Автоматика и телемеханика, № 5, 2025

Стохастические системы

© 2025 г. **А.А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук (nazarov.tsu@gmail.com), Я.Е. ИЗМАЙЛОВА, канд. физ.-мат. наук (evgenevna.92@mail.ru)**
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФФУЗИОННЫЙ АНАЛИЗ ПРИОРИТЕТНОЙ RQ-СИСТЕМЫ $M^{(2)}|M^{(2)}|1$

Рассматривается система массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-система). Поступает в систему два входящих пуассоновских потока. Первый поток заявок – приоритетный, второй – неприоритетный. Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение. Если заявки приоритетного потока обнаруживают прибор занятым заявкой того же класса, то они переходят на орбиту (орбита для приоритетных заявок), где осуществляют экспоненциально распределенную случайную задержку, после которой обращаются к прибору с повторной попыткой захвата. Если заявки приоритетного потока обнаруживают прибор занятым обслуживанием заявки альтернативного потока, то пришедшая заявка вытесняет обслуживаемую и сама встает на прибор. Вытесненная заявка переходит на орбиту для неприоритетных заявок. Если заявка неприоритетного потока обнаруживает прибор занятым, то она переходит на орбиту (орбита для неприоритетных заявок), где осуществляют случайную задержку. Дисциплина обращения заявок с орбит аналогична дисциплине обращения вновь прибывших в систему заявок. После успешного окончания обслуживания заявки покидают систему. Найдены распределения вероятностей числа заявок на неприоритетной и приоритетной орбитах. Число заявок на приоритетной орбите получено методом асимптотически-диффузионного анализа.

Ключевые слова: система массового обслуживания, RQ-система, орбита, асимптотически-диффузионный анализ, диффузионный процесс, распределение вероятностей.

DOI: 10.31857/S0005231025050013, **EDN:** AXYZTN

1. Введение

Образование очередей в офисах банка, в больницах, в торговых центрах и т.д. – это то, с чем современный человек сталкивается в повседневной жизни. Иногда, не желая стоять и ждать в очереди, люди уходят и повторяют свою попытку обслужиться позже, когда нагрузка уменьшится. Такое явление и породило специальные системы в теории массового обслуживания, называемые системами с повторными вызовами (RQ-системы). Эти системы характеризуются тем, что клиент (заявка), обнаружив прибор занятым, переходит на виртуальную орбиту, где находится некоторое случайное время, после которого повторяет свою попытку обслужиться. Большая работа проделана рядом ученых, занимающихся вопросами исследования RQ-систем. Обзор по данной тематике можно найти в [1–5].

Однако на практике традиционные модели RQ-систем трудно широко применять в реальных условиях из-за их недостаточной гибкости. Почти каждая сфера жизни подвержена влиянию приоритетного обслуживания одного клиента над другим. В системах обслуживания, таких как авиалинии, клиенты первого класса имеют приоритет перед эконом-классом. В телекоммуникационной системе голосовые пакеты имеют более высокий приоритет, чем другие пакеты данных, такие как электронная почта и т.д. В [6] проанализированы различные RQ-системы с приоритетными вызовами и многими другими параметрами системы, такими как потери клиентов, обратная связь и т.д.

В последнее время мобильный трафик резко увеличился, что привело к дефициту беспроводных спектров. Когнитивные радиосети являются перспективными технологиями для решения проблемы нехватки спектра. В сетях когнитивного радио есть приоритетные и неприоритетные пользователи. Основные пользователи (приоритетные) предоставляют некоторые полосы спектра вторичным пользователям (неприоритетным). Вторичные пользователи могут когнитивно использовать эти полосы, когда они не используются основными, но когда основной пользователь прибыл для обслуживания, текущий вторичный пользователь должен покинуть прибор и повторить попытку занять канал позже. С математической точки зрения исследование RQ-систем с двумя типами клиентов существенно сложнее, чем с одним типом клиентов. Ряд работ посвящено исследованию систем с двумя потоками. В [7] исследована приоритетная система с нетерпеливыми заявками и неоднородным обслуживанием. В [8] авторы рассмотрели систему, в которой приоритетная заявка, обнаружив прибор занятым, либо вытесняет заявку на приборе, либо с некоторой вероятностью встает в очередь. В [8] авторами учитывается факт возможной поломки прибора. В [9–11] также найдены показатели функционирования RQ-систем различных конфигураций с двумя потоками (приоритетным и неприоритетным) и очередью для приоритетных.

Стоит отметить, что в описанных выше работах приоритетные заявки, обнаружив прибор занятым, встают в очередь. В данной работе предлагается система с повторными вызовами, в которой приоритетные клиенты, также как и неприоритетные, уходят на орбиту, т.е. надо рассмотреть систему с двумя орбитами. В [12] авторами рассмотрена тандемная RQ-система с двумя орбитами. Особенностью исследуемой в этой статье системы является тот факт, что приоритетные заявки могут вытеснять обслуживаемые неприоритетные заявки.

2. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему с повторными вызовами (retrial queueing system, RQ-система), рис. 1.

Поступает два простейших потока с параметрами λ_1 и λ_2. Первый поток – поток приоритетных заявок, второй – неприоритетных. Когда в момент прихода заявка обнаруживает прибор свободным, то она начинает обслуживаться в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно для заявок приоритетного и неприоритетного потоков. После успешного окончания обслуживания заявка покидает систему. Когда в момент прихода заявка приоритетного потока обнаруживает прибор занятым, то:

— если на приборе обслуживалась приоритетная заявка, то пришедшая переходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, имеющую экспоненциальное распределение с параметром σ_1. После случайной задержки она вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата;

— если на приборе обслуживалась неприоритетная заявка, то пришедшая заявка вытесняет обслуживаемую и сама начинает обслуживаться, а вытесненная переходит на орбиту для неприоритетных заявок, где осуществляет случайную задержку, экспоненциально распределенную с параметром σ_2, после нее обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если он свободен, то начинает обслуживание, если занят, то мгновенно возвращается обратно.

Дисциплина обращения к прибору приоритетных заявок с орбиты такая же как и при обращении вновь прибывших в систему приоритетных заявок.

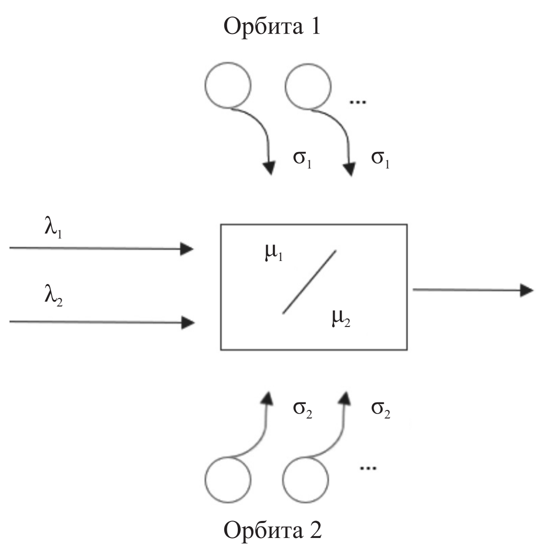

Рис. 1. Математическая модель RQ-системы $M^{(2)}|M^{(2)}|1$.

Обозначим: $i_1(t)$ – число заявок на первой орбите, $i_2(t)$ – число заявок на второй орбите. Состояние прибора определяется величиной $k(t)$: $k(t) = 0$, если прибор свободен для обслуживания; $k(t) = 1$, если прибор занят обслуживанием приоритетной заявки; $k(t) = 2$, если прибор занят обслуживанием неприоритетной заявки.

Тогда вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k, на первой орбите количество заявок равно i_1, на второй орбите количество заявок равно i_2, обозначим как

$$P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\} = P_k(i_1, i_2, t). \tag{2.1}$$

Для распределения (2.1), используя формулу полной вероятности, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_0(i_1,i_2,t)}{\partial t} =& -(\lambda_1+\lambda_2+i_1\sigma_1+i_2\sigma_2)P_0(i_1,i_2,t)+\\
&+\mu_1P_1(i_1,i_2,t)+\mu_2P_2(i_1,i_2,t),\\
\frac{\partial P_1(i_1,i_2,t)}{\partial t} =& -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P_1(i_1,i_2,t)+\lambda_1P_1(i_1-1,i_2,t)+\\
&+\lambda_2P_1(i_1,i_2-1,t)+\lambda_1P_0(i_1,i_2,t)+\\
&+(i_1+1)\sigma_1P_0(i_1+1,i_2,t)+\lambda_1P_2(i_1,i_2-1,t)+\\
&+(i_1+1)\sigma_1P_2(i_1+1,i_2-1,t),\\
\frac{\partial P_2(i_1,i_2,t)}{\partial t} =& -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+i_1\sigma_1)P_2(i_1,i_2,t)+\\
&+\lambda_2P_2(i_1,i_2-1,t)+\lambda_2P_0(i_1,i_2,t)+\\
&+(i_2+1)\sigma_2P_0(i_1,i_2+1,t).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Чтобы найти характеристики данной системы массового обслуживания, необходимо найти распределение вероятностей (2.1). В допредельном случае, т.е. решив систему уравнений (2.2), это сделать затруднительно, так как система является нетривиальной. Поэтому предлагается построить диффузионный процесс с помощью которого можно аппроксимировать распределение вероятностей (2.1), тем самым решив задачу.

Определение 1. *Частичной производяще-характеристической функцией будем называть функцию вида*

$$H_k(z,u,t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} z^{i_1} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{jui_2} P_k(i_1,i_2,t). \tag{2.3}$$

Для дальнейших исследований перейдем от системы уравнений (2.2) к системе уравнений для функций (2.3). Получим:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_0(z,u,t)}{\partial t} =& -(\lambda_1+\lambda_2)H_0(z,u,t) - \sigma_1 z\frac{\partial H_0(z,u,t)}{\partial z} + \\
&+ j\sigma_2\frac{\partial H_0(z,u,t)}{\partial u} + \mu_1 H_1(z,u,t) + \mu_2 H_2(z,u,t),\\
\frac{\partial H_1(z,u,t)}{\partial t} =& -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)H_1(z,u,t) + \lambda_1 z H_1(z,u,t) + \\
&+ \lambda_2 e^{ju}H_1(z,u,t) + \lambda_1 H_0(z,u,t) + \lambda_1 e^{ju}H_2(z,u,t) + \\
&+ \sigma_1\frac{\partial H_0(z,u,t)}{\partial z} + \sigma_1 e^{ju}\frac{\partial H_2(z,u,t)}{\partial z},\\
\frac{\partial H_2(z,u,t)}{\partial t} =& -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)H_2(z,u,t) + \lambda_2 e^{ju}H_2(z,u,t) + \\
&+ \lambda_2 H_0(z,u,t) - \sigma_1 z\frac{\partial H_2(z,u,t)}{\partial z} - j\sigma_2 e^{-ju}\frac{\partial H_0(z,u,t)}{\partial u}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Просуммировав уравнения системы (2.4), положив $z=1$ и обозначив $H_0(1,u,t)+H_1(1,u,t)+H_2(1,u,t)=H(1,u,t)$, получим еще добавочное уравнение:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H(1,u,t)}{\partial t} =& (e^{ju}-1)\times\\
\times\Bigg(&\lambda_2 H_1(1,u,t) + (\lambda_1+\lambda_2)H_2(1,u,t) + \\
&+ j\sigma_2 e^{-ju}\frac{\partial H_0(1,u,t)}{\partial u} + \sigma_1\frac{\partial H_2(1,u,t)}{\partial z}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

которое вместе с системой (2.4) будем решать методом асимптотически-диффузионного анализа.

Диффузионный анализ будем проводить по неприоритетной компоненте в предельном условии большой задержки заявок на второй орбите, т.е. при $\sigma_2 \to 0$, в несколько этапов:

1) выполнив асимптотику перового порядка, получим коэффициент переноса некоторого диффузионного процесса, с помощью которого проведем аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите. Также на этом этапе находим выражения для стационарного распределения вероятностей состояний прибора и для частичной производящей функции числа заявок на первой орбите;

2) выполнив асимптотику второго порядка, получим коэффициент диффузии некоторого диффузионного процесса;

3) на третьем этапе построим диффузионный процесс и получим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на неприоритетной орбите.

3. Асимптотически-диффузионный анализ по неприоритетной компоненте

3.1. Асимптотика первого порядка

В системе (2.4) и уравнении (2.5), обозначив $\sigma_2 = \epsilon$, сделаем следующие замены:

$$\sigma_2 t = \tau, \quad u = \sigma_2 \epsilon = \epsilon w, \quad H_k(z,u,t) = F_k(z,w,\tau,\epsilon).$$

Тогда (2.4) и (2.5) с учетом замен перепишутся в виде:

$$\begin{aligned}
\epsilon\frac{\partial F_0(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial \tau} =& -(\lambda_1+\lambda_2)F_0(z,w,\tau,\epsilon) - \sigma_1 z\frac{\partial F_0(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial z} + \\
&+ j\frac{\partial F_0(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial w} + \mu_1 F_1(z,w,\tau,\epsilon) + \mu_2 F_2(z,w,\tau,\epsilon),\\
\epsilon\frac{\partial F_1(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial \tau} =& -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)F_1(z,w,\tau,\epsilon) + \lambda_1 z F_1(z,w,\tau,\epsilon) + \\
&+ \lambda_2 e^{j\epsilon w}F_1(z,w,\tau,\epsilon) + \lambda_1 F_0(z,w,\tau,\epsilon) + \\
&+ \lambda_1 e^{j\epsilon w}F_2(z,w,\tau,\epsilon) + \sigma_1\frac{\partial F_0(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial z} + \\
&+ \sigma_1 e^{j\epsilon w}\frac{\partial F_2(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial z},\\
\epsilon\frac{\partial F_2(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial \tau} =& -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)F_2(z,w,\tau,\epsilon) + \lambda_2 e^{j\epsilon w}F_2(z,w,\tau,\epsilon) + \\
&+ \lambda_2 F_0(z,w,\tau,\epsilon) - \sigma_1 z\frac{\partial F_2(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial z} - \\
&- je^{-j\epsilon w}\frac{\partial F_0(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial w}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon\frac{\partial F(1,w,\tau,\epsilon)}{\partial \tau} =& (e^{j\epsilon w}-1)\Big(\lambda_2 F_1(1,w,\tau,\epsilon) + (\lambda_1+\lambda_2)F_2(1,w,\tau,\epsilon) + \\
&+ je^{-j\epsilon w}\frac{\partial F_0(1,w,\tau,\epsilon)}{\partial w} + \sigma_1\frac{\partial F_2(1,w,\tau,\epsilon)}{\partial z}\Big),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$F(1,w,\tau,\epsilon) = F_0(1,w,\tau,\epsilon) + F_1(1,w,\tau,\epsilon) + F_2(1,w,\tau,\epsilon).$$

Сформулируем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Обозначим решение системы уравнений* (3.1):

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_k(z,w,\tau,\epsilon) = F_k(z,w,\tau), \quad k = \overline{0,2}.$$

Тогда справедливо утверждение

$$F_k(z,w,\tau) = G_k(z,x(\tau))e^{jwx(\tau)}, \quad k = \overline{0,2}. \tag{3.3}$$

Для удобства записи аргумент τ будем опускать: $x(\tau) = x$. Функции $G_k(z,x)$, $k = \overline{0,2}$ – частичные производящие функции числа заявок на первой орбите, которые имеют вид

$$
\begin{aligned}
G_0(z,x) &= \frac{(\mu_1-\lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}+1}}{\mu_1(\mu_1-\lambda_1 z)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}}} - \\
&\quad - \frac{\lambda_2+x}{\sigma_1} z^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x}{\sigma_1}} \int\limits_0^z y^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x-\sigma_1}{\sigma_1}} \frac{(\mu_1-\lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}+1}}{\mu_1(\mu_1-\lambda_1 y)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}}} dy, \\
G_1(z) &= \left(\frac{\mu_1-\lambda_1}{\mu_1-\lambda_1 z}\right)^{\frac{\lambda_1+\sigma_1}{\sigma_1}} \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \\
G_2(z,x) &= \frac{\lambda_2+x}{\sigma_1} z^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x}{\sigma_1}} \int\limits_0^z y^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x-\sigma_1}{\sigma_1}} \frac{(\mu_1-\lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}+1}}{\mu_1(\mu_1-\lambda_1 y)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}}} dy,
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

величина $x(\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$
x'(\tau) = -x(\tau)G_0(1,x) + \lambda_2 G_1(1) + (\lambda_1+\lambda_2)G_2(1,x) + \sigma_1 \left.\frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}\right|_{z=1}. \tag{3.5}
$$

Доказательство.

В системе (3.1) выполним предельный переход при $\epsilon \to 0$, получим

$$
\begin{gathered}
-(\lambda_1+\lambda_2)F_0(z,w,\tau) - \sigma_1 z \frac{\partial F_0(z,w,\tau)}{\partial z} + j\frac{\partial F_0(z,w,\tau)}{\partial w} + \\
+ \mu_1 F_1(z,w,\tau) + \mu_2 F_2(z,w,\tau) = 0, \\
-(\lambda_1+\mu_1)F_1(z,w,\tau) + \lambda_1 z F_1(z,w,\tau) + \\
+ \lambda_1 F_0(z,w,\tau) + \lambda_1 F_2(z,w,\tau) + \sigma_1 \frac{\partial F_0(z,w,\tau)}{\partial z} + \sigma_1 \frac{\partial F_2(z,w,\tau)}{\partial z} = 0, \\
-(\lambda_1+\mu_2)F_2(z,w,\tau) + \lambda_2 F_0(z,w,\tau) - \sigma_1 z \frac{\partial F_2(z,w,\tau)}{\partial z} - j\frac{\partial F_0(z,w,\tau)}{\partial w} = 0.
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

Решение системы уравнений (3.6) будем искать в виде (3.3). Тогда (3.6) перепишется как

$$
\begin{gathered}
-(\lambda_1+\lambda_2+x(\tau))G_0(z,x) - \sigma_1 z \frac{\partial G_0(z,x)}{\partial z} + \mu_1 G_1(z) + \mu_2 G_2(z,x) = 0, \\
-(\lambda_1(1-z)+\mu_1)G_1(z) + \lambda_1 G_0(z,x) + \\
+ \lambda_1 G_2(z,x) + \sigma_1 \frac{\partial G_0(z,x)}{\partial z} + \sigma_1 \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z} = 0, \\
-(\lambda_1+\mu_2)G_2(z,x) + (\lambda_2+x(\tau))G_0(z,x) - \sigma_1 z \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{3.7}
$$

Введем обозначение

$$G_{02}(z,x) = G_0(z,x) + G_2(z,x).$$

Тогда продифференцировав $G_{02}(z,x)$ по z, получаем

$$\frac{\partial G_{02}(z,x)}{\partial z} = \frac{\partial G_0(z,x)}{\partial z} + \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}.$$

Просуммируем первое и третье уравнение (3.7) и составим систему уже из двух уравнений (суммы первого и третьего уравнений и второго уравнения (3.7)). Учитывая введенные обозначения, получим

$$\begin{gathered} -\lambda_1 G_{02}(z,x) + \mu_1 G_1(z) - \sigma_1 z \frac{\partial G_{02}(z,x)}{\partial z} = 0, \\ -(\lambda_1(1-z) + \mu_1) G_1(z) + \lambda_1 G_{02}(z,x) + \sigma_1 \frac{\partial G_{02}(z,x)}{\partial z} = 0. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Домножив второе уравнение на z и просуммировав уравнения системы, получаем

$$\lambda_1 G_{02}(z,x) - \mu_1 G_1(z) + \lambda_1 z G_1(z) = 0. \tag{3.9}$$

В (3.9) выразим $G_1(z)$ через $G_{02}(z,x)$ и подставим в первое уравнение системы (3.8), получим однородное дифференциальное уравнение относительно функции $G_{02}(z,x) = G_{02}(z)$:

$$\frac{\lambda_1^2 z}{\mu_1 - \lambda_1 z} G_{02}(z) - \sigma_1 z \frac{\partial G_{02}(z)}{\partial z} = 0,$$

решение которого имеет вид

$$G_{02}(z) = (\mu_1 - \lambda_1 z)^{-\frac{\lambda_1}{\sigma_1}} C. \tag{3.10}$$

Для функции $G_1(z)$ аналогично получаем дифференциальное уравнение

$$(\lambda_1 + \sigma_1) G_1(z) + \left(\sigma_1 z - \frac{\sigma_1 \mu_1}{\lambda_1}\right) \frac{\partial G_1(z)}{\partial z} = 0,$$

решение которого имеет вид

$$G_1(z) = (\mu_1 - \lambda_1 z)^{-\frac{\lambda_1 + \sigma_1}{\sigma_1}} C. \tag{3.11}$$

Найдем константу C. В функциях $G_k(z,x)$, $k = \overline{0,2}$, положим $z = 1$ и обозначим $G_0(1,x) = R_0(x)$, $G_1(1) = R_1$, $G_2(1,x) = R_2(x)$. Величины $R_0(x)$, R_1, $R_2(x)$ удовлетворяют условию нормировки $R_0(x) + R_1 + R_2(x) = 1$. Если в уравнении (3.5) перейти к стационарному режиму и решение стационарного уравнения обозначить $x = \kappa$, то получаем стационарное распределение вероятностей состояний прибора $R_0(\kappa), R_1, R_2(\kappa)$.

В уравнении (3.9) положим $z = 1$ и, добавляя условие нормировки, получим систему уравнений

$$\lambda_1(R_0(x) + R_2(x)) - \mu_1 R_1 + \lambda_1 R_1 = 0,$$
$$R_0(x) + R_1 + R_2(x) = 1.$$

Откуда получаем

$$R_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad R_0(x) + R_2(x) = \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1}.$$

Тогда, полагая $z = 1$ в (3.10) и (3.11) и используя найденные $R_k(x)$, получаем

$$G_1(z) = \left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1 z}\right)^{\frac{\lambda_1 + \sigma_1}{\sigma_1}} \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad G_{02}(z) = \left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1 z}\right)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}} \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1}.$$

Рассмотрим третье уравнение системы (3.7) и найденное $G_{02}(z) = G_{02}(z,x) = G_0(z,x) + G_2(z,x)$:

$$(3.12)\qquad \begin{gathered} -(\lambda_1 + \mu_2)G_2(z,x) + (\lambda_2 + x(\tau))G_0(z,x) - \sigma_1 z \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z} = 0, \\ G_0(z,x) + G_2(z,x) = \left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1 z}\right)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}} \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1}. \end{gathered}$$

Выразив из второго уравнения $G_0(z,x)$ и подставив в первое уравнение системы (3.12), получим неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции $G_2(z,x)$:

$$(G_2(z,x))'_z + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + x}{\sigma_1 z} G_2(z,x) = \frac{\lambda_2 + x}{\sigma_1 z} \left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1 z}\right)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}} \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1},$$

решение которого имеет вид

$$G_2(z,x) = \frac{\lambda_2 + x}{\sigma_1} z^{-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + x}{\sigma_1}} \int\limits_0^z y^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + x - \sigma_1}{\sigma_1}} \frac{(\mu_1 - \lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1} + 1}}{\mu_1 (\mu_1 - \lambda_1 y)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}}} dy.$$

Подставив найденное выражение для функции $G_2(z,x)$ в систему (3.12), получим решение для функции $G_0(z,x)$:

$$G_0(z,x) = \frac{(\mu_1 - \lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1} + 1}}{\mu_1 (\mu_1 - \lambda_1 z)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}}} -$$
$$- \frac{\lambda_2 + x}{\sigma_1} z^{-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + x}{\sigma_1}} \int\limits_0^z y^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + x - \sigma_1}{\sigma_1}} \frac{(\mu_1 - \lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1} + 1}}{\mu_1 (\mu_1 - \lambda_1 y)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}}} dy.$$

Найденные выражения для функций $G_k(z,x),\ k=0,1,2$ совпадают с (3.4).

Рассмотрим уравнение (3.2). Разложим экспоненту в ряд Тейлора

$$e^{j\epsilon w} = 1 + j\epsilon w + O(\epsilon^2)$$

и разделим левую и правую части (3.2) на $j\epsilon w$. Далее выполним предельный переход при $\epsilon \to 0$, получим

$$\frac{\partial F(1,w,\tau)}{jw\partial\tau} = \lambda_2 F_1(1,w,\tau) + (\lambda_1+\lambda_2)F_2(1,w,\tau) + \\ + j\frac{\partial F_0(1,w,\tau)}{\partial w} + \sigma_1\frac{\partial F_2(1,w,\tau)}{\partial z}.$$

Выполним замены

$$F_k(1,w,\tau) = G_k(1,x)e^{jwx} = R_k(x)e^{jwx},\quad k=0,1,2,$$
$$F(1,w,\tau) = G(1,x)e^{jwx} = e^{jwx}.$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение для $x(\tau)$:

$$x'(\tau) = -x(\tau)G_0(1,x) + \lambda_2 G_1(1) + (\lambda_1+\lambda_2)G_2(1,x) + \sigma_1\left.\frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}\right|_{z=1},$$

которое совпадает с (3.5). Таким образом, теорема 1 доказана.

Обозначим:

$$\left.\frac{\partial G_k(z,x)}{\partial z}\right|_{z=1} = \frac{\partial G_k(1,x)}{\partial z},\quad k=0,1,2,$$
$$\left.\frac{\partial G_{02}(z)}{\partial z}\right|_{z=1} = \frac{\partial G_{02}(1)}{\partial z}.$$

Обозначим правую часть уравнения (3.5) через $a(x)$ и упростим ее, используя (3.4); получим

$$a(x) = x'(\tau) = \\ = -x(\tau)G_0(1,x) + \lambda_2 G_1(1) + (\lambda_1+\lambda_2)G_2(1,x) + \sigma_1\frac{\partial G_2(1,x)}{\partial z} = \\ = \lambda_2 - \mu_2 R_2(x).$$

Величина $a(x)$ имеет смысл коэффициента переноса некоторого диффузионного процесса, с помощью которого получим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите.

С л е д с т в и е 1. Условие эргодичности рассматриваемой RQ-системы имеет вид

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Достаточным условием эргодичности системы будет неравенство

$$\lim_{x\to\infty} a(x) < 0.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{x\to\infty} a(x) = \lim_{x\to\infty} (\lambda_2 - \mu_2 R_2(x)) = \lambda_2 - \mu_2\Big(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1}\Big) < 0.$$

Откуда получаем условие

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1.$$

С л е д с т в и е 2. Производящая функция распределения вероятностей числа заявок на приоритетной орбите имеет вид

$$G(z) = \frac{\lambda_1}{\mu_1}\left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1 z}\right)^{\frac{\lambda_1+\sigma_1}{\sigma_1}} + \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1}\left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1 z}\right)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}}.$$

Таким образом, распределение вероятностей числа заявок на первой орбите имеет вид взвешенной суммы двух отрицательно-биномиальных распределений с весами $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ и $\frac{\mu_1-\lambda_1}{\mu_1}$.

3.2. Асимптотика второго порядка

Рассмотрим характеристическую функцию случайного процесса $i(t) - \frac{x(\sigma_2 t)}{\sigma_2}$. Для этого в системе (2.4) и уравнении (2.5) сделаем замену:

$$H_k(z,u,t) = e^{\frac{jux(\sigma_2 t)}{\sigma_2}} H_k^{(2)}(z,u,t), \quad k = 0,1,2.$$

Обозначая $\sigma_2 = \epsilon^2$, в системе уравнений для $H_k^{(2)}(z,u,t)$, $k = 0,1,2$ выполним замены:

$$\tau = \epsilon^2 t, \quad u = \epsilon w, \quad H_k^{(2)}(z,u,t) = F_k^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon),$$

получаем систему для функций $F_k^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)$, $k=0,1,2$ и добавочное уравнение:

$$\epsilon^2\frac{\partial F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial\tau}+j\epsilon wa(x)F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)=$$
$$=-(\lambda_1+\lambda_2+x)F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)-\sigma_1 z\frac{\partial F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial z}+$$
$$+j\epsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial w}+\mu_1F_1^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)+\mu_2F_2^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon),$$
$$\epsilon^2\frac{\partial F_1^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial\tau}+j\epsilon wa(x)F_1^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)=$$
$$=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)F_1^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)+\lambda_1 zF_1^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)+$$
$$+\lambda_2e^{j\epsilon w}F_1^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)+\lambda_1F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)+\lambda_1e^{j\epsilon w}F_2^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)+ \tag{3.13}$$
$$+\sigma_1\frac{\partial F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial z}+\sigma_1e^{j\epsilon w}\frac{\partial F_2^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial z},$$
$$\epsilon^2\frac{\partial F_2^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial\tau}+j\epsilon wa(x)F_2^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)=$$
$$=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)F_2^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)+\lambda_2e^{j\epsilon w}F_2^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)+$$
$$+\lambda_2F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)-\sigma_1 z\frac{\partial F_2^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial z}-$$
$$-je^{-j\epsilon w}\frac{\partial F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)}{\partial w}+xe^{-j\epsilon w}F_0^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon).$$

$$\epsilon^2\frac{\partial F^{(2)}(1,w,\tau,\epsilon)}{\partial\tau}+j\epsilon wa(x)F^{(2)}(1,w,\tau,\epsilon)=(e^{j\epsilon w}-1)\times$$
$$\times\Bigg(-xe^{-j\epsilon w}F_0^{(2)}(1,w,\tau,\epsilon)+\lambda_2F_1^{(2)}(1,w,\tau,\epsilon)+ \tag{3.14}$$
$$+(\lambda_1+\lambda_2)F_2^{(2)}(1,w,\tau,\epsilon)+j\epsilon e^{-j\epsilon w}\frac{\partial F_0^{(2)}(1,w,\tau,\epsilon)}{\partial w}+\sigma_1\frac{\partial F_2^{(2)}(1,w,\tau,\epsilon)}{\partial z}\Bigg).$$

Обозначим: $F_k^{(2)}(z,w,\tau)=\lim\limits_{\epsilon\to0}F_k^{(2)}(z,w,\tau,\epsilon)$, $k=0,1,2$. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Функции $F_k^{(2)}(z,w,\tau)$, $k=0,1,2$ имеют вид $F_k^{(2)}(z,w,\tau)=$ $=\Phi(w,\tau)G_k(z,x)$, где функция $\Phi(w,\tau)$ является характеристической функцией процесса $y(\tau)=\lim\limits_{\sigma_2\to0}\sqrt{\sigma_2}\left(i(\frac{\tau}{\sigma_2})-\frac{x(\tau)}{\sigma_2}\right)$, и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}-\frac{w^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau), \tag{3.15}$$

где

$$a(x) = \lambda_2 - \mu_2 R_2(x), \tag{3.16}$$

$$b(x) = a(x) + 2((\lambda_2 - a(x))R_2(x) - \mu_2 h_2(x)). \tag{3.17}$$

Здесь $h_2(x) = h_2(1, x)$,

$$h_2(1, x) = \frac{1}{\sigma_1}\int\limits_0^1 y^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x-\sigma_1}{\sigma_1}} \times D(y, x)dy, \tag{3.18}$$

$$D(z, x) = (\lambda_2 + x)h_{02}(z, x) + (\lambda_2 - a(x))G_2(z, x) - xG_0(z, x), \tag{3.19}$$

$$h_{02}(z, x) = \left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - z\lambda_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}} \left(\frac{1}{\mu_1}A(1, x) - \frac{1}{\sigma_1}\int\limits_z^1 \left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - y\lambda_1}\right)^{\frac{-\lambda_1}{\sigma_1}} B(y, x)dy\right), \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} A(1, x) = a(x)\frac{\partial G_{02}(1)}{\partial z} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \sigma_1)\frac{\partial G_2(1, x)}{\partial z} + x\frac{\partial G_0(1, x)}{\partial z} - \\ - \lambda_1 R_2(x) + (a(x) - \lambda_2)R_1 + (a(x) - \lambda_2)\frac{\partial G_1(1)}{\partial z} - \sigma_1\frac{\partial^2 G_2(1, x)}{\partial z^2}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} B(z, x) = (a(x) - \lambda_2)G_1(z) - \lambda_1 G_2(z, x) - \sigma_1\frac{\partial G_2(z, x)}{\partial z} - \\ - \frac{(z-1)\lambda_1 - \mu_1}{(z\lambda_1 - \mu_1)(z-1)}\Bigg(a(x)G_{02}(z) - (\lambda_2 + z\lambda_1)G_2(z, x) + \\ + xG_0(z, x) + z(a(x) - \lambda_2)G_1(z) - z\sigma_1\frac{\partial G_2(z, x)}{\partial z}\Bigg). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Доказательство.

Решение системы уравнений (3.13) запишем в следующем виде:

$$F_k(z, w, \tau, \epsilon) = \Phi(w, \tau)\left(G_k(z, x) + j\epsilon w g_k(z, x)\right) + O(\epsilon^2), \quad k = 0, 1, 2.$$

Подставляя данные функции в систему уравнений (3.13), сделав несложные преобразования и выполнив предельный переход при $\epsilon \to 0$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a(x)G_0(z, x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + x)g_0(z, x) + \mu_1 g_1(z, x) + \mu_2 g_2(z, x) - \\ - \sigma_1 z\frac{\partial g_0(z, x)}{\partial z} + G_0(z, x)\frac{\partial\Phi(w, \tau)}{w\Phi(w, \tau)\partial w}, \\ a(x)G_1(z) = -(\lambda_1(1 - z) + \mu_1)g_1(z, x) + \lambda_1 g_0(z, x) + \lambda_1 g_2(z, x) + \\ + \lambda_2 G_1(z, x) + \lambda_1 G_2(z, x) + \sigma_1\frac{\partial g_0(z, x)}{\partial z} + \sigma_1\frac{\partial g_2(z, x)}{\partial z} + \sigma_1\frac{\partial G_2(z, x)}{\partial z}, \\ a(x)G_2(z, x) = -(\lambda_1 + \mu_2)g_2(z, x) + (\lambda_2 + x)g_0(z, x) + \lambda_2 G_2(z, x) - \\ - xG_0(z, x) - \sigma_1 z\frac{\partial g_2(z, x)}{\partial z} - G_0(z, x)\frac{\partial\Phi(w, \tau)}{w\Phi(w, \tau)\partial w}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Функции $g_k(z,x),\ k=0,1,2$ будем искать в виде суммы общего решения однородного и частного решения неоднородного дифференциального уравнения:

$$g_k(z,x)=CG_k(z,x)+h_k(z,x)-\phi_k(z,x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\Phi(w,\tau)\partial w},\quad k=0,1,2.$$

Подставляя $g_k(z,x)$ в (3.23), можно убедиться, что коэффициент перед константой C равен нулю. Тогда, приравнивая коэффициенты при $\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\Phi(w,\tau)\partial w}$, получаем систему уравнений для нахождения функций $\phi_k(z,x)$. Если систему уравнений для функций $G_k(z,x)$ продифференцировать по переменной x, то можно убедиться, что она совпадет с системой уравнений для нахождения функций $\phi_k(z,x)$. Таким образом, делаем вывод, что

$$\phi_k(z,x)=\frac{\partial G_k(z,x)}{\partial x},\quad k=0,1,2.$$

Приравнивая оставшиеся слагаемые, можно записать систему уравнений для нахождения функций $h_k(z,x),\ k=0,1,2$:

$$\begin{gathered}
-(\lambda_1+\lambda_2+x)h_0(z,x)+\mu_1h_1(z,x)+\mu_2h_2(z,x)-\sigma_1z\frac{\partial h_0(z,x)}{\partial z}=\\
=a(x)G_0(z,x),\\
\lambda_1h_0(z,x)-(\lambda_1(1-z)+\mu_1)h_1(z,x)+\lambda_1h_2(z,x)+\sigma_1\frac{\partial h_0(z,x)}{\partial z}+\\
+\sigma_1\frac{\partial h_2(z,x)}{\partial z}=(a(x)-\lambda_2)G_1(z)-\sigma_1\frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}-\lambda_1G_2(z,x),\\
(\lambda_2+x)h_0(z,x)-(\lambda_1+\mu_2)h_2(z,x)-\sigma_1z\frac{\partial h_2(z,x)}{\partial z}+\\
=(a(x)-\lambda_2)G_2(z,x)+xG_0(z,x).
\end{gathered}\tag{3.24}$$

Просуммируем первое и третье уравнение системы (3.24) и добавим к получившемуся уравнению второе, получим систему:

$$\begin{gathered}
-\lambda_1(h_0(z,x)+h_2(z,x))+\mu_1h_1(z,x)-\sigma_1z\left(\frac{\partial h_0(z,x)}{\partial z}+\frac{\partial h_2(z,x)}{\partial z}\right)=\\
=a(x)(G_0(z,x)+G_2(z,x))-\lambda_2G_2(z,x)+xG_0(z,x),\\
\lambda_1(h_0(z,x)+h_2(z,x))-(\lambda_1(1-z)+\mu_1)h_1(z,x)+\sigma_1\left(\frac{\partial h_0(z,x)}{\partial z}+\frac{\partial h_2(z,x)}{\partial z}\right)=\\
=(a(x)-\lambda_2)G_1(z)-\sigma_1\frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}-\lambda_1G_2(z,x).
\end{gathered}$$

Обозначим:

$$h_{02}(z,x)=h_0(z,x)+h_2(z,x).$$

Тогда система уравнений перепишется в виде:

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_1 h_{02}(z,x) + \mu_1 h_1(z,x) - \sigma_1 z \frac{\partial h_{02}(z,x)}{\partial z} = \\
&= a(x)(G_0(z,x) + G_2(z,x)) - \lambda_2 G_2(z,x) + x G_0(z,x), \\
&\lambda_1 h_{02}(z,x) - (\lambda_1(1-z) + \mu_1) h_1(z,x) + \sigma_1 \frac{\partial h_{02}(z,x)}{\partial z} = \\
&= (a(x) - \lambda_2) G_1(z) - \sigma_1 \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z} - \lambda_1 G_2(z,x).
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Домножим второе уравнение на z и просуммируем уравнения системы, получим:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 h_{02}(z,x) - (\mu_1 - \lambda_1 z) h_1(z,x) = \\
&= \frac{1}{z-1}\Big(a(x)(G_0(z,x) + G_2(z,x) + zG_1(z)) + \\
&+ xG_0(z,x) - \lambda_2 z G_1(z) - (\lambda_1 z + \lambda_2) G_2(z,x) - \sigma_1 z \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}\Big).
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Обозначим правую часть уравнения через $A(z,x)$ и найдем предел при $z \to 1$:

$$
\lim_{z\to 1} \frac{(a(x)+x)G_0(z,x) + z(a(x)-\lambda_2)G_1(z) - (\lambda_1 z + \lambda_2 - a(x))G_2(z,x) - \sigma_1 z \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}}{z-1} =
$$

$$
= \lim_{z\to 1}\Big(a(x)\frac{\partial G_{02}(z)}{\partial z} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \sigma_1)\frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z} + x\frac{\partial G_0(z,x)}{\partial z} - \lambda_1 G_2(z,x) +
$$

$$
+ (a(x) - \lambda_2)G_1(z) + (a(x)-\lambda_2)\frac{\partial G_1(z)}{\partial z} - \sigma_1 z \frac{\partial^2 G_2(z,x)}{\partial z^2}\Big) =
$$

$$
= \lim_{z\to 1} A(z,x) = a(x)\frac{\partial G_{02}(1)}{\partial z} - (\lambda_1+\lambda_2+\sigma_1)\frac{\partial G_2(1,x)}{\partial z} + x\frac{\partial G_0(1,x)}{\partial z} -
$$

$$
- \lambda_1 R_2(x) + (a(x)-\lambda_2)R_1 + (a(x)-\lambda_2)\frac{\partial G_1(1)}{\partial z} - \sigma_1 \frac{\partial^2 G_2(1,x)}{\partial z^2} = A(1,x),
$$

что совпадает с (3.21).

Тогда уравнение (3.26) можно записать в виде

$$
\lambda_1 h_{02}(z,x) - (\mu_1 - \lambda_1 z) h_1(z,x) = A(1,x).
$$

Далее выражаем функцию $h_1(z,x)$ и подставляем во второе уравнение системы (3.25), получаем неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции $h_{02}(z,x)$. Обозначим правую часть уравнения через $B(z,x)$:

$$
B(z,x) = (a(x)-\lambda_2)G_1(z) - \lambda_1 G_2(z,x) - \sigma_1 \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z} - \frac{(z-1)\lambda_1 - \mu_1}{(z\lambda_1 - \mu_1)(z-1)} \times
$$

$$
\times \Big(a(x)G_{02}(z) - (\lambda_2 + z\lambda_1)G_2(z,x) + xG_0(z,x) +
$$

$$
+ z(a(x)-\lambda_2)G_1(z) - z\sigma_1 \frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}\Big).
$$

Тогда дифференциальное уравнение запишется в следующем виде:

$$\lambda_1\left(1-\frac{\lambda_1(1-z)+\mu_1}{\mu_1-\lambda_1 z}\right)h_{02}(z,x)+\sigma_1\frac{\partial h_{02}(z,x)}{\partial z}=B(z,x).$$

Его решение имеет вид

$$h_{02}(z,x)=\left(\frac{\mu_1-\lambda_1}{\mu_1-z\lambda_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}}\left(\frac{1}{\mu_1}A(1,x)-\frac{1}{\sigma_1}\int\limits_z^1\left(\frac{\mu_1-\lambda_1}{\mu_1-y\lambda_1}\right)^{\frac{-\lambda_1}{\sigma_1}}B(y,x)dy\right),$$

что совпадает с (3.20).

Так как $h_0(z,x)=h_{02}(z,x)-h_2(z,x)$, то подставим это в третье уравнение системы (3.24) и обозначим правую часть как

$$D(z,x)=(\lambda_2+x)h_{02}(z,x)+(\lambda_2-a(x))G_2(z,x)-xG_0(z,x),$$

получим дифференциальное уравнение относительно $h_2(z,x)$:

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x)h_2(z,x)+\sigma_1 z\frac{\partial h_2(z,x)}{\partial z}=D(z,x),$$

решение которого имеет вид

$$h_2(z,x)=z^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x}{\sigma_1}}\frac{1}{\sigma_1}\int\limits_0^z y^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x-\sigma_1}{\sigma_1}}D(y,x)dy.$$

Полагая здесь $z=1$, получаем (3.18).

Рассмотрим уравнение (3.14). Подставим в него

$$F_k(z,w,\tau,\epsilon)=\Phi(w,\tau)\left(G_k(z,x)+j\epsilon w g_k(z,x)\right)+O(\epsilon^2),\quad k=0,1,2,$$

сделав несложные преобразования и выполнив предельный переход при $\epsilon\to 0$, получим

$$-\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w^2\Phi(w,\tau)\partial\tau}+a(x)g(1,x)=\lambda_2 g_1(1,x)+(\lambda_1+\lambda_2)g_2(1,x)+$$

$$+G_0(1,x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\Phi(w,\tau)\partial w}-xg_0(1,x)+xG_0(1,x)+\sigma_1\frac{\partial g_2(1,x)}{\partial z}+\frac{1}{2}a(x).$$

Функции $g_k(1,x)$ запишем в виде

$$g_k(1,x)=C\times G_k(1,x)+h_k(1,x)-\phi_k(1,x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\Phi(w,\tau)\partial w},\quad k=0,1,2.$$

С учетом условий $\sum_{k=0}^{2} h_k(z,x)\Big|_{z=1} = 0,\ \sum_{k=0}^{2} \phi_k(z,x)\Big|_{z=1} = 0$ получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = \Bigg(\lambda_2 \phi_1(1,x) + (\lambda_1+\lambda_2)\phi_2(1,x) - \\ - G_0(1,x) - x\phi_0(1,x) + \sigma_1 \frac{\partial \phi_2(1,x)}{\partial z}\Bigg) \times \\ \times w\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} - \frac{w^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg(a(x) + 2\Bigg(\lambda_2 h_1(1,x) + (\lambda_1+\lambda_2)h_2(1,x) - \\ - xh_0(1,x) + xG_0(1,x) + \sigma_1\frac{\partial h_2(1,x)}{\partial z}\Bigg)\Bigg).$$

Преобразуем коэффициенты перед $w\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w}$ и $\frac{w^2}{2}\Phi(w,\tau)$, получаем

$$\lambda_2\phi_1(1,x) + (\lambda_1+\lambda_2)\phi_2(1,x) - G_0(1,x) - x\phi_0(1,x) + \sigma_1\frac{\partial \phi_2(1,x)}{\partial z} = a'(x),$$

$$a(x) + 2\left(\lambda_2 h_1(1,x) + (\lambda_1+\lambda_2)h_2(1,x) - xh_0(1,x) + xG_0(1,x) + \sigma_1\frac{\partial h_2(1,x)}{\partial z}\right) = \\ = a(x) + 2((\lambda_2 - a(x))R_2(x) - \mu_2 h_2(1,x)) = b(x).$$

Тогда получаем уравнение

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = a'(x)w\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} - \frac{w^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau).$$

Теорема доказана.

Функция $b(x)$ имеет смысл коэффициента диффузии некоторого диффузионного процесса, с помощью которого проведем аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите.

3.3. Диффузионная аппроксимация распределения вероятностей числа заявок на неприоритетной орбите

К уравнению (3.15) применим обратное преобразование Фурье. Получим уравнение Фоккера–Планка для функции плотности распределения вероятностей $P(y,\tau) = \frac{\partial P\{y(\tau)<y\}}{\partial y}$:

$$\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial\{ya'(x)P(y,\tau)\}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\{b(x)P(y,\tau)\}}{\partial y^2}.$$

Можно сделать вывод, что $y(\tau) = \lim\limits_{\sigma_2\to 0}\sqrt{\sigma_2}\left(i\left(\frac{\tau}{\sigma_2}\right) - \frac{x(\tau)}{\sigma_2}\right)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau) = a'(x)yd\tau + \sqrt{b(x)}dW(\tau),$$

где $W(\tau)$ является винеровским случайным процессом, $a'(x)y$ – коэффициент переноса, $\sqrt{b(x)}$ – коэффициент диффузии.

Рассмотрим диффузионный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \sqrt{\sigma_2}y(\tau)$. Заметим, что $z(\tau) = \lim\limits_{\sigma_2 \to 0} \sigma_2 i\left(\frac{\tau}{\sigma_2}\right)$. Обозначим через $V(z)$ стационарную плотность распределения вероятностей процесса $z(\tau)$. Можно показать, что плотность $V(z)$ имеет вид

$$V(z) = \frac{C}{b(z)} \times \exp\left(\frac{2}{\sigma_2}\int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)}dx\right).$$

Более подробное описание процедуры построения диффузионной аппроксимации и нахождения вида плотности $V(z)$ можно найти в [13, 15].

Для построения диффузионной аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на неприоритетной орбите будем пользоваться формулой:

$$P(i) = \frac{V(i\sigma_2)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} V(n\sigma_2)}. \tag{3.27}$$

Таким образом, в определении значения константы C нет необходимости.

4. Алгоритм построения диффузионной аппроксимации в пакете MathCAD

Полученные теоретические результаты были реализованы в пакете MathCAD. Ниже приведен алгоритм численной реализации для нахождения диффузионной аппроксимации числа заявок на неприоритетной орбите.

Алгоритм 1. 1) задаем параметры системы: $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$. Задаем достаточно большое число N;

2) по формулам (3.4) записываем функции $G_k(z,x)$, $k = 0,1,2$ и $R_k(x) = G_k(1,x)$, $k = 0,1,2$;

3) по формуле (3.16) записываем функцию $a(x)$ и находим решение κ стационарного уравнения $a(x) = 0$, используя встроенную функцию пакета MathCAD:

$$\kappa := root(a(x), x, 0, N);$$

4) находим значения $R_0(\kappa)$, $R_1, R_2(\kappa)$, которые являются стационарными вероятностями состояний прибора;

5) записываем функцию

$$G_{02}(z) = \left(\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1 z}\right)^{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}} \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_1};$$

6) считаем производные по z от функций $G_k(z,x)$, $k=0,1,2$ и $G_{02}(z,x)$:

$$\frac{\partial G_{02}(z)}{\partial z} = G_{02}(z)\frac{\lambda_1}{\sigma_1}\frac{\lambda_1}{\mu_1 - z\lambda_1}; \qquad \frac{\partial G_1(z)}{\partial z} = \frac{\lambda_1 G_1(z) + \lambda_1 \frac{\partial G_{02}(z)}{\partial z}}{\mu_1 - z\lambda_1},$$

$$\frac{\partial G_0(z,x)}{\partial z} = \frac{-(\lambda_1+\lambda_2)G_0(z,x) + \mu_1 G_1(z) + \mu_2 G_2(z,x) - xG_0(z,x)}{\sigma_1 z},$$

$$\frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z} = \frac{(\lambda_2 + x)G_{02}(z) - (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x)G_2(z,x)}{\sigma_1 z},$$

$$\frac{\partial^2 G_2(z,x)}{\partial z^2} = \frac{(\lambda_2 + x)G_{02}(z) - (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+x+\sigma_1)\frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}}{\sigma_1 z};$$

7) записываем $A(z,x)$ по формуле

$$A(z,x) = \frac{1}{z-1}\Big(a(x)+x)G_0(z,x) + z(a(x)-\lambda_2)G_1(z) -$$
$$- (\lambda_1 z + \lambda_2 - a(x))G_2(z,x) - \sigma_1 z\frac{\partial G_2(z,x)}{\partial z}\Big),$$

$B(z,x)$ по формуле (3.22), для $h_{02}(z,x)$ – (3.20):

$$h_{02}(z,x) := if\left(z=1, \frac{1}{\mu_1}A(1,x), h_{02}(z,x)\right);$$

8) находим $D(z,x)$ (3.19) и $h_2(1,x)$ (3.18);
9) записываем коэффициент диффузии $b(x)$ (3.17);
10) строим $P1(i)$ (3.27):

$$P1(i) = \frac{1}{b(\sigma_2 i)}\exp\left(\frac{2}{\sigma_2}\int\limits_0^{\sigma_2 i}\frac{a(x)}{b(x)}dx\right);$$

11) выполняем нормировку и получаем аппроксимацию дискретного распределения вероятностей числа заявок на неприоритетной орбите

$$P(i) := P1(i)\left(\sum_{i=0}^{N} P1(i)\right)^{-1}.$$

Пример 1. Зададим параметры системы:

$$\lambda_1 = 0{,}3, \quad \lambda_2 = 0{,}9, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad \sigma_1 = 1.$$

Получаем распределение вероятностей состояний прибора:

$$R_0 = 0{,}25, \quad R_1 = 0{,}3, \quad R_2 = 0{,}45.$$

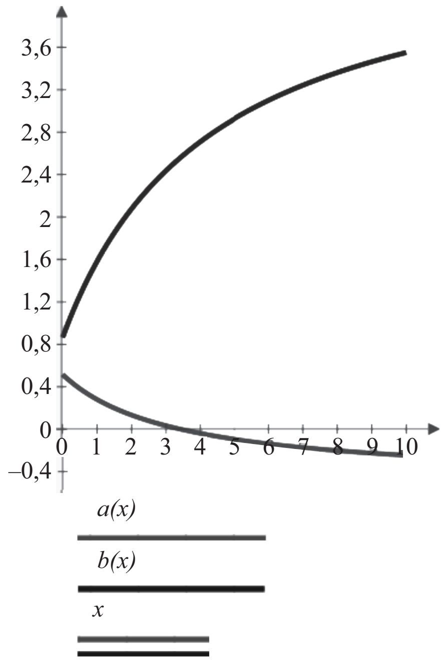

Рис. 2. Графики коэффициента переноса и коэффициента диффузии.

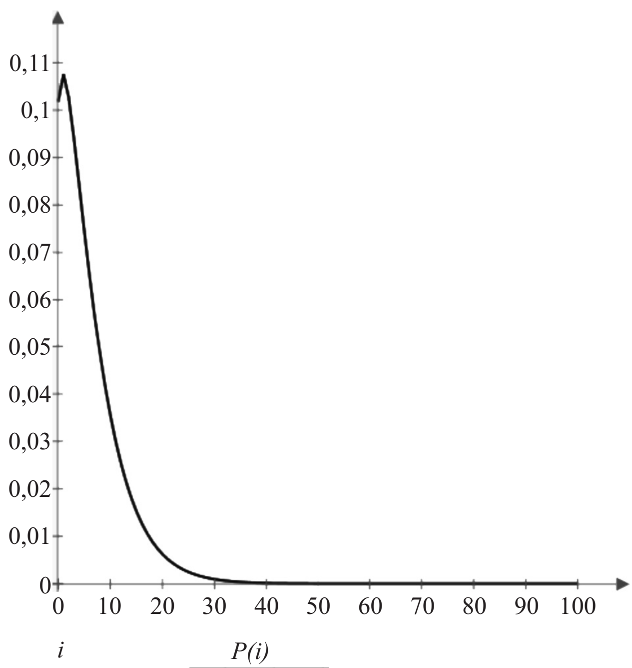

Рис. 3. Диффузионная аппроксимация $P(i)$ при $\sigma_2 = 1,\ N = 100$.

На рис. 2 представлена зависимость коэффициента переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$ от числа заявок на неприоритетной орбите. Можно сделать вывод,

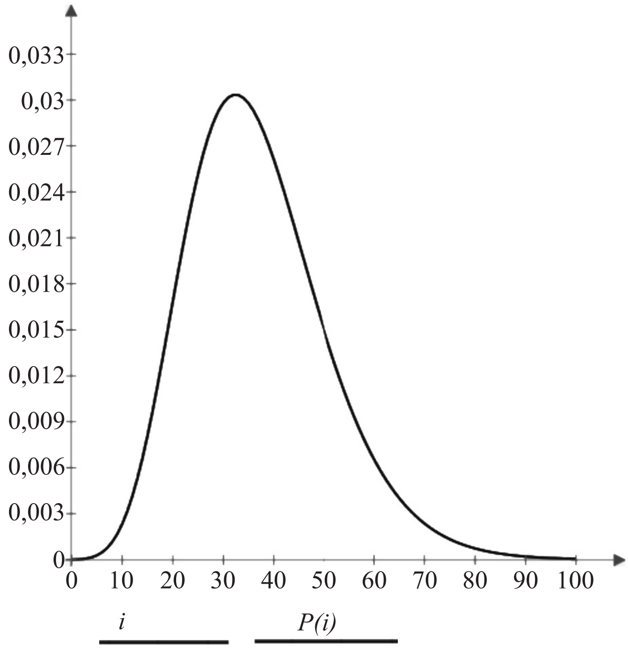

Рис. 4. Диффузионная аппроксимация $P(i)$ при $\sigma_2 = 0{,}1,\ N = 100$.

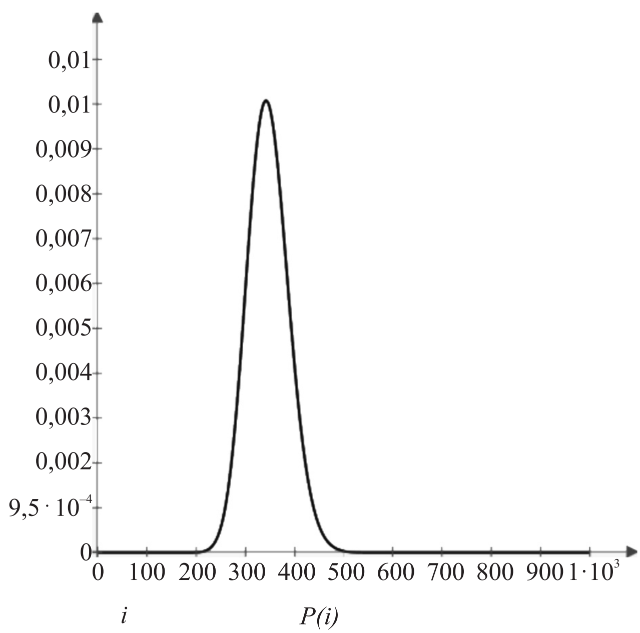

Рис. 5. Диффузионная аппроксимация $P(i)$ при $\sigma_2 = 0{,}01,\ N = 1000$.

что с увеличением числа заявок разброс относительно среднего увеличивается. На рис. 3–5 изображены графики диффузионной аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на неприоритетной орбите.

Численные результаты показывают возможность осуществления предложенного подхода исследования к задачам такого класса. Также по графику распределения можно сделать вывод, что при малом значении σ_2 распределение близко к гауссовскому распределению вероятностей. Этот вывод можно подтвердить, обратившись к [14], где исследуется система $M^{(2)}|B^{(2)}(x)|1$ методом гауссовской аппроксимации.

5. Заключение

В работе исследована система массового обслуживания с повторными вызовами и двумя входящими потоками заявок (приоритетный и неприоритетный поток).

Для числа приоритетных заявок на орбите найдена производящая функция в виде взвешенной суммы производящих функций отрицательно-биномиальных распределений.

Для числа неприоритетных заявок на орбите получено распределение вероятностей, которое называем диффузионной аппроксимацией.

Найденные распределения вероятностей позволяют определить все необходимые вероятностно-временные характеристики системы для поступившего числа заявок. Полученные теоретические результаты могут быть использованы для решения ряда практических задач, в которых необходимо разделение заявок по приоритетности: когнитивное радио, передача данных, где необходимо разделение по объему передаваемых пакетов данных. Вызывает интерес исследование задач более общего типа (с произвольной функцией распределения времени обслуживания).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yang T., Templeton J.G.C.* A survey on retrial queues // Queueing Syst. 1987. V. 2 (3). P. 201–233.
2. *Artalejo J.R.* A classified bibliography of research on retrial queues // Progress in 1990–1999. 1999. V. 7 (2). P. 187–211.
3. *Artalejo J.R.* Accessible bibliography on retrial queues // Math. Comput. Model. 1999. V. 30 (3–4). P. 1–6.
4. *Artalejo J.R., Falin G.I.* Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis // Revista Matematica Complutense. 2002. V. 15. P. 101–129.
5. *Artalejo J.R.* Accessible bibliography on retrial queues // Math. Comput. Model. 2010. V. 51. P. 1071–1081.
6. *Choi B.D., Chang Y.* Single server retrial queues with priority calls // Math. Comput. Model. 1999. V. 30. P. 7–32.
7. *Yin M., Yan M., Guo Y., Liu M.* Analysis of a preemptive two-priority queuing system with impatient customers and heterogeneous servers // Mathematics. 2023. V. 11. P. 3878.
8. *Razumchik R.* Two-priority queueing system with lcfs service, probabilistic priority and batch arrivals // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2116. P. 090011.

9. *Dimitriou I.* A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations // Appl. Math. Model. 2013. V. 37. P. 1295–1309.
10. *Jain M., Bhagat A., Shekhar C.* Double orbit finite retrial queues with priority customers and service interruptions // Appl. Math. Comput.2015. V. 253. P. 324–344.
11. *Atencia I., Moreno P., Bouza G.* An m2/g2/1 retrial queue with priority customers, 2nd optional service and linear retrial policy // Invest. Oper. 2006. V. 27(3). P. 229–248.
12. *Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S., Morozova M.* Scaling limits of a tandem queue with two infinite orbits // Mathematics. 2023. V. 11(11). P. 2454.
13. *Nazarov A., Phung-Duc T., Izmailova Ya.* Asymptotic-diffusion analysis of multiserver retrial queueing system with priority customers // Commun. in Comput. and Inform. Sci. 2021. V. 1391. P. 236–250.
14. *Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S., Lizyura O.* Diffusion limit for single-server retrial queues with renewal input and outgoing calls // Mathematics. 2022. V. 10(6). P. 948.
15. *Назаров А.А., Измайлова Я.Е.* Исследование rq-системы m(2)|m(2)|1 с r настойчивым вытеснением альтернативных заявок // Вест. Сиб. гос. аэрокос. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева. 2016. № 17(2). С. 328–334.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 22.04.2024

После доработки 02.03.2025

Принята к публикации 06.03.2025