять:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + (P_2 + P_3 + P_4 + P_5) \times \{\text{число итераций}\} = \\ &= n_1n_2 + (n_2 + n_1^3 + n_2^2 + n_2) \times \{\text{число итераций}\}, \end{aligned}$$

где число итераций является константой, зависящей от заданной точности алгоритма.

Методом статистических испытаний Монте-Карло установлено, что оптимальной заданной точностью решения при стандартном нормальном распределении случайных ошибок δ в анализируемой выборке является 10^{-5} , в связи с низкой точностью при 10^{-3} и длительным временем вычислений при 10^{-8} . Таким образом, алгоритм останавливается при достижении максимального по модулю значения вектора $\mathbf{s}$, меньшего чем 10^{-5} , что позволяет сохранить приемлемый уровень точности решения вне зависимости от размера анализируемой выборки.

Для 100 итераций при $m = 2, 3, \dots, 7$ и $n = 50, 100, \dots, 500$ в среднем алгоритм будет находить решение за 5 итераций с отклонением от точного решения на 14,3%. Для учета возможного влияния числа итераций на вычислительную сложность алгоритма вне зависимости от заданной точности решения (при n , значительно превосходящем число итераций) увеличим степень при n

$$O(P) = O(n_1^3 \times \{\text{число итераций}\}) \leq O(n^{3,1}).$$

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Определим вычислительную сложность одной итерации при условии, что решается приведенная задача (2) – для определения двойственных оценок вычисляется матрица $\mathbf{B}$ за $O(4n_1^2n_2)$ и вектор $\mathbf{d}$ за $O(4n_1n_2)$ операций соответственно.

Таким образом, вычисление вектора решений $\mathbf{u}$ происходит за $O(n_1^3 + 4n_1^2n_2 + n_1^2 + 4n_1n_2)$ или за $O(n_1^3)$ операций. Вектор $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ будет найден за $O(2n_2(2n_1 + 1))$ или $O(n_1n_2)$, в то время как $\Phi(\mathbf{x})$ – за $O(3n_2(2n_1 + 1))$ или $O(n_1n_2)$ операций.

Итоговая вычислительная сложность одной итерации будет составлять $O(n_1^3)$ или $O(n^3)$ операций. С учетом возможного числа итераций в зависимости от заданной точности решения метод действительно можно считать сопоставимым с алгоритмом А.

Утверждение 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Greene W.H.* Econometric Analysis: 8th ed. New York. Pearson. 2020.
2. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985. С. 488.
3. Робастные методы статистического анализа навигационной информации: Обзор. Авторы-сост. Н.В. Бабкин, А.А. Мусаев, А.В. Макшанов; Под ред. И.Б. Челпанова. Л.: ЦНИИ «Румб», 1985. 206 с.
4. *Орлов А.И.* О требованиях к статистическим методам анализа данных (обобщающая статья) // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2023. Т. 89. № 11. С. 98–106. <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-11-98-106>
5. *Salls D., Torres J.R., Varghese A.C., Patterson J., Pal A.* Statistical Characterization of Random Errors Present in Synchrophasor Measurements // IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM), Washington, DC, USA. 2021. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/PESGM46819.2021.9638135>
6. *Ives A.R.* Random Errors are Neither: On the Interpretation of Correlated Data // Methods in Ecology and Evolution. 2022. V. 13. No. 10. P. 2092–2105. <https://doi.org/10.1111/2041-210X.13971>
7. *Колобов А.Б.* Вибродиагностика: теория и практика. М.: Инфра-Инженерия, 2019. 252 с.
8. *Dodge Y.* The Concise Encyclopedia of Statistics. Springer. 2008. P. 616. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-32833-1>
9. *Акимов П.А., Матасов А.И.* Итерационный алгоритм для l_1 -аппроксимации в динамических задачах оценивания // АиТ. 2015. № 5. С. 7–26.
10. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003. 291 с.
11. *Назин А.В., Немировский А.С., Цыбаков А.Б., Юдицкий А.Б.* Алгоритмы робастной стохастической оптимизации на основе метода зеркального спуска // АиТ. 2019 № 10. С. 78–99. <https://doi.org/10.1134/S000523101909006X>
12. *Guo L., Ljung L.* Performance analysis of general tracking algorithms // IEEE Transactions on Automatic Control. 1995. V. 40. No. 8. P. 138–1402. <https://doi.org/10.1109/9.402230>
13. *Campi M.C., Weyer E.* Guaranteed non-asymptotic confidence regions in system identification // Automatica. 2005. V. 41. No. 10. P. 1751–1764. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.05.005>
14. *Мудров В.И., Кушко В.Л.* Методы обработки измерений: Квазиправдоподобные оценки. М.: URSS, 2022. С. 304.
15. *Голованов О.А., Тырсин А.Н.* Спуск по узловым прямым и симплекс-алгоритм – два варианта регрессионного анализа на основе метода наименьших модулей // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2024. Т. 90. № 5. С. 79–87. <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2024-90-5-79-87>

16. *Дикин И.И.* Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174. № 4. С. 747–748.
17. *Karmarkar N.* A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming // *Combinatorica*. 1984. V. 4. No. 4. P. 373–395. <https://doi.org/10.1145/800057.808695>
18. *Bayer D.A., Lagarias J.C.* The Nonlinear Geometry of Linear Programming I: Affine and Projective Scaling Trajectories // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1989. V. 314. P. 499–526. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-1005525-6>
19. *Воронцова Е.А., Хильдебрандт Р.Ф., Гасников А.В., Стонякин Ф.С.* Выпуклая оптимизация. М.: МФТИ, 2021. С. 364.
20. *Зоркальцев В.И.* Метод внутренних точек: история и перспективы // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2019. Т. 59. № 10. С. 1649–1665. <https://doi.org/10.1134/S0044466919100181>
21. *Nesterov Yu., Nemirovski A.* Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming // *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Philadelphia: SIAM. 1994. V. 13. P. 414.
22. *Lee Y.T., Yue M.-C.* Universal Barrier is n -Self-Concordant // E-print. 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.03011>
23. *Bubeck S., Eldan R.* The Entropic Barrier: Exponential Families, Log-Concave Geometry, and Self-Concordance // *Mathematics of Operations Research*. 2019. V. 44. No. 1. P. 264–276. <https://doi.org/10.1287/moor.2017.0923>
24. *Панюков А.В., Мезал Я.А.* Параметрическая идентификация квазилинейного разностного уравнения // Вест. Южно-Урал. гос. ун-та. Серия: Математика. Механика. Физика. 2019. Т. 11. № 4. С. 32–38. <https://doi.org/10.14529/mmph190404>
25. *Barrodale I., Roberts F.D.K.* An improved algorithm for discrete L_1 linear approximation // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. V. 10. P. 839–848.
26. *Тырсин А.Н.* Алгоритмы спуска по узловым прямым в задаче оценивания регрессионных уравнений методом наименьших модулей // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2021. Т. 87. № 5. С. 68–75. <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2021-87-5-68-75>
27. *Голованов О.А., Тырсин А.Н.* Модификация метода наименьших модулей на основе градиентного спуска по узловым прямым // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 11. С. 43–46. https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMTT_2023_11_43
28. *Wesolowsky G.O.* A New Descent Algorithm for the Least Absolute Value Regression Problem // *Communications in Statistics, Simulation and Computation*. 1981. V. B10. No. 5. P. 479–491.
29. *Li Y., Arce G.R.* A Maximum Likelihood Approach to Least Absolute Deviation Regression // *EURASIP J. Advan. Signal Proc.* 2004. V. 12. P. 1762–1769. <https://doi.org/10.1155/S1110865704401139>
30. *Wei Xue, Wensheng Zhang, Gaohang Yu.* Least absolute deviations learning of multiple tasks // *J. Indust. Management Optim.* 2018. No. 14(2). P. 719–729. <https://doi.org/10.3934/jimo.2017071>
31. *Зоркальцев В.И., Дикин И.И.* Итеративное решение задач математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек). Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.

32. *Филатов А.Ю.* Развитие алгоритмов внутренних точек и их приложение к системам неравенств // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, 05.13.18. Иркутск. 2001. С. 123.
33. *Тужиков Е.Н.* Методика оценки эффективности деятельности органов местного самоуправления по обеспечению первичных мер пожарной безопасности (на примере Свердловской области) // Дисс. ... канд. техн. наук, 05.13.10. Екатеринбург. 2014. С. 186.
34. *Ein-Dor P., Feldmesser J.* Attributes of the Performance of Central Processing Units: a Relative Performance Prediction Model // Communications of the ACM. 1987. V. 30. No. 4. P. 308–317.
35. *Тырсин А.Н., Хасан Х.А.М.* Анализ факторов, влияющих на урожайность зерновых культур в Ираке (на примере Киркука) // Математические методы в технике и технологиях. 2024. № 8. С. 81–87.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 14.03.2024

После доработки 28.11.2024

Принята к публикации 02.12.2024

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. Г.Г. ГРЕБЕНЮК, д-р техн. наук (gggrebenuk@gmail.com),
А.А. КРЫГИН, канд. техн. наук (andreykr@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ТРАЕКТОРНЫЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ СЕТЕВОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

Рассматривается метод восстановления сетевой распределительной системы, поврежденной в результате неблагоприятного воздействия. Особенностью метода является применение предельных графов к решению задачи восстановления и возможность нахождения различных оптимизационных решений, учитывающих сроки и стоимость работ, дефицит мощности источников, количество переключений коммутаторов и др. Приводится описание метода и операций восстановления с учетом категории потребителя. На примере фрагмента сети выполняется оценка инженерной устойчивости системы распределения электрической энергии. Предложенный подход может использоваться для формирования рекомендаций по повышению устойчивости инфраструктурных систем и для поддержки лица, принимающего решения, в реальных условиях действия неблагоприятных факторов.

Ключевые слова: сетевая инфраструктура, инженерная устойчивость, восстановление.

DOI: 10.31857/S0005231025030074, **EDN:** IDYDKU

1. Введение

Инженерные сетевые системы относят к критическим инфраструктурам, жизненно важным для экономики любого государства, региона, поселения. На элементы сетевых инфраструктур (воздушные и подземные линии, трубопроводы, трансформаторные и насосные станции, коммутирующие устройства и др.) действуют внутренние и внешние неблагоприятные воздействия (НВ), которые нередко вызывают аварии, выходящие за пределы проектных требований и приводящие к деградации системы вследствие разрушения многочисленных сетевых элементов и массовым отключениям потребителей.

Особенно значительными являются последствия от внешних климатических воздействий, количество и интенсивность которых в связи с изменением климата существенно возрасла в последние годы. Предположение о стационарности климата, на основе которого проектировались инженерные системы, становится не очевидным [1]. Это означает, что ущерб от таких НВ, как наводнения, ураганы, землетрясения и др., будет только возрастать [2].

Внешние воздействия часто рассматриваются как локальные атаки. Их можно разделить на атаки с неподвижным и подвижным центрами воздействия. В первом случае, например в случае землетрясения, интенсивность воздействия уменьшается по мере удаления от неподвижного центра [3], во втором – интенсивность уменьшается по мере удаления от траектории движения центра [4]. Так, зона действия урагана определяется полосой его движения: центральной координатой, направлением, длиной и шириной. По мере удаления от центра снижается интенсивность и уменьшаются последствия от воздействия.

В силу пространственного расположения инженерных сетей, независимо от вида атаки, повреждения всегда сосредоточены в определенной географической области. Поэтому при моделировании воздействий на пространственные сети для отражения географического расположения сетевых элементов удобно использовать двумерные решетки [5].

Сетевые инфраструктуры, являясь дорогостоящими системами длительного действия, нуждаются в защите от НВ. С этой целью на этапе эксплуатации осуществляются организационные (подготовка персонала и техники) и технические мероприятия (повышение надежности оборудования, его обновление и др.) по предотвращению масштабных повреждений. Для проверки уровня готовности систем к прогнозируемым НВ разрабатываются модели таких воздействий и стратегии восстановления.

Выбранная стратегия оказывает большое влияние на устойчивость инженерной системы – наиболее важного свойства, характеризующего способность инфраструктурной системы обеспечивать установленные технико-экономические показатели эксплуатации в условиях воздействия дестабилизирующих факторов и допускать восстановление работоспособности за приемлемое время [6]. Близкие к этому определения инженерной устойчивости приведены в [7].

Для количественной оценки инженерной устойчивости, как правило, используются показатели, основанные на производительности и соответствующие им кривые ее изменения при НВ, которые в работах по исследованию устойчивости инфраструктурных систем часто называют кривыми устойчивости [3].

Этими показателями в зависимости от области применения могут быть: расход жидкости, объем услуг, недопоставленных системой, совокупная функциональность системы и др.

Существует несколько подходов к формированию стратегии восстановления инфраструктуры, которые учитывают свойства сети, порядок восстановления, выделенные время, ресурсы и др. Так, в [8] приоритетные для восстановления компоненты определяются с использованием многокритериальной модели оптимизации показателя устойчивости и времени восстановления методом смешанно-целочисленного программирования. В [9] для повышения устойчивости взаимозависимых водопроводных, газовых и электриче-

ских сетей при НВ предлагается модель оптимизации, также использующая смешанно-целочисленное программирование.

В [3] в рамках решетчатой структуры рассмотрены три широко применяемые стратегии: восстановление от периферии (PR), восстановление на основе веса узла (PRNW) и локализованное восстановление (LR). Вес узла, как правило, связывается со значимостью подключенных к нему потребителей (больницы, заводы, школы и др.), которых этот узел обеспечивает ресурсом.

Согласно стратегии PR восстановление начинается с выбора изолированного узла с наибольшим весом, соседнего с функциональным узлом, т.е. с узлом, получающим ресурс, и ремонта связывающей их линии. Так как соседних функциональных узлов в решетке может быть больше одного, то выбор линий для восстановления происходит случайным образом. После того, как на текущем шаге все изолированные узлы одного веса оказались подключенными, на следующем шаге выбирается другой изолированный узел с наибольшим весом, соседний с функциональным узлом сети и выполняется ремонт связывающей их линии и т.д. В стратегии PRNW преимущество в восстановлении отдается линиям, которые связывают, в первую очередь, изолированный узел с наибольшим весом с функциональным узлом сети и связям этого узла с другими значимыми узлами. Выбор поврежденных линий, инцидентных функциональному узлу, также происходит случайным образом. В стратегии LR восстановление начинается с выбора корневого узла и исправления его поврежденных связей. Связи остальных узлов восстанавливаются в порядке удаления этих узлов от корневого узла, независимо от их веса. В этих стратегиях используется постепенное пошаговое восстановление линий и снабжение инцидентных им ранее изолированных узлов.

Недостатками стратегий, использующих оптимизацию, являются сложность построения модели с большим числом ограничений и длительность вычислений. К недостаткам последних трех стратегий относятся: случайный выбор восстанавливаемых линий, что создает множественность траекторий ремонта; возможность подключения узлов с наибольшим весом в конце процесса восстановления (PR, LR). Рассмотрение только линий в качестве повреждений создает упрощенную картину воздействия.

Реальная картина поражения отличается от описанной выше. Так, даже при большой интенсивности воздействия часть воздушных линий может не повреждаться, например, если они расположены по направлению ветра; часть узлов, например подстанций, могут разрушаться в силу недостаточной стойкости сооружения; внутри зоны поражения могут существовать изолированные «островки» неповрежденных сетевых элементов, которые должны учитываться в процессе восстановления и т.д. Поэтому реальная инфраструктура после воздействия представляется в виде мозаики из оставшихся исправными и поврежденными сетевых элементов. Сами поврежденные элементы входят в состав сечений, нарушающих достижимость узлов, не затронутых атакой, до источников ресурса.

Непрерывная подача электроэнергии после природных и техногенных катастроф не может быть обеспечена без приоритизации нагрузок и ресурсов [10]. Поэтому при разработке стратегии необходимо определить состав элементов, подлежащих ремонту, и очередность (порядок) устранения повреждений с учетом приоритетов потребителей, оставшихся без ресурсов.

Например, в первую очередь должно выполняться восстановление тех элементов, которые обеспечивают ресурсами более значимых потребителей (потребителей первой категории). В других случаях восстановление должно проходить так, чтобы ресурсы предоставлялись всем потребителям, но при ограниченных объемах поставок и т.д. В зависимости от приоритетов формируются пути снабжения ресурсами и состав ремонтируемых элементов. Ясно, что эти пути могут не повторять те, которые существовали до кризиса.

Выбираемый состав ремонтируемых элементов и очередность устранения повреждений должны удовлетворять определенным критериям и учитывать наличие ограничений в ресурсах: финансовых, материальных (механизмов) и людских (ремонтных бригад). Чаще всего в качестве критериев используются стоимость и сроки выполнения работ, тогда остальные располагаемые ресурсы в задаче оптимизации выступают как ограничения.

Ниже предлагается подход к восстановлению элементов инфраструктурной сети (узлов и линий) на основе реальной картины повреждений, который смягчает недостатки указанных выше стратегий.

В качестве инфраструктурной системы рассматривается электрическая распределительная сеть. Такая сеть, как правило, характеризуется разомкнутой структурой, в которой каждый потребитель получает ресурс от одного источника. При этом один источник может обеспечивать ресурсом нескольких потребителей.

Для исследования сетей, обладающих указанными свойствами, в [11] введено понятие «предельного» графа. В [12, 13] разработаны алгоритмы построения полного множества предельных графов, доказаны теоремы, обосновывающие корректность алгоритмов, и рассмотрено применение метода к решению задач реконфигурации распределительных сетей. В представленной статье результаты указанных работ распространяются на решение задачи восстановления сетевой инфраструктуры после НВ.

Рассматриваемый ниже траекторный метод восстановления можно представить в виде последовательности шагов:

- поиск путей между отключенными потребителями и источниками ресурса,
- определение на этих путях минимальных наборов поврежденных элементов (узлов и связей),

- выбор среди полученных наборов тех, для восстановления элементов которых требуется минимальные время или стоимость,
- оценка инженерной устойчивости.

Эти шаги подробно рассмотрены в примере раздела 4. Для детерминированной оценки устойчивости выбран интегральный показатель производительности, который хорошо отражает общее состояние системы в различных режимах, включая период восстановления после НВ [14].

2. Постановка задачи

Процесс восстановления рассматривается на модели распределительной сети, представляющей собой связный граф $G = \langle V, E \rangle$, где V и E – соответственно конечные множества вершин (узлов сети) и ребер (связей сети). В свою очередь, множество вершин графа можно представить как $V = \langle S, P, U \rangle$, где S, P, U – соответственно подмножества вершин генерации ресурса (источники), потребления (нагрузки), преобразования (подстанции) и распределения ресурса (распределительные устройства). Узлы потребления подключены к узлам преобразования ресурса.

В дальнейшем будем предполагать, что все связи множества E являются коммутируемыми и расположенные на них коммутаторы могут находиться в двух состояниях: «замкнутое», когда ресурс проходит через связь, и «разомкнутое», когда ресурс не проходит через нее. В соответствии с состоянием коммутаторов можно говорить о замкнутом или разомкнутом состоянии ребер.

От состояния коммутаторов зависят режимы работы сети, управление которыми используется для изменения конфигурации сети и, как правило, осуществляется по критериям минимизации потерь мощности в линиях, выравнивания нагрузок в линиях и др.

Таким образом, маршруты распределения ресурса определяются наборами состояний коммутаторов. Каждому набору свойственно определенное направление потоков в сети и соответствующая ему ориентация ребер графа. В силу использования при управлении режимами различных наборов состояний возможно изменение ориентации ребер. По этой причине в статье используется терминология, принятая для неориентированных графов.

Возникает вопрос, как резервирование связей в распределительных сетях отражается на наборах состояний коммутаторов, например, при ненагруженном («холодном») и нагруженном («горячем») резервах. При ненагруженном резерве каждая из связей содержит коммутаторы в различных состояниях, которые естественным образом входят в наборы. При нагруженном резерве коммутаторы резервируемых связей должны находиться в состоянии «замкнуто». В этом случае рекомендуется перейти к эквивалентной схеме, где параллельные связи объединяются в одну с общим потоком ресурса и единым коммутатором.

Для выделения среди наборов состояний тех, которые присущи распределительной сети, используем введенное в [13] определение графа «конфигурации».

Для любого подмножества ребер $W \subseteq G$ определим следующую операцию:

- 1) удалим из графа G подмножество W ;
- 2) удалим из графа G все ребра и вершины, не лежащие ни на одном пути $s \rightarrow p$, где $s \in S$, $p \in P$.

Назовем описанную операцию построением «разрешенного» подграфа.

Удаляемой вершиной может быть и вершина-источник $s \in S$, если для нее нет ни одного пути $s \rightarrow p$ для любого $p \in P$.

Таким образом, рассмотрению подлежит подграф G , содержащий пути $s \rightarrow p$, где $s \in S$, $p \in P$, не включающие ребер в разомкнутом состоянии.

Получившийся в результате этой операции разрешенный подграф будем называть графом конфигурации τ_r , если для каждой вершины $p \in P$ существует путь $s \rightarrow p$ хотя бы из одной вершины $s \in S$.

Граф конфигурации будем называть предельным графом τ_r^{lim} , если при удалении из него любого ребра $e \in E \setminus W$ найдется вершина $p \in P$, для которой не будет ни одного пути $s \rightarrow p$, где $s \in S$.

В [10] показано, что каждый предельный граф τ_r^{lim} обладает следующими свойствами:

- 1) Для вершины из P не существует двух путей, ведущих от различных вершин из S ;
- 2) τ_r^{lim} не содержит циклов, направления ребер определяются однозначно по путям $S \rightarrow P$.

Свойства 1 и 2 характерны для распределительных сетей.

После наступления НВ множество вершин U разделяется на два подмножества: подмножество вершин, отключенных от источников $\tilde{U}$, и подмножество вершин, оставшихся подключенными к источникам, далее называемых функциональными вершинами $\bar{U}$.

В то же время $\tilde{U} = \tilde{U}^* \cup \tilde{U}^0$, где $\tilde{U}^*$ – подмножество вершин, физически поврежденных, $\tilde{U}^0$ – подмножество вершин, изолированных от источников поврежденными вершинами и ребрами.

Множество ребер E также разделится на подмножество ребер, отключенных от источников $\tilde{E}$, и подмножество ребер, оставшихся подключенными к источникам, далее называемых функциональными ребрами $\bar{E}$.

В то же время $\tilde{E} = \tilde{E}^* \cup \tilde{E}^0$, где $\tilde{E}^*$ – подмножество ребер, физически поврежденных, $\tilde{E}^0$ – подмножество ребер, изолированных от источников поврежденными вершинами и ребрами.

Изоляция или повреждение узла означает отключение от ресурса присоединенного к этому узлу потребителя из подмножества $\tilde{P}$, $\tilde{P} \subseteq P$.

Таким образом, в результате НВ имеем следующие подмножества элементов сети: физически поврежденные ребра $\tilde{E}^*$ и вершины $\tilde{U}^*$, оставшиеся функциональными ребра $\bar{E}$ и вершины $\bar{U}$, исправные, изолированные ребра $\tilde{E}^0$ и вершины $\tilde{U}^0$.

После анализа измененной в результате НВ структуры сети постановка задачи представляется в следующем виде. На графе $G = \langle V, E \rangle$, часть вершин и ребер которого находятся в поврежденном состоянии, вследствие чего вершины-потребители множества $\tilde{P}$ не получает ресурсы, требуется найти такие пути $S \rightarrow \tilde{P}$, которые содержат минимальные по мощности наборы поврежденных вершин и ребер, восстановление которых обеспечивает ресурсами отключенных потребителей множества $\tilde{P}$.

При определенных условиях указанные минимальные наборы обеспечивают восстановление за минимальное время или стоимость. Вершины и ребра этих наборов обладают наивысшим приоритетом восстановления.

В [13] показано, что полное множество предельных графов соответствует полному множеству вариантов присоединений потребителей к источникам. Поэтому существует предельный граф, содержащий искомое множество путей. В той же работе исследованы методы нахождения полного множества предельных графов – методы простых комбинаций путей и компонентный метод. Поэтому далее предполагается, что множество предельных графов τ_r^{lim} определено.

Далее рассмотрим подмножество поврежденных вершин $\tilde{U}^*$ и ребер $\tilde{E}^*$ и определим те из них, которые подлежат первоочередному ремонту для восстановления снабжения потребителей из $\tilde{P}$.

3. Предельные графы в задаче восстановления

Как и в стратегиях, рассмотренных во введении, примем, что восстановление поврежденного элемента сети (узла или связи) происходит после его ремонта и присоединения к узлу подмножества $\bar{U}$, т.е. к узлу, функциональность которого не нарушилась из-за НВ.

Пусть τ_r^{lim} – полное множество предельных графов графа G . Тогда те подмножества вершин $\tilde{U}^*$ и ребер $\tilde{E}^*$, которые принадлежат предельному графу $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$, будут обладать более высоким приоритетом восстановления по сравнению с остальными поврежденными элементами.

На множестве вершин $\bar{U}$ рассмотрим подмножество граничных вершин $\bar{U}_s$.

Вершина $\bar{u}$ множества $\bar{U}$, расположенная на пути $s \rightarrow \tilde{p}$, где $s \in S$, называется граничной для этого пути, если все вершины и ребра между $\bar{u}$ и $\tilde{p}$ принадлежат соответственно множествам $\tilde{U}$ и $\tilde{E}$, т.е. есть граничная вершина – это ближайшая к отключенному потребителю функциональная вершина.

Построим подграф $\tilde{G}$ графа сети G , в котором в качестве вершин источников рассматриваются вершины множества $\bar{U}_s$, в качестве вершин потребителей – множества $\tilde{P}$. Добавим к этому подграфу вершины множества $\tilde{U}$ и ребра множества $\tilde{E}$. После чего удалим все вершины и ребра, не лежащие на путях $s \rightarrow \tilde{p}$, где $s \in \bar{U}_s$, $\tilde{p} \in \tilde{P}$.

Обозначим через $\tilde{\tau}_r^{lim}$ полное множество предельных графов для графа $\tilde{G}$ и напомним, что τ_r^{lim} – полное множество предельных графов для графа G .

При использовании компонентного метода [13] одновременно с построением множества предельных графов $\tilde{\tau}_r^{lim}$ определяются граничные функциональные вершины множества $\overline{U}_s$.

Сложность вычислений вариантов восстановления значительно сокращается при использовании предельных графов $\tilde{\tau}_r^{lim}$ вместо τ_r^{lim} . Это происходит из-за рассмотрения вершин множества $\overline{U}_s$ в качестве источников для потребителей $\tilde{p} \in \tilde{P}$. Вследствие этого множество $\tilde{\tau}_r^{lim}$ определяется на существенно меньшем числе вершин по сравнению с множеством τ_r^{lim} .

Обозначим через $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$ граф, принадлежащий множеству $\tilde{\tau}_r^{lim}$ и содержащий наименьшее количество поврежденных элементов: вершин из $\tilde{U}^*$ и ребер из $\tilde{E}^*$.

Тогда справедливо

Утверждение 1. Приоритет в восстановлении поврежденных вершин и ребер принадлежит вершинам $\tilde{u}^$, $\tilde{u}^* \in \tilde{U}^*$ и ребрам $\tilde{e}$, $\tilde{e} \in \tilde{E}$, входящим в $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$.*

Это нетрудно доказать. Полное множество предельных графов τ_r^{lim} соответствует всем допустимым вариантам присоединения вершин P к вершинам S , включая все допустимые варианты присоединения вершин $\tilde{P}$ к вершинам S , т.к. $\tilde{P} \subseteq P$. В τ_r^{lim} все пути $S \rightarrow \tilde{P}$ проходят через вершины $\overline{U}_s$ и, следовательно, пути $\overline{U}_s \rightarrow \tilde{P}$ проходят через вершины множества $\tilde{U}$ и ребра множества $\tilde{E}$, находящиеся в $\tilde{G}$. Тогда подграфы предельных графов τ_r^{lim} , состоящие из путей $\overline{U}_s \rightarrow \tilde{P}$, образуют полное множество предельных графов $\tilde{\tau}_r^{lim}$.

Эти графы $\tilde{\tau}_r^{lim}$ соответствуют всем допустимым вариантам присоединения вершин $\tilde{P}$ к вершинам $\overline{U}_s$, а следовательно, соответствуют всем возможным вариантам восстановления электроснабжения потребителей $\tilde{p}$, $\tilde{p} \in \tilde{P}$ из вершин $\overline{U}_s$ и, стало быть, из источников s , $s \in S$.

Понятно, что при восстановлении вершин $\tilde{u}^*$, $\tilde{u}^* \in \tilde{U}^*$ и $\tilde{e}^*$, $\tilde{e}^* \in \tilde{E}^*$, входящих в $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$, восстановление снабжения потребителей произойдет с минимальными сроком и стоимостью выполнения работ (при сделанных выше допущениях).

Предельные графы в $\tilde{\tau}_r^{lim}$ далее будем называть графами восстановления.

4. Применение метода к восстановлению поврежденной сети

Восстановление в предложенном методе осуществляется в соответствии со следующими этапами:

- 1) Выбор потребителей заданной категории.
- 2) Построение подграфа $\tilde{G}$.
- 3) Построение множества предельных графов $\tilde{\tau}_r^{lim}$ (графов восстановления).
- 4) Выбор сетевых элементов – кандидатов на восстановление и оценка инженерной устойчивости сетевой инфраструктуры.

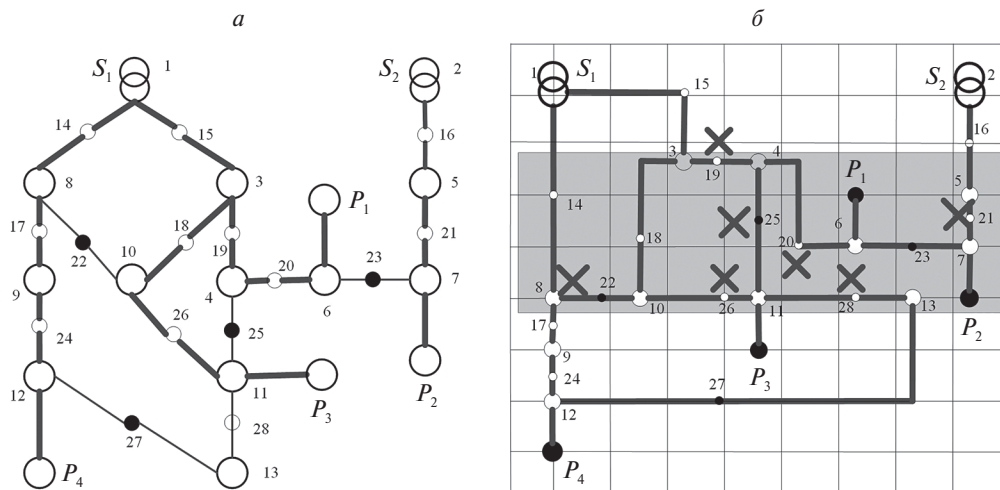


Рис. 1. Снабжение потребителей P_1 – P_4 от источников S_1 и S_2 :
 а – граф сетевой системы; б – расположение сетевой системы в географической зоне.

Этапы 1–4 повторяются для потребителей более низких категорий (при их наличии).

Этапы 1–3 рассмотрены выше, и поэтому далее принимается, что множество графов восстановления построено. Рассмотрим более подробно этап 4 на примере сети рис. 1, а.

На рис. 1, а приведен пример графа распределительной сети. «Жирными» линиями выделена схема снабжения подстанций, принятая для нормального режима эксплуатации (далее «нормальная» схема).

В составе графа сети имеются две вершины – источники S_1 и S_2 , которыми могут быть центры питания, 11 функциональных узлов 3–13, которым соответствуют подстанции сети, 15 линий сети 14–28. К каждой подстанции присоединена нагрузка, определяющая текущую производительность подстанции. Четыре из них P_1 – P_4 изображены на рис. 1. «Жирными» линиями обозначена схема снабжения подстанций, принятая для нормального режима эксплуатации. Маленькие кружки – ребра, которые соответствуют участкам воздушных линий и одновременно устройствам коммутации. Большие кружки соответствуют вершинам, т.е. подстанциям сети. Состояние «разомкнуто» устройств коммутации на рис. 1 представлено темным кружком, состояние «замкнуто» – белым. На рис. 1, б изображено расположение сетевых элементов на двумерной решетке. Зона действия негативного события (например, урагана) представлена в виде затененной полосы. Множество поврежденных в результате этого события элементов сетевой системы отмечены крестиками. «Нормальной» схеме рис. 1, а соответствует предельный граф τ_r^{lim} .

Для примера рис. 1 введем следующие допущения, которые не влияют на предлагаемый подход к решению задачи восстановления:

- все подстанции до НВ имели одинаковую производительность (далее равную 1 у.е.),
- стоимость ремонта любого сетевого элемента одинаковая,
- ремонт выполняется последовательно одной бригадой из расчета один сетевой элемент в единицу условного времени,
- временем на выполнение переключений в устройствах коммутации можно пренебречь по сравнению с временем ремонта сетевого элемента.

Обозначим через $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$ граф, содержащий наименьшее количество вершин из $\tilde{U}^*$ и $\tilde{E}^*$. При сделанных выше допущениях восстановление поврежденных вершин и ребер, входящих в $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$, приведет к восстановлению снабжения потребителей в минимальные сроки и с минимальной стоимостью выполнения работ.

По этой причине граф $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$ является искомым и его вершины множества $\tilde{U}^*$ и ребра множества $\tilde{E}^*$ обладают наивысшим приоритетом восстановления.

4.1. Выбор сетевых элементов – кандидатов на восстановление

Данный этап включает выбор набора сетевых элементов из состава поврежденных элементов, оптимального для восстановления.

Рассмотрим этап 4 на примере распределительной сети рис. 1. Множества физически поврежденных узлов $\tilde{U}^* = \{8\}$, ребер $\tilde{E}^* = \{19, 20, 21, 25, 26, 28\}$. Множество изолированных узловых вершин $\tilde{U}^0 = \{4, 6, 7, 9, 11, 12, 13\}$ и ребер $\tilde{E}^0 = \{17, 23, 24, 27\}$. Граничными вершинами являются $\tilde{U}_s = \{1, 3, 5, 10\}$.

Для наглядности изложения ограничимся восстановлением функциональности четырех узлов, снабжающих потребителей $\tilde{P}_1 - \tilde{P}_4$, что не влияет на общность подхода. Пусть среди них потребители $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ относятся к первой и $\tilde{P}_3, \tilde{P}_4$ ко второй категориям.

Электроснабжение указанных потребителей происходит в соответствии с [15], а именно, потребители первой категории (опасные производства, больницы и др.) обеспечиваются электроснабжением не менее чем от двух независимых источников питания по независимым линиям, второй категории (поликлиники, школы и др.) – от двух независимых источников по независимым линиям, третьей категории (жилые дома и др.) обеспечиваются электроснабжением от одного источника. Будем считать возобновление снабжения потребителей первой категории приоритетной задачей.

Восстановление снабжения потребителей первой категории. При сделанных допущениях минимальная стоимость восстановления C достигается в графе $\tilde{G}$ с минимальной мощностью множества $\tilde{U}^* \cup \tilde{E}^*$.

В качестве примера рассмотрим два предельных графа для потребителей первой категории $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$.

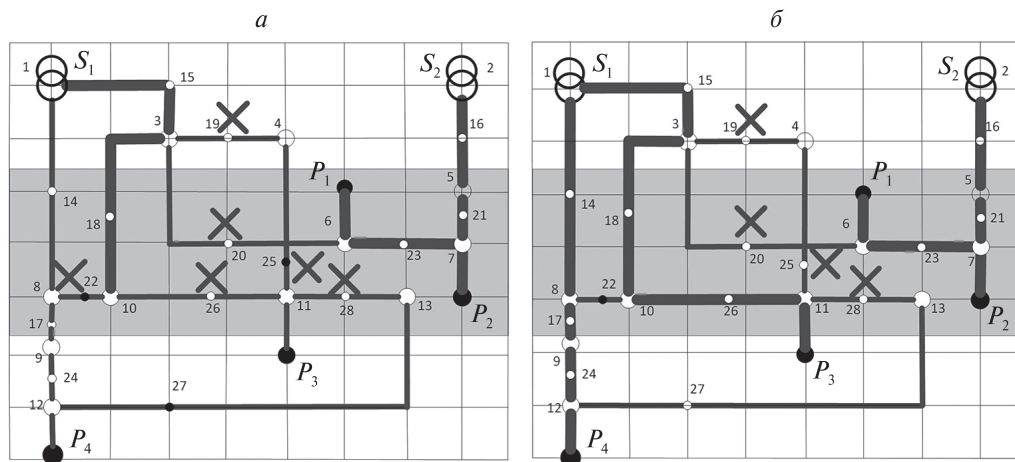


Рис. 2. Восстановление снабжения: *a* – потребителей первой категории $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$; *б* – потребителей второй категории $\widetilde{P}_3, \widetilde{P}_4$.

В обозначениях вершин и ребер в табл. 1 опустим знаки «тильда» и верхнего подчеркивания, в остальном они совпадают с обозначением содержащих их множеств: функциональных вершин $\overline{U}$, поврежденных вершин $\tilde{U}^*$ и ребер $\tilde{E}^*$, изолированных вершин $\tilde{U}^0$ и ребер $\tilde{E}^0$.

Таблица 1. Примеры графов восстановления снабжения потребителей первой категории

№ вар.	Граничные узлы $\overline{U}_s$	Графы восстановления
1	5	$5, 21^*, 7^0, 23^0, 6^0, P_1; 5, 21^*, 7^0, P_2$
2	3, 5	$3, 19^*, 4^0, 20^*, 6^0, P_1; 5, 21^*, 7^0, P_2$

На рис. 2, *a* «толстыми» линиями обозначены пути подвода энергии к функциональным узлам 3, 10, а также граф восстановления $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$, построенный по варианту 1 табл. 1, который имеет меньшее число «поврежденных» ребер 21^* по сравнению с вариантом 2 ($19^*, 20^*, 21^*$). «Исправная» вершина 23^0 в нормальной схеме соответствует коммутатору, который находится в состоянии «разомкнуто». Вариант 1 предполагает восстановление поврежденной линии 21^* в качестве ремонта первой очереди и перевод коммутатора 23^0 в состояние «замкнуто».

Восстановление снабжения потребителей более низкой категории. Будем считать, что возобновление снабжения потребителей первой категории выполнено по варианту 1 табл. 1. В качестве примера рассмотрим два графа восстановления для потребителей второй категории $\widetilde{P}_3, \widetilde{P}_4$. После восстановления части сети для снабжения потребителей первой категории поврежденный фрагмент сети изменяется и выбор восстанавливаемых элементов рассматривается на соответствующем этим изменениям подграфе $\tilde{G}$.

Таблица 2. Примеры графов восстановления снабжения потребителей второй категории

№ вар.	Граничные узлы $\bar{U}_s$	Графы восстановления
1	10	$10, 26^*, 11^0, P_3; 10, 26^*, 11^0, 28^*, 13^0, 27^0, 12^0, P_4$
2	1, 10	$10, 26^*, 11^0, P_3; 1, 14^0, 8^*, 17^0, 9^0, 24^0, 12^0, P_4$

Для восстановления снабжения $\widetilde{P}_3, \widetilde{P}_4$ в варианте 1 табл. 2 требуется провести ремонт линий $26^*, 28^*$ и выполнить переключение в устройстве 27^0 .

Вариант 2 табл. 2 определяется графом восстановления, в состав которого входят поврежденные подстанция 8^* и линия 26^* . Этот вариант выбирается для проведения ремонта второй очереди $\tilde{\tau}_{r0}^{lim}$. Он изображен на рис. 2,б в виде «толстых» линий распределения электроэнергетики.

Предпочтительный вариант при одинаковом числе повреждений выбирается лицом, принимающим решения, с учетом числа разблокированных (ранее изолированных) узлов, снабжения потребителей от разных источников, числа переключений [10] и др.

Оценка инженерной устойчивости. Оценка инженерной устойчивости для примера сети рис. 1 выполняется после построения графика изменения ее производительности при НВ. Для иллюстрации подхода к оценке устойчивости пренебрежем потерей мощности в линиях и будем учитывать только изменение мощности в узлах сети (подстанциях). Также предположим, что деградация происходит мгновенно.

Всего поврежденными и изолированными в результате негативного события оказались 8 узлов (4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13), что эквивалентно потере производительности сети 8 у.е. В результате НВ шесть линий 19, 20, 21, 25, 26, 28 и одна подстанция 8 (рис. 1,б) оказались поврежденными. По этой причине к сети остались подключенными только потребители трех подстанций 3, 5, 10, которые имеют суммарную производительность 3 у.е.

Рассмотрим распределение мощностей подстанций для выбранного варианта восстановления. После ремонта линии 21 и присоединения подстанции 7 производительность сети повысится до 4 у.е. После переключения коммутатора 23 в состояние «замкнуто» подстанция 6 присоединяется к сети источника S_2 , и производительность сети повысится до 5 у.е. В конце второй очереди ремонта к источнику S_1 будут присоединены четыре из ранее отключенных подстанций 8, 9, 11, 12, и производительность сети повысится до 9 у.е. После переключения коммутатора 27 в состояние «замкнуто» подстанция 13 присоединяется к сети источника S_1 , и производительность сети повысится до 10 у.е.

Процесс восстановления для выбранных из табл. 1 и 2 вариантов ремонта можно представить в виде графика рис. 3.

На графике горизонтальные отрезки соответствуют восстанавливаемым участкам сети и подстанциям, их обозначения находятся над этими линиями. Вертикальные отрезки обозначают изменение производительности за счет



Рис. 3. График восстановления сети, изображенной на рис. 1.

подключения подстанций к функциональной части сети, справа от этих отрезков указаны номера подстанций. Кружками на графике показаны узлы коммутации, состояние которых изменяется переключением с положения «разомкнуто» на «замкнуто».

Значения t_h , t_e , t_d , t_s , t_f определяют границы между различными фазами процесса: начала подготовки к НВ; поглощения воздействий из-за начального и последующих отказов за счет внутренних свойств системы, например резервирования; завершения действия отказов и начала фазы оценки ущерба и разработки мероприятий по восстановлению; перехода к восстановлению; завершения восстановления системы. В силу предположения о мгновенной деградации $t_e = t_d$.

В фазе завершения восстановления достигнутая производительность может не соответствовать ее докризисному значению. Остаточная производительность определяется ее минимальным уровнем на контрольном интервале $[t_0, t_c]$.

Доля площади, ограниченной функцией $Q(t)$ на контрольном интервале $[t_0, t_c]$ рис. 3 относительно заданной производительности на этом интервале, применяется для оценки инженерной устойчивости системы. Эта доля, вычисленная для графика рис. 3 и контрольного интервала измерения $[1, 7]$, равна 0,61.

Выбор характерных моментов времени, определяющих изменения в поведении системы, нуждается в пояснении. В настоящее время отсутствуют устоявшиеся формулировки для определения приведенных выше временных границ фаз и контрольного интервала. В то же время на большом интервале контроля, значительно превышающем время завершения полного восстановления, производительность может быть близкой к заданной и отношение пло-

падей может стремиться к единице. Этот факт указывает на зависимость полученной интегральной оценки устойчивости от выбора значений t_0, t_c . В литературе приводятся рекомендации по их выбору, как правило, зависящие от приложения. Так, для установления значения t_c используются: ожидаемое, среднее, максимальное времена восстановления; соображения заинтересованных сторон по конкретному сценарию; среднее время между неблагоприятными событиями.

Интегральная производительность системы J оценивается как

$$(1) \quad J = \int_{t_0}^{t_c} Q(t) dt.$$

В [14] исследованы различные показатели и формы кривой устойчивости. Среди широко используемых для детерминированной оценки эффективности восстановления применяется нормированный показатель интегральной производительности (1), отнесенной к контрольному интервалу выполнения оценки $[t_0, t_c]$

$$(2) \quad \Phi = \frac{\int_{t_0}^{t_c} q(t) dt}{t_c - t_0}.$$

В (2) $q(t)$ означает производительность, нормированную по ее заданному значению.

Затраты на восстановление C равны $C = rT$, где r – затраты в единицу времени.

Если значение показателя Φ не отвечает заданному, то необходимо пересмотреть варианты или изменить ограничения на количество ремонтных бригад, технических средств и др.

При реализации описанной стратегии конфигурация распределительной сети претерпела изменения по сравнению со схемой снабжения в докризисной ситуации (рис. 1,а). Поэтому на следующей стадии восстановления при наличии финансовых и технических средств можно реконфигурировать сеть, подняв ее производительность до 100% способом, аналогичным описанному выше, изменив состояния коммутаторов и выполнив ремонт оставшихся поврежденными сетевых элементов.

После выбора варианта восстановления следует проверять значения потоков в линиях и напряжений на шинах, чтобы предотвратить превышения ими допустимых значений. Для этого используются методы математического моделирования потокораспределений в электрических сетях.

5. Заключение

Предложен подход к восстановлению сетевой инфраструктуры, поврежденной в результате неблагоприятного воздействия. Особенностью подхода

является применение метода предельных графов, ранее разработанного для решения задач реконфигурации сетей, к восстановлению поврежденной сети. Полный набор предельных графов, получаемый при использовании данного метода, позволяет находить различные оптимизационные решения для выполнения восстановления, учитывающие сроки и стоимость работ, дефицит мощности источников, пропускную способность линий, количество переключений коммутаторов и др.

Затраты времени на расчет предельных графов в задаче восстановления сокращаются в связи с возможностью рассмотрения только части сети, ограниченной зоной неблагоприятного воздействия. Каждое решение должно проверяться математическим моделированием процессов потокораспределения.

Создание системы, устойчивой к чрезвычайным неблагоприятным воздействиям, предполагает наличие организационных механизмов и технических средств для ее восстановления. Предложенный метод может использоваться для оценки эффективности имеющихся у организации средств восстановления путем имитации вероятных неблагоприятных воздействий. На основе оценки устойчивости могут формироваться рекомендации по повышению мер противодействия неблагоприятным факторам. В то же время данный метод направлен на поддержку ЛПР в реальных условиях действия негативных событий.

Далеко не все возможности применения метода предельных графов к восстановлению поврежденной сети рассмотрены в статье, в частности, нуждаются в проведении исследований вопросы восстановления поврежденной инфраструктуры с учетом перегрузок линий, дефицита мощности у потребителей, применимость метода к взаимодействующим инфраструктурным сетям и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reid R.* How to make infrastructure more resilient against climate change // ASCE. 2022. No. 1. P.1133–1143.
2. *Rehak D., Senovsky P., Hromada M., Loveck T.* Complex approach to assessing resilience of critical infrastructure elements // Int. J. Critical Infrastruct. Protect. 2019. No. 25. P. 125–138.
3. *Afrin T., Yodo N.* Resilience-Based Recovery Assessments of Networked Infrastructure Systems under Localized Attacks // Infrastructures. 2019. V. 4. No. 1. P. 1–18.
4. *Masoomi H., Lindt J., Peek L.* Quantifying Socioeconomic Impact of a Tornado by Estimating Population Outmigration as a Resilience Metric at the Community Level // Struct. Engin. 2018. V. 144. No. 5. P. 18–34.
5. *Barthelemy M.* Spatial Networks // Physics Reports. 2011. V. 499. No. 1–3. P. 1–101.
6. *Гребенюк Г.Г., Лубков Н.В.* Надежный подход к анализу устойчивости инженерной инфраструктуры // Управление большими системами. 2022. № 99. С. 157–181.

7. *Sathurshan M., Saja A., Thamboo J., Haragucht M., Navaratnam S.* Resilience of Critical Infrastructure Systems: A Systematic Literature Review of Measurement Frameworks // *Infrastructures*. 2022. V. 7. No. 67. P. 1–26.
8. *Yasser A., Andres D., Gonzalez R., Kash B.* Exploring Recovery Strategies for Optimal Interdependent Infrastructure Network // *Resilience Networks and Spatial Economics*. 2021. V. 21. P. 229–260.
9. *Almoghathawia Y., Barkera K., Emmanuel J.* Resilience-Based Measures for Importance Ranking of Interdependent Infrastructure Networks Components Across Uncertain Disruption Scenarios // *Safety, Reliability, Risk, Resilience and Sustainability of Structures and Infrastructure 12th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability*. 2017. P. 1133–1142.
10. *Arghandeh R., Meier A., Mehrmanesh L., Mili L.* On the definition of cyber-physical resilience in power systems.
https://escholarship.org/content/qt0dr6p7wc/qt0dr6p7wc_noSplash_5a28962764c2b1bf9bf5f0b6b8cf7743.pdf
11. *Гребенюк Г.Г., Крыгин А.А.* Алгоритмы оптимизации числа переключений при реконфигурации сетей теплоснабжения // *АиТ*. 2007. № 12. С. 101–112.
Grebenyuk G., Krygin A. Algorithms for Optimization of the Number of Switchings in Heat Supply Networks Reconfiguration // *Autom. Remote Control*. 2007. V. 68. No. 12. P. 2187–2197.
12. *Гребенюк Г.Г., Крыгин А.А.* Предельные графы в структурной оптимизации режимов распределительных сетей // *АиТ*. 2015. № 1. С. 147–162.
Grebenyuk G., Krygin A. Limit graphs in structural optimization of modes in distribution networks // *Autom. Remote Control*. 2015. V. 76. No. 1. P. 120–132.
13. *Гребенюк Г.Г., Крыгин А.А.* Методы поиска конфигураций распределительных сетей // *АиТ*. 2021. № 5. С. 35–44.
Grebenyuk G., Krygin A. Methods to Search for Configurations of Distribution Networks // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 5. P. 772–779.
14. *Poulin C., Kane M.* Infrastructure resilience curves: Performance measures and summary metrics // *Reliability Engineering & System Safety*. 2021. V. 216. No. 12.
15. Правила устройства электроустановок. Эксмо, 2023, 512 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 07.11.2023

После доработки 10.12.2024

Принята к публикации 14.01.2025

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывно-дискретных систем с неопределенными возмущениями.....	3
Платонов А.В. Анализ устойчивости нестационарных механических систем с разрывными правыми частями.....	20
Сапунков Я.Г., Молоденков А.В. Квазиоптимальное по быстродействию угловое ускорение космического аппарата, полученное на основе концепции Пуансо.....	38

Стохастические системы

Назаров А.А., Фёдорова Е.А. Метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа мультиклассовой RQ-системы $M_n/GI_n/1$	60
---	----

Управление в технических системах

Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез дискретных регуляторов многомерных систем по инженерным критериям качества	79
---	----

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Голованов О.А., Тырсин А.Н. Устойчивое регрессионное моделирование: методы внутренней точки, симплекс-метод, спуск по узловым прямым.....	100
Гребенюк Г.Г., Крыгин А.А. Траекторный метод восстановления сетевой инфраструктуры	119

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Continuous-Discrete Systems with Uncertain Disturbances	3
Platonov A.V. Stability Analysis of Non-Stationary Mechanical Systems with Discontinuous Right-Hand Sides	20
Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V. Quasi-Optimal Angular Acceleration of Spacecraft Obtained on the Basis of the Poinot Concept	38

Stochastic Systems

Nazarov A.A., Fedorova E.A. Method of the Marginal Asymptotic-Diffusion Analysis for Multi-Class Retrial Queue $M_n/GI_n/1$	60
--	----

Control in Technical Systems

Chestnov V.N., Shatov D.V. Design of Discrete-Time Controllers for Multivariable Systems by Engineering Performance Indices	79
--	----

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Golovanov O.A., Tyrsin A.N. Robust Regression Modelling: Interior Point Methods, Simplex Method, Descent Along Nodal Straight Lines	100
Grebenyuk G.G., Krygin A.A. Trajectory Method for Restoring Network Infrastructure	119