



ISSN 0005-2310 (Print)

ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

Я Н В А Р Ь

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2026 г. О.В. СЕМЁНОВА, д-р физ.-мат. наук (olga.semenova@ipu.ru),
В.М. ВИШНЕВСКИЙ, д-р техн. наук (vishn@inbox.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПОЛЛИНГА: РАЗВИТИЕ И НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Приводится обзор новых результатов, полученных в области исследования стохастических систем поллинга. Систематизируются основные направления практического применения моделей поллинга для оценки производительности и проектирования беспроводных WMAN-сетей с централизованным механизмом управления, сотовых сетей 5G/6G и сетей Интернета вещей, транспортных и медицинских систем и т.д. Обсуждаются перспективы дальнейшего развития прикладных исследований этого важного направления теории очередей.

Ключевые слова: системы поллинга, телекоммуникационные сети, 5G/6G, Интернет вещей, транспортные потоки, здравоохранение.

DOI: 10.7868/S2413977726010013

1. Введение

Математические модели стохастического поллинга нашли широкое применение при проектировании систем связи, производственных и транспортных систем, медицинских систем и т.д. Особенно эффективно эти модели применяются для оценки производительности и проектирования существующих и перспективных протоколов телекоммуникационных сетей с централизованным механизмом управления. Работы по исследованию систем стохастического поллинга и обобщение результатов, полученных до 1995 г. в этой области теории очередей, нашли отражение в монографиях [1, 2]. Благодаря широкому практическому применению интерес к исследованию систем поллинга не ослабевает до настоящего времени. В последние два десятилетия появился ряд обзорных работ по системам поллинга [3–8], посвященных в основном прогрессу в разработке математических методов исследования систем поллинга. Исключением является обзор [9], опубликованный в 2011 г., в котором систематизированы направления практического применения моделей систем стохастического поллинга.

Интенсивное развитие и быстрая смена поколений систем сотовой связи, широкополосных беспроводных сетей, систем промышленной робототехники, различных наземных и воздушных беспилотных систем и т.д. потребовало разработки новых моделей поллинга и методов их исследования для оценки

характеристик производительности и проектирования этих систем. К числу таких методов, в частности, относятся методы исследования систем поллинга с коррелированными входными потоками, характерными для современных вычислительных систем и сетей [10, 11], методы машинного обучения, применяемые, когда получение аналитических и численных результатов либо затруднительно, либо вовсе невозможно традиционными методами теории очередей [12, 13]. Однако до настоящего времени отсутствуют обзорные работы по систематизации новых направлений практического применения моделей стохастического поллинга, хотя за последние годы появилось множество статей в этой области. Предлагаемый обзор закрывает этот пробел.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе приведены основные понятия и описание базовой модели стохастического поллинга, являющейся предметом изучения большинства теоретических и прикладных работ в этой области. В третьем разделе рассматривается применение модели стохастического поллинга для оценки производительности широкополосных беспроводных городских сетей стандарта IEEE 802.11 с централизованным механизмом управления. Четвертый раздел посвящен систематизации работ по применению моделей централизованного опроса в сетях Интернета вещей и сотовых сетях 5G/6G. В пятом разделе рассматривается применение моделей стохастического поллинга на транспорте и в управлении трафиком автомобилей на перекрестках. Шестой раздел описывает модели, используемые в системах здравоохранения при прогнозировании и диагностике заболеваний, а также организации работы медицинского учреждения. В седьмом разделе описаны другие приложения систем стохастического поллинга, в частности в пассивных оптических сетях, вопросах энергосбережения, производственных процессах и т.д. В Заключение обсуждаются направления дальнейших прикладных исследований в области систем стохастического поллинга.

2. Основные понятия и описание базовой модели стохастического поллинга

В настоящем разделе приведено описание основной математической модели, которая является объектом исследования большинства прикладных работ по системам поллинга. В следующих разделах при рассмотрении результатов публикаций, представляющих теоретический и/или прикладной интерес, дается краткое описание математических моделей, если они отличаются от основной модели стохастического поллинга.

Система поллинга состоит из N ($N \geq 2$) очередей (узлов, станций) с неограниченным числом мест для ожидания и общим обслуживающим прибором (сервером). Сервером является физический объект, осуществляющий обработку поступающих запросов, а под обслуживанием подразумевается предоставление некоторого ресурса или услуги (например, услуги доступа к каналу передачи данных) в зависимости от специфики исследуемой модели.

В очередь с номером i (обозначим ее через Q_i) поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ_i . Времена обслуживания заявки в очереди Q_i

независимы и одинаково распределены с функцией распределения $B_i(t)$, первым и вторым моментами b_i и $b_i^{(2)}$ соответственно и преобразованием Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) $\tilde{B}_i(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dB_i(t)$, $i = \overline{1, N}$. Сервер посещает либо предоставляет доступ к требуемому ресурсу в соответствии с определенным порядком опроса (поллинга). Наиболее часто исследуются модели с циклическим порядком опроса. В ходе обслуживания очереди заявки получают доступ к серверу согласно заданной дисциплине обслуживания. Наиболее распространенными дисциплинами являются *исчерпывающая*, при которой сервер обслуживает очередь до тех пор, пока в ней не останется заявок, *шлюзовая*, при которой обслуживание получают лишь заявки, находящиеся в очереди в момент ее опроса (начала обслуживания очереди), *глобально-шлюзовая*, при которой сервер обслуживает лишь заявки, находящиеся в системе в момент начала цикла, и *k_i -ограниченная* дисциплина, при которой сервер может обслужить не более k_i заявок за одно посещение очереди Q_i . Более подробная информация о классификации систем поллинга, видах порядка опроса, дисциплин обслуживания и других параметрах, характеризующих системы поллинга, приведена в обзорах [4, 6].

Время, которое затрачивает сервер на подключение к очереди Q_i , является случайной величиной с функцией распределения $S_i(t)$ с первым s_i и вторым $s_i^{(2)}$ моментами, а также с ПЛС $\tilde{S}_i(x)$, $i, j = \overline{1, N}$. Для систем с циклическим или периодическим опросом обозначим также через s и $s^{(2)}$ соответственно первый и второй моменты общего времени переключения сервера в цикле $s = \sum_{j=1}^N s_j$, $s^{(2)} = s^2 + \sum_{j=1}^N (s_j^{(2)} - s_j^2)$. Под циклом понимается время, которое затрачивает сервер на опрос и обслуживание всех очередей согласно порядку опроса. Для систем с циклическим опросом – это время на обслуживание очередей $Q_1, \dots, Q_N$. В этом случае среднее время цикла вычисляется как $C = \frac{s}{1-\rho}$, где $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$ – загрузка системы, а $\rho_i = \lambda_i b_i$ – загрузка очереди Q_i .

Условие существования стационарного режима для систем с исчерпывающим или шлюзовым обслуживанием очередей имеет вид $\rho < 1$. В случае k_i -ограниченного обслуживания условие $\rho < 1$ дополняется неравенством $\lambda_i < \frac{k_i(1-\rho_i)}{s}$ для всех $i = \overline{1, N}$.

Сложность исследования описанной выше модели стохастического поллинга состоит в построении многомерного случайного процесса, адекватно описывающего алгоритм централизованного опроса, отыскании стационарных вероятностей состояний и средних характеристик производительности, а также численных решений в условиях большой размерности.

Для анализа сложных систем поллинга был разработан ряд методов: метод анализа средних [14], метод ветвящихся процессов [15], метод на основе теории разложимых полурегенерирующих процессов [16].

Наиболее часто используемым методом анализа систем поллинга с циклическим и периодическим опросом является метод производящих функций (см., например, [17]). Он позволяет получить распределение стационарных ве-

роятностей вложенного марковского процесса, описывающего состояние системы в моменты опроса сервером очередей. Приведем далее его краткое описание для случая исчерпывающей и шлюзовой дисциплин обслуживания очередей. Метод производящих функций, хорошо известный для анализа систем массового обслуживания с одной очередью, модифицирован для анализа систем с несколькими очередями (систем поллинга) и подробно описан в [17]. Данный метод применяется для циклических систем с исчерпывающим, шлюзовым или глобально-шлюзовым обслуживанием, а также для некоторых систем с нециклическим опросом. В рамках данного обзора представлены дополнения и модификация метода производящих функций в некоторых частных случаях систем поллинга, представляющих практический интерес.

Обозначим через X_i^j число заявок в очереди Q_j в момент опроса очереди Q_i , $i, j = \overline{1, N}$. Пусть $G_i(\mathbf{z}) = \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^N z_j^{X_i^j} \right]$, $i = \overline{1, N}$ – производящие функции стационарных вероятностей случайных величин X_i^j , $i, j = \overline{1, N}$, где $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$.

В случае *шлюзового обслуживания* производящие функции $G_i(\mathbf{z})$, $i = \overline{1, N}$ удовлетворяют функциональным соотношениям

$$(1) \quad \begin{aligned} G_{i+1}(\mathbf{z}) = \\ = G_i \left(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, \tilde{B}_i \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right], z_{i+1}, \dots, z_N \right) \tilde{S}_{i+1} \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right], \\ i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Среднее число заявок $f_i(j) = \mathbf{E}[X_i^j]$ в очереди Q_j в момент опроса очереди Q_i определяется частной производной $f_i(j) = \mathbf{E}(X_i^j) = \left. \frac{\partial G_i(\mathbf{z})}{\partial z_j} \right|_{\mathbf{z}=(1,1,\dots,1)}$ и может быть вычислено как решение системы линейных уравнений

$$(2) \quad \begin{aligned} f_{i+1}(j) &= f_i(j) + \lambda_j b_i f_i(i) + \lambda_j s_{i+1}, \quad j \neq i, \\ f_{i+1}(i) &= \lambda_i b_i f_i(i) + \lambda_i s_{i+1}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Система уравнений (2) имеет явное решение

$$f_i(j) = \begin{cases} \lambda_j \left(\sum_{k=j}^{i-1} \left[\rho_k \frac{s}{1-\rho} + s_{k+1} \right] \right), & j \neq i, \\ \lambda_i \frac{s}{1-\rho}, & j = i. \end{cases}$$

С помощью повторного дифференцирования производящих функций $G_i(\mathbf{z})$, $i = \overline{1, N}$ получают вторые моменты $f_i(j, k)$, $i, j, k = \overline{1, N}$ случайных величин X_i^j , $i, j = \overline{1, N}$ как решение системы линейных уравнений и да-

лее используют для вычисления среднего времени ожидания $W_i = \frac{(1+\rho_i)f_i(i,i)}{2\lambda_i^2 C}$ в очереди Q_i , $i = \overline{1, N}$.

В случае *исчерпывающего обслуживания* соотношения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} G_{i+1}(\mathbf{z}) = \\ = G_i \left(z_1, \dots, z_{i-1}, \tilde{\theta}_i \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_j (1 - z_j) \right], z_{i+1}, \dots, z_N \right) \tilde{S}_{i+1} \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right], \\ i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\theta}_i(s)$ – ПЛС периода занятости, порожденного одной заявкой, в системе массового обслуживания с одним сервером, соответствующей очереди Q_i . Функция $\tilde{\theta}_i(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$(3) \quad \tilde{\theta}_i(w) = \tilde{B}_i(w + \lambda_i - \lambda_i \tilde{\theta}_i(w)).$$

Аналогично, средние времена ожидания вычисляются как $W_i = \frac{\lambda_i b_i^{(2)}}{2(1-\rho_i)} + \frac{f_i(i,i)}{2\lambda_i^2(1-\rho_i)C}$, $i = \overline{1, N}$.

Отметим также ряд других методов, не упомянутых выше и применяемых для анализа систем поллинга: метод функциональных вычислений [18], матрично-аналитический подход [19], асимптотика характеристик систем в условиях большой загрузки [20, 21], использование закона псевдосохранения в системах поллинга [22], а также другие методы, информацию о которых можно найти, например, в монографии [5] и обзоре [6].

3. Применение моделей стохастического поллинга для оценки производительности и проектирования широкополосных беспроводных городских сетей

Беспроводная городская сеть (Wireless Metropolitan Area Network, WMAN) – это тип беспроводной сети, предназначенный для телекоммуникационного покрытия обширной географической территории. Сети WMAN состоят из ряда взаимосвязанных беспроводных базовых станций или точек доступа, стратегически расположенных по всей территории мегаполиса. Эти базовые станции взаимодействуют друг с другом и с устройствами конечных пользователей, обеспечивая эффективную и бесперебойную передачу данных.

В беспроводных городских сетях, функционирующих под управлением протоколов стандарта IEEE 802.11, широко используется механизм централизованного опроса. К числу таких протоколов, обеспечивающих реализацию циклического опроса базовой станции (сервером доступа) абонентских терминалов, относятся протокол с функцией координации PCF (Point Coordination Function) и его развитие – протокол с гибридной функцией координацией HCF (Hybrid Coordination Function) и протокол HCCA (HCF Controlled

Channel Access) с контролируемым доступом к каналам HCF [23]. Использование этих протоколов в городских сетях с высокоэтажной застройкой и наличием радиопомех позволяет избежать проблемы скрытых абонентских станций, эффективно планировать порядок доступа станций к беспроводному каналу, гибко управлять работой радиочейки и изменять ее параметры в соответствии с текущей ситуацией.

В [24–26] проведен сравнительный анализ различных вариантов схем опроса для оценки характеристик производительности городских сетей PCF IEEE 802.11, а также предложена модель адаптивного поллинга, позволяющая не только решить проблему скрытых станций, но и оптимизировать доступ к каналу передачи данных. Отметим также, что впервые схема адаптивного опроса и первая версия протокола были описаны в [27–29].

При адаптивной схеме опроса порядок посещения очередей цикличен, но сервер не посещает (не опрашивает) очереди, которые были пусты на момент опроса в предыдущем цикле. В случае несимметричной системы и ненулевых времен переключения адаптивный опрос сокращает среднее время цикла опроса и, соответственно, повышает производительность беспроводной сети.

Формула для среднего времени цикла из раздела 2 в этом случае принимает вид

$$C = \frac{\sum_{i=1}^N s_i u_i + \beta \prod_{i=1}^N (1 - u_i)}{1 - \rho},$$

где $u_i = \frac{1}{1 + e^{-\lambda_i C}}$ – вероятность того, что в произвольном цикле очередь Q_i посещается сервером, $i = \overline{1, N}$, β – среднее время простоя (ожидания) сервера в случае, если все очереди подряд оказались пусты при опросе и должны быть пропущены. Ожидание сервера здесь вводится с целью устранения пустых циклов опроса.

В случае шлюзовой дисциплины обслуживания система (1) для производящих функций $G_i(\mathbf{z})$, $i = \overline{1, N}$ принимает вид

$$(4) \quad G_i(\mathbf{z}) = (1 - u_i) u_{i-1} \mathcal{M}_{i+1}^{(1)}(\mathbf{z}) + \dots + (1 - u_1) \dots (1 - u_{N-1}) u_N \mathcal{M}_{i+1}^{(N-1)}(\mathbf{z}) + \\ + (1 - u_1) \dots (1 - u_N) \mathcal{M}_{i+1}^{(N)}(\mathbf{z}) + u_i \mathcal{M}_{i+1}^{(0)}(\mathbf{z}),$$

где

$$\mathcal{M}_{i+1}^{(l)}(\mathbf{z}) = G_{i-l} \left(z_1, \dots, z_{i-l}, \tilde{B}_{i-l} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right), z_{i-l+2}, \dots, z_N \right) \times \\ \times \tilde{S}_{i-l+1} \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right],$$

$$\mathcal{M}_{i+1}^{(N)}(\mathbf{z}) = G_{i-N} \left(z_1, \dots, z_{i-N}, \tilde{B}_{i-N} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right), z_{i-N+2}, \dots, z_N \right) \times \\ \times \tilde{S}_{i-N+1} \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right] \tilde{H} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right), \quad l = \overline{0, N-1},$$

а система (2) преобразуется к виду

$$f_{i+1}(j) = u_i [I_{\{i=j\}} f_i(j) + \lambda_j b_i f_i(i) + \lambda_j s_{i+1}] + \\ + (1 - u_i) u_{i-1} [\lambda_j (s_{i+1} + \beta) + I_{\{i-1=j\}} f_{i-1}(j) + \lambda_j b_{i-1} f_{i-1}(i-1) + \lambda_j s_{i+1}] + \dots + \\ + (1 - u_1) \dots (1 - u_N) [I_{\{i-N=j\}} f_{i-N}(j) + \lambda_j b_{i-N} f_{i-N}(i-N)], \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Как и в случае обычного циклического опроса, средние времена ожидания для системы с адаптивным опросом определяются как $W_i = \frac{(1+\rho_i)f_i(i,i)}{2\lambda_i^2 C}$, $i = \overline{1, N}$, где вторые моменты $f_i(j, k)$, $i, j, k = \overline{1, N}$ вычисляются как решение системы линейных уравнений, полученных дифференцированием производящих функций $G_i(\mathbf{z})$, $i = \overline{1, N}$. Случай исчерпывающего обслуживания очередей рассматривается аналогичным образом [25].

В [30] исследуется модель поллинга с ограниченным по времени обслуживанием очередей, описывающая передачу данных в сети НССА IEEE 802.11e. Показано, что производящая функция $\omega_i(\mathbf{z})$ числа заявок в системе в моменты завершения обслуживания в очереди Q_i выражается через производящую функцию $\bar{\omega}_i(\mathbf{z})$ числа заявок в системе в моменты опроса очереди Q_i следующим образом:

$$\omega_i(\mathbf{z}) = \frac{\gamma \tilde{B}_i \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k (1 - z_k) \right)}{z_i - \tilde{B}_i \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k (1 - z_k) \right)} \left[\bar{\omega}_{i-1}(\mathbf{z}) \tilde{S}_i \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k (1 - z_k) \right) - \bar{\omega}_i(\mathbf{z}) \right], \\ i = \overline{1, N},$$

где γ – известная константа, определяемая средним временем цикла C и общей интенсивностью поступления заявок в систему. Производящие функции $\bar{\omega}_i(\mathbf{z})$, $i = \overline{1, N}$ находятся из функциональных уравнений численно с помощью преобразования Фурье. ПЛС $W_i(s)$ времени ожидания в очереди Q_i удовлетворяет соотношению

$$W_i(s) = N_i(1 - s/\lambda_i)/\tilde{B}_i(s), \quad i = \overline{1, N},$$

где $N_i(s)$ – производящая функция числа заявок в очереди Q_i в моменты завершения обслуживания, которая вычисляется как $N_i(z) = \omega_i(1, \dots, 1, z_i, 1, \dots, 1)/\omega_i(\mathbf{1})$.

В [31] также рассматривается применение крупномасштабной системы поллинга с дисциплинами обслуживания ветвящегося типа к моделированию сетевого протокола BACnet (Building Automation and Control Networks)

для систем автоматизации зданий и сетей управления зданиями. Дисциплины ветвящегося типа определяются следующим образом. Если в некоторый вложенный момент времени, в частности в момент опроса произвольной очереди Q_i , ее длина равна k_i , то каждая из этих k_i заявок за время обслуживания этой очереди замещается некоторым случайным числом заявок, распределение которых задано многомерной производящей функцией $h_i(\mathbf{z})$. Как показано в [32], системы поллинга с дисциплинами ветвящегося типа позволяют проводить точный анализ характеристик производительности, а дисциплины обслуживания, которые не удовлетворяют данному свойству, предполагают лишь применение приближенных методов анализа.

К дисциплинам ветвящегося типа относятся, например, плюсовая с

$$h_i(z_1, \dots, z_N) = \tilde{B}_i \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k (1 - z_k) \right), \quad i = \overline{1, N}$$

и исчерпывающая с $h_i(z_1, \dots, z_N) = \tilde{\theta}_i \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k (1 - z_k) \right)$, $i = \overline{1, N}$, где функция $\tilde{\theta}(s)$ определяется из функционального соотношения (3). Ограниченные же дисциплины не являются таковыми, а системы с такими дисциплинами требуют разработки приближенных методов.

Для системы поллинга с дисциплиной ветвящегося типа функциональное соотношение (1) для производящих функций $G_i(\mathbf{z})$, $i = \overline{1, N}$ преобразуется к виду

$$G_{i+1}(\mathbf{z}) = G_i(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, h_i(\mathbf{z}), z_{i+1}, \dots, z_N) \tilde{S}_{i+1} \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right], \quad i = \overline{1, N},$$

который позволяет получить характеристики производительности на основе средних длин очередей в моменты опроса, полученных путем дифференцирования приведенных выше соотношений.

ПЛС времени цикла C определяется как

$$\mathbf{E} [e^{-uC}] = G_1(\tilde{\theta}_1(\gamma_1(\mathbf{u})), \dots, \tilde{\theta}_N(\gamma_N(\mathbf{u}))) \prod_{i=1}^N \tilde{S}_i(\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{u} = (u, \dots, u)$, $\gamma_N(\mathbf{z}) = z_N$, $\gamma_i(\mathbf{z}) = z_i + \sum_{j=i+1}^N \lambda_j (1 - \tilde{\theta}_j(\gamma_j(\mathbf{z})))$, $i = \overline{1, N-1}$.

Для дисциплин обслуживания, которые не относятся к классу ветвящихся, таких как k -ограниченное обслуживание, в [31] также предложена так называемая *гибкая k -ограниченная* дисциплина. Суть ее аналогична обычной k -ограниченной дисциплине за исключением случаев, когда сервер в очереди обслуживает меньше k заявок. В этом случае сервер использует неизрасходованный ресурс на обслуживание следующей очереди по порядку. Это

позволяет, например, в случае сильной несимметричности системы поллинга отдавать часть ресурса обслуживания от менее загруженных очередей более загруженным, тем самым снижая среднее время ожидания в системе.

В [33, 34] рассматривается возможность организации городской широкополосной беспроводной сети с использованием привязной высотной беспилотной платформы длительного функционирования [35–37]. Базовая станция PCF IEEE 802.11, установленная на борту беспилотного летательного аппарата (БПЛА) на высоте 100–150 м, позволяет значительно увеличить зону прямой видимости между абонентами и антенной базовой станции, соответственно увеличивает область телекоммуникационного покрытия сети. В [38, 39] исследуется модель поллинга с повторными вызовами, описывающая механизм передачи данных в FANET (Flying Ad Hoc Network) – беспроводных самоорганизующихся сетях на основе БПЛА.

В [40] исследуется случай марковского порядка опроса очередей, моделирующий множественный доступ с предотвращением коллизий и контролем несущей (Carrier-Sense Multiple-Access Collision-Avoidance, CSMA-CA) в сетях IEEE802.11 в режиме случайного доступа к среде. Сервер посещает очереди согласно случайной марковской схеме опроса, описываемой стохастической матрицей $\mathbf{P} = (p_{i,j})_{i,j=\overline{1,N}}$ и вектором вероятностей $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$. Вектор $\mathbf{q}$ вычисляется как решение системы $\mathbf{qP} = \mathbf{q}$, $\sum_{i=1}^N q_i = 1$.

Дисциплина обслуживания очередей может быть произвольной ветвящегося типа, как описано выше. Среднее время цикла для очереди Q_i вычисляется как $C_i = \frac{\sigma}{q_i(1-\rho)}$, где $\sigma = \sum_{j=1}^N q_j \sum_{k=1}^N p_{j,k} \mathbf{E}[S_{j,k}]$; $S_{j,k}$ – случайная величина, описывающая время переключения между очередями Q_j и Q_k , $j, k = \overline{1, N}$.

В данном случае возможно применение метода производящих функций, который приводит к функциональным соотношениям, аналогичным (1):

$$q_j G_j(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N p_{i,j} q_i G_i(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, h_i(\mathbf{z}), z_{i+1}, \dots, z_N) \tilde{S}_{i+1} \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right],$$

$$j = \overline{1, N}.$$

Первые моменты $f_i(j)$, $i, j = \overline{1, N}$ длин очередей в начале опроса могут быть получены в явном виде, что позволяет вычислить ключевые характеристики производительности системы.

Средняя безусловная длина L_j очереди Q_j вычисляется как

$$L_j = \sum_{i=1}^N \left(\rho_i x_i(j) + \frac{(1-\rho)q_i}{\sigma} \sum_{k=1}^N p_{i,k} \mathbf{E}[S_{i,k}] y_{i,k}(j) \right), \quad j = \overline{1, N},$$

где $x_i(j)$ и $y_{i,k}(j)$ – известные константы. Статья [40] также обобщает закон псевдосохранения для произвольной дисциплины обслуживания ветвящегося типа, который может быть использован для оптимизации производительности

сти системы,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \rho_i W_i &= \rho \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i b_i^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{k=1}^N p_{i,k} \mathbf{E}[S_{i,k}] \sum_{j=1, j \neq i}^N f_i(j) b_j + \\ &+ \frac{1}{1-\rho} \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{1-\rho_i}{1-h_i(i)} \sum_{k=1}^N p_{i,k} \mathbf{E}[S_{i,k}] \sum_{j=1}^N b_j h_i(j) + \frac{\rho}{2\sigma} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{k=1}^N p_{i,k} \mathbf{E}[S_{i,k}^2]. \end{aligned}$$

Модель системы приоритетного опроса с тремя очередями и пороговым обслуживанием используется в [41] для анализа систем коммутации в режиме ATM (Asynchronous Transfer Mode) сетевых стандартов типа DQDB (Distributed Queue Dual Bus) для масштабных городских сетей.

Аналогичное приложение системы поллинга со случайным порядком опроса к описанию схемы множественного доступа в городских сетях WiMAX IEEE802.16 в режиме конкурентного доступа к среде рассмотрено в [42]. В [43] предложен многоуровневый протокол MAC с приоритетным опросом в применении для военных целей. Для системы с тремя очередями и ограниченным обслуживанием, описывающей частный случай системы поллинга с адаптивным механизмом опроса, в [44] представлено условие существования стационарного режима.

В заключение раздела отметим, что в дальнейших версиях стандарта IEEE802.11 были добавлены новые механизмы доступа (например, Triggered Uplink Access, TUA) [45, 46], которые также могут быть эффективно исследованы с использованием моделей стохастического поллинга.

4. Систематизация работ по применению моделей поллинга в сетях Интернета вещей и сотовых сетях 5G/6G

Сети Интернета вещей (IoT, Internet of Things) интенсивно развиваются в последние годы (см. [47–49]). Для оценки характеристик и сравнительного анализа протоколов таких сетей могут эффективно использоваться модели стохастического поллинга. Среди работ, посвященных такому анализу, отметим следующие.

В [50] анализируется MAC-протокол управления доступом к среде в Интернете вещей с использованием модели поллинга с приоритетным опросом типа «звезда». Такой опрос позволяет разделять пользователей с разными приоритетами для снижения задержки и обеспечения равнодоступного обслуживания. Модель представлена системой из $N + 1$ очереди типа $M/G/1$. Очередь Q_h является приоритетной по отношению к остальным N очередям и обслуживается сервером согласно шлюзовой дисциплине каждый раз по завершению обслуживания любой другой очереди. Неприоритетные очереди получают исчерпывающее обслуживание.

Вектор, описывающий число заявок в очередях в момент опроса Q_i , имеет размер $N + 1$, поэтому соответствующая производящая функция стационар-

ных вероятностей имеет дополнительный аргумент z_h . Функциональные соотношения (1) в данном случае связывают производящие функции $G_i(\mathbf{z}, z_h)$ и $G_{ih}(\mathbf{z}, z_h)$ в виде

$$(5) \quad G_{i+1}(\mathbf{z}, z_h) = G_{ih} \left(\mathbf{z}, \tilde{B}_h \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j(1 - z_j) + \lambda_h(1 - z_h) \right) \right),$$

$$G_{ih}(\mathbf{z}, z_h) = G_i \left(z_1, \dots, z_{i-1}, \tilde{\theta}_i \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j(1 - z_j) + \lambda_h(1 - z_h) \right), z_{i+1}, \dots, z_N, z_h \right) \times$$

$$\times \tilde{S}_i \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j(1 - z_j) + \lambda_h(1 - z_h) \right], \quad i = \overline{1, N}.$$

Как показано в разделах 2 и 3, данные функциональные уравнения позволяют вычислять основные характеристики производительности. Отметим, что здесь $\tilde{S}_i(s)$ – это ПЛС времени отключения сервера от очереди Q_i .

В [51] используется алгоритм нейронной сети для прогнозирования и анализа производительности сети в беспроводных сенсорных сетях (WSN). Модель позволяет решать приоритетные задачи в сфере Интернета вещей. Для прогнозирования производительности системы построена нейронная сеть. Показано, как предлагаемая схема приоритетов помогает повысить производительность системы по сравнению с аналогичной системой поллинга с одноуровневым приоритетом.

В [52] изложен новый алгоритм быстрого опроса (поллинга) для беспроводных mesh-сетей в узкополосных системах Интернета вещей. Показано, что алгоритм значительно минимизирует время опроса, требуемое центру управления и сбора данных для получения отклика от всех удаленных телеметрических устройств. В [53] исследуется модель поллинга с двумя очередями и коррелированным входным потоком *ВМАР* (групповой марковский входной поток) для проектирования и оптимизации потоковой передачи видео высокой четкости в сетях Интернета вещей.

Модели стохастического поллинга могут эффективно использоваться для оценки производительности и проектирования протоколов сотовых сетей нового поколения 5G/6G. Развертывание сетей 5G/6G обеспечивает значительное расширение спектра услуг пользователям, повышение емкости сети и скорости передачи данных по сравнению с сетями предыдущих поколений [54]. Для достижения высоких и сверхвысоких скоростей передачи данных на абонентских и транспортных участках в сетях нового поколения используются не только традиционные каналы сантиметрового диапазона радиоволн (до 6ГГц), но и каналы миллиметрового диапазона (до 100ГГц), обладающие широкой полосой пропускания [55, 56].

Однако с учетом особенностей распространения волн миллиметрового диапазона (короткие зоны покрытия) консорциумом 3GPP была предложена тех-

нология интегрированного доступа и транспорта IAB (Integrated Access and Backhaul) [57], которая интегрирует функции доступа и транспорта в одной сети. Технология позволяет организовать экономически эффективную сеть за счет использования недорогих ретрансляционных узлов (узлов IAB) вместо полностью оборудованных базовых станций, что особенно важно при развертывании сетей 5G вдоль транспортных магистралей.

В [58] для анализа производительности конечного узла в сети IAB используется модель поллинга с двумя очередями. Одна очередь хранит данные, переданные по нисходящему каналу от родительского узла сети IAB, вторая – данные, переданные по восходящему каналу от дочерних узлов и пользовательского оборудования, связанного с конечным узлом. В [59–61] граничный узел моделируется системой поллинга типа $M_K/G_K/1$ с циклическим опросом с мгновенными переключениями сервера между очередями ($s_i = 0, i = \overline{1, K}$) за исключением периода времени s_0 в начале цикла, которое можно интерпретировать как время подключения к очереди Q_1 . Предполагается, что заявки могут поступать в очереди лишь в течение времени s_0 , что представляет собой комбинацию глобально-шлюзового и исчерпывающего обслуживания. В этом случае производящая функция (1) числа заявок в моменты опроса очередей имеет вид

$$G_i(\mathbf{z}) = \tilde{S} \left(\sum_{j=i}^K (\lambda_j (1 - z_j)) \right), \quad i = \overline{1, K},$$

где $\tilde{S}(w)$ – ПЛС функции распределения случайной величины s_0 . Далее в явном виде получены моменты произвольного порядка для случайных величин $X_i^j, i, j = \overline{1, K}$, описывающих число заявок в очередях в моменты опроса. ПЛС распределения времени задержки в очереди Q_i с произвольной функцией распределения времени обслуживания имеет вид

$$\tilde{\Delta}_i(w) = s^i \prod_{j=1}^i \frac{1}{s + \lambda_j (1 - \tilde{B}_j(w))}$$

со средним $\Delta_i = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^i \lambda_j b_j, i = \overline{1, K}$.

Модели поллинга нашли свое применение при моделировании контроля перегрузки SIP-серверов [62]. SIP (Session Initiation Protocol) – протокол передачи данных, описывающий способ установления и завершения пользовательского сеанса связи в сетях 5G. В [62] предложена схема порогового контроля нагрузки, генерируемой неприоритетными клиентами. В [63] продолжен анализ механизма контроля перегрузки SIP-серверов путем тестирования различных дисциплин обслуживания. Рассмотренная модель поллинга предполагает пороговую дисциплину переключения к приоритетной очереди и две дисциплины обслуживания: исчерпывающую и шлюзовую. Показано, что в некоторых случаях предпочтительнее использовать шлюзовое обслуживание приоритетной очереди.

В заключение данного раздела отметим также статью [64], в которой рассматривается модель с управляемым (динамическим) порядком опроса для достижения требуемого уровня равнодоступности – способности системы обеспечить одинаковое качество обслуживания абонентов в обобщенных алгоритмах планирования в современных беспроводных сетях, и работу [65], в которой исследуются различные политики поллинга (правила опроса и обслуживания) для решения задач масштабируемости стандартного протокола управления передачей данных TCP (Transmission Control Protocol).

5. Применение моделей стохастического поллинга на транспорте и в управлении трафиком автомобилей на перекрестках

Применение моделей поллинга в управлении дорожным движением имеет обширную предысторию и подробно освещено в обзоре [9], опубликованном в 2011 г. Дальнейшее развитие этого направления применения моделей поллинга нашло отражение в целом ряде более поздних статей. В частности, в [66] рассмотрена модель поллинга со случайной длительностью разрешающих сигналов светофора для каждого направления движения в зависимости от его загруженности с целью минимизации времени ожидания проезда на перекрестке. Для моделирования автоматизированного управления светофором, регулирующим движение транспортных средств на перекрестке, в [67, 68] исследуется система поллинга двух очередей с приоритетом порогового типа для переключения сервера между очередями. Светофор определяет приоритет проезда между двумя направлениями пороговым образом: когда количество автомобилей в каком-либо направлении достигает порогового значения, для него загорается зеленый свет. При этом в [68] для получения основных характеристик производительности такой модели применен матрично-аналитический подход. Разновидность пороговых стратегий переключения сервера между очередями, регулирующая движение на перекрестке, также рассматривается в [7].

В [69] предложено точное решение для системы поллинга с двумя очередями и пороговым приоритетом. Результаты моделирования механизма поллинга на полностью автономных перекрестках представлены в [70]. Беспилотные автомобили, подъезжающие к перекрестку, корректируют свою скорость, чтобы проехать перекресток, избегая столкновений.

Для транспортных потоков предположение о независимости потоков, осуществляющих движение на перекрестке, на самом деле, не является реалистичным, поэтому учет коррелированного характера реальных потоков транспорта является весьма актуальной задачей. В [71, 72] для модели поллинга с двумя очередями коррелированный и нестационарный характер входных потоков учитывается с помощью входного марковского (МАР) и маркированного марковского (ММАР) входных потоков. В [71] рассматриваются две очереди типа $МАР/PH/1/N$ с поочередным обслуживанием сервером и фазовым распределением времени обслуживания. Авторами приводится по-

дробный анализ времени ожидания в очереди, который может служить руководством для анализа времени ожидания в других моделях поллинга не только через их средние значения, но и в виде распределений. Например, ПЛС распределения времени ожидания заявок в первой очереди имеет вид

$$\begin{aligned}
 v_1(s) = & \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \left(\pi^{(-1)}(i_1, i_2) \left(I_{M_{-1}} \otimes \hat{D}_1^{(1)} \right) \mathbf{ev}_1^{(-1)}(s, i_1) + \right. \\
 & + \pi^{(-2)}(i_1, i_2) \left(I_{M_{-2}} \otimes \hat{D}_1^{(1)} \right) \mathbf{ev}_1^{(-2)}(s, i_1, i_2) + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_1} \pi^{(1)}(j, i_1, i_2) \left(I_{M_1} \otimes \hat{D}_1^{(1)} \right) \mathbf{ev}_1^{(1)}(s, j, i_1, i_2) + \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{N_2} \pi^{(2)}(j, i_1, i_2) \left(I_{M_2} \otimes \hat{D}_1^{(1)} \right) \mathbf{ev}_1^{(2)}(s, j, i_1, i_2) \right) + P_1^{(loss)},
 \end{aligned}$$

где $P_1^{(loss)}$ – вероятность потери заявки в очереди Q_1 , $\pi^{(k)}(*)$ – стационарные вероятности, соответствующие состоянию $(*)$ при посещении сервером очереди Q_k , $v_1^{(k)}(s, *)$ – ПЛС распределения условного времени ожидания в очереди Q_1 при условии, что сервер находится в состоянии k , а система – в состоянии $*$, $\hat{D}_1^{(1)}$ – одна из матриц, описывающих поступления заявок МАР-потока.

В заключение этого раздела отметим и другие применения моделей поллинга в транспортных системах. В [73] исследуется применение технологии радиочастотной идентификации (RFID, Radio Frequency IDentification) [74] для контроля числа транспортных средств на перекрестке с целью адаптации сигналов светофора к текущей дорожной ситуации. Для транспортных систем в [75] анализируется проблема улучшения приоритетной доставки заказов без снижения эффективности доставки обычных заказов. С этой целью предложено назначать некоторые комплектовочные машины приоритетными с исчерпывающей дисциплиной обслуживания, остальные – неприоритетными с лимитом обслуживания в один заказ (1-ограниченная дисциплина обслуживания). В [76] предложена модификация дисциплин обслуживания в системе поллинга, описывающая систему доставки заказов, с целью снижения времени сборки нескольких заказов для одного клиента.

6. Применение моделей стохастического поллинга в системах здравоохранения

В настоящее время модели систем поллинга активно применяются в области медицинского мониторинга. Например, в [77] с помощью системы поллинга оценивается производительность беспроводных сетей нательных датчиков, которые представляют собой современные системы мониторинга, использующие беспроводные технологии для прогнозирования и диагностики заболеваний. В статье [78] анализируется схема спящего режима в беспроводных сетях

передачи данных для нательных датчиков (WBAN) стандарта IEEE802.15 посредством модели поллинга с дискретным временем и адаптивным порядком опроса в предположении, что сервер пропускает пустые очереди, если они были пусты в предыдущий момент опроса.

Модель, рассмотренная в [19], описывает работу по первичному приему пациентов в медицинской клинике. Пациентов принимают несколько медсестер, каждая из которых организует свою очередь пациентов, и дежурный врач. Пациент направляется к медсестре с самой короткой очередью для обследования. После этого пациентов принимает врач, каждый раз выбирая пациента из самой длинной очереди. Данная схема предполагает комбинацию двух стратегий поступления и обслуживания заявок: присоединение поступающей заявки к очереди меньшей длины и обслуживание сервером очереди с большим числом заявок. Это позволяет описать поведение соответствующей модели поллинга с двумя очередями двумерной цепью Маркова, первая компонента которого отражает длину очереди Q_1 , а вторая – текущую разницу в длине очередей. Цепь Маркова в данном случае принадлежит классу многомерных процессов гибели и размножения и имеет инфинитезимальный генератор вида

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_0 0 \dots\dots\dots \\ B_2 A_1 A_0 0 \dots\dots \\ 0 A_2 A_1 A_0 0 \dots \\ \vdots \ddots \ddots \ddots \ddots \ddots \end{bmatrix},$$

где элементы матриц A_i и B_i – входные параметры системы.

Вектор $\mathbf{p}_n$ стационарных вероятностей состояний системы, соответствующий числу n заявок в очереди Q_1 , определяется равенством $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 R^{n-1}$, $n \geq 1$, где матрица R есть минимальное неотрицательное решение матричного уравнения $A_0 + R A_1 + R^2 A_2 = O$. А векторы $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_1$ находятся как решение системы уравнений

$$\mathbf{p}_0 B_1 + \mathbf{p}_1 B_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_0 B_0 + \mathbf{p}_1 (A_1 + R A_2) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}_1 [I - R]^{-1} \mathbf{e} = 1,$$

где $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$, I – единичная матрица. Средняя длина очереди Q_1 вычисляется как $L_1 = \mathbf{p}_1 [I - R]^{-2} \mathbf{e}$.

В [79] предложено использовать схему поллинга для планирования периферийных вычислений с целью адаптации методов планирования для множества сервисов. Периферийный сервер предоставляет услуги информационному центру больницы. Авторы рассматривают задачу максимизации эффективности использования периферийных серверов с помощью схемы приоритетного опроса типа «звезда». Как и в [50], модель имеет N обычных очередей и одну приоритетную очередь. Все очереди получают исчерпывающее обслуживание, а очередь Q_h посещается сервером всякий раз, как только сервер покидает неприоритетную очередь. Производящие функции числа заявок в

очередях в моменты опроса удовлетворяют функциональным соотношениям, аналогичным (5), где ПЛС $\bar{B}_h(s)$ заменяется на $\tilde{\theta}_h(s)$, определяемый формулой (3).

7. Другие приложения систем поллинга

Системы поллинга используются и в целом ряде других областей, которые не были описаны в предыдущих разделах, например в пассивных оптических сетях, робототехнике, спутниковых системах и производственных процессах.

Пассивные оптические сети, PON (Passive Optical Network), – это телекоммуникационная технология, использующая оптоволоконные каналы связи для предоставления абонентам высокоскоростного доступа в интернет, видео- и голосовых услуг. Термин «пассивный» обусловлен тем, что для распределения оптического сигнала по нескольким конечным точкам используются пассивные оптические разветвители, не требующие активных компонентов. В [80] исследуется вопрос существования стационарного режима в многосерверной системе поллинга с ограниченным обслуживанием, моделирующей процесс передачи данных в сетях на основе технологии PON.

В [81] предложена схема накопления и обслуживания заявок в системах поллинга, моделирующих передачу данных на основе технологии PON. Это так называемая многофазная шлюзовая дисциплина обслуживания. Заявка, поступающая в очередь Q_i , должна ожидать K_i циклов прежде, чем она будет обслужена, $i = \overline{1, N}$. Как отмечают авторы, такая многофазная дисциплина помогает решить проблему монополизации сервера более загруженными очередями за счет выбора подходящих значений $(K_1, \dots, K_N)$. Несмотря на сложность, данная дисциплина позволяет провести точный анализ системы и получить характеристики производительности в явном виде.

Состояние системы в момент опроса очереди Q_1 (начала цикла) описывается набором случайных величин $X_{i,n}^{(k)}$, $k = \overline{1, K_i}$, $i = \overline{1, N}$, $n \geq 0$, где $X_{i,n}^{(k)}$ – число заявок в очереди Q_i на фазе k в n -й момент опроса очереди Q_1 . Процесс $X^{(n)} = (X_{1,n}^{(1)}, \dots, X_{1,n}^{(K_1)}, \dots, X_{N,n}^{(1)}, \dots, X_{N,n}^{(K_N)})$, $n \geq 0$ – K -мерный многотипный ветвящийся процесс с иммиграцией [32] с производящей функцией числа порождаемых частиц

$$f(\mathbf{s}) = \left(f^{(1,1)}(\mathbf{s}), \dots, f^{(1,K_1)}(\mathbf{s}), \dots, f^{(N,1)}(\mathbf{s}), \dots, f^{(N,K_N)}(\mathbf{s}) \right),$$

где $\mathbf{s} = (s_1^{(1)}, \dots, s_1^{(K_1)}, \dots, s_N^{(1)}, \dots, s_N^{(K_N)})$, для $i = \overline{1, N}$

$$f^{(i,k)}(\mathbf{s}) = s_i^{(k+1)}, \quad k = \overline{1, K_i - 1},$$

$$f^{(i,K_i)}(\mathbf{s}) = \tilde{B}_i \left(\sum_{j=1}^i \lambda_j (1 - s_j^{(1)}) + \sum_{i+1}^N \lambda_j (1 - f^{(j,1)}(\mathbf{s})) \right),$$

а производящая функция иммиграции имеет вид

$$g(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^N \tilde{S}_i \left(\sum_{j=1}^i \lambda_j (1 - s_j^{(1)}) + \sum_{i+1}^N \lambda_j (1 - f^{(j,1)}(\mathbf{s})) \right).$$

Закон псевдосохранения (выражение взвешенной суммы средних времен ожидания в системе) для многофазной плюсовой дисциплины имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{E}[W_i] = \rho \frac{\rho}{1-\rho} \frac{b^{(2)}}{2b} + \rho \frac{s^{(2)}}{2s} + \frac{s}{2(1-\rho)} \left[\rho^2 - \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \right] + \sum_{i=1}^N \mathbf{E}[M_i],$$

где M_i – среднее количество работы в очереди Q_i , остающейся в момент, когда сервер покидает очередь Q_i , $b^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\Lambda} b_i^{(2)}$, $b = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\Lambda} b_i$, $\Lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i$. В случае многофазной плюсовой дисциплины $\mathbf{E}[M_i] = \rho_i ((K_i - 1) + \rho_i) \frac{s}{1-\rho}$, $i = \overline{1, N}$.

В [82] представлена другая модель резервирования и передачи данных в сетях PON: система поллинга с повторными вызовами и так называемыми периодами резервирования (glue periods). Заявки, поступающие в очередь Q_i , могут накапливаться в очереди и затем получить обслуживание лишь в течение так называемого периода резервирования (glue period), имеющего фиксированную длину G_i . Заявки, поступающие вне этого периода, уходят на орбиту и совершают повторные попытки занять место в очереди в период резервирования. Повторные попытки заявок с орбиты очереди Q_i образуют простейший поток с параметром ν_i , $i = \overline{1, N}$.

Производящая функция числа заявок в очередях в момент начала периода резервирования очереди Q_1 имеет явный вид

$$X(\mathbf{z}) = \prod_{m=0}^{\infty} K \left(h_1^{(m)}(\mathbf{z}), h_2^{(m)}(\mathbf{z}), \dots, h_N^{(m)}(\mathbf{z}) \right), \quad i = \overline{1, N},$$

где $h_i^{(0)}(\mathbf{z}) = z_i$, $h_i^{(n)}(\mathbf{z}) = h_i(h_i^{(n-1)}(\mathbf{z}), h_2^{(n-1)}(\mathbf{z}), \dots, h_N^{(n-1)}(\mathbf{z}))$, функции $h_i(\mathbf{z})$, $i = \overline{1, N}$ определяются как

$$h_i(\mathbf{z}) = f_i(z_1, \dots, z_i, h_{i+1}(\mathbf{z}), \dots, h_N(\mathbf{z})), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad h_N(\mathbf{z}) = f_N(\mathbf{z}),$$

где $f_i(\mathbf{z}) = (1 - e^{-\nu_i G_i}) \beta_i(\mathbf{z}) + e^{-\nu_i G_i} z_i$, $\beta_i(\mathbf{z}) = \tilde{B}_i \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right)$, $i = \overline{1, N}$, а функция $K(\mathbf{z})$ определяется следующим образом:

$$K(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^N \sigma_i(z_i, \dots, z_i, h_{i+1}(\mathbf{z}), \dots, h_N(\mathbf{z})) \prod_{i=1}^N e^{-G_i D_i(\mathbf{z})},$$

где $D_i(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j (1 - z_j) + \lambda_i (1 - \beta_i(z_i, \dots, z_i, h_{i+1}(\mathbf{z}), \dots, h_N(\mathbf{z}))) + \sum_{j=i+1}^N \lambda_j (1 - h_j(\mathbf{z}))$, $\sigma_i(\mathbf{z}) = \tilde{S}_i \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j) \right)$ (здесь имеется в виду

ПЛС времени отключения от очереди Q_i , в отличие от основной модели в разделе 2), $i = \overline{1, N}$. В [82] также рассматривается вопрос оптимизации длительности периодов резервирования.

Беспроводные локальные сети. Авторы [83] анализируют непрерывную систему поллинга без отдельных очередей, представленную общей для всех заявок двумерной областью для ожидания, куда поступление заявок происходит случайным образом. Система моделирует беспроводную локальную сеть FWLAN (ferry based wireless local area network). FWLAN – это концепция беспроводной локальной сети, в которой связь между узлами (пользователями) и внешним миром или между узлами возможна через мобильный ретранслятор – «ферри». В такой сети изолированные узлы разбросаны по определенной области, и прямая глобальная связь между ними невозможна. Движущийся ретранслятор, перемещаясь по заранее заданному циклическому маршруту, связывается со статическими узлами (или пользователями) сети по беспроводному каналу связи. Мобильные базовые станции рассматриваются в контексте мобильных беспроводных сетей (Mobile Ad-Hoc Networks), автомобильных беспроводных сетей (Vanets) и беспроводных (статических) сенсорных сетей.

Сети на кристалле. В [84, 85] рассматривается случай трехфазного шлюзового обслуживания в качестве алгоритма планирования для управления доступом к среде (MAC) в сетевой подсистеме связи на интегральной схеме (Network on Chip) с учетом особенностей двумерной структуры связи.

Энергосбережение. В [86] представлен анализ системы поллинга с двумя очередями и ограниченным по времени обслуживанием очередей с точки зрения энергопотребления. Основное внимание в исследовании уделяется балансу энергопотребления процессоров в персональных компьютерах и их производительности для пользователей. Предполагается, что в модели поллинга скорость обслуживания заявок в очереди не постоянна, а зависит от загрузки очереди. Такой подход позволяет персональным компьютерам регулировать скорость обработки данных и оптимизировать энергопотребление в зависимости от объема выполняемых задач.

Контроль объема памяти. Модель, предложенная в [67, 68], имеет еще одно применение – контроль объема занятой памяти в центрах обработки данных, когда объем данных на отдельных дисках превышает определенный предел (порог), что приводит к неэффективной работе и требует очистки памяти.

Робототехника. В [87] описано использование механизма поллинга для обработки экологической и социальной информации, поступающей от роя роботов. Показано, что способность адаптации роя к нагрузке улучшается при уменьшении количества каналов связи между роботами, что требует решения соответствующей задачи оптимизации.

Спутниковые системы. В [88] исследована модель поллинга с учетом дуплексной связи с временным разделением для разработки единой систе-

мы управления в глобальных навигационных спутниковых системах с целью улучшения взаимодействия данных.

Производственные процессы. В [8] анализируется тандем из двух систем поллинга типа $M/M/1$, каждая из которых имеет две очереди. Данная модель представляет собой процесс производства алюминиевого проката. Каждый производственный этап моделируется системой поллинга, которая описывает процесс последовательной обработки различных типов сплавов.

8. Заключение

В настоящем обзоре систематизированы новые направления практического применения моделей стохастического поллинга на основе анализа результатов многочисленных статей отечественных и зарубежных авторов, опубликованных в последние годы. Рассмотрено применение таких моделей для оценки характеристик производительности и проектирования широкополосных беспроводных городских сетей, сотовых сетей 5G/6G и сетей Интернета вещей, транспортных систем и систем здравоохранения. Кратко отмечена эффективность применения моделей поллинга в других областях, включая робототехнику, спутниковые системы, пассивные оптические сети и производственные процессы. Для отдельных работ, представляющих теоретический и/или практический интерес, в обзоре приведено описание оригинальных математических моделей стохастического поллинга (отличных от основной модели, рассмотренной во втором разделе статьи) и результатов их исследования.

Обсуждены направления дальнейшего развития прикладных работ в области стохастического поллинга. К ним относятся исследования моделей поллинга с входящими коррелированными потоками и обобщенным РН-распределением времени обслуживания, адекватно описывающих функционирование современных вычислительных систем и сетей, применение и развитие методов машинного обучения и матрично-геометрического подхода для прогнозирования и оценки характеристик систем с централизованным механизмом управления. Кроме этого, перспективным направлением дальнейшего развития прикладных исследований является моделирование новых протоколов использования нескольких частотных каналов и обслуживания нескольких пользователей, а также новых механизмов доступа таких, как, например, Triggered Uplink Access (TUA).

Представленный обзор подводит итоги прикладных исследований по системам стохастического поллинга, позволяет сформулировать новые задачи и определить направления дальнейших работ в этой перспективной области теории очередей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takagi H.* Analysis of polling systems. MIT Press, 1986.
2. *Borst S.C.* Polling systems. Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1996.

3. *Borst S.C., Boxma O.J.* Polling: past, present, and perspective // TOP. 2018. V. 26. P. 335–369.
4. *Vishnevskii V.M., Semenova O.V.* Mathematical methods to study the polling systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. P. 173–220.
5. *Vishnevsky V., Semenova O.* Polling Systems: Theory and Applications for Broadband Wireless Networks. LAMBERT Academic Publishing, 2012.
6. *Vishnevsky V., Semenova O.* Polling systems and their application to telecommunication networks // Mathematics. 2021. V. 9. No. 2. Article No. 117.
7. *Perel E., Yechiali U.* Two-queue polling systems with switching policy based on the queue that is not being served // Stochastic Models. 2017. V. 33. P. 430–450.
8. *Suman R., Krishnamurthy A.* Analysis of tandem polling queues with finite buffers // Annals of Operations Research. 2019. V. 293. P. 343–369.
9. *Boon M.A.A., van der Mei R.D., Winands E.M.M.* Applications of polling systems // Surveys in Operations Research and Management Science. 2011. V. 16. No. 2. P. 67–82.
10. *Dudin A.N., Klimenok V.I., Vishnevsky V.M.* The theory of queuing systems with correlated flows. Heidelberg, Germany: Springer, 2020.
11. *Chakravorthy S.R.* Queueing Models in Services – Analytical and Simulation Approach / Queueing Theory 2: Advanced Trends. John Wiley Sons, 2021. P. 33–80.
12. *Вишневский В.М., Ефросинин Д.В.* Теория очередей и машинное обучение. М.: ИНФРА-М, 2024.
13. *Efrosinin D., Vishnevsky V., Stepanova N.* Optimal scheduling in general multi-queue system by combining simulation and neural network techniques // Sensors. 2023. V. 23. No. 12. Article No. 5479.
14. *Winands E.M.M., Adan I.J.B.F., van Houtum G.J.* Mean value analysis for polling systems // Queueing Systems. 2006. V. 54. P. 35–44.
15. *Konheim A.G., Levy H., Srinivasan M.M.* Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems // IEEE Trans. Commun. 1994. V. 42. No. 2–4. P. 1245–1253.
16. *Рыков В.В.* К анализу поллинг-систем // АиТ. 2008. № 6. С. 90–114.
17. *Yechiali U.* Analysis and control of polling systems // Performance Evaluations of Computer and Communication Systems. 1993. P. 630–650.
18. *Hirayama T.* Analysis of multiclass Markovian polling systems with feedback and composite scheduling algorithms // Annals of Operations Research. 2012. V. 198. No. 1. P. 83–123.
19. *Perel E., Perel N., Yechiali U.* A polling system with “Join the shortest – serve the longest” policy // Computers Operations Research. 2019. V. 114. Article No. 104809.
20. *Boon M.A.A., Winands E.M.M.* Heavy-traffic analysis of k -limited polling systems // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2014. V. 28. P. 451–471.
21. *Bekker R., Vis P., Dorsman J.L., van der Mei R.D., Winands E.M.M.* The impact of scheduling policies on the waiting-time distributions in polling systems // Queueing Systems: Theory and Applications. 2015. V. 79. P. 145–172.
22. *Boxma O.J., Groenendijk W.P.* Pseudo conservation laws in cyclic-service systems // Journal of Applied Probability. 1987. V. 24. P. 949–964.

23. IEEE Standard for Information Technology – Telecommunications and Information Exchange between Systems – Local and Metropolitan Area Networks – Specific Requirements – Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications Amendment 3: 320MHz Positioning, 2025.
24. *Vishnevsky V.M., Dudin A.N., Semenova O.V., Klimenok V.I.* Performance analysis of the *BMAP/G/1* queue with gated servicing and adaptive vacations // *Performance Evaluation*. 2011. V. 68. No. 5. P. 446–462.
25. *Vishnevsky V.M., Semenova O.V., Bui D.T.* Investigation of the stochastic polling system and its applications to broadband wireless networks // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 9. P. 1607–1613.
26. *Vishnevsky V.M., Semenova O.V., Bui D.T.* Using a machine learning approach for analysis of polling systems with correlated arrivals // *Lecture Notes in Computer Science*. 2021. V. 13144. P. 336–345.
27. *Vishnevsky V.M., Lyakhov A.I., Guzakov N.N.* An adaptive polling strategy for IEEE 802.11 PCF // *Proceedings of 7th International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications*, Abano Terme, Italy, September 12–15. 2004. V. 1. P. 87–91.
28. *Vishnevsky V., Lyakhov A.* Analytical study of IEEE 802.11 PCF for regional and metropolitan area networks // *Cybernetics and Information Technologies*. 2005. V. 5. No. 2. P. 117–136.
29. *Вишневецкий В., Ляхов А., Портной С., Шахнович И.* Широкополосные беспроводные сети передачи информации. М.: Техносфера, 2005. 592 с.
30. *Leonovich A., Ferng H.-W.* Modeling the IEEE 802.11e HCCA mode // *Wireless Networks*. 2013. V. 19. No. 5. P. 771–783.
31. *Meyfroyt T.M.M., Boon M.A.A., Borst S.C., Boxma O.J.* Performance of large-scale polling systems with branching-type and limited service // *Performance Evaluation*. 2019. V. 133. P. 1–24.
32. *Resing J.A.C.* Polling systems and multitype branching processes // *Queueing Systems*. 1993. V. 13. P. 413–426.
33. *Vishnevsky V.M., Semenova O.V., Nguyen V.H., Dang M.C.* Batch service polling system: mathematical analysis and simulation modeling // *Lecture Notes in Computer Science*. 2024. V. 14123. P. 142–155.
34. *Vishnevsky V.M., Avramenko Y.A., Kalmykov N.S., Nguyen V.H.* Broadband Wireless networks based on tethered high-altitude unmanned platforms // *Communications in Computer and Information Science*. 2024. V. 2129. P. 101–112.
35. *Belmekki B.E.Y., Alouini M.-S.* Unleashing the potential of networked tethered flying platforms: prospects, challenges, and applications // *IEEE Open Journal of Vehicular Technology*. 2022. V. 3. P. 278–320.
36. *Marques M.N., Magalhaes S.A., Dos Santos F.N., Mendonca H.S.* Tethered unmanned aerial vehicles – a systematic review // *Robotics*. 2023. V. 12. No. 4. P. 117.
37. *Zhao W., Zhang J., Li D.* Clustering and beamwidth optimization for UAV-assisted wireless communication // *Sensors*. 2023. V. 23. No. 23. Article No. 9614.
38. *Назаров А.А., Шульгина К.С., Салимзянов Р.Р. и др.* Исследование математической модели беспроводной сети передачи данных в виде циклической системы случайного множественного доступа // *Технологии безопасности жизнедеятельности*. 2023. № 2. С. 58–65.

39. *Nazarov A., Phung-Duc T., Shulgina K., et al.* Cyclic retrial queue for building data transmission networks // Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering. 2023. V. 482. P. 167–179.
40. *Dorsman J.-P.L., Borst S.C., Boxma O.J., et al.* Markovian polling systems with an application to wireless random-access networks // Performance Evaluation. 2015. V. 85–86. P. 33–51.
41. *Liu Z., Chu Y., Wu J.* On the three-queue priority polling system with threshold service policy // Journal of Applied Mathematics and Computing. 2017. V. 53. P. 445–470.
42. *Fiems D., Altman E.* Gated polling with stationary ergodic walking times, Markovian routing and random feedback // Annals of Operations Research. 2012. V. 198. No. 1. P. 145–164.
43. *Ding H., Li C., Bao L., et al.* Research on multi-level priority polling MAC protocol in FPGA tactical data chain // IEEE Access. 2019. V. 7. P. 33506–33516.
44. *Chernova N., Foss S., Kim B.* On the stability of a polling system with an adaptive service mechanism // Annals of Operations Research. 2012. V. 198. P. 125–144.
45. *Moraís D.H.* Wi-Fi 6/6E and Wi-Fi 7 Overview. In: 5G/5G-Advanced, Wi-Fi 6/7, and Bluetooth 5/6. Springer, 2025.
46. *Karamyshev A., Levitsky I., Bankov D., et al.* A Tutorial on Wi-Fi 8: the journey to ultra high reliability // Problems of Information Transmission. 2025. V. 61. P. 164–210.
47. *Rahaman M.* A review on Internet of Things-IoT- architecture, technologies, future applications & challenges // International Journal of Science and Business. 2022. V. 14. No. 1. P. 80–92.
48. *Nguyen D.C., Ding M., Pathirana P.N., et al.* 6G Internet of Things: a comprehensive survey // IEEE Internet of Things Journal. 2022. P. 359–383.
49. *Wei Z., Jia J., Niu Y., Wang L., et al.* Integrated sensing and communication channel modeling: a survey // IEEE Internet of Things Journal. 2025. P. 18850–18864.
50. *Yang Z., Mao L., Ding H., et al.* Research on two-level priority polling access control protocol based on continuous time // 2020 IEEE 6th International Conference on Computer and Communications (ICCC), 136–140, Chengdu, China.
51. *Yang Z., Mao L., Yan B., Wang J., Gao W.* Performance analysis and prediction of asymmetric two-level priority polling system based on BP neural network // Applied Soft Computing. 2021. V. 99. Article No. 106880.
52. *Ar-Reyouchi E.M., Maslouhi I., Ghoumid K.* A new fast polling algorithm in wireless mesh network for narrowband Internet of Things // Telecommunication Systems. 2020. V. 74. No. 3. P. 405–410.
53. *Cao J., Feng W., Chen Y. et al.* Performance analysis of a polling model with BMAP and across-queue state-dependent service discipline // IEEE Access. 2019. V. 7. P. 127230–127253.
54. *Молчанов Д.А., Безишев В.О., Самуйлов К.Е. и др.* Сети 5G/6G: архитектура, технологии, методы анализа и расчета. М.: Российский университет дружбы народов, 2022.
55. *Cudak M., Ghosh A., Ghosh A., et al.* Integrated access and backhaul: A key enabler for 5G millimeter-wave deployments // IEEE Communications Magazine. 2021. V. 59. No. 4. P. 88–94.

56. Gupta M., Rao A., Visotsky E., et al. Learning link schedules in self-backhauled millimeter wave cellular networks // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2020. V. 19. No. 12. P. 8024–8038.
57. 3GPP TR 38.901 V14.1.1. Study on channel model for frequencies from 0.5 to 100 GHz (Release 17).
58. Nikolaev D., Gaidamaka Y. Leaf node polling model analysis in an integrated access and backhaul network / Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM WRQ 2023. Communications in Computer and Information Science. 2023. V. 2163.
59. Бесчастный В.А., Мачнев Е.А., Острикова Д.Ю. и др. Вероятностные характеристики процесса обслуживания пакетов в узле сети IAB // Электросвязь. 2024. № 1. С. 43–46.
60. Nikolaev D., Gorshenin A., Gaidamaka Y. Polling model for analysis of round-trip time in the IAB network // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2024. Lecture Notes in Computer Science. 2025. V. 15460. P. 219–241.
61. Nikolaev D.I., Beschastny V.A., Gaidamaka Y.V. Two-queue polling system as a model of an integrated access and backhaul network node in half-duplex mode // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2024. V. 32. No. 4. P. 362–369.
62. Gaidamaka Yu.V. Model with threshold control for analysing a server with SIP protocol in the overload mode // Automatic Control and Computer Science. 2013. V. 47. P. 211–218.
63. Shorgin S., Samouylov K., Gaidamaka Y., et al. Polling system with threshold control for modeling of SIP server under overload // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2014. V. 240. P. 97–107.
64. Singh V., Kavitha V. Fair opportunistic schedulers for Lossy Polling systems // 2022. arXiv preprint arXiv:2208.05846.
65. Czerniak O., Altman E., Yechiali U. Orchestrating parallel TCP connections: cyclic and probabilistic polling policies // Performance Evaluation. 2012. V. 69(3-4). P. 150–163.
66. Nimisha M., Manoharan M., Krishnamoorthy A. Polling models: a short survey and some new results // Queueing Models and Service Management. 2024. V. 7. No. 1. P. 25–42.
67. Avrachenkov K., Perel E., Yechiali U. Finite-buffer polling system with threshold-based switching policy // TOP. 2016. V. 24. P. 541–571.
68. Jolles A., Perel E., Yechiali U. Alternating server with non-zero switchover times and opposite-queue threshold-based switching policy // Performance Evaluation. 2018. V. 126. P. 22–38.
69. Choi D.I., Lim D.-E. An analytical analysis of Markovian queueing model with an alternating server and state-dependent alternating priority policy // ICIC Express Letters. 2024. V. 18. No. 4. P. 385–391.
70. Miculescu D., Karaman S. Polling-systems-based autonomous vehicle coordination in traffic intersections with no traffic signals // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. V. 65. P. 680–694.

71. *Dudin A., Sinyugina Y.* Analysis of the polling system with two Markovian arrival flows, finite buffers, gated service and phase-type distribution of service and switching times // ITMM 2021. Communications in Computer and Information Science. V. 1605. P. 1–15.
72. *Dudin A., Dudina O.* Analysis of polling queueing system with two buffers and varying service rate // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2024. Lecture Notes in Computer Science. V. 15460. P. 129–143.
73. *Семенова О.В., Лыков С.С.* Применение RFID-технологии для управления работой регулируемых перекрестков / Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2013). М.: ТЕХНОСФЕРА. 2013. P. 318–324.
74. *Абрамян В.Л., Вишневский В.М., Ларионов А.А.* Применение радиочастотной идентификации на транспорте // Проблемы управления. 2024. № 1. С. 3–16.
75. *Ran W., Liu S., Zhang Z.* A polling-based dynamic order-picking system considering priority orders // Complexity. 2020. V. 2020. Article ID 4595316. 15 pages.
76. *Claeys D., Adan I., Bozma O.* Stochastic bounds for order flow times in parts-to-picker warehouses with remotely located order-picking workstations // European Journal of Operational Research. 2016. V. 254. No. 3. P. 895–906.
77. *Kaur M., Bajaj R., Kaur N.* Wireless Body Area Network: performance analysis of polling access MAC protocol // 2021 2nd Global Conference for Advancement in Technology (GCAT). 2021. P. 1–7.
78. *He M., Guan Z., Wu Z., et al.* A polling access control with exhaustive service in wireless body area networks for mobile healthcare using the sleeping schema // Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 2019. V. 10. No. 10. P. 3761–3774.
79. *Wang W., Yang Z., Ding H.* Application of polling scheduling in mobile edge computing // Axioms. 2023. V. 17. No. 7. Article No. 709.
80. *Antunes N., Fricker C., Roberts J.* Stability of multi-server polling system with server limits // Queueing Systems. 2011. V. 68. P. 229–235.
81. *van der Mei R.D., Roubos A.* Polling models with multi-phase gated service // Annals of Operations Research. 2012. V. 198. No. 1. P. 25–56.
82. *Abidini M.A., Bozma O., Resing J.* Analysis and optimization of vacation and polling models with retrials // Performance Evaluation. 2016. V. 98. P. 52–69.
83. *Kavitha V., Altman E.* Continuous polling models and application to ferry assisted WLAN // Annals of Operations Research. 2012. V. 198. P. 185–218.
84. *Bao L., Zhao D., Zhao Y.* A priority-based polling scheduling algorithm for arbitration policy in Network on Chip // Journal of Electronics (China). 2012. V. 29. No. 1–2. P. 120–127.
85. *Ling Y., Liu C., Li Y.* Study on queue strategy of gated polling multi-access communication system // Recent Advances in Computer Science and Information Engineering. Lecture Notes in Electrical Engineering. 2012. V. 124. P. 99–105.
86. *Bozma O.J., Saxena M., Janssen A.* Two queues with time-limited polling and workload-dependent service speeds // Stochastic Models. 2021. V. 37. No. 2. P. 265–299.

87. *Talamali M.S., Saha A., Marshall J.A., Reina A.* When less is more: Robot swarms adapt better to changes with constrained communication // Science Robotics. 2021. V. 6. eabf1416
88. *Yan Z., Zhao K., Li W., et al.* Topology design for GNSSs under polling mechanism considering both inter-satellite links and ground-satellite links // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2022. V. 71. No. 2. P. 2084–2097.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 02.10.2025

После доработки 27.10.2025

Принята к публикации 28.10.2025

© 2026 г. В.И. НИКОНОВ, канд. физ.-мат. наук (nik_vl_@mail.ru)
(Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет им. Н.П. Огарёва, Саранск)

ОБ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Предлагается алгебро-геометрический подход к исследованию устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами относительно части переменных. Предложенный подход устанавливает взаимосвязь условий частичной устойчивости линейной системы с существованием инвариантных подпространств в исходном и сопряженном пространствах. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: частичная устойчивость, минимальный аннулирующий многочлен, инвариантное подпространство, аннулятор.

DOI: 10.7868/S2413977726010024

1. Введение

Как отмечено в [1], интерес к задаче устойчивости по части переменных для линейных систем, по-видимому, возник еще в начале XX-го столетия. К настоящему времени теория устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами практически завершена. Основные этапы развития этой теории отражены в [1–8]. В цикле работ [9–11] по достижению координатного консенсуса в многоагентных системах установлено, что решаемая задача при специальном выборе управляющего воздействия и линейного преобразования фазового пространства приводится к задаче частичной устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами. В [12] рассматривалась задача частичного построения решений, которая, как отмечено авторами, «созвучна» задачам устойчивости [1, 2]. Результаты этих исследований позволяют получить необходимые и достаточные условия устойчивости для выбранных компонент фазового вектора произвольной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Развитием этого алгебраического подхода послужили работы [13, 14].

Анализируя полученные результаты, можно отметить, что основными подходами к исследованию частичной устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами являются метод функций Ляпунова, метод вспомогательных μ -систем и методы, основанные на методах дифференциальной и компьютерной алгебры. Критерий устойчивости линейных систем получен

в [2] и сформулирован в терминах μ -систем. Другой критерий устойчивости в [15] опирается на жорданову нормальную форму линейного оператора, заданного матрицей системы в исходном базисе пространства. В [16] отмечена геометрическая природа частичной устойчивости. Геометрический подход исследования частичной устойчивости предложен в [17, 18].

Данная статья посвящена исследованию устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами. С использованием алгебро-геометрических свойств исходной системы получены необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем, выраженные в терминах двойственных линейных пространств, на которых действуют двойственные линейные операторы. Оказывается, если при определенных условиях некоторые параметры исследуемой системы лежат в инвариантном подпространстве одного из линейных операторов, то задача частичной устойчивости разбивается на две более простые задачи. Полученные результаты устанавливают связь устойчивости системы с внутренней геометрией в пространстве параметров, определяющих динамику исследуемой системы. Геометрические свойства системы позволяют получить условия, при выполнении которых возникает свойство инвариантности по отношению к свойству частичной устойчивости.

2. Постановка задачи

Исследуется устойчивость относительно заданной части компонент фазового вектора системы

$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = A_* x(t),$$

где x – n -мерный фазовый вектор, A_* – $n \times n$ постоянная матрица с элементами из числового поля $\mathbb{F}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Предположим, что исследуется устойчивость по первым m компонентам фазового вектора x системы (1). Обозначим первую группу координат фазового вектора через вектор y , а остальные компоненты составят вектор z . В связи с этим систему (1) представим в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + Bz(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= Cy(t) + Dz(t), \end{aligned}$$

где $y \in \mathbb{F}^m$, $z \in \mathbb{F}^p$, $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m \times p}$, $C \in \mathbb{F}^{p \times m}$, $D \in \mathbb{F}^{p \times p}$, $n = m + p$, $p > 0$.

Требуется определить условия на коэффициенты исследуемой системы так, чтобы решение $x(t) \equiv 0$ системы (1), (2) было устойчивым по компонентам, входящим в вектор y , т.е. y -устойчивым.

3. Некоторые сведения из линейной алгебры

3.1. Сопряженное пространство. Двойственные пространства.

Аннуляторы

Пусть $\mathcal{V}$ – произвольное линейное пространство над полем $\mathbb{F}$.

Определение 1 [19, с. 33]. Функция $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$ называется линейным функционалом, если она является гомоморфизмом линейных пространств, т.е. если

$$\xi(\nu_1 + \nu_2) = \xi(\nu_1) + \xi(\nu_2)$$

и

$$\xi(k\nu) = k\xi(\nu)$$

$\forall \nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{V}, \forall k \in \mathbb{F}$. Линейные функционалы называются также коекторами пространства $\mathcal{V}$.

Множество всех линейных функционалов представляет собой подпространство пространства всех функций на $\mathcal{V}$ и обозначается через $\mathcal{V}'$.

Линейные функционалы называются также коекторами пространства $\mathcal{V}$.

Определение 2 [19, с. 33]. Линейное пространство $\mathcal{V}'$ называется пространством, сопряженным пространству $\mathcal{V}$.

Базис $e^1, \dots, e^n$ пространства $\mathcal{V}'$, удовлетворяющий соотношению

$$e^j(e_i) = \delta_i^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

называется сопряженным или двойственным базису $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathcal{V}$, где δ_i^j – символ Кронекера.

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ – два линейных пространства над полем $\mathbb{F}$. Предположим, что любым двум векторам $\nu \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}$ сопоставлено такое число $\nu \mapsto \langle \nu, w \rangle \in \mathbb{F}$, что выполнены следующие условия:

- а) для каждого фиксированного $w \in \mathcal{W}$ функция $\nu \mapsto \langle \nu, w \rangle$ является линейным функционалом на $\mathcal{V}$;
- б) для каждого фиксированного $\nu \in \mathcal{V}$ функция $w \mapsto \langle \nu, w \rangle$ является линейным функционалом на $\mathcal{W}$;
- в) для каждого вектора $\nu \in \mathcal{V}$ существует такой вектор $w \in \mathcal{W}$, что $\langle \nu, w \rangle \neq 0$, и наоборот, для каждого вектора $w \in \mathcal{W}$ существует такой вектор $\nu \in \mathcal{V}$, что $\langle \nu, w \rangle \neq 0$.

Определение 3 [19, с. 36]. Функция $\nu, w \mapsto \langle \nu, w \rangle$, удовлетворяющая условиям а), б) и в), называется спариванием между пространствами $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$. Пространства $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$, для которых существует хотя бы одно спаривание, называются двойственными. Обозначение: $\mathcal{V}|\mathcal{W}$.

Предложение 1 [19, с. 36]. Линейное пространство $\mathcal{V}$ двойственно сопряженному пространству $\mathcal{V}'$:

$$\mathcal{V}|\mathcal{V}'.$$

Полагая для любых $\nu \in \mathcal{V}$ и $\varphi \in \mathcal{V}'$

$$\langle \nu, \varphi \rangle := \varphi(\nu),$$

убеждаемся, что указанное соотношение определяет спаривание пространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$.

Пусть $S \subset \mathcal{V}$ – произвольное подмножество линейного пространства $\mathcal{V}$.

Определение 4 [19, с. 40]. Совокупность всех линейных функционалов $\xi \in \mathcal{V}'$, равных нулю на любом векторе $\nu \in S$, называется аннулятором множества S и обозначается символом $\text{Ann}(S)$.

Теорема 1 [20, с. 41]. Если $\mathcal{M}$ – m -мерное подпространство n -мерного векторного пространства $\mathcal{V}$, то $\text{Ann}(\mathcal{M})$ есть $(n - m)$ -мерное подпространство пространства $\mathcal{V}'$.

Теорема 2 [20, с. 42]. Если $\mathcal{M}$ – подпространство конечномерного векторного пространства $\mathcal{V}$, то $\text{Ann}(\text{Ann}(\mathcal{M})) = \mathcal{M}$.

Приведем основные свойства аннуляторов:

1) Если $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ – подмножества векторного пространства и $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, то $\text{Ann}(\mathcal{J}) \subset \text{Ann}(\mathcal{I})$.

2) Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – подпространства конечномерного векторного пространства, то

$$\text{Ann}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \text{Ann}(\mathcal{M}) + \text{Ann}(\mathcal{N}), \quad \text{Ann}(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \text{Ann}(\mathcal{M}) \cap \text{Ann}(\mathcal{N}).$$

3) $\dim \mathcal{M} + \dim \text{Ann}(\mathcal{M}) = \dim \mathcal{V}$.

3.2. Циклические инвариантные подпространства

Рассмотрим n -мерное векторное пространство $\mathcal{V}$ над некоторым полем $\mathbb{F}$ и линейный оператор $\mathcal{A}$ в этом пространстве.

Определение 5 [21, с. 68]. Говорят, что многочлен $f(t)$ аннулирует линейный оператор $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Нормализованный многочлен минимальной степени, аннулирующий $\mathcal{A}$, называется минимальным многочленом оператора $\mathcal{A}$.

Обозначим минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$ в виде

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^m + \mu_m t^{m-1} + \cdots + \mu_2 t + \mu_1.$$

Пусть вектор $x \in \mathcal{V}$. Многочлен $f(t)$, удовлетворяющий соотношению

$$f(\mathcal{A})x = 0,$$

называется аннулирующим многочленом вектора x , а многочлен наименьшей степени, аннулирующий вектор x , называется минимальным аннулирующим многочленом вектора x .

Если $f(t) = t^k + \alpha_k t^{k-1} + \dots + \alpha_2 t + \alpha_1$ – минимальный аннулирующий многочлен вектора x , то линейное подпространство с базисом

$$x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{k-1}x$$

называется циклическим подпространством относительно линейного оператора $\mathcal{A}$.

4. Основные результаты

Зафиксируем некоторое числовое поле $\mathbb{F}$. Будем исследовать частичную устойчивость системы (1), (2) над выбранным полем.

Очевидно, что свойство y -устойчивости системы (2) является инвариантным относительно z -преобразований вида $z = S\bar{z}$, где $S \in \mathbb{F}^{p \times p}$ – постоянная невырожденная матрица, т.е. это свойство не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbb{F}^p$. Используя алгебро-геометрические свойства исследуемой системы, постараемся выбрать базис в фазовом подпространстве переменных $z_1, \dots, z_p$ так, чтобы получить желаемые условия устойчивости.

Проведя невырожденную замену z -переменных, получаем эквивалентную относительно свойства частичной устойчивости систему дифференциальных уравнений:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + BS\bar{z}(t), \\ \frac{d\bar{z}(t)}{dt} &= S^{-1}Cy(t) + S^{-1}DS\bar{z}(t). \end{aligned}$$

В связи с вышесказанным рассмотрим линейный оператор $\mathcal{D} : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^p$ и соответствующий сопряженный оператор $\mathcal{D}^*$, действующий в сопряженном пространстве $\mathbb{F}^{p*}$ линейных функционалов на пространстве $\mathbb{F}^p$. При этом имеет место соотношение:

$$\langle \mathcal{D}s, \psi \rangle = \langle s, \mathcal{D}^*\psi \rangle = \psi(\mathcal{D}s) \quad \forall s \in \mathbb{F}^p, \forall \psi \in \mathbb{F}^{p*}.$$

Введем в рассмотрение линейные функционалы $b_i^* = b_i(s) \in \mathbb{F}^{p*}$, $i = 1, \dots, m$, и построим инвариантные циклические подпространства относительно линейного оператора $\mathcal{D}^*$ с образующими b_i^* , ($i = 1, \dots, m$):

$$\begin{aligned} U_1^* &= \text{span} \left(b_1^*, \mathcal{D}^*b_1^*, \dots, \mathcal{D}^{*k_1-1}b_1^* \right), \\ &\dots\dots\dots \\ U_i^* &= \text{span} \left(b_i^*, \mathcal{D}^*b_i^*, \dots, \mathcal{D}^{*k_i-1}b_i^* \right), \\ &\dots\dots\dots \\ U_m^* &= \text{span} \left(b_m^*, \mathcal{D}^*b_m^*, \dots, \mathcal{D}^{*k_m-1}b_m^* \right). \end{aligned}$$

Таким образом, имеют место соотношения:

$$\mathcal{D}^*U_i^* \subseteq U_i^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Предложение 2. Линейные подпространства $W_i^ = U_1^* + \dots + U_i^*$, $i = 1, \dots, m$, являются инвариантными подпространствами линейного оператора $\mathcal{D}^*$.*

Таким образом,

$$\mathcal{D}^*(U_1^* + \dots + U_i^*) \subseteq U_1^* + \dots + U_i^*, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Очевидно, имеет место последовательность включений подпространств:

$$\{0\} \subseteq U_1^* \subseteq U_1^* + U_2^* \subseteq \dots \subseteq U_1^* + U_2^* + \dots + U_m^* \subseteq \mathbb{F}^{p*}.$$

Но с учетом инвариантности будет справедлива и цепочка включений:

$$\mathcal{D}^*\{0\} \subseteq \mathcal{D}^*U_1^* \subseteq \mathcal{D}^*(U_1^* + U_2^*) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{D}^*(U_1^* + U_2^* + \dots + U_m^*) \subseteq \mathcal{D}^*\mathbb{F}^{p*}.$$

Используя свойства аннуляторов, имеем:

$$\begin{aligned} \text{Ann}(\{0\}) &\supseteq \text{Ann}(U_1^*) \supseteq \text{Ann}(U_1^* + U_2^*) \supseteq \dots \\ &\dots \supseteq \text{Ann}(U_1^* + U_2^* + \dots + U_m^*) \supseteq \text{Ann}(\mathbb{F}^{p*}). \end{aligned}$$

Последнюю цепочку включений можно представить в виде

$$\mathbb{F}^p \supseteq \text{Ann}(U_1^*) \supseteq \cap_{i=1}^2 \text{Ann}(U_i^*) \supseteq \dots \supseteq \cap_{i=1}^m \text{Ann}(U_i^*) \supseteq \{0\}.$$

Таким образом, справедливы включения:

$$\mathcal{D}^*(U_1^* + \dots + U_i^*) \subseteq U_1^* + \dots + U_i^*, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Теорема 3. Подпространство $\sum_{i=1}^m U_i^$ является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{D}^*$, $\dim \left(\sum_{i=1}^m U_i^* \right) = k \Leftrightarrow \cap_{i=1}^m \text{Ann}(U_i^*)$ – инвариантное подпространство оператора $\mathcal{D}$, $\dim(\cap_{i=1}^m \text{Ann}(U_i^*)) = p - k$.*

Следствие 1. $\sum_{i=1}^m U_i^ = \mathbb{F}^{p*} \Leftrightarrow \cap_{i=1}^m \text{Ann}(U_i^*) = \{0\}$.*

Предложение 3. $\dim \left(\sum_{i=1}^m U_i^ \right) = \text{rang}(B, BD, \dots, BD^{p-1})$.*

Теорема 4 (теорема о приводимости). Если $\dim(\cap_{i=1}^m \text{Ann}(U_i^)) = k < p$, то существует невырожденное преобразование $z = S\bar{z}$, приводящее систему (2) к виду*

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + \bar{B}_{11}\bar{z}_1(t), \\ \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} &= \bar{C}_1y(t) + \bar{D}_{11}\bar{z}_1(t), \\ \frac{d\bar{z}_2(t)}{dt} &= \bar{C}_2y(t) + \bar{D}_{21}\bar{z}_1(t) + \bar{D}_{22}\bar{z}_2(t), \end{aligned}$$

где $\bar{z}_1 \in \mathbb{F}^k$, $\bar{z}_2 \in \mathbb{F}^{p-k}$.

Теорема 5 (двойственная теорема о приводимости).

Если $\dim(\sum_{i=1}^m U_i^*) = p - k > 0$, то существует невырожденное преобразование $\bar{z} = Wz$, приводящее систему (2) к виду (4).

Теорема 6 (о частичной устойчивости). Пусть выполнены условия теоремы 4. Для того чтобы система (1) была устойчива относительно первых t компонент фазового вектора x , необходимо и достаточно, чтобы система

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + \bar{B}_{11}\bar{z}_1(t), \\ \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} &= \bar{C}_1y(t) + \bar{D}_{11}\bar{z}_1(t) \end{aligned}$$

была устойчива относительно всех переменных.

В некоторых частных случаях исследование частичной устойчивости системы (1) можно упростить.

Предложение 4. Если дополнительно к условиям теоремы 5 выполнено условие

$$\text{im } C \subseteq \text{Ann} \left(\sum_{i=1}^m U_i^* \right),$$

то система (2) приводима к виду

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + \bar{B}_{11}\bar{z}_1(t), \\ \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} &= \bar{D}_{11}\bar{z}_1(t), \\ \frac{d\bar{z}_2(t)}{dt} &= \bar{C}_2y(t) + \bar{D}_{21}\bar{z}_1(t) + \bar{D}_{22}\bar{z}_2(t), \end{aligned}$$

а вопрос y -устойчивости сводится к исследованию устойчивости системы

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + \bar{B}_{11}\bar{z}_1(t), \\ \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} &= \bar{D}_{11}\bar{z}_1(t). \end{aligned}$$

Доказательства теорем и предложений даны в Приложении.

Замечание 1. При выполнении условий предложения 4 задача исследования частичной устойчивости сводится к исследованию устойчивости двух систем меньшего порядка. Подпространство $\text{Ann}(U^*)$ является инвариантным подпространством относительно y -устойчивости в том смысле, что свойство y -устойчивости сохраняется при любом выборе матрицы C , столбцы которой являются произвольными векторами из подпространства $\text{Ann} \left(\sum_{i=1}^m U_i^* \right)$. Вообще говоря, малые вариации параметров системы (2) могут приводить к нарушению свойства частичной устойчивости.

Замечание 2. Отметим, что предложенный подход позволяет исследовать характер устойчивости любой компоненты фазового вектора исследуемой системы. Достаточно в системе исследуемую компоненту обозначить через y , а остальные компоненты составят вектор z . Таким образом реализуется алгоритм решения задачи исключения переменных, предложенной в [22].

5. Пример

Пусть исследуемая система имеет следующие исходные данные:

$$y \in \mathbb{R}^2, \quad z \in \mathbb{R}^4, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad B \in \mathbb{R}^{2 \times 4}, \quad C \in \mathbb{R}^{4 \times 2}, \quad D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad n = 6, p = 4,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & -23 & -46 & 8 \\ -3 & 5 & 22 & 16 \\ -6 & -2 & -10 & -4 \\ -15 & 19 & 38 & -10 \end{pmatrix}.$$

Исходя из данных задачи рассматриваем линейное пространство $\mathbb{R}^4$ и соответствующее сопряженное линейное пространство $\mathbb{R}^{4*}$, в которых действуют линейные операторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ соответственно.

Ковекторы $b_1^* = -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4$ и $b_2^* = \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$ являются образующими векторами инвариантных циклических подпространств относительно линейного оператора $\mathcal{D}^*$.

Соответствующие подпространства – линейные оболочки своих базисов – имеют вид:

$$U_1^* = \text{span}(-\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4, 6\xi_1 - 14\xi_2 - 28\xi_3 + 20\xi_4),$$

$$U_2^* = \text{span}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, -20\xi_2 - 34\xi_3 + 20\xi_4, -36\xi_1 + 348\xi_2 + 660\xi_3 - 384\xi_4).$$

Минимальные аннулирующие многочлены ковекторов b_1^* и b_2^* имеют соответственно вид

$$\mu_1(t) = t^2 + 24t + 108, \quad \mu_2(t) = t^3 + 30t^2 + 252t + 648.$$

При этом $\dim U_1^* = 2$, $\dim U_2^* = 3$, $\dim (U_1^* + U_2^*) = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^{4*}$.

$$\text{Ann}(U_1^* + U_2^*) : \begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4 = 0, \\ 6\xi_1 - 14\xi_2 - 28\xi_3 + 20\xi_4 = 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -20\xi_2 - 34\xi_3 + 20\xi_4 = 0, \\ -36\xi_1 + \xi_2 + 660\xi_3 - 384\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Решая однородную систему линейных уравнений, находим базис пространства решений:

$$\text{Ann}(U_1^* + U_2^*) = \text{span}(-1, 1, 0, 1).$$

Выбирая базис подпространства $U_1^* + U_2^*$, частично согласованный с базами подпространств U_1^* и U_2^* ,

$$e^1 = -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4, \quad e^2 = 6\xi_1 - 14\xi_2 - 28\xi_3 + 20\xi_4, \quad e^3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

и дополняя его до базиса всего пространства $\mathbb{R}^{4*}$ ковектором $e^4 = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_4$, получаем соответствующий двойственный базис пространства $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = (1/4, 9/4, -5/2, -2), \quad e_2 = (1/24, 5/24, -1/4, -1/6), \\ e_3 = (2/3, 4/3, -1, -2/3), \quad e_4 = (-1/3, 1/3, 0, 1/3).$$

Тогда матрица перехода S от исходного базиса к новому имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/24 & 2/3 & -1/3 \\ 9/4 & 5/24 & 4/3 & 1/3 \\ -5/2 & -1/4 & -1 & 0 \\ -2 & -1/6 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора $\mathcal{D}$ в новом базисе принимает вид

$$D_e = S^{-1}DS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -108 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ -162 & -35/2 & -60 & 24 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

В результате перехода к новому базису с помощью невырожденного преобразования $z = S\bar{z}$ приходим к системе:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{z}(t), \\ \frac{d\bar{z}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -108 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ -162 & -35/2 & -60 & 24 \end{pmatrix} \bar{z}(t),$$

где $y \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^4$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$, $D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $n = 6$, $p = 4$.

Таким образом, исходная задача разбивается на две более простые подзадачи: исследование устойчивости двух систем

$$\frac{dy(t)}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} y(t) \text{ и } \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -108 & -24 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \bar{z}_1(t).$$

При этом для второй системы характеристический многочлен имеет вид

$$\chi(t) = (-6 - t)\mu_1(t) = -\mu_2(t),$$

который является устойчивым. Таким образом, для y -устойчивости необходима и достаточна устойчивость первой системы.

6. Заключение

Предложен алгебро-геометрический подход к исследованию частичной устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами, позволяющий выяснить условия устойчивости y -компонент фазового вектора путем «поворота» фазового подпространства z -компонент. Благодаря использованию геометрических свойств этого подпространства, получены условия, при выполнении которых анализ устойчивости сводится к решению двух задач меньшей размерности. Показано, что при этом система обладает некоторыми свойствами инвариантности по отношению к свойству частичной устойчивости. Предлагаемый подход можно применить к исследованию устойчивости линейных дискретных систем и систем с запаздывающим аргументом, а также к решению задач с полиустойчивостью.

Дальнейшие направления исследований возможно проводить в областях частичной управляемости и стабилизации линейных систем, а также в области распространения данного подхода к исследованию задач частичной устойчивости линейных нестационарных систем и нелинейных систем дифференциальных уравнений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 2. Пусть $\forall w_i^* = u_1^* + \dots + u_i^* \in W_i^* = U_1^* + \dots + U_i^*$. Так как $\mathcal{D}^* u_i \in U_i$ ($\forall i = 1, \dots, m$) в силу инвариантности подпространств U_i^* , то $\mathcal{D}^* w_i = \mathcal{D}^* (u_1 + \dots + u_i) = \mathcal{D}^* u_1 + \dots + \mathcal{D}^* u_i \in U_1^* + \dots + U_i^* = W_i^*$ ($\forall i = 1, \dots, m$). Таким образом, W_i ($\forall i = 1, \dots, m$) – инвариантные подпространства оператора $\mathcal{D}^*$. Предложение 2 доказано.

Доказательство предложения 3. Доказательство следует из изоморфизма двух двойственных линейных пространств L и L^* , а также из свойств аннуляторов. Действительно, так как справедливо соотношение

$$\text{Ann} \left(\sum_{i=1}^m U_i^* \right) = \cap_{i=1}^m \text{Ann} (U_i^*),$$

то в исходных двойственных базисах аннулятор представим в виде

$$\text{Ann} \left(\sum_{i=1}^m U_i^* \right) : \begin{cases} B\xi = 0, \\ BD\xi = 0, \\ \dots \\ BD^{p-1}\xi = 0. \end{cases}$$

Но тогда

$$\dim \text{Ann} \left(\sum_{i=1}^m U_i^* \right) = \dim \mathbb{F}^{p*} - \text{rang}(B, BD, \dots, BD^{p-1}).$$

С другой стороны, справедливо соотношение

$$\dim \sum_{i=1}^m U_i^* + \dim \text{Ann} \left(\sum_{i=1}^m U_i^* \right) = \dim \mathbb{F}^{p*},$$

Учитывая два последних соотношения, имеем

$$\dim \sum_{i=1}^m U_i^* = \text{rang}(B, BD, \dots, BD^{p-1}).$$

Предложение 3 доказано.

Доказательство теоремы 3. Докажем необходимость. Из предложения 2 следует, что $W^* = \sum_{i=1}^m U_i^*$ – инвариантное подпространство относительно оператора $\mathcal{D}^*$. Пусть $\forall w^* \in W^*, \forall w \in \text{Ann}(W^*) \Leftrightarrow \langle w, w^* \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathcal{D}w, w^* \rangle = \langle w, \mathcal{D}^*w^* \rangle = 0$, так как $\mathcal{D}^*w^* \in W^*$. Но тогда $\mathcal{D}w \in \text{Ann}(W^*)$. Так как $\dim(W^*) + \dim(\text{Ann}(W^*)) = k + \dim(\text{Ann}(W^*)) = p$, то $\dim(\text{Ann}(W^*)) = p - k$. Наконец, так как $\text{Ann}(W^*) = \text{Ann}(\sum_{i=1}^m U_i^*) = \cap_{i=1}^m \text{Ann}(U_i^*)$, то необходимость доказана.

Доказательство достаточности получается дословным повторением необходимости при условии, что при доказательстве нужно двигаться в обратном направлении, т.е. двигаться с конца доказательства к его началу. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $U^* = \sum_{i=1}^m U_i^*$, $\dim U^* = p - k > 0$. Таким образом $U^* = \text{span}(e^1, \dots, e^{p-k})$ и $e^1, \dots, e^{p-k}$ базис этого подпространства. Дополним эту систему векторов до базиса пространства $\mathbb{F}^{p*}$ с помощью векторов $e^{p-k+1}, \dots, e^p$. Этому базису в пространстве $\mathbb{F}^p$ соответствует двойственный базис $e_1, \dots, e_p$. Так как по предложению 2 следует, что $\sum_{i=1}^m U_i^*$ – инвариантное подпространство относительно оператора $\mathcal{D}^*$, то имеем $\forall u^* \in U^* \Rightarrow \mathcal{D}^*u^* \in U^* \Rightarrow \langle \mathcal{D}v, u^* \rangle = \langle v, \mathcal{D}^*u^* \rangle = u(\mathcal{D}v) \quad \forall u \in \mathbb{F}^p, \forall u^* \in \mathbb{F}^{p*}$. Тогда

$$\langle \mathcal{D}e_j, e^i \rangle = \langle e_j, \mathcal{D}^*e^i \rangle = e^i(\mathcal{D}e_j) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p - k, \quad j = p - k + 1, \dots, p.$$

Но это значит, что линейный оператор $\mathcal{D}$ имеет инвариантное подпространство $\text{Ann}(U^*) \subseteq \mathbb{F}^p$. Поэтому в выбранном базисе матрица линейного оператора $\mathcal{D}$ принимает вид

$$D_e = \begin{pmatrix} \overline{D}_{11} & 0 \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} \end{pmatrix}.$$

Остается построить матрицу невырожденного преобразования. Так как аннуляторы подпространств U_i^* представимы в виде множества однородных линейных систем

$$\text{Ann}(U_i^*) \ (i = 1, \dots, m) : \begin{cases} b_i \xi = 0, \\ b_i D \xi = 0, \\ \dots \\ b_i D^{k_i-1} \xi = 0, \end{cases}$$

то подпространство $\cap_{i=1}^m \text{Ann}(U_i^*)$ представимо в виде

$$(П.1) \quad \begin{cases} B \xi = 0, \\ BD \xi = 0, \\ \dots \\ BD^{p-1} \xi = 0. \end{cases}$$

Найдя фундаментальную систему решений однородной системы (П.1) $\xi_1, \dots, \xi_{p-k}$ и дополнив ее до базиса пространства $\mathbb{F}^p$ системой векторов $\nu_1, \dots, \nu_k$, получаем искомую матрицу преобразования:

$$S = (\nu_1, \dots, \nu_k, \xi_1, \dots, \xi_{p-k}).$$

Проведем в системе (2) замену переменных $z = S\overline{z}$. При этом система (3) принимает вид (4). Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть $U^* = \sum_{i=1}^m U_i^*$, $\dim U^* = p - k > 0$. Таким образом, $U^* = \text{span}(e^1, \dots, e^{p-k})$ и $e^1, \dots, e^{p-k}$ – базис этого подпространства. Дополним эту систему векторов до базиса пространства $\mathbb{F}^{p^*}$ с помощью векторов $e^{p-k+1}, \dots, e^p$. Тогда согласно предложению 2 следует, что U^* – инвариантное подпространство относительно оператора $\mathcal{D}^*$. Поэтому матрица линейного оператора $\mathcal{D}^*$ в выбранном базисе имеет вид

$$D_e^* = W^{-1} D^* W = \begin{pmatrix} \overline{D}_{11}^* & \overline{D}_{12}^* \\ 0 & \overline{D}_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Но тогда сопряженный оператор $\mathcal{D} = (D^*)^*$ в двойственном базисе принимает вид

$$D = (D_e^*)^T = (W^{-1} D^* W)^T = W^T (D^*)^T W^{-T} = \begin{pmatrix} \overline{D}_{11} & 0 \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\overline{D}_{ij} = \overline{D}_{ij}^{*T}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Откуда $S = W^{-T} \Rightarrow W = S^{-T}$. Искомое невырожденное преобразование равно $\bar{z} = Wz$.

Проведя в системе (2) замену $z = W^{-1}\bar{z}$, приходим к системе (4). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Согласно теореме 4 существует преобразование, приводящее систему (2) к виду (4). При этом найденное преобразование сохраняет свойство y -устойчивости. В результате выделяется подсистема $(m + p - k)$ -го порядка. Согласно следствию 1 для полученной подсистемы выполняется соотношение $\sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* = \mathbb{R}^{p-k*}$. Таким образом, $\text{rang}(\bar{B}_{11}, \bar{B}_{11}\bar{D}_{11}, \dots, \bar{B}_{11}\bar{D}_{11}^{p-k-1}) = p-k$. Так как порядок полученной подсистемы 5 равен $m + p - k$, то по следствию 1.1.2 [4, с. 38] получаем, что это условие является одновременно необходимым и достаточным для y -устойчивости системы (2). Теорема 6 доказана.

Доказательство предложения 4. Пусть выполнены условия теоремы 6 и дополнительно $\text{im } C \subseteq \text{Ann}(\sum_{i=1}^m U_i^*)$. Тогда

$$(П.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} BC = 0, \\ BDC = 0, \\ \dots \\ BD^{p-1}C = 0. \end{array} \right.$$

В результате в системе (5) матрица $\bar{C}_1 = 0$. Предложение 4 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.
2. *Воротников В.И., Прокопьев В.П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем. // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 268–271.
3. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.
4. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991.
5. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959.
6. *Мартынюк А.А., Чернецкая Л.Н.* О полиустойчивости линейных автономных систем // Докл. АН Украины. 1993. № 8. С. 17–19.
7. *Озиранер А.С.* Об исследовании устойчивости по части переменных при помощи квадратичных форм // Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 163–167.
8. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

9. *Chen Y., Qu X., Dai G., Aleksandrov A. Y.* Linear-transformation-based analysis and design of state consensus for multi-agent systems with state observers // J. Franklin Institute. 2015. V. 352. No. 9. P. 3447–3457.
10. *Chen Y., Qu X., Aleksandrov A. Y., Dai G.* Consensus of heterogeneous linear multi-agent systems: Linear-transformation-based partial stability approach // Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2017. V. 39. No. 11. P. 1623–1630.
11. *Chen Y., Xu G., Zhan J.* Leader-following consensus of heterogeneous linear multi-agent systems: New results based on linear transformation method // Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2021. V. 44(7). No. 7. P. 1473–1483.
12. *Абрамов С.А., Бронштейн М.* Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 2. С. 229–241.
13. *Панферов А.А.* Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных // Программирование. 2015. № 2. С. 26–36.
14. *Панферов А.А.* Сателлитные неизвестные в неприводимых дифференциальных системах // Программирование. 2018. № 2. С. 42–50.
15. *Чудинов К.М.* Критерий устойчивости по части переменных автономной системы дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 4. С. 67–72.
16. *Чудинов К.М.* О геометрической природе частичной и условной устойчивости // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 76–85.
17. *Никонов В. И.* Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журн. Средневолж. мат. об-ва. 2011. Т. 13. № 2. С. 95–99.
18. *Никонов В.И.* К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журн. Средневолж. мат. об-ва. 2021. Т. 23. № 1. С. 43–57.
19. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.
20. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.
21. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2000.
22. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 11.03.2025

После доработки 08.07.2025

Принята к публикации 23.07.2025

Нелинейные системы

© 2026 г. В.М. АБДУЛЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук (vaqif_ab@rambler.ru)
(Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку;
Институт математики, Баку;
Азербайджанский университет архитектуры и строительства, Баку),
В.А. ГАШИМОВ, канд. физ.-мат. наук (vugarhashimov@gmail.com)
(Институт математики, Баку)

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА СТЕРЖНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕКУЩЕЙ И ПРОШЕДШЕЙ ВО ВРЕМЕНИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Рассматривается задача оптимального граничного управления с обратной связью процессом нагрева стержня. На стержне размещаются устройства, осуществляющие замеры текущих значений температуры. Для формирования краевого управления предложена линейная зависимость его значения от замеренных значений температуры как в текущий, так и в прошедшие моменты времени. Участвующие в этой зависимости постоянные во времени коэффициенты являются оптимизируемыми параметрами обратной связи. В результате задача управления с обратной связью формулируется как задача параметрического оптимального управления объектом с распределенными параметрами. Для определения оптимальных значений оптимизируемых параметров получены формулы для компонентов градиента целевого функционала. Эти формулы позволяют использовать для определения параметров эффективные методы конечномерной оптимизации первого порядка. Приведены численные результаты компьютерных экспериментов, проведен их анализ.

Ключевые слова: граничное управление, нагрев стержня, обратная связь, точка замера, параметры обратной связи, градиент функционала.

DOI: 10.7868/S2413977726010035

1. Введение

В данной работе исследуется задача оптимального управления краевым условием процесса нагрева стержня. Обратная связь осуществляется за счет замеров температуры во внутренних точках стержня, значения которых используются для формирования текущего значения краевого управления. Особенность рассматриваемой в данной работе обратной связи заключается в том, что зависимость значения краевого управления включает замеренные значения температуры в точках замера как в текущий, так и в прошедший моменты времени. В этом случае задача синтеза краевого управления приводится к определению оптимальных значений коэффициентов, участвующих

в зависимости значения краевого управления от замеренных значений температуры в точках замера.

Отметим, что число публикаций, посвященных исследованию, а тем более численному решению задач оптимального управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями с частными производными [1–4], существенно уступает числу публикаций, связанных с задачами управления системами с сосредоточенными параметрами [5–9]. Это объясняется сложностью исследования и численного решения краевых задач, описываемых системами дифференциальных уравнений с частными производными, а также и сложностью реализации систем управления на объектах с распределенными параметрами [10–12]. Развитие измерительных средств, средств телемеханики, компьютерных технологий, методов вычислительной математики в последние десятилетия позволило разрабатывать и внедрять системы управления и регулирования с обратной связью сложными техническими объектами и технологическими процессами как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами в реальном масштабе времени [13–18].

Отметим, что предлагаемый в данной работе подход к управлению с обратной связью процессом нагрева стержня с использованием предыстории проведенных измерений, конечно, более трудоемкий для реализации, чем с использованием только текущих значений замеров. Но с учетом современного развития состояния технических средств реализация таких систем уже стала вполне реальной.

Полученные в работе формулы для компонентов градиента целевого функционала по параметрам обратной связи позволяют использовать для определения оптимальных значений параметров эффективные численные методы и пакеты прикладных программ по конечномерной оптимизации первого порядка [5, 19]. В работе приводятся результаты компьютерных экспериментов, полученные при решении тестовых задач краевого управления с обратной связью. Проведен анализ полученных численных результатов.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального граничного управления (регулирования) процессом нагрева стержня, подогреваемого с одного конца. Температура в точках стержня описывается следующим дифференциальным уравнением параболического типа:

$$(2.1) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \mu_1 [\theta - u(x, t)],$$

$$(x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, t_f],$$

с начальным условием

$$(2.2) \quad u(x, t) = \gamma(x; \varphi), \quad \varphi = \text{const} \in \mathbb{R}^m, \quad x \in (0, l), \quad t \leq 0,$$

и краевыми условиями

$$(2.3) \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\mu_2(\vartheta(t) - u(0, t)), \quad 0 \leq t \leq t_f,$$

$$(2.4) \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = \mu_2(\theta - u(l, t)), \quad 0 \leq t \leq t_f.$$

Здесь: $u(x, t)$ – непрерывно дифференцируемая по $t \in (0, t_f]$ и дважды непрерывно дифференцируемая по $x \in (0, l)$ функция, определяющая температуру стержня в момент времени $t \in [0, t_f]$ в точке $x \in [0, l]$; l – длина стержня; t_f – время окончания процесса нагрева; θ – постоянная во времени температура внешней среды, заданная не точно, а определенная множеством Θ возможных значений θ и функцией плотности распределения $\rho_\Theta(\theta)$ такой, что

$$\rho_\Theta(\theta) \geq 0, \quad \int_{\Theta} \rho_\Theta(\theta) d\theta = 1;$$

μ_1, μ_2 – заданные коэффициенты теплообмена между стержнями и внешней средой.

Согласно условию (2.2) температура в точках стержня до начала процесса нагрева определена известной параметрически заданной функцией $\gamma(x; \varphi)$. Она зависит от постоянного во времени m -мерного вектора параметров φ , значения которого точно не заданы, но известно множество Φ возможных значений параметров φ и функция плотности распределения $\rho_\Phi(\varphi)$ такая, что

$$(2.5) \quad \rho_\Phi(\varphi) \geq 0, \quad \int_{\Phi} \rho_\Phi(\varphi) d\varphi = 1.$$

В частности, возможно, что начальная температура постоянна по длине стержня, т.е. $\gamma(x; \varphi) = \varphi \in \Phi \in R$.

Множества Θ и (или) Φ могут быть заданы как конечные множества

$$\Theta = \{\theta_i : i = 1, \dots, N_\theta\}, \quad \Phi = \{\varphi_j : j = 1, \dots, N_\varphi\}$$

с заданными значениями вероятностей для их элементов:

$$p_i^\theta = p(\theta = \theta_i), \quad p_j^\varphi = p(\varphi = \varphi_j), \quad i = 1, \dots, N_\theta, \quad j = 1, \dots, N_\varphi,$$

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^{N_\theta} p_i^\theta = 1, \quad \sum_{j=1}^{N_\varphi} p_j^\varphi = 1.$$

Кусочно-непрерывная функция $\vartheta(t)$, $t \in [0, t_f]$ является оптимизируемым управляющим воздействием для рассматриваемого процесса нагрева стержня. Она определяет краевое условие (2.4) на левом конце стержня и ее назы-

вают краевым управлением [5]. Пусть, исходя из технических или технологических соображений, она должна удовлетворять ограничению:

$$(2.7) \quad \underline{\vartheta} \leq \vartheta(t) \leq \bar{\vartheta}, \quad t \in [0, t_f],$$

где $\underline{\vartheta}, \bar{\vartheta}$ – заданные величины.

Задача управления рассматриваемым процессом нагрева заключается в отыскании такой управляющей функции $\vartheta(t)$, которая согласно (2.3) влияет на температуру стержня на левом конце, удовлетворяет условию (2.7) и доставляет минимальное значение следующему функционалу:

$$(2.8) \quad J(\vartheta) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} I(\vartheta; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$I(\vartheta; \varphi, \theta) = \int_0^l \mu(x) (u(x, t_f; \vartheta, \varphi, \theta) - U(x))^2 dx + \sigma \int_0^{t_f} \vartheta^2(t) dt.$$

Здесь $u(x, t) = u(x, t; \vartheta, \varphi, \theta)$ – непрерывно дифференцируемая по $t \in [0, t_f]$ и дважды непрерывно дифференцируемая по $x \in (0, l)$ функция, являющаяся решением начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) при произвольно заданных допустимых управлении $\vartheta(t)$, параметрах φ начальной функции $\gamma(x; \varphi)$ и температуре внешней среды θ ; $U(x)$, $x \in (0, l)$ – кусочно-непрерывная функция, определяющая желаемое распределение температуры на стержне в конце процесса нагрева; $\mu(x) \geq 0$, $x \in (0, l)$ – заданная непрерывная весовая функция; $\sigma > 0$ – параметр регуляризации целевого функционала.

Специфической особенностью целевого функционала (2.8) является то, что здесь оценивается управление $\vartheta(t)$ не по поведению одной фазовой траектории $u(x, t)$ при каких-либо допустимых заданных параметрах φ начальной функции $\gamma(x; \varphi)$ и температуре внешней среды θ , а в целом для пучка фазовых траекторий. Пучок содержит получаемые из решения краевой задачи (2.1)–(2.5) фазовые траектории при всех допустимых параметрах φ и θ . Таким образом, можно сказать, что в рассматриваемой задаче оптимального управления ищется краевое управление $\vartheta(t)$, которое доставляет функционалу (2.8) минимальное значение в среднем по всему множеству Φ параметров φ начальной функции $\gamma(x; \varphi)$ и множеству Θ значений температуры внешней среды θ .

Пусть для управления рассматриваемым процессом нагрева используется обратная связь по состоянию процесса. А именно, в некоторых L точках $\xi_i \in (0, l)$, $i = 1, \dots, L$, ведутся замеры температуры непрерывно во времени:

$$u_i(t) = u(\xi_i, t), \quad i = 1, \dots, L, \quad t \in (0, t_f],$$

или в заданные дискретные моменты времени $\bar{t}_j \in (0, t_f]$, $j = 1, \dots, M$:

$$(2.9) \quad u_{ij} = u(\xi_i, \bar{t}_j), \quad i = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, M.$$

Замеренные значения температуры используем для формирования текущего значения управления. В случае непрерывно проводимых замеров используем следующую зависимость:

$$(2.10) \quad \vartheta(t) = \sum_{i=1}^L [k_{1i}(u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i}(u(\xi_i, t - \tau) - U_i)], \quad t \in [0, t_f],$$

$$U_i = U(\xi_i), \quad i = 1, \dots, L.$$

Здесь $U_i = U(\xi_i)$, $i = 1, \dots, L$, $\tau > 0$ – заданная величина, определяемая экспериментально, и зависит от динамики процесса нагрева. А именно, при сильной динамике величина τ должна быть мала, при слабой динамике величина τ должна выбираться большой с тем, чтобы значения $u(\xi_i, t)$ и $u(\xi_i, t - \tau)$ были достаточно различными.

Оптимизируемые постоянные коэффициенты k_{1i} , k_{2i} , $i = 1, \dots, L$, будем называть параметрами обратной связи.

В случае дискретной обратной связи (2.10) для формирования значений управления $\vartheta(t)$ используем следующую зависимость:

$$(2.11) \quad \vartheta(t) = \vartheta_{ij} = \sum_{i=1}^L [k_{1i}(u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i}(u(\xi_i, \bar{t}_{j-1}) - U_i)],$$

$$t \in [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+1}).$$

Ясно, что краевое управление является в общем случае кусочно-постоянной функцией с разрывами в дискретные моменты времени проведения замеров.

Подставляя зависимость (2.10) в краевое условие (2.3), получим, $t \in [0, t_f]$:

$$(2.12) \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} =$$

$$= -\mu_2 \left(\sum_{i=1}^L [k_{1i}(u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i}(u(\xi_i, t - \tau) - U_i)] - u(0, t) \right).$$

Новое краевое условие (2.12) имеет две особенности. Во-первых, оно содержит запаздывание во времени, во-вторых, оно является нелокальным краевым условием, связывающим поведение неизвестной функции на границе стержня с ее значениями внутри стержня в текущий и прошедший моменты времени [20–23].

В случае дискретной обратной связи краевое условие (2.3) примет вид

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -\mu_2 \left(\sum_{i=1}^L [k_{1i}(u_{ij} - U_i) + k_{2i}(u_{ij-1} - U_i)] - u(0, t) \right),$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \dots, M.$$

Займемся ограничением (2.7) на управляющую функцию $\vartheta(t)$ с учетом зависимости (2.10). Будем предполагать, что из технологических соображений известно, что температура в точках стержня при всевозможных допустимых режимах нагрева, параметрах начальных условий и температуре внешней среды удовлетворяет условию:

$$(2.13) \quad \underline{u} \leq u(x, t; \vartheta, \varphi, \theta) \leq \bar{u}, \quad \varphi \in \Phi, \quad \theta \in \Theta, \quad x \in (0, l), \quad t \in [0, t_f].$$

Здесь $\underline{u}, \bar{u}$ являются заданными значениями, определяющими диапазон возможных значений температуры в точках стержня. Из (2.10), учитывая (2.7), получим следующие условия на параметры непрерывной обратной связи:

$$(2.14) \quad \underline{\vartheta} \leq \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)] \leq \bar{\vartheta}.$$

Выберем величину τ достаточно малой настолько, что значения $u_i(t) = u(\xi_i, t)$ и $u_i(t - \tau) = u(\xi_i, t - \tau)$ при каждом $t \in [0, t_f]$ будут близки и не могут из практических соображений принимать значения на разных концах отрезка $[\underline{u}, \bar{u}]$. Тогда из (2.14) имеем:

$$(2.15) \quad \underline{\vartheta} \leq \sum_{i=1}^L [(k_{1i} + k_{2i}) u_i(t) - (k_{1i} + k_{2i}) U_i] \leq \bar{\vartheta}, \quad t \in (0, t_f].$$

При этом значения температуры в разных точках замера могут принимать значения на разных концах отрезка $[\underline{u}, \bar{u}]$. Введем в L -мерном пространстве куб с $N = 2^L$ вершинами в точках

$$\begin{aligned} T_1 &= (\underline{u}, \underline{u}, \dots, \underline{u})^T \in \mathbb{R}^L, \quad T_2 = (\underline{u}, \underline{u}, \dots, \bar{u})^T \in \mathbb{R}^L, \quad \dots, \\ T_{N-1} &= (\underline{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u})^T \in \mathbb{R}^L, \quad T_N = (\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u})^T \in \mathbb{R}^L. \end{aligned}$$

Учитывая линейность неравенств (2.15) по коэффициентам обратной связи, вводя векторы

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_L)^T, \quad K_1 = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1L})^T, \quad K_2 = (k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2L})^T,$$

из (2.15) получим N линейных ограничений на параметры K_1, K_2 :

$$(2.16) \quad \underline{\vartheta} \leq \langle K_1 + K_2, T_s \rangle - \langle K_1 + K_2, U \rangle \leq \bar{\vartheta}, \quad s = 1, \dots, N.$$

Здесь обозначение $\langle a, b \rangle$ означает скалярное произведение векторов a, b .

Несложно показать, что полученные ограничения (2.16) на параметры непрерывной обратной связи будут верны и в случае дискретной обратной связи вида (2.11).

Введем обозначения для оптимизируемых коэффициентов обратной связи и мест размещения точек замера:

$$\mathbf{K} = (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^{2L}.$$

Целевой функционал (2.8) в случае задачи управления с обратной связью запишем так:

$$(2.17) \quad J(\mathbf{K}) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(2.18) \quad I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) = \int_0^l \mu(x) (u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - U(x))^2 dx + \sigma \|\mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}}^2.$$

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального управления крайвым условием как с непрерывной, так и с дискретной обратной связью, приведена к параметрической задаче оптимального управления.

Как видно из (2.10), (2.11), особенность предлагаемого подхода к управлению с обратной связью заключается в том, что используется не только текущая, но и прошедшая во времени информация о состоянии процесса в точках замера. Это позволяет при управлении процессом учитывать его динамику. Ясно, что предлагаемые зависимости (2.10), (2.11) можно усложнить, добавив, например, больше информации о результатах ранее проведенных замеров.

Важной особенностью полученной задачи параметрического оптимального управления является возможная невыпуклость (многоэкстремальность) целевого функционала (2.17), (2.18). Это следует из того, что в зависимостях (2.10) и (2.11) участвует произведение коэффициентов обратной связи и значений температуры стержня в точках замера, неявно зависящих от этих же коэффициентов. Отсюда следует, что для решения задачи оптимизации целевого функционала (2.17), (2.18) надо использовать методы нелокальной (глобальной) оптимизации. Авторами применялся метод “мультистарта”, использующий метод локальной оптимизации из разных начальных точек.

Учет особенности краевого условия (2.12), заключающегося в наличии в нем запаздывания, не вызывает сложностей, если применить известный метод шагов [23]. Для учета нелокальности этого условия при численном решении краевой задачи методом сеток можно использовать известные схемы метода прогонки [24, 25].

Для численного решения в целом полученной задачи параметрического оптимального управления с учетом линейности ограничений (2.16) на оптимизируемые параметры будет использован метод проекции градиента. С этой целью в следующем разделе будет доказана дифференцируемость целевого

функционала и получены формулы для компонентов его градиента. Полученные формулы позволят сформулировать необходимые условия локальной оптимальности оптимизируемых параметров [5, 19].

3. Подход к численному решению задачи синтеза управления

Для численного решения полученной задачи параметрического оптимального управления (2.1), (2.2), (2.4), (2.12), (2.17), с учетом линейности ограничений (2.13)–(2.16) на оптимизируемые параметры, а следовательно, выпуклости допустимой области параметров $\mathbf{K}$, предлагается использовать метод проекции градиента [5].

$$(3.1) \quad \mathbf{K}^{s+1} = \underset{(2.14)}{\text{Pr}} \left(\mathbf{K}^s - \alpha_s \text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}^s) \right),$$

$$(3.2) \quad \alpha_s = \arg \min_{\alpha \geq 0} J \left(\underset{(2.14)}{\text{Pr}} \left(\mathbf{K}^s - \alpha \text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}^s) \right) \right), \quad s = 0, 1, \dots$$

Здесь $\text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K})$ – $2L$ -мерный вектор компонент градиента целевого функционала (2.17), (2.18); α_s – величина шага одномерной оптимизации по направлению антиградиента функционала на s -ой итерации, определяемой, например, методом золотого сечения; $\mathbf{K}^0$ – некоторое начальное значение вектора отыскиваемых параметров (в случае, если оно не удовлетворяет ограничениям (2.12), (2.14), то необходимо его предварительно спроектировать на допустимую область). Для построения оператора проектирования $\text{Pr}_{(2.14)}(\mathbf{K})$ произвольного вектора $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2L}$ на допустимую область, определяемую линейными неравенствами (2.12), (2.16), имеются известные конструктивные формулы [5, 26].

Как было отмечено выше, полученная задача параметрического оптимального управления может быть многоэкстремальной по оптимизируемым параметрам $\mathbf{K}$, а метод (3.1), (3.2) позволяет отыскивать лишь ближайшую к точке $\mathbf{K}^0 \in \mathbb{R}^{2L}$ точку локального минимума целевого функционала. Поэтому в расчетах использовался метод “мультистарта”, заключающийся в многократном применении итерационной процедуры (3.1), (3.2) для различных допустимых начальных точек $\mathbf{K}^0$. При этом за решение принимается тот вектор локального минимума $\mathbf{K}^*$, которому соответствует меньшее значение целевого функционала.

Ясно, что для реализации процедуры (3.1), (3.2) важную роль имеет вектор градиента целевого функционала $\text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K})$. Далее в теореме показана дифференцируемость целевого функционала $J(\mathbf{K})$ и приведены формулы для компонентов его градиента.

Теорема 1. При принятых допущениях на функции и параметры задачи оптимального управления (2.1), (2.2), (2.12), (2.4), (2.17), (2.18) с обратной связью (2.10) целевой функционал (2.17), (2.18) дифференцируем по допустимым значениям параметров $\mathbf{K}$, а компоненты градиента определяются

формулами

$$(3.3) \quad \frac{\partial J(\mathbf{K})}{\partial k_{1i}} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left[\int_0^{t_f} a^2 \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2\sigma k_{1i} \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial J(\mathbf{K})}{\partial k_{2i}} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left[\int_0^{t_f - \tau} a^2 \mu_2 \psi(0, t + \tau) (u(\xi_i, t + \tau) - U_i) dt + 2\sigma k_{2i} \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

где $i = 1, \dots, L$, $u(x, t) = u(x, t; \mathbf{K}, \varphi, \theta)$ – решение начально-краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.14); почти всюду дважды дифференцируемая по $x \in (0, l)$ и по $t \in [0, t_f]$ функция $\psi(x, t; \mathbf{K}, \varphi, \theta)$ является решением следующей сопряженной начально-краевой задачи при заданных допустимых значениях параметров $\mathbf{K}, \varphi, \theta$:

$$(3.5) \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \mu_1 \psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, t_f],$$

$$(3.6) \quad \psi(x, t_f) = -2\mu(x) (u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - U(x)), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$(3.7) \quad \psi_x(0, t) = \mu_2 \psi(0, t), \quad 0 \leq t \leq t_f,$$

$$(3.8) \quad \psi_x(l, t) = -\mu_2 \psi(l, t), \quad 0 \leq t \leq t_f,$$

в точках ξ_i , $i = 1, \dots, L$, при $t \in [0, t_f]$ должна удовлетворять условиям

$$(3.9) \quad \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t + \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t + \tau)}{\partial x} - k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) - k_{2i} \mu_2 \psi(0, t + \tau), \quad 0 \leq t \leq t_f - \tau,$$

$$(3.10) \quad \psi_x(\xi_i^-, t) = \psi_x(\xi_i^+, t) - k_{1i} \mu_2 \psi(0, t), \quad t_f - \tau \leq t \leq t_f,$$

$$(3.11) \quad \psi(\xi_i^-, t) = \psi(\xi_i^+, t), \quad 0 \leq t \leq t_f.$$

Здесь $\chi_{[0, t_f - \tau]}(t)$ – характеристическая функция:

$$\chi_{[0, t_f - \tau]}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, t_f - \tau], \\ 1, & t \in [0, t_f - \tau]. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

В случае дискретной по времени обратной связи в виде зависимости (2.11) имеет место следующая

Теорема 2. При принятых допущениях на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.14), (2.4), (2.17), (2.18), целевой функционал (2.17), (2.18) при дискретной обратной связи (2.11) дифференцируем

по параметрам $\mathbf{K}$ при их допустимых значениях, а компоненты градиента целевого функционала определяются формулами:

$$\frac{\partial J(\mathbf{K})}{\partial k_{1i}} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left[\sum_{j=0}^{M-1} \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t} a^2 \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2\sigma k_{1i} \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$\bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t,$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{K})}{\partial k_{2i}} =$$

$$= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left[\sum_{j=0}^{M-1} \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t - \tau} (a^2 \mu_2 \psi(0, t + \tau) (u(\xi_i, t + \tau) - U_i) dt) + 2\sigma k_{2i} \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$\bar{t}_j - \tau \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau,$$

где $i = 1, \dots, L$, а функция $\psi(x, t) = \psi(x, t; \mathbf{K}, \varphi, \theta)$ при заданных допустимых значениях параметров $\mathbf{K}, \varphi, \theta$ и соответствующей функции $u(x, t; \mathbf{K}, \varphi, \theta)$ – решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2), (2.12), (2.4) определяется решением следующей сопряженной начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \mu_1 \psi(x, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, \dots, M-1.$$

$$\psi(x, t_f) = -2\mu(x) (u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - U(x)), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\psi_x(0, t) = \mu_2 \psi(0, t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, \dots, M-1,$$

$$\psi_x(l, t) = -\mu_2 \psi(l, t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, \dots, M-1,$$

в точках $\xi_i, i = 1, \dots, L$, при $\bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t$ должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t + \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t + \tau)}{\partial x} -$$

$$- \sum_{j=1}^{M-1} \delta(t - t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} [k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) + k_{2i} \mu_2 \psi(0, t + \tau)] dt,$$

$$\bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau, \quad i = 1, \dots, L,$$

$$\frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} - \sum_{j=1}^{M-1} \delta(t - t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) dt,$$

$$\bar{t}_j + \Delta t - \tau \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad i = 1, \dots, L,$$

$$\psi(\xi_i^+, t) = \psi(\xi_i^-, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad i = 1, \dots, L,$$

а в точках $t_j, j = 0, \dots, M-1$ при $x \in [0, l]$ удовлетворять условиям

$$\psi(x, t_j^-) = \psi(x, t_j^+), \quad j = 0, \dots, M-1.$$

Сформируем необходимые условия оптимальности параметров $\mathbf{K}$ в вариационной форме.

Теорема 3. Для локальной оптимальности параметров $\mathbf{K}^ \in \mathbb{R}^{2L}$ в задаче синтеза (2.1), (2.2), (2.4), (2.12), (2.17), (2.18) с непрерывной обратной связью (2.10) необходимо выполнение условия*

$$(\text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}), \mathbf{K} - \mathbf{K}^*) \geq 0$$

для произвольного допустимого вектора $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2L}$, удовлетворяющего условиям (2.14), где градиент целевого функционала (2.17), (2.18) определяется формулами (3.3), (3.4).

Аналогично формулируются необходимые условия оптимальности параметров для случая дискретной обратной связи. Доказательство теорем 2 и 3 см. в Приложении.

4. Результаты компьютерных экспериментов

Приведем результаты численных экспериментов для следующих функций и значений параметров, участвующих в постановке задачи:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad t_f = 2, \quad a = 1, \quad \mu_1 = 0,1, \quad \mu(x) = 0,1, \quad l = 1, \\ \Phi = \{40, 45, 50\}, \quad \Theta = \{5, 6, 7\}, \quad \rho_{\Phi}(\varphi_i) = \rho_{\Theta}(\theta_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \underline{\vartheta} = 10, \quad \bar{\vartheta} = 750, \quad U(x) = 70, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Для численного решения прямой и сопряженной начально-краевых задач использовалась неявная схема метода сеток [19]. Эксперименты проводились для разных значений шагов сеточной области. В приводимых ниже результатах экспериментов использовались шаги $h_x = 0,01$, $h_t = 0,05$.

Для учета нелокальности в левом краевом условии (2.12) использовался подход, основанный на схеме переноса краевого условия, предложенный в [20–22]. Для учета запаздывания по времени в краевом условии был применен метод шагов с величиной шага, равной τ [23].

Задача управления с обратной связью решалась при двух разных начальных значениях оптимизируемых параметров.

В табл. 1 для каждого набора начальных значений оптимизируемых параметров приведены значения компонентов нормированных градиентов, вычисленных по предложенным формулам (3.3), (3.4) и с использованием центральной конечно-разностной аппроксимации производной функционала по формуле:

$$(4.1) \quad \partial J(\mathbf{K}) / \partial \mathbf{K}_j \approx (J(\mathbf{K} + \varepsilon \mathbf{e}_j) - J(\mathbf{K} - \varepsilon \mathbf{e}_j)) / 2\varepsilon,$$

где $\mathbf{K}_j$ – j -ая компонента n -мерного оптимизируемого вектора $\mathbf{K}$, представляющего совокупность оптимизируемых параметров $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$; $\mathbf{e}_j$ – n -мерный вектор, состоящий из нулей, кроме j -ой компоненты, равной единице. Величину ε в экспериментах приходилось варьировать, а в таблицу включены наиболее приемлемые результаты.

Таблица 1. Значения компонент нормированных градиентов функционала, вычисленных по формулам (3.5)–(3.7) и (4.1) при значениях параметров, приведенных в табл. 2

N	Формулы	$\nabla_{k_{11}}^{norm} J$	$\nabla_{k_{12}}^{norm} J$	$\nabla_{k_{21}}^{norm} J$	$\nabla_{k_{22}}^{norm} J$
1	(3.3), (3.4)	0,286391	0,437807	0,354151	0,775162
	(4.1)	0,286693	0,437915	0,354402	0,774879
2	(3.3), (3.4)	0,008363	–0,55936	–0,698830	–0,445737
	(4.1)	0,012542	–0,55928	–0,699544	–0,444614
3	(3.3), (3.4)	0,322336	–0,585921	0,276813	0,823887
	(4.1)	0,322786	–0,586143	0,278189	0,824126

Таблица 2. Начальные и полученные значения оптимизируемых параметров и соответствующие значения функционала при $L = 2$

N	$(k_{11}^0; k_{12}^0); (k_{21}^0; k_{22}^0)$	$J(\mathbf{K})$	$(k_{11}^*; k_{12}^*); (k_{21}^*; k_{22}^*)$	$J(\mathbf{K}^*)$
1	(2,00; 5,00); (4,00; 7,00)	2132,76	(1,497; 2,499); (3,496; 3,001)	0,00043142
2	(0,20; 0,70); (0,40; 0,90)	2714,32	(1,399; 2,600); (3,194; 2,800)	0,00056845
3	(2,50; 1,50); (0,40; 3,00)	2478,19	(1,502; 2,4563); (3,3212; 2,925)	0,00048367

В табл. 2 приведены начальные и полученные оптимальные значения оптимизируемых параметров $\mathbf{K}$ при обратной связи (2.10) при числе точек замера $L = 2$.

Были проведены численные эксперименты, в которых точные значения наблюдаемых состояний процесса в точках замера $u(\xi_1, t), u(\xi_2, t)$ при $L = 2$ зашумлялись случайными помехами по формуле

$$u(t; \mathbf{K}^*) = u(\xi_i, t; \mathbf{K}^*) = u(\xi_i, t; \mathbf{K}^*)(1 + \chi(2\sigma_i - 1)), \quad i = 1, 2,$$

где $u(\xi_i, t; \mathbf{K}^*)$ – расчетное значение решения прямой начально-краевой задачи в точке $x = \xi_i$ при $t \in [0, t_f]$, σ_i – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, χ – уровень помехи.

На рис. 1 приведены графики функций, определяющие по длине стержня значения $\Delta u(x, t_f; \mathbf{K}^*, \chi) = u(x, t_f; \mathbf{K}^*, \chi) - U(x)$ – отклонения полученных температур от желаемой температуры при уровнях помех, равных 0%

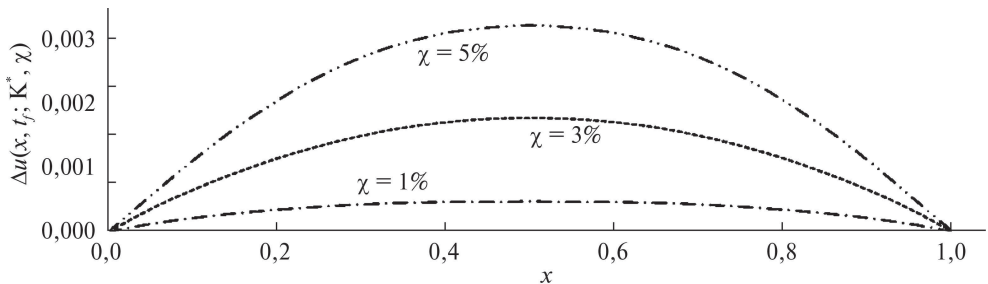


Рис. 1. Графики отклонений полученных функций распределения температуры на стержне от желаемой $U(x)$ при разных уровнях помехи χ .

(без помех) и 1%, 3%, 5%, соответствующих значениям χ , равным 0; 0,01; 0,03; 0,05.

Проводились сравнительные эксперименты предлагаемого подхода к синтезу управления с решением задачи синтеза управления с обратной связью без использования предыдущих по времени результатов замеров в виде [16]:

$$(4.2) \quad \vartheta(t; \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^L k_{1j}(u(\xi_i, t) - U_i), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Как видно, в (4.2) для формирования текущего значения управления $\vartheta(t)$ не используется информация о фазовом состоянии в предыдущие моменты времени.

В табл. 3 приведены результаты решения задачи синтеза краевого управления с применением для обратной связи формулы (4.2). Эксперименты проводились для трех различных начальных значений оптимизируемых параметров.

Таблица 3. Начальные и полученные значения параметров обратной связи (4.2) и целевого функционала

N	$(k_{11}^0; k_{12}^0)$	$J(\mathbf{K}^0)$	$(k_{11}^*; k_{12}^*)$	$J(\mathbf{K}^*)$
1	(2,00; 5,00)	2012,37	(1,2412; 4,4215)	0,0866534
2	(0,20; 0,70)	1987,13	(1,6512; 3,1265)	0,0872112
3	(2,50; 1,50)	2179,33	(2,2451; 1,1532)	0,0858423

На рис. 2 приведены графики функций отклонения температуры от желаемой для полученных параметров при $t > t_f = 1$. Как видно из графиков, процесс нагрева продолжает устанавливаться, несмотря на то, что задача синтеза решалась на интервале $[0, 1]$, т.е. $t_f = 1$.

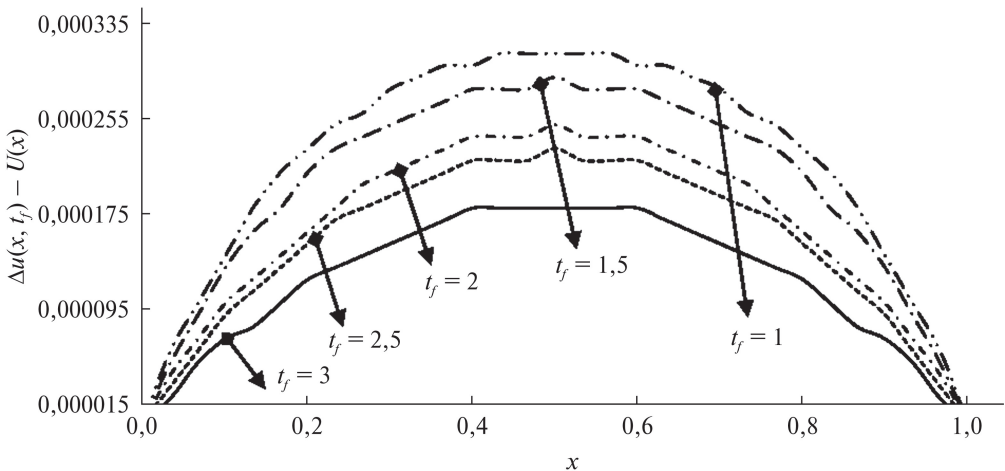


Рис. 2. Распределение температуры по стержню при разных $t \in [1, 3]$ с увеличением масштаба по оси ординат.

5. Заключение

Исследуется задача оптимального синтеза краевого управления процессом нагрева стержня. Приводится постановка задачи, в которой предложена линейная зависимость значения краевого управления от замеренных значений температуры стержня в точках замера как в текущий, так и в прошедшие моменты времени. Оптимизируемыми в задаче являются: постоянные во времени параметры обратной связи, являющиеся коэффициентами, участвующими в зависимости значения управления от значений температуры в точках замера.

Определение значений параметров обратной связи приводит исходную задачу к параметрической задаче оптимального управления с распределенными параметрами. Для ее численного решения используются численные методы оптимизации первого порядка. Проведены компьютерные эксперименты.

Предлагаемый в работе подход к синтезу краевого управления и метод исследования можно распространить на другие виды дифференциальных уравнений с частными производными с другими начальными и краевыми условиями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

Из взаимной независимости возможных значений параметров начальных условий $\gamma(x; \varphi)$ при различных параметрах φ и внешних воздействий θ имеет место:

$$\begin{aligned} \text{(П.1)} \quad \text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}) &= \text{grad}_{\mathbf{K}} \int_{\Phi} \int_{\Theta} I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi = \\ &= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \text{grad}_{\mathbf{K}} I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Поэтому займемся исследованием дифференцируемости функционала $I(\mathbf{K}; \varphi, \theta)$ и получением формул для компонент его градиента по оптимизируемым параметрам $\mathbf{K}$ при каких-либо заданных допустимых параметрах $\varphi \in \Phi$, $\theta \in \Theta$.

Для доказательства теоремы используем известный метод приращения оптимизируемых параметров и оценки соответствующего приращения функционала [5, 27].

Пусть вектор параметров $\mathbf{K} = (k_1, k_2)$, которому соответствует решение $u(x, t) = u(x, t, \mathbf{K})$, $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(x, t, \tilde{\mathbf{K}})$ краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4), получил приращение $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} = (k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)$ и этому вектору соответствует решение краевой задачи $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) + \Delta u(x, t)$.

Из (2.1), (2.2), (2.4), (2.12) следует, что $\Delta u(x, t)$ является решением краевой задачи

$$(П.2) \quad \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \Delta u(x, t)}{\partial x^2} - \mu_1 \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, t_f],$$

$$(П.3) \quad \Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$(П.4) \quad \left. \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu_2 \Delta u(0, t) - \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] + \\ + \sum_{i=1}^L [(u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{2i}], \quad t \in [0, t_f],$$

$$(П.5) \quad \left. \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = -\mu_2 \Delta u(l, t), \quad t \in [0, t_f].$$

Для приращения функционала (2.17) несложно непосредственно получить представление:

$$(П.6) \quad \Delta I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) = I(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}; \varphi, \theta) - I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) = \\ = 2 \int_0^l \mu(x) [u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - U(x)] \Delta u(x, t_f) dx + \\ + 2\sigma \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta k_{1i} + k_{2i} \Delta k_{2i}] + R \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}} \right),$$

где остаточный член $R \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}} \right)$ включает слагаемые второго порядка малости относительно $\|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}}$ и $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$. В [5, 27] получены оценки зависимости приращения решения начально-краевой задачи относительно параболического уравнения в зависимости от изменения параметров, участвующих в задаче. Из этих оценок следует, что имеет место

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta \|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}},$$

где величина $\eta > 0$ не зависит от параметров $\mathbf{K}$. Получим формулы для компонентов градиента целевого функционала по параметрам $\mathbf{K}$. Пусть функция $\psi(x, t)$ – некоторая пока произвольная непрерывная всюду в Ω функция, дважды дифференцируемая по x при $x \in (\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, \dots, L$, $\xi_0 = 0$, $\xi_{L+1} = l$, дифференцируемая по t при $t \in (0, t_f)$. Умножим (П.2) на $\psi(x, t)$, проинтегрируем результат по прямоугольнику Ω . С учетом принятых пред-

положений и условий (П.4)–(П.5) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.7}) \quad & \int_0^{t_f} \int_0^l \psi(x, t) \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial t} dx dt - \\
 & - a^2 \sum_{i=0}^L \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_0^{t_f} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \Delta u(x, t)}{\partial x^2} dt dx - \\
 & - \mu_1 \int_0^{t_f} \int_0^l \psi(x, t) \Delta u(x, t) dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

Разобьем отрезок $[0, l]$ на отрезки $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 0, \dots, L$, проведем интегрирование по частям отдельно для первого и второго членов (3.5). Учитывая (П.3)–(П.5), имеем:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.8}) \quad & \int_0^{t_f} \int_0^l \psi(x, t) \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial t} dx dt = \\
 & = \int_0^l \psi(x, t_f) \Delta u(x, t_f) dx - \int_0^{t_f} \int_0^l \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Delta u(x, t) dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{П.9}) \quad & a^2 \sum_{i=0}^L \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_0^{t_f} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \Delta u(x, t)}{\partial x^2} dt dx = \\
 & = a^2 \int_0^{t_f} \left[\left(\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} - \mu_2 \psi(0, t) \right) \Delta u(0, t) - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} + \mu_2 \psi(l, t) \right) \Delta u(l, t) \right] dt + \\
 & + a^2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f} \left[\frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) \right] \Delta u(\xi_i, t) dt + \\
 & + a^2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f - \tau} \left[\frac{\partial \psi(\xi_i^-, t + \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t + \tau)}{\partial x} + \right. \\
 & \quad \left. + k_{2i} \mu_2 \psi(0, t + \tau) \right] \Delta u(\xi_i, t) dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f} \left[(\psi(\xi_i^+, t) - \psi(\xi_i^-, t)) \frac{\partial \Delta u(\xi_i, t)}{\partial x} \right] dt - \\
& - a^2 \sum_{i=1}^L \Delta k_{1i} \int_0^{t_f} \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i) dt - \\
& - a^2 \sum_{i=1}^L \Delta k_{2i} \int_0^{t_f - \tau} \mu_2 \psi(0, t + \tau) (u(\xi_i, t + \tau) - U_i) dt + \\
& + a^2 \int_0^{t_f} \int_0^l \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \Delta u(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

Используя (П.6)–(П.9), для приращения функционала будем иметь:

$$\begin{aligned}
(\text{П.10}) \quad \Delta I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) = & \int_0^l \left[\psi(x, t_f) + 2\mu(x)(u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - \right. \\
& \left. - U(x)) \right] \Delta u(x, t_f) dx - \\
& - a^2 \int_0^{t_f} \left[\left(\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} - \mu_2 \psi(0, t) \right) \Delta u(0, t) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} + \mu_2 \psi(l, t) \right) \Delta u(l, t) \right] dt + \\
& + \int_0^{t_f} \int_0^l \left[-\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \mu_1 \psi(x, t) \right] \Delta u(x, t) dx dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f - \tau} \left[\frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t + \tau)}{\partial x} + \right. \\
& \left. - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t + \tau)}{\partial x} + k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) + k_{2i} \mu_2 \psi(0, t + \tau) \right] \Delta u(\xi_i, t) dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_f - \tau}^{t_f} \left[\frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) \right] \Delta u(\xi_i, t) dt - \\
& - \sum_{i=1}^L \left\{ a^2 \int_0^{t_f} \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2\sigma k_{1i} \right\} \Delta k_{1i} -
\end{aligned}$$

$$- \sum_{i=1}^L \left\{ a^2 \int_0^{t_f - \tau} \psi(0, t + \tau) (u(\xi_i, t + \tau) - U_i) dt + 2\sigma k_{2i} \right\} \Delta k_{2i} + \\ + R(\|\Delta u\|, \|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}}).$$

В силу произвольности функции $\psi(x, t)$ потребуем, чтобы она почти всюду являлась решением начально-краевой задачи (3.5)–(3.11).

Учитывая, что компоненты градиента функционала определяются линейной частью приращения функционала при приращениях соответствующих аргументов, получим:

$$\frac{\partial I(\mathbf{K}; \varphi, \theta)}{\partial k_{1i}} = \int_0^{t_f} (a^2 \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i)) dt + 2\sigma k_{1i}, \\ i = 1, \dots, L, \quad 0 \leq t \leq t_f, \\ \frac{\partial I(\mathbf{K}; \varphi, \theta)}{\partial k_{2i}} = \int_0^{t_f - \tau} (a^2 \mu_2 \psi(0, t + \tau) (u(\xi_i, t + \tau) - U_i)) dt + 2\sigma k_{2i}, \\ i = 1, \dots, L, \quad 0 \leq t \leq t_f - \tau.$$

Отсюда с учетом формулы (П.1) следуют искомые формулы, приведенные в теореме 2.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1. Основное различие связано с формулами (2.11), (2.12), которые приводят к необходимости замены интегрирования по t в целом по отрезку $[0, t_f]$ на сумму интегралов на отрезках $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, M$, $t_0 = 0$, $t_M = t_f$.

Доказательство теоремы 3 следует из известной теоремы об интегральных необходимых условиях оптимальности в задачах оптимизации [5, 27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
2. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
3. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
4. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Численный системный анализ многокомпонентных распределенных систем. Киев: Наук. думка, 2009.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
6. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
7. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

8. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука. Физматлит, 1997.
9. Хлебников М.В., Щербаков П.С. Синтез оптимальной обратной связи при ограниченном управлении // *АиТ*. 2014. Т. 75. № 2. С. 177–192.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Optimal feedback design under bounded control // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 2. P. 320–322.
10. Alessandri A., Gaggero M., Zoppoli R. Feedback optimal control of distributed parameter systems by using finite-dimensional approximation schemes // *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2012. V. 23. P. 984–996.
11. Ray W.H. *Advanced Process Control*. McGraw-Hill Book Company, 1981.
12. Smyshlyaev A., Krstic M. Explicit state and output feedback boundary controllers for partial differential equations // *Journal of Automatic Control*. 2003. V. 13. No. 2. P. 1–9.
13. Liu W. Boundary feedback stabilization of an unstable heat equation // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2003. V. 42. P. 1033–1043.
14. Afifi L., Lasri K., Joundi M., Amimi N. Feedback controls for exact remediability in disturbed dynamical systems // *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 2018. V. 35. No. 2. P. 411–425.
15. Abdullayev V.M., Aida-Zade K.R. Rod temperature regulation using current and time-delayed feedback // *Quaestiones Mathematicae*. 2023. V. 46. No. 10. P. 1991–2011.
16. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // *АиТ*. 2017. Т. 78. № 9. С. 49–66.
Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Optimizing placement of the control points at synthesis of the heating process control // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
17. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи // *АиТ*. 2022. Т. 83. № 1. С. 130–149.
Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Controlling the Heating of a Rod Using the Current and Preceding Time Feedback // *Autom. Remote Control*. 2022 . V. 83. No. 1. P. 106–122.
18. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Оптимизация размещения точек контроля в одной задаче синтеза граничного управления процессом нагрева стержня // *АиТ*. 2018. Т. 79. № 9. С. 122–142.
Aida-zade K.R., Hashimov V.A. Optimization of Measurement Points Positioning in a Border Control Synthesis Problem for the Process of Heating a Rod // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 9. P. 1643–1660.
19. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Ленанд, 2014. 368 с.
20. Assanova A.T., Dzhobulaeva Z.K., Imanchiyev A.E. A Multi-Point Initial Problem for a Non-Classical System of a Partial Differential Equations // *Lobachevskii J. Math.* 2020. V. 41. No. 6. P. 1031–1042.
21. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Optimization of the right-hand sides of nonlocal conditions of a controllable system with multipoint and integral objective functional // *Optimization*. 2024. V. 73. No. 1. P. 205–228.

22. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Approach to the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Loaded Differential Equations with Nonlocal Conditions // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. No. 5. P. 696–707.
23. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
24. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
25. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equation // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. No. 1. P. 93–105.
26. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974.
27. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 20.03.2025

После доработки 25.10.2025

Принята к публикации 27.10.2025

© 2026 г. С.В. АКМАНОВА, канд. пед. наук (svet.akm_74@mail.ru)
(Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова)

ПОСТРОЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Установлены достаточные признаки полной управляемости, существования допустимых и оптимального управлений для нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) динамических систем с постоянным шагом дискретизации, непрерывная и дискретная части которых функционируют в одном контуре. Представлены алгоритмы построения допустимых программных управлений для таких систем, а также алгоритм построения оптимального программного управления. Приведены примеры, подтверждающие эффективность представленных алгоритмов в решении задач управления нелинейными гибридными системами с постоянным шагом дискретизации на конечном промежутке времени.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, гибридная система, дискретная система, допустимое управление, допустимый процесс, оптимальное управление, оптимальный процесс.

DOI: 10.7868/S2413977726010046

1. Введение и постановка задачи

Решение задач управления нелинейными динамическими системами является актуальным во многих сферах деятельности, поскольку данные системы служат математическими моделями различных технических, механических, экономических и других процессов (см., например, [1–4]).

В статье рассматриваются задачи управления динамической системой, описываемой совокупностью дифференциальных и разностных уравнений, при этом в состав последних входит управление, а непрерывная и дискретная части системы функционируют в одном контуре. Такие системы принято называть непрерывно-дискретными или гибридными динамическими системами управления [2, 5].

Итак, рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная система управления

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), & k = \overline{0, l-1}, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$(2) \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

где $x(t) \in R^n$, $y(t_k) \in R^m$ – векторы состояний системы (1), характеризующие поведение соответственно непрерывной и дискретной частей данной системы; $u(t_k) \in R^q$ – вектор управления; моменты времени t_k задают на отрезке $[t_0, t_l]$ равномерную сетку с постоянным шагом $h = t_{k+1} - t_k > 0$ и узлами $t_k = t_0 + kh$, $0 \leq t_0 < t_l$, $k = 0, 1, \dots, l$ ($l \in N$ – фиксированное число); функции $f(x, y)$ и $g(x, y, u)$ определены и непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на множествах $R^n \times R^m$ и $R^n \times R^m \times R^q$ соответственно, при этом

$$(3) \quad f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0) = 0,$$

т.е. при $u = 0$ система (1) имеет нулевую точку равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Согласно (1) и начальным условиям (2) на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ при выбранном управлении u (т.е. при заданной конечной последовательности $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$) находятся решение $x = \varphi_k(t)$ задачи Коши $x'(t) = f(x(t), y_k)$, $x(t_k) = x_k$, а затем векторы $x_{k+1} = \varphi_k(t_{k+1})$, $y_{k+1} = g(x_{k+1}, y_k, u_k)$, где $y_k = y(t_k)$, $u_k = u(t_k)$, при этом $y(t) = y(t_k)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тогда состоянием системы (1) в момент времени t назовем пару $z(t) = (x(t), y(t))$, а значит, решением данной системы с начальными данными $z_0 = (x_0, y_0)$ при выбранном управлении u будет являться функция

$$(4) \quad z(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (\varphi_0(t), y_0), & t_0 \leq t < t_1, \\ (\varphi_1(t), y_1), & t_1 \leq t < t_2, \\ \vdots & \\ (\varphi_{l-1}(t), y_{l-1}), & t_{l-1} \leq t < t_l, \\ (\varphi_{l-1}(t), y_l), & t = t_l. \end{cases}$$

В решении (4) компонента $x(t)$ непрерывна при всех $t \in [t_0, t_l]$, непрерывно дифференцируема на каждом интервале (t_k, t_{k+1}) , $k = \overline{0, l-1}$, но не обязательно дифференцируема в моменты времени $t = t_k$, $k = \overline{0, l}$; компонента $y(t)$ кусочно-постоянна и меняет свои значения только в моменты времени $t = t_k$, $k = \overline{0, l}$.

Примером системы (1) может служить математическая модель движения летательного аппарата на плоскости [4].

Ставятся следующие задачи: 1) задача перевода системы (1) из заданного начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}}$ в заданное конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}}$ ($t_l = t_0 + lh$) при помощи подходящего управления; 2) задача оптимизации, т.е. поиска управления, переводящего систему (1) из начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}}$ в конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}}$ и минимизирующего функционал качества процесса управления

$$(5) \quad I(u) = \sum_{k=0}^{l-1} u^\top(t_k) u(t_k).$$

Решение поставленных задач связано с шагом сетки $h > 0$, так как от значения h зависит решение вопроса о существовании управления, переводящего систему (1) из начального состояния $z^{\{0\}}$ в конечное состояние $z^{\{1\}}$, поэтому примем следующие определения.

Определение 1. Гибридная система (1) называется полностью управляемой при заданном $h > 0$, если для любых векторов $z^{\{0\}}, z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ существует управление $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, такое что для решения $z = z(t)$ системы (1) с начальным условием $z(t_0) = z^{\{0\}}$ выполняется равенство $z(t_l) = z^{\{1\}}$.

Определение 2. Управление $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, удовлетворяющее системе (1) при заданном $h > 0$ и переводящее эту систему из начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}}$ в конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}}$, называется допустимым (программным) управлением системы (1) при $h > 0$.

Определение 3. Допустимое управление $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, системы (1) при заданном $h > 0$, минимизирующее функционал (5), называется оптимальным (программным) управлением системы (1) при $h > 0$.

Заметим, что в [6, 7] автором были установлены необходимые и достаточные признаки полной управляемости, достаточные признаки и способы стабилизации для нелинейной гибридной системы, заданной равенствами (1), но функционирующей на бесконечном промежутке времени, т.е. при $k = 0, 1, 2, \dots$, а значит, отличающейся от системы (1), которая действует на конечном промежутке времени. Поэтому понятие полностью управляемой системы для системы (1) и системы в [6, 7] определяется по-разному.

Обобщениями системы (1) служат гибридные системы, рассмотренные в [5, 8], где ставились задачи оптимизации со свободным конечным состоянием, при этом в [5] на основе принципа оптимальности Кротова В.Ф. [9], примененного совместно к совокупности дифференциальных и разностных уравнений, установлены достаточные условия оптимальности управления нелинейной системой, а в [8] получены необходимые условия оптимальности управления, позволяющие решать задачи со свободными моментами переключений, которые могут выбираться при оптимизации процесса управления. Поставленная же задача оптимизации для системы (1) предполагает фиксированным конечное состояние системы, при этом моменты переключений и их количество заранее известны при заданном $h > 0$, кроме того, непрерывная подсистема системы (1) не содержит вектор управления, поэтому подходы к оптимизации, представленные в [5, 8], неприемлемы для решения задачи оптимизации системы (1), к тому же задача перевода гибридных систем в [5, 8] из одного состояния в другое на основе построения допустимых управлений не рассматривается.

Отметим при этом, что в научной литературе освещены вопросы построения допустимых программных управлений для нелинейных дискретных систем с функционалом качества (5) [10, 11], а также различные аспекты построения допустимого и оптимального управлений для нелинейных непре-

рывных систем по первому приближению [12–16], вопросы оптимального управления дискретными системами [17, 18], вопросы оптимальности для непрерывных и дискретных процессов [9, 19, 20]. Имеются также исследования по оптимальному управлению для некоторых видов нелинейных гибридных систем (см., например, [21–24]), однако в них, как правило, исследуются системы со свободным конечным состоянием, при этом состояния таких систем характеризуются только одним фазовым вектором, меняющимся между моментами переключений непрерывно, а в моменты переключений – дискретно, в отличие от системы (1), в которой состояние системы характеризуется набором из двух различных фазовых векторов, один из которых меняется непрерывно согласно дифференциальным уравнениям, а другой – дискретно с учетом разностных уравнений системы, содержащих управление. Таким образом вопросы, связанные с решением поставленных задач, остаются открытыми.

Для решения этих задач выполняется переход от системы (1) к равносильной, в естественном смысле, нелинейной дискретной системе [7]. Перевод равносильной дискретной системы из начального состояния в конечное основывается на итерационном процессе построения допустимого управления, который может быть сходящимся или расходящимся, поэтому рассматриваются два подхода к построению допустимого управления для нелинейной гибридной системы (1).

Основными задачами в настоящей статье являются установление достаточных признаков допустимости и оптимальности управления нелинейной гибридной системой (1) и построение соответствующих допустимых и оптимального управлений для этой системы.

Новизна проведенного исследования состоит в следующем:

1) установлены достаточные признаки полной управляемости системы (1), выполнение которых обеспечивает существование допустимых программных управлений для данной системы, переводящих ее из любого начального состояния в любое конечное состояние на отрезке времени $[t_0, t_l]$;

2) установлен достаточный признак существования оптимального управления для системы (1);

3) представлены алгоритмы построения допустимых и оптимального управлений для системы (1).

2. Переход к дискретной системе. Критерий полной управляемости системы (1)

Пусть $x(t_k) = x_k$, $y(t_k) = y_k$, $u(t_k) = u_k$, тогда, используя [7] и соотношения (3), выполним переход от системы (1) к равносильной нелинейной дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1 h} x_k + A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 y_k + \varepsilon(x_k, y_k; h), & k = \overline{0, l-1}, \\ y_{k+1} = A_2 e^{A_1 h} x_k + (A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2)y_k + C u_k + \delta(x_k, y_k, u_k; h), \end{cases}$$

где $A_1 = f'_x(0, 0)$, $B_1 = f'_y(0, 0)$, $A_2 = g'_x(0, 0, 0)$, $B_2 = g'_y(0, 0, 0)$, $C = g'_u(0, 0, 0)$ – матрицы соответствующих размеров и $\det A_1 \neq 0$, при этом

$$f(x, y) = A_1 x + B_1 y + a(x, y), \quad g(x, y, u) = A_2 x + B_2 y + C u + b(x, y, u),$$

а гладкие нелинейности $a(x, y)$ и $b(x, y, u)$ начинаются с квадратичных по x, y и x, y, u слагаемых соответственно, удовлетворяя условиям $a(x, y) = o(\|x\| + \|y\|)$ при $\|x\| + \|y\| \rightarrow 0$, $b(x, y, u) = o(\|x\| + \|y\| + \|u\|)$ при $\|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0$ (здесь и далее запись $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора в соответствующем пространстве вещественных чисел или норму матрицы),

$$(6) \quad \varepsilon(x_k, y_k; h) = e^{(t_k+h)A_1} \int_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} a(p(s, x_k, y_k), y_k) ds,$$

где $x = p(t, x_k, y_k)$ – решение задачи Коши $x' = A_1 x + B_1 y_k + a(x, y_k)$, $x(t_k) = x_k$;

$$(7) \quad \delta(x_k, y_k, u_k; h) = A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + b(x_{k+1}, y_k, u_k).$$

Компактная запись равносильной нелинейной дискретной системы имеет вид

$$(8) \quad z_{k+1} = A(h)z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h), \quad k = \overline{0, l-1},$$

здесь

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix},$$

$A(h)$ – блочная (порядка $n + m$) матрица:

$$(9) \quad A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix}.$$

Система (8) при $u = 0$ имеет нулевое положение равновесия, при этом функция $\xi(z, u, h)$ удовлетворяет условию $\xi(z, u, h) = o(\|z\| + \|u\|)$ при $\|z\| + \|u\| \rightarrow 0$ [7, 25].

Определение 4. Дискретная система (8) называется полностью управляемой при заданном $h > 0$, если для любых состояний $z^{\{0\}}, z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ существует управление u_k , $k = \overline{0, l-1}$, такое что для решения z_k , $k = \overline{0, l}$, системы (8) с начальным условием $z_0 = z^{\{0\}}$ выполняется равенство $z_l = z^{\{1\}}$, где $z_l = z(t_l)$.

Тогда имеет место

Теорема 1. Гибридная система (1) полностью управляема при заданном $h > 0$ в том и только в том случае, если дискретная система (8) полностью управляема при $h > 0$.

Доказательство теоремы 1 и других основных утверждений вынесено в Приложение.

3. Оптимальное управление для линейной гибридной системы

Пусть система первого приближения нелинейной дискретной системы (8) полностью управляема при $h = h_0 > 0$, т.е. полностью управляема дискретная система

$$(10) \quad z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k, \quad k = \overline{0, l-1},$$

где, с учетом (9), $A_0 = A(h_0)$. Тогда согласно критерию полной управляемости линейных дискретных систем [10, 11] выполняется условие

$$(11) \quad \text{rank}[B, A_0 B, A_0^2 B, \dots, A_0^{n+m-1} B] = n + m.$$

Система (10) равносильна, в естественном смысле [7], линейной гибридной системе

$$(12) \quad \begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y(t_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t_{k+1} - t_k = h_0, \\ y(t_{k+1}) = A_2 x(t_{k+1}) + B_2 y(t_k) + C u(t_k), & k = \overline{0, l-1}. \end{cases}$$

Тогда на основании [11] справедлива

Теорема 2. Если система (10) полностью управляема, то существует оптимальное управление $u^{(0)}(t_k) = u_k^{(0)}$, переводящее гибридную систему (12) из любого начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}}$ в любое конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}}$ и минимизирующее функционал (5), при этом

$$(13) \quad \begin{aligned} u_k^{(0)} &= S^\top(k) F^+(0) d(0, z^{\{0\}}), \quad S(k) = A_0^{l-k-1} B, \quad k = \overline{0, l-1}, \\ d(0, z^{\{0\}}) &= z^{\{1\}} - A_0^l z^{\{0\}}, \quad F(0) = \sum_{k=0}^{l-1} S(k) S^\top(k), \end{aligned}$$

$F^+(0)$ – матрица, псевдообратная к матрице $F(0)$.

Построенному оптимальному управлению системы (12) соответствует оптимальное движение $z^{(0)}(t) = (x^{(0)}(t), y^{(0)}(t))$, $t \in [t_0, t_l]$ этой системы и оптимальное движение $z_k^{(0)} = [x_k^{(0)} \ y_k^{(0)}]^\top$ ($k = \overline{0, l}$) системы (10), при этом $x^{(0)}(t_k) = x_k^{(0)}$, $y^{(0)}(t_k) = y_k^{(0)}$.

Пример 1. Для линейной гибридной системы

$$(14) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = -x(t_{k+1}) + y(t_k) + 3u(t_k), & k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

построить оптимальное управление $u^{(0)}(t_k)$, переводящее эту систему за три шага ($l = 3$) из состояния $z^{\{0\}} = [2 \ 1]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [1 \ 2]^\top$.

Гибридная система (14) равносильна линейной дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^h x_k + 2(e^h - 1)y_k, \\ y_{k+1} = -e^h x_k + (3 - 2e^h)y_k + 3u_k, \quad k = 0, 1, 2, \end{cases}$$

которая при $h_0 = \ln 2$ имеет вид (10) с матрицами $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, и для нее условие (11) выполняется, т.е. она является полностью управляемой при $h_0 = \ln 2$. Используя формулы (13), найдем:

$$S(0) = A_0^2 B = [6 \quad -9]^\top, \quad S(1) = A_0 B = [6 \quad -3]^\top, \quad S(2) = B = [0 \quad 3]^\top, \\ d(0, z^{\{0\}}) = z^{\{1\}} - A_0^3 z^{\{0\}} = [11 \quad -1]^\top,$$

$$F(0) = \sum_{k=0}^2 S(k) S^\top(k) = \begin{bmatrix} 72 & -72 \\ -72 & 99 \end{bmatrix}, \quad F^+(0) = F^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 11/216 & 1/27 \\ 1/27 & 1/27 \end{bmatrix}.$$

Тогда система (14) при $t_{k+1} - t_k = h_0$ и $t_0 = 0$ имеет оптимальное управление $u^{(0)}(t_0) = u^{(0)}(0) = -7/36$, $u^{(0)}(t_1) = u^{(0)}(\ln 2) = 73/36$, $u^{(0)}(t_2) = u^{(0)}(\ln 4) = 10/9$ и соответствующее ему оптимальное движение

$$z(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (4e^t - 2, 1), & 0 \leq t < \ln 2, \\ \left(-\frac{31}{12}e^t + \frac{67}{6}, -\frac{67}{12}\right), & \ln 2 \leq t < \ln 4, \\ \left(\frac{1}{24}e^t + \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), & \ln 4 \leq t < \ln 8, \\ \left(\frac{1}{24}e^t + \frac{2}{3}, 2\right), & t = \ln 8, \end{cases}$$

которое при $t_0 = 0$, $t_1 = \ln 2$, $t_2 = \ln 4$, $t_3 = \ln 8$ совпадает с решением равносильной дискретной системы $z_0 = [2 \quad 1]^\top$, $z_1 = [6 \quad -67/12]^\top$, $z_2 = [5/6 \quad -1/3]^\top$, $z_3 = [1 \quad 2]^\top$, т.е. построенное управление переводит систему (14) за три шага из состояния $z^{\{0\}}$ в состояние $z^{\{1\}}$ и, как следует из теоремы 2, минимизирует функционал (5).

4. Полная управляемость систем (1) и (8) на замкнутом подмножестве евклидова пространства. Особенности нелинейности $\xi(z, u, h)$

Рассмотрим вопрос взаимосвязи полной управляемости систем (1) и (8) при некотором $h = h_0 > 0$ на замкнутых подмножествах евклидова пространства R^{n+m} .

Пусть $S \subset R^{n+m}$ – множество состояний системы (1). Введем определения.

Определение 5. Система (1) называется полностью управляемой на множестве S при $h = h_0 > 0$, если из любого состояния $z^{\{0\}} \in S$ достижимы все состояния $z^* \in S$.

Определение 6. Состояние $z^* \in S$ системы (1) при $h = h_0 > 0$ называется достижимым из состояния $z^{\{0\}} \in S$, если существует допустимое управление $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, такое, что для решения $z = z(t)$ системы (1) с начальным условием $z(t_0) = z^{\{0\}}$ выполняются условия:

1) $z(t) \in S$ при $t \in [t_0, t_l]$; 2) $z(t_l) = z^*$, где $t_l = t_0 + lh_0$.

Аналогичные определения можно сформулировать для нелинейной дискретной системы (8), учитывая ее специфику.

Будем полагать, что при $h = h_0 > 0$ система (8) полностью управляема на множестве $K \subset R^{n+m}$, а система (1) полностью управляема на множестве $S \subset R^{n+m}$.

Тогда справедлива

Теорема 3. Если при $h = h_0 > 0$ система (1) полностью управляема на множестве S , а система (8) полностью управляема на множестве K , то $K \subset S$.

Пусть $U_0 = S_0 \times S^0$, где S_0 и S^0 – замкнутые подмножества окрестностей точек $z = 0$ и $u = 0$ соответственно. Учитывая особенности функций $f(x, y)$, $g(x, y, u)$ в системе (1), можно доказать, что при любом $h > 0$ справедлива

Теорема 4. Нелинейность $\xi(z, u, h)$ в системе (8) удовлетворяет условию Липшица по переменным z, u в любом замкнутом подмножестве U_0 окрестности точки $z = 0, u = 0$, т.е.

$$(15) \quad \left\| \xi \left(z_k^{(1)}, u_k^{(1)}, h \right) - \xi \left(z_k^{(2)}, u_k^{(2)}, h \right) \right\| \leq L \left(\left\| z_k^{(1)} - z_k^{(2)} \right\| + \left\| u_k^{(1)} - u_k^{(2)} \right\| \right),$$

где $(z_k^{(i)}, u_k^{(i)}) \in U_0$, $k = \overline{0, l-1}$, $i = 1, 2$, при этом постоянная Липшица L достаточно мала, если мал диаметр подмножества U_0 .

5. Существование и построение допустимого управления для системы (1)

Пусть система (10) полностью управляема. Поставим задачу построения допустимого управления $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, переводящего систему (1) из заданного начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}} \in R^{n+m}$ в заданное конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ и выясним вопрос полной управляемости системы (1) при $h = h_0 > 0$.

Пусть

$$m = \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1} B\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k) F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\|, \right. \\ \left. \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\|, \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k) F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\| \right\}$$

и в системе (8) при $h = h_0 > 0$ функция $\xi(z, u, h)$ удовлетворяет неравенству (15) на множестве $R^{n+m} \times R^q$, при этом постоянная Липшица L подчиняется неравенству

$$(16) \quad 0 < L < \frac{1}{ml(l+2)},$$

тогда имеет место

Теорема 5. Пусть система (10) полностью управляема и функция $\xi(z, u, h_0)$ в системе (8) удовлетворяет условию Липшица по переменным z, u на множестве $R^{n+m} \times R^q$, при этом постоянная Липшица отвечает условию (16). Тогда гибридная система (1) является полностью управляемой при $h = h_0$.

Рассмотрим вновь замкнутое подмножество $U_0 = S_0 \times S^0$ окрестности точки $z = 0, u = 0$, тогда согласно разделу 4 приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. Пусть система (10) полностью управляема на множестве S_0 и постоянная Липшица для функции $\xi(z, u, h_0)$ системы (8) на множестве U_0 удовлетворяет неравенству (16). Тогда для гибридной системы (1) при $h = h_0$ существует допустимое программное управление, переводящее ее из любого состояния $z(t_0) = z^{\{0\}} \in S_0$ в любое состояние $z(t_l) = z^{\{1\}} \in S_0$.

Исходя из доказательства теоремы 5, опишем алгоритм построения допустимого программного управления для системы (1) при $h = h_0 > 0$.

Алгоритм 1.

1. Убедиться в полной управляемости системы (10), т.е. проверить условие (11).

2. Построить для системы (10) согласно формулам (13) оптимальное управление $u_k^{(0)}$, $k = \overline{0, l-1}$, и соответствующее ему оптимальное движение $z_k^{(0)}$, $k = \overline{0, l}$.

3. Применить метод простой итерации для построения последовательностей оптимальных управлений $\{u_k^{(q)}\}$ и оптимальных движений $\{z_k^{(q)}\}$ систем

$$z_{k+1}^{(q)} = A_0 z_k^{(q)} + B u_k^{(q)} + \xi \left(z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)}, h_0 \right), \quad k = \overline{0, l-1}, \quad q = 1, 2, \dots,$$

где $z_k^{(0)}, u_k^{(0)}$ из п. 2, используя формулы (П.2)–(П.4) (см. Приложение).

4. Найти допустимое программное управление системы (1) при $h = h_0 > 0$:

$$u^*(t_k) = u_k^* = \lim_{q \rightarrow \infty} u_k^{(q)}, \quad k = \overline{0, l-1}.$$

Заметим, что в малой окрестности точки $x = 0, y = 0, u = 0$ условие (16) для функции $\xi(z, u, h_0)$ заведомо выполняется (см. теорему 4), поэтому для системы (1) при $h = h_0 > 0$ всегда можно построить допустимое управление, если состояния $z^{\{0\}}, z^{\{1\}}$ находятся в малой окрестности точки $x = 0, y = 0$ и выполняется условие первого пункта алгоритма 1.

Пример 2. Для нелинейной гибридной системы

$$(17) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = -x(t_{k+1}) + y(t_k) + 3u(t_k) + x(t_{k+1})y(t_k), & k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

построить допустимое программное управление, переводящее данную систему за три шага ($l = 3$) из состояния $z^{\{0\}} = [2 \ 1]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [1 \ 2]^\top$.

Система первого приближения равносильной нелинейной дискретной системы при $h_0 = \ln 2$ полностью управляема и имеет следующее оптимальное управление: $u_0^{(0)} = -7/36$, $u_1^{(0)} = 73/36$, $u_2^{(0)} = 10/9$ и соответствующее ему движение: $z_0^{(0)} = [2 \ 1]^\top$, $z_1^{(0)} = [6 \ -67/12]^\top$, $z_2^{(0)} = [5/6 \ -1/3]^\top$, $z_3^{(0)} = [1 \ 2]^\top$ (см. пример 1).

Равносильная системе (17) при $h = h_0$ дискретная система имеет вид

$$z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h_0), \quad k = 0, 1, 2,$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_k y_k + 2y_k^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда, применяя алгоритм 1, получим: на 49-ой итерации с точностью до 10^{-15} итерационный процесс сходится к управлению:

$$u^*(t_0) = -1,421310674166737, \quad u^*(t_1) = 7,208203932499369,$$

$$u^*(t_2) = 4,314757303333053.$$

Для сравнения: при переводе системы (17) при $h = h_0$ из состояния $z^{\{0\}} = [0,1 \ -0,02]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [0,03 \ 0,2]^\top$ за три шага итерационный процесс с точностью до 10^{-15} сходится на 11-ой итерации, значит, если состояния $z^{\{0\}}$ и $z^{\{1\}}$ системы (17) находятся в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, то итерационный процесс сходится быстрее.

Однако при переводе системы (17) при $h = h_0$ из состояния $z^{\{0\}} = [-2 \ 5]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [3 \ 4]^\top$ за три шага итерационный процесс расходится.

Рассмотрим вопросы существования и построения допустимого программного управления системы (1) в случае, когда условия теоремы 5 не выполняются. Для этого введем вспомогательную систему

$$(18) \quad z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

отличающуюся от системы (10) областью изменения k , и будем полагать, что эта система полностью управляема [7], что выполнимо, если полностью управляема система (10) ([26], с. 524).

6. Существование и построение допустимого управления для системы (1) с учетом стабилизации системы (18)

Согласно [10] итерационный процесс построения допустимого управления системы (8) при $h = h_0 > 0$ сходится, если функция $\xi(z, u, h_0)$ удовлетворяет глобальному условию Коши–Липшица по переменным z , u , при этом постоянная Липшица L достаточно мала. Невыполнение этого требования может привести к появлению быстрорастущих движений, стремящихся с большой скоростью к бесконечности, тогда итерационный процесс будет расходиться,

что подтверждает анализ системы (17) по переводу ее из состояния $z^{\{0\}} = [-2 \ 5]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [3 \ 4]^\top$ за три шага.

Одним из способов улучшения сходимости итерационного процесса служит предварительная стабилизация [27] системы, задаваемой равенством (8) при $h = h_0 > 0$, или, что то же самое, системы, задаваемой равенствами (1) при $h = h_0 > 0$, если полагать, что в этих системах $k = 0, 1, 2, \dots$ [7]. Стабилизация любой из этих систем сводится к стабилизации полностью управляемой системы (18), так как указанные три системы имеют одинаковое стабилизирующее управление [7].

Построим стабилизирующее управление $w(z_k) = Dz_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, D – постоянная матрица размера $q \times (n + m)$ системы (18), при котором начальное $z(t_0) = z^{\{0\}}$ и конечное $z(t_l) = z^{\{1\}}$ состояния попадают в область притяжения положения равновесия $z = 0$ системы

$$(19) \quad z_{k+1} = Az_k + Bv_k + \xi(z_k, Dz_k + v_k, h_0), \quad k = \overline{0, l-1}$$

при $v_k \equiv 0$, где $A = A_0 + BD$, $v_k \in R^q$ – вектор управления, что обеспечивает существование допустимого управления системы (8) при $h = h_0$ [10].

Пусть функция $\xi(z, Dz + v, h_0)$ в системе (19) удовлетворяет условию Липшица по переменным z , $Dz + v$ на множестве $R^{n+m} \times R^q$. Если найдена оценка постоянной Липшица L для функции $\xi(z, Dz + v, h_0)$ на $R^{n+m} \times R^q$ (см., например, [28]), то сравним ее с условием

$$(20) \quad 0 < L < \frac{1}{ml(1 + (\|D\| + 1)(l + 1))},$$

где

$$m = \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\|, \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\|, \right. \\ \left. \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}B\| \right\}, \\ S(k) = A^{l-k-1}B,$$

поскольку имеет место

Теорема 6. Пусть система (18) полностью управляема и стабилизирующее управление $w(z_k) = Dz_k$ системы (18) выбрано так, что постоянная Липшица для функции $\xi(z, Dz + v, h_0)$ в системе (19) удовлетворяет условию (20) при $(z, Dz + v) \in R^{n+m} \times R^q$. Тогда гибридная система (1) является полностью управляемой при $h = h_0$, и допустимое управление $u^(t_k)$, переводящее ее из любого состояния $z(t_0) = z^{\{0\}}$ в любое состояние $z(t_l) = z^{\{1\}}$, определяется равенством*

$$u^*(t_k) = w(z^*(t_k)) + v^*(t_k), \quad k = \overline{0, l-1},$$

где $v^*(t_k) = v_k^*$ и $z^*(t_k) = z_k^*$ – допустимое управление и соответствующее ему движение системы (19).

В таком случае, исходя из доказательства теоремы 6, составим следующий алгоритм построения допустимого управления для системы (1) при $h = h_0 > 0$.

Алгоритм 2.

1. Убедиться в полной управляемости системы (18) и построить стабилизирующее управление $w(z_k) = Dz_k$ для этой системы.

2. Построить для системы $z_{k+1} = Az_k + Bv_k$, где $A = A_0 + BD$, $k = \overline{0, l-1}$, согласно формулам (13) оптимальное управление $v_k^{(0)}$, $k = \overline{0, l-1}$, и соответствующее ему оптимальное движение $z_k^{(0)}$, $k = \overline{0, l}$.

3. Применить метод простой итерации для построения последовательностей оптимальных управлений $\{v_k^{(q)}\}$ и оптимальных движений $\{z_k^{(q)}\}$ систем $z_{k+1}^{(q)} = Az_k^{(q)} + Bv_k^{(q)} + \xi(z_k^{(q-1)}, Dz_k^{(q-1)} + v_k^{(q-1)}, h_0)$, $k = \overline{0, l-1}$, $q = 1, 2, \dots$, где $z_k^{(0)}$, $v_k^{(0)}$ из п. 2, используя формулы (П.12)–(П.14) (см. Приложение).

4. Найти $v^*(t_k) = \lim_{q \rightarrow \infty} v_k^{(q)}$, $k = \overline{0, l-1}$; $z_k^* = \lim_{q \rightarrow \infty} z_k^{(q)}$, $k = \overline{0, l}$.

5. Построить допустимое программное управление системы (1) при $h = h_0 > 0$ по формуле $u^*(t_k) = w(z_k^*) + v^*(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$.

Пример 3. а) Поставим задачу перевода системы (17) при $h_0 = \ln 2$ из состояния $z(t_0) = z^{\{0\}} = [-2 \ 5]^\top$ в состояние $z(t_3) = z^{\{1\}} = [3 \ 4]^\top$ (см. пример 2).

Напомним, что алгоритм 1 не помог решить данную задачу. Применим алгоритм 2 и построим для соответствующей системы (18) стабилизирующее управление, при котором матрица A имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = 0,001$. Тогда на 27-ой итерации с точностью до 10^{-15} допустимое управление системы (17) примет вид:

$$u_0^* = -2,459959701325314, \quad u_1^* = -404,806942255234989,$$

$$u_2^* = 73,986989056064154.$$

Заметим, что при $\lambda_{1,2} = 0,0001$ итерационный процесс с точностью до 10^{-15} сходится на 12-ой итерации.

б) Рассмотрим нелинейную гибридную систему

$$(21) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t_k) + y^2(t_k), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = -x(t_{k+1}) - y(t_k) + 2u(t_k) + u(t_k)y(t_k), & k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Эта система при $h_0 = \ln \frac{3}{2}$ равносильна нелинейной дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}y_k^2, \\ y_{k+1} = -\frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}y_k + 2u_k - \frac{1}{2}y_k^2 + u_k y_k, & k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Система первого приближения для данной дискретной системы полностью управляема. Если поставить задачу перевода системы (21) из состояния $z(t_0) = z^{\{0\}} = [0, 1 \quad -0, 2]^\top$ в состояние $z(t_5) = z^{\{1\}} = [0, 4 \quad 0, 6]^\top$, то алгоритм 1

не поможет решить данную задачу. Применяя алгоритм 2, получим следующие результаты:

1) при $\lambda_1 = 0,1$ и $\lambda_2 = 0,2$ итерационный процесс сходится на 80-ой итерации, и с точностью до 10^{-18} получим допустимое управление

$$u^*(t_0) = 0,324385159473078927, \quad u^*(t_1) = 0,501724268550236387,$$

$$u^*(t_2) = 0,502341831544914188, \quad u^*(t_3) = 0,399479636515260206,$$

$$u^*(t_4) = 0,544220425724104726;$$

2) при $\lambda_1 = 0,2$ и $\lambda_2 = 0,3$ итерационный процесс расходится;

3) при $\lambda_1 = 0,1$ и $\lambda_2 = 0,3$ итерационный процесс с точностью до 10^{-18} сходится на 88-ой итерации;

4) при $\lambda_1 = 0,01$ и $\lambda_2 = 0,1$ итерационный процесс расходится, как и при $\lambda_1 = 0,01$, $\lambda_2 = -0,001$, что означает: данным $\lambda_{1,2}$ соответствуют матрицы D , при которых не выполняется условие (20).

Таким образом, в частных случаях (см. пример 3(a)) стабилизация соответствующей системы (18) при условии приближения значений $\lambda_{1,2}$ к нулю ускоряет сходимость итерационного процесса, однако в общем случае это неверно.

7. Достаточные признаки оптимальности управления гибридной системой (1)

Руководствуясь приведенными в разделах 5 и 6 алгоритмами, можно построить допустимое управление системы (1), при этом возникают вопросы. Является ли оно оптимальным? Каковы достаточные условия оптимальности управления системой (1)? Как построить оптимальное управление для такой системы?

Для поиска ответов на данные вопросы заранее будем полагать, что система (1) полностью управляема при некотором $h = h_0 > 0$ и в силу равносильности систем (1) и (8) воспользуемся достаточными условиями оптимальности для управляемых дискретных процессов [19], преломляя их к задаче поиска оптимального процесса с фиксированным правым концом траектории.

Пусть $M = \{(z_k, u_k) : k = \overline{0, l-1}\}$ – множество *допустимых процессов* системы (8) при $h = h_0 > 0$, т.е. пар (z_k, u_k) , удовлетворяющих при $h = h_0 > 0$ данной системе и краевым условиям $z_0 = z^{\{0\}}$, $z_l = z^{\{1\}}$.

Будем полагать, что качество процесса управления системой (8) при $h = h_0 > 0$ в общем случае оценивается функционалом

$$(22) \quad I(z_k, u_k) = \sum_{k=0}^{l-1} f^0(z_k, u_k),$$

при этом функция $f^0(z, u)$ дифференцируема по z и u на множестве M .

Процесс $(z_k, u_k) \in M$ назовем *оптимальным*, если $I(z_k, u_k) \rightarrow \min$.

Введем обозначение: $\tilde{f}(z_k, u_k) = A_0 z_k + B u_k + \xi(\overline{z_k, u_k, h_0})$, тогда система (8) при $h = h_0 > 0$ примет вид $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, где функция $\tilde{f}(z, u)$ непрерывно дифференцируема по z и u на множестве $R^{n+m} \times R^q$.

Пусть D – множество возможных процессов [19] системы $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, т.е. пар (z_k, u_k) , удовлетворяющих этой системе, тогда $M \subset D$. Следуя [19], введем вспомогательные математические конструкции:

1) функцию

$$(23) \quad R(z_k, u_k) = \varphi(\tilde{f}(z_k, u_k)) - \varphi(z_k) - f^0(z_k, u_k),$$

где $\varphi(z)$ – некоторая функция,

2) функционал

$$(24) \quad L(z_k, u_k, \varphi) = - \sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k) + \varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}})$$

и рассмотрим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Для любой функции $\varphi(z)$ значения функционалов (22) и (24) совпадают на множестве M , т.е. $L(z_k, u_k, \varphi) = I(z_k, u_k)$ при $(z_k, u_k) \in M$.

Лемма 2. Если допустимый процесс $(z_k^, u_k^*) \in M$ и некоторая функция $\varphi(z)$ удовлетворяют условию*

$$(25) \quad R(z_k^*, u_k^*) = \max_{(z_k, u_k) \in D} R(z_k, u_k), \quad k = \overline{0, l-1},$$

то

$$L(z_k^*, u_k^*, \varphi) = \min_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi), \quad k = \overline{0, l-1}.$$

Пусть функционал (22) принимает вид (5), т.е. $I(z_k, u_k) = I(u_k) = \sum_{k=0}^{l-1} u_k^\top u_k$, тогда справедлива

Теорема 7. Пусть допустимый процесс $(z_k^, u_k^*) \in M$ и некоторая функция $\varphi(z)$ удовлетворяют условию (25), при этом $f^0(z_k, u_k) = u_k^\top u_k$. Тогда $u^*(t_k) = u_k^*$ – оптимальное управление системы (1) при $h = h_0$.*

Задача о минимуме функционала может ставиться в двух вариантах [19]:

1) определить оптимальный процесс (z_k^*, u_k^*) , минимизирующий функционал (22), тогда если $f^0(z_k, u_k) = u_k^\top u_k$, то $u^*(t_k) = u_k^*$ – оптимальное управление системы (1) при $h = h_0 > 0$;

2) определить минимизирующую последовательность допустимых процессов $\{z_k^{(s)}, u_k^{(s)}\} \subset M$, $s = 1, 2, \dots$, на которой функционал (22) стремится к своей точной нижней грани, т.е.

$$I(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}) \rightarrow \inf_{(z_k, u_k) \in M} I(z_k, u_k) \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

тогда если $f^0(z_k, u_k) = u_k^\top u_k$, то $\{u^{(s)}(t_k)\}$ – минимизирующая для функционала (5) последовательность допустимых управлений системы (1) при $h = h_0 > 0$, на которой он стремится к своей точной нижней грани.

Как правило, задача оптимального управления ставится в первом варианте, но не всегда имеет решение, так как в общем случае функционал (22) может не иметь наименьшего значения на множестве M ; при этом задача, поставленная во втором варианте, всегда имеет решение, если функционал (22) ограничен снизу [19].

Функционал (5) неотрицателен, т.е. ограничен снизу, значит, минимизирующая для функционала (5) последовательность допустимых управлений системы (1) существует, при этом справедлива

Теорема 8. Пусть $\{z_k^{(s)}, u_k^{(s)}\} \subset M$, $s = 1, 2, \dots$ – последовательность допустимых процессов системы $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, и существует функция $\varphi(z)$, которая при $s \rightarrow \infty$ удовлетворяет условию

$$R(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}) \rightarrow \sup_{(z_k, u_k) \in D} R(z_k, u_k), \quad k = \overline{0, l-1},$$

причем $f^0(z_k, u_k) = u_k^\top u_k$. Тогда $\{u^{(s)}(t_k)\}$ – минимизирующая для функционала (5) последовательность допустимых управлений системы (1) при $h = h_0$, на которой он стремится к своей точной нижней грани.

Пусть известно, что система (1) при $h = h_0 > 0$ имеет оптимальное управление. Выясним вопрос построения такого управления.

8. Построение оптимального управления для гибридной системы (1)

В силу равносильности систем (1) и (8) поставим задачу поиска для системы $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, допустимого процесса (z_k^*, u_k^*) , на котором минимизируется функционал (22) (или соответствующий функционал (5)), не вводя дополнительных ограничений на управление $u_k \in R^q$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом Лагранжа для дискретных процессов управления с одномерным аргументом и неограниченным управлением [19], а также достаточными условиями оптимальности, изложенными в теореме 7.

Пусть $\varphi(z)$ – дифференцируемая по z функция на множестве R^{n+m} . Тогда необходимыми условиями максимума функции $R(z, u)$ по z, u являются условия:

$$(26) \quad \frac{\partial R(z_k^*, u_k^*)}{\partial z_{k,i}} = 0, \quad i = \overline{1, n+m}, \quad k = \overline{0, l-1},$$

$$(27) \quad \frac{\partial R(z_k^*, u_k^*)}{\partial u_{k,j}} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad k = \overline{0, l-1}.$$

Пусть вектор-функция $\psi(k) = (\psi_1(k), \psi_2(k), \dots, \psi_{n+m}(k))$, $k = \overline{0, l-1}$, такова, что

$$\psi_i(k) = \frac{\partial \varphi(z_k^*)}{\partial z_{k,i}}, \quad i = \overline{1, n+m},$$

составим гамильтониан задачи

$$H(\psi(k), z_k, u_k) = \sum_{i=1}^{n+m} \psi_i(k) \tilde{f}_i(z_k, u_k) - f^0(z_k, u_k).$$

Тогда, учитывая (23), равенство $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$ и последние два равенства, можно доказать, что условия (26) и (27) примут соответственно вид

$$(28) \quad \psi_i(k) = \frac{\partial H(\psi(k+1), z_k^*, u_k^*)}{\partial z_{k,i}}, \quad i = \overline{1, n+m},$$

и

$$(29) \quad \frac{\partial H(\psi(k+1), z_k^*, u_k^*)}{\partial u_{k,j}} = 0, \quad j = \overline{1, q}.$$

Равенства (28) и (29) являются необходимыми условиями оптимальности дискретных процессов управления с одномерным аргументом [19], при этом равенство (28) называется сопряженной системой конечно-разностных уравнений [29].

Полученные условия позволят выделить из множества допустимых процессов системы $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, подмножество процессов, которые потенциально могут быть оптимальными [19]. Если при этом известно, что оптимальный процесс существует и полученное подмножество состоит из одного элемента, то он и будет искомым оптимальным процессом. В таком случае получим следующий алгоритм построения оптимального управления для системы (1) при $h = h_0 > 0$.

Алгоритм 3.

1. Выполнить переход от системы (1) при $h = h_0 > 0$ к системе $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$.
2. Составить гамильтониан задачи и условия (29).
3. Найти из условий (29) управление u_k^* с параметрами $\psi(k+1)$, z_k^* , $k = \overline{0, l-1}$.
4. Составить сопряженную систему (28).
5. Найти решения $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{l-1}^*$ системы $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$ с учетом условия $z_0^* = z^{\{0\}}$ и найденного управления $u_k^* = \{u_{k,j}^*(\psi(k+1), z_k^*)\}$, $k = \overline{0, l-1}$, $j = \overline{1, q}$.
6. Решить совместно сопряженную систему с системой $z_l^* = z^{\{1\}}$, учитывая решения $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{l-1}^*$, и найти $\psi_i(k+1)$, z_k^* , u_k^* , $i = \overline{1, n+m}$, $k = \overline{0, l-1}$.
7. Если полученное решение единственно, то $u^*(t_k) = u_k^*$ – оптимальное управление системы (1) при $h = h_0$, в противном случае – найти значение функционала (5) на найденных решениях и выбрать управление, соответствующее решению, минимизирующему этот функционал.

Пример 4. Построить оптимальное управление для системы (17) с шагом дискретизации $h_0 = \ln 2$, переводящее ее из состояния $z(t_0) = [2 \ 1]^\top$ в состояние $z(t_3) = [1 \ 2]^\top$ и минимизирующее функционал (5).

Напомним, что система (17) при $h_0 = \ln 2$ равносильна нелинейной дискретной системе (см. пример 2)

$$(30) \quad \begin{cases} x_{k+1} = 2x_k + 2y_k, \\ y_{k+1} = -2x_k - y_k + 3u_k + 2x_k y_k + 2y_k^2, \quad k = 0, 1, 2, \end{cases}$$

и задача сводится к построению оптимального управления для системы (30) по переводу ее из состояния $z_0 = [x_0 \ y_0]^\top = [2 \ 1]^\top$ в состояние $z_3 = [x_3 \ y_3]^\top = [1 \ 2]^\top$.

Согласно (5) $f^0(z_k, y_k) = u_k^2$, так как $u_k \in R^1$, при этом множество допустимых процессов M для системы (30) компактно, тогда поставленная задача имеет решение, так как непрерывный функционал (5) достигнет на M своего наименьшего значения.

Заметим, что $z_{k,1} = x_k$, $z_{k,2} = y_k$, тогда гамильтониан задачи примет вид

$$H(\psi(k), z_k, u_k) = \psi_1(k)(2x_k + 2y_k) + \psi_2(k)(-2x_k - y_k + 3u_k + 2x_k y_k + 2y_k^2) - u_k^2,$$

и из условия (29) найдем

$$(31) \quad u_k^* = \frac{3}{2}\psi_2(k+1), \quad k = 0, 1, 2.$$

Согласно (28) получим сопряженную систему

$$(32) \quad \begin{cases} \psi_1(k) = 2\psi_1(k+1) + 2\psi_2(k+1)(y_k^* - 1), \\ \psi_2(k) = 2\psi_1(k+1) + \psi_2(k+1)(4y_k^* + 2x_k^* - 1), \quad k = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Учитывая первое краевое условие, равенства (30) и (31), найдем решения

$$\begin{cases} x_1^* = 6, \\ y_1^* = 1 + 4,5\psi_2(1); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2^* = 14 + 9\psi_2(1), \\ y_2^* = 40,5\psi_2^2(1) + 67,5\psi_2(1) + 4,5\psi_2(2) + 1, \end{cases}$$

тогда система $z_3^* = [1 \ 2]^\top$ примет вид

$$\begin{cases} 29 + 153\psi_2(1) + 81\psi_2^2(1) + 9\psi_2(2) = 0, \\ 729\psi_2^3(1) + 2308,5\psi_2^2(1) + 1822,5\psi_2(1) + 121,5\psi_2(2) + \\ + 4,5\psi_2(3) + 81\psi_2(1)\psi_2(2) + 2y_2^{*2} = 3. \end{cases}$$

Учитывая первое равенство в (32), (31) и полученные решения, найдем

$$(33) \quad \psi_1(2) = 2\psi_1(3) + 2\psi_2(3)(40,5\psi_2^2(1) + 67,5\psi_2(1) + 4,5\psi_2(2)),$$

учитывая второе равенство в (32), найдем $\psi_2(1) = 2\psi_1(2) + \psi_2(2)(15 + 18\psi_2(1))$, тогда

$$(34) \quad \psi_1(2) = 0,5\psi_2(1) - \psi_2(2)(7,5 + 9\psi_2(1))$$

и $\psi_2(2) = 2\psi_1(3) + \psi_2(3)(162\psi_2^2(1) + 288\psi_2(1) + 18\psi_2(2) + 31)$, следовательно,

$$(35) \quad \psi_1(3) = 0,5\psi_2(2) - \psi_2(3)(81\psi_2^2(1) + 153\psi_2(1) + 15,5).$$

Подставим в (33) условия (34), (35) и, учитывая первое уравнение в системе $z_3^* = [1 \ 2]^\top$, найдем

$$(36) \quad \psi_2(2)(8,5 + 9\psi_2(1)) - 0,5\psi_2(1) = 2\psi_2(3).$$

Решая совместно (36) с системой $z_3^* = [1 \ 2]^\top$, получим три решения и соответственно три управления, удовлетворяющих равенству (31), системе (30) и краевым условиям, при этом только одно из них является оптимальным, в том числе и для системы (17) при $h_0 = \ln 2$, поскольку минимизирует функционал (5), и с точностью до 10^{-15} оно имеет вид $u^*(t_0) = -2,498184215120807$, $u^*(t_1) = 0,190252087647811$, $u^*(t_2) = 0,007263139516772$.

9. Заключение

В работе установлены достаточные признаки полной управляемости, существования допустимых и оптимального управлений для нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации. Представлены алгоритмы построения допустимых и оптимального программных управлений для указанных систем на конечном промежутке времени. Эффективность представленных алгоритмов подтверждается приведенными примерами.

Установленные признаки и алгоритмы позволяют решать задачи управления и устойчивого функционирования для реальных систем управления, наиболее актуальных в авиационной, технической и экономической областях деятельности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Системы (1) и (8) равносильны, и между их решениями существует связь ([7], с. 45), на основании которой, исходя из определений 1 и 4, следует справедливость данного утверждения.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из полной управляемости системы (10) согласно [11] следует существование оптимального управления для этой системы, определяемого формулами (13), которое переводит систему (10) из состояния $z_0 = z^{\{0\}}$ в состояние $z_l = z^{\{1\}}$ и минимизирует функционал (5).

А так как системы (10) и (12) равносильны и имеют одинаковый критерий качества процесса управления, то оптимальное управление для системы (10) будет являться оптимальным и для системы (12).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Исходя из определений 5 и 6, равносильности систем (1) и (8) множества S и K можно описать следующим образом: $S = \{(x(t), y_k) : t \in [t_k, t_{k+1}), k = \overline{0, l-1}\} \cup \{(x(t_l), y_l)\}$, где $x(t_k) = x_k$; $K = \{(x_k, y_k) : k = \overline{0, l}\}$. Следовательно, $K \subset S$, и теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Гладкие нелинейности $a(x, y)$, $b(x, y, u)$ в разложениях функций $f(x, y)$ и $g(x, y, u)$ начинаются с квадратичных по x, y и по x, y, u слагаемых соответственно, тогда на множествах S_0 и U_0 малого диаметра они удовлетворяют условию Липшица с достаточно малыми постоянными Липшица L_1 и L_2 соответственно. Функция $\xi(z, u, h)$ непрерывно дифференцируема на множестве U_0 , тогда для нее выполняется условие (15). А поскольку компоненты $\varepsilon(x, y, h)$, $\delta(x, y, u, h)$ функции $\xi(z, u, h)$ линейно выражаются через функции $a(x, y)$ и $b(x, y, u)$ (см. (6), (7)), тогда в условии (15) постоянная Липшица L будет выражаться через постоянные L_1 и L_2 , при этом будет достаточно малой.

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Согласно [11] из полной управляемости системы (10) следует существование оптимального управления $u_k^{(0)}$, определяемого формулами (13), переводящего эту систему из любого состояния $z_0 = z^{\{0\}} \in R^{n+m}$ в любое состояние $z_l = z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ и минимизирующего функционал (5). Тогда $z_k^{(0)}$ ($k = \overline{0, l}$) – оптимальное движение системы (10), порождаемое управлением $u_k^{(0)}$, $k = \overline{0, l-1}$.

Построим допустимое управление системы (8) при $h = h_0$, применяя метод простой итерации к решению задач оптимального управления

$$(П.1) \quad z_{k+1}^{(q)} = A_0 z_k^{(q)} + B u_k^{(q)} + \xi \left(z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)}, h_0 \right), \quad k = \overline{0, l-1}, \quad q = 1, 2, \dots,$$

$$I(u^{(q)}) = \sum_{k=0}^{l-1} u_k^{(q)\top} u_k^{(q)} \rightarrow \min$$

по переводу систем (П.1) из состояния $z_0 = z^{\{0\}}$ в состояние $z_l = z^{\{1\}}$, где $z_k^{(0)}$, $u_k^{(0)}$ – оптимальные движение и управление системы (10). Тогда, используя [11], получим последовательность оптимальных управлений $\{u_k^{(q)}\}$, $q = 1, 2, \dots$, определяемых формулами

$$(П.2) \quad u_k^{(q)} = S^\top(k) F^+(0) d^{(q)} \left(0, z^{\{0\}} \right), \quad k = \overline{0, l-1},$$

$$(П.3) \quad d^{(q)} \left(0, z^{\{0\}} \right) = z^{\{1\}} - A_0^l z^{\{0\}} - \sum_{i=0}^{l-1} A_0^{l-i-1} \xi \left(z_i^{(q-1)}, u_i^{(q-1)}, h_0 \right),$$

и последовательность оптимальных движений $\{z_k^{(q)}\}$, $q = 1, 2, \dots$,

$$(П.4) \quad z_k^{(q)} = A_0^k z^{\{0\}} + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} B u_i^{(q)} + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} \xi \left(z_i^{(q-1)}, u_i^{(q-1)}, h_0 \right),$$

$$k = \overline{0, l},$$

при этом $z_0^{(q)} = z^{\{0\}}$, $z_l^{(q)} = z^{\{1\}}$.

Действительно, из (П.4) следует, что $z_0^{(q)} = z^{\{0\}}$, а исходя из ([11], с. 13–14), можно доказать, что для того, чтобы управление $u_k^{(q)}$ переводило системы (П.1) из состояния $z_0 = z^{\{0\}}$ в состояние $z_l = z^{\{1\}}$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=0}^{l-1} S(k) u_k^{(q)} = d^{(q)}(0, z^{\{0\}})$, где $S(k) = A_0^{l-k-1} B$. Тогда, учитывая (П.4) и (П.3), получим $z_l^{(q)} = z^{\{1\}}$.

Для доказательства сходимости итерационного процесса будем рассматривать пару функций $\{z_k^{(q)}, u_k^{(q)}\}$ как элемент евклидова пространства R^{n+m+q} с нормой

$$(П.5) \quad \rho \left(\{z_k^{(q)}, u_k^{(q)}\} \right) = \max_{0 \leq k \leq l} \|z_k^{(q)}\| + \max_{0 \leq k \leq l-1} \|u_k^{(q)}\|.$$

Используя (П.2), (П.3), свойства нормы, неравенство (15) и (П.5), получим оценку

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq k \leq l-1} \|u_k^{(q)} - u_k^{(q-1)}\| \leq \\ & \leq lL \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k) F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\| \times \\ & \times \rho \left(\{z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)}\} - \{z_k^{(q-2)}, u_k^{(q-2)}\} \right). \end{aligned}$$

Аналогично, используя (П.4), свойства нормы, неравенство (15), оценку выше и (П.5), получим оценку

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq k \leq l} \|z_k^{(q)} - z_k^{(q-1)}\| \leq \\ & \leq lL \left(l \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1} B\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k) F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\| + \right. \\ & \left. + \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\| \right) \rho \left(\{z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)}\} - \{z_k^{(q-2)}, u_k^{(q-2)}\} \right). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} m = \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1} B\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k) F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\|, \right. \\ \left. \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\|, \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k) F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A_0^{l-k-1}\| \right\}. \end{aligned}$$

Сложим полученные оценки и тогда согласно (П.5) установим

$$(П.6) \quad \begin{aligned} & \rho \left(\left\{ z_k^{(q)}, u_k^{(q)} \right\} - \left\{ z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)} \right\} \right) \leq \\ & \leq l L m (l+2) \rho \left(\left\{ z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)} \right\} - \left\{ z_k^{(q-2)}, u_k^{(q-2)} \right\} \right). \end{aligned}$$

Из условия (16) получим: $0 < l L m (l+2) < 1$, тогда последовательность вектор-функций $\{z_k^{(q)}, u_k^{(q)}\}$ равномерно по k сходится к некоторой вектор-функции $\{z_k^*, u_k^*\}$, и оператор $F(z, u) : R^{n+m+q} \rightarrow R^{n+m+q}$, определяемый формулами (П.2)–(П.4), является сжимающим. Согласно принципу сжимающих отображений он имеет единственную неподвижную точку, которой и является предельная вектор-функция $\{z_k^*, u_k^*\}$, причем

$$(П.7) \quad z_k^* = \lim_{q \rightarrow \infty} z_k^{(q)}, \quad u_k^* = \lim_{q \rightarrow \infty} u_k^{(q)},$$

$$(П.8) \quad u_k^* = S^T(k) F^+(0) \left(z^{\{1\}} - A_0^l z^{\{0\}} - \sum_{i=0}^{l-1} A_0^{l-i-1} \xi(z_i^*, u_i^*, h_0) \right), \quad k = \overline{0, l-1},$$

$$(П.9) \quad z_k^* = A_0^k z^{\{0\}} + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} B u_i^* + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} \xi(z_i^*, u_i^*, h_0), \quad k = \overline{0, l},$$

при этом из (П.7) следует, что $z_0^* = z_0$, $z_l^* = z_l$.

Подстановкой (П.8) при $k = 0, 1, \dots, l-1$ в (П.9) при $k = l$ можно так же убедиться, что $z_l^* = z_l$, если произведение $F(0)F^+(0)$ действует как единичная матрица, что верно, так как $\sum_{k=0}^{l-1} S(k)u_k^{(q)} = d^{(q)}(0, z^{\{0\}})$.

В силу равносильности систем (1) и (8) найденное допустимое управление $u_k^* = u^*(t_k)$ для системы (8) при $h = h_0$ является и допустимым управлением для системы (1) при $h = h_0$. А так как для любых состояний $z^{\{0\}}, z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ можно построить допустимое управление системы (8) при $h = h_0$, то система (8) при $h = h_0$ является полностью управляемой. Тогда из теоремы 1 следует, что система (1) полностью управляема при $h = h_0$, и теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Из полной управляемости системы (18) следует ее стабилизируемость [7]. Подберем для системы (18) стабилизирующее управление $w(z_k) = D z_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) так, чтобы все собственные значения матрицы $A = A_0 + B D$ находились внутри единичного круга [7], тогда линейная система

$$(П.10) \quad z_{k+1} = A z_k + B v_k, \quad k = \overline{0, l-1}$$

является полностью управляемой [10, 13].

Применяя формулы (13) теоремы 2, построим оптимальное управление $v_k^{(0)}$ для линейной системы (П.10), переводящее эту систему из любого состояния

$z_0 = z^{\{0\}}$ в любое состояние $z_l = z^{\{1\}}$ при условии $I(v^{(0)}) \rightarrow \min$, где $I(v^{(0)})$ – функционал (5) от управления $v_k^{(0)}$, тогда $z_k^{(0)}$ – соответствующее этому управлению оптимальное движение. Далее применим метод простой итерации для построения допустимого управления системы (19) по переводу ее из состояния $z_0 = z^{\{0\}}$ в состояние $z_l = z^{\{1\}}$ путем решения соответствующих задач оптимального управления

$$(П.11) \quad \begin{aligned} z_{k+1}^{(q)} &= Az_k^{(q)} + Bv_k^{(q)} + \xi \left(z_k^{(q-1)}, Dz_k^{(q-1)} + v_k^{(q-1)}, h_0 \right), \\ k &= \overline{0, l-1}, \quad q = 1, 2, \dots, \\ I(v^{(q)}) &= \sum_{k=0}^{l-1} v_k^{(q)\top} v_k^{(q)} \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где $z_k^{(0)}, v_k^{(0)}$ – оптимальные движение и управление системы (П.10).

В результате получим последовательности оптимальных управлений $\{v_k^{(q)}\}$ и оптимальных движений $\{z_k^{(q)}\}$, $q = 1, 2, \dots$:

$$(П.12) \quad v_k^{(q)} = S^\top(k)F^+(0)d^{(q)}(0, z^{\{0\}}), \quad \text{где } S(k) = A^{l-k-1}B, \quad k = \overline{0, l-1},$$

$$(П.13) \quad d^{(q)}(0, z^{\{0\}}) = z^{\{1\}} - A^l z^{\{0\}} - \sum_{i=0}^{l-1} A^{l-i-1} \xi \left(z_i^{(q-1)}, Dz_i^{(q-1)} + v_i^{(q-1)}, h_0 \right),$$

$$(П.14) \quad \begin{aligned} z_k^{(q)} &= A^k z^{\{0\}} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B v_i^{(q)} + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} \xi \left(z_i^{(q-1)}, Dz_i^{(q-1)} + v_i^{(q-1)}, h_0 \right), \quad k = \overline{0, l}, \end{aligned}$$

при этом $z_0^{(q)} = z^{\{0\}} = z_0$, $z_l^{(q)} = z^{\{1\}} = z_l$ при $q = 1, 2, \dots$.

Для обоснования сходимости итерационного процесса рассмотрим пару функций $\{z_k^{(q)}, v_k^{(q)}\}$ как элемент евклидова пространства R^{n+m+q} с нормой

$$(П.15) \quad \rho \left(\left\{ z_k^{(q)}, v_k^{(q)} \right\} \right) = (\|D\| + 1) \max_{0 \leq k \leq l} \|z_k^{(q)}\| + \max_{0 \leq k \leq l-1} \|v_k^{(q)}\|.$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 5, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq k \leq l-1} \|v_k^{(q)} - v_k^{(q-1)}\| \leq \\ &\leq lL \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\| \rho \left(\left\{ z_k^{(q-1)}, v_k^{(q-1)} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ z_k^{(q-2)}, v_k^{(q-2)} \right\} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max_{0 \leq k \leq l} \|z_k^{(q)} - z_k^{(q-1)}\| \leq \\
& \leq lL \left(l \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}B\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\| + \right. \\
& \quad \left. + \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\| \right) \rho \left(\left\{ z_k^{(q-1)}, v_k^{(q-1)} \right\} - \left\{ z_k^{(q-2)}, v_k^{(q-2)} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
m = \max & \left\{ \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\|, \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\|, \right. \\
& \left. \max_{0 \leq k \leq l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}\| \max_{0 \leq k \leq l-1} \|A^{l-k-1}B\| \right\}.
\end{aligned}$$

Сложим первую оценку с умноженной на $(\|D\| + 1)$ второй оценкой, тогда, учитывая (П.15), получим

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\left\{ z_k^{(q)}, v_k^{(q)} \right\} - \left\{ z_k^{(q-1)}, v_k^{(q-1)} \right\} \right) \leq \\
(П.16) \quad & \leq Llm(1 + (l + 1)(\|D\| + 1)) \rho \left(\left\{ z_k^{(q-1)}, v_k^{(q-1)} \right\} - \left\{ z_k^{(q-2)}, v_k^{(q-2)} \right\} \right).
\end{aligned}$$

При выполнении условия (20) установим: $0 < Llm(1 + (l + 1)(\|D\| + 1)) < 1$, следовательно, последовательность вектор-функций $\{z_k^{(q)}, v_k^{(q)}\}$ равномерно по k сходится к некоторой вектор-функции $\{z_k^*, v_k^*\}$, и оператор $F(z, v): R^{n+m+q} \rightarrow R^{n+m+q}$, определяемый формулами (П.12)–(П.14), является сжимающим. Согласно принципу сжимающих отображений он имеет единственную неподвижную точку, которой и является вектор-функция $\{z_k^*, v_k^*\}$. При этом $z_k^* = \lim_{q \rightarrow \infty} z_k^{(q)}$, $v_k^* = \lim_{q \rightarrow \infty} v_k^{(q)}$, и

$$\begin{aligned}
v_k^* &= S^\top(k)F^+(0) \left(z^{\{l\}} - A^l z^{\{0\}} - \sum_{i=0}^{l-1} A^{l-i-1} \xi(z_i^*, Dz_i^* + v_i^*, h_0) \right), \quad k = \overline{0, l-1}, \\
z_k^* &= A^k z^{\{0\}} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B v_i^* + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} \xi(z_i^*, Dz_i^* + v_i^*, h_0), \quad k = \overline{0, l}
\end{aligned}$$

– допустимое управление и соответствующее ему движение системы (19).

При $h = h_0$ система (8) имеет вид $z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h_0)$, $k = \overline{0, l-1}$, подставим в нее управление $u_k^* = D z_k^* + v_k^*$ и движение z_k^* , $k = \overline{0, l-1}$. Тогда получим

$$z_{k+1}^* = A z_k^* + B v_k^* + \xi(z_k^*, D z_k^* + v_k^*, h_0), \quad k = \overline{0, l-1},$$

т.е. систему (19) при $z_k = z_k^*$, $v_k = v_k^*$, при этом $z_0^* = z^{\{0\}} = z_0$, $z_l^* = z^{\{1\}} = z_l$. Значит, $u_k^* = w(z_k^*) + v_k^*$ ($k = \overline{0, l-1}$) – допустимое управление системы (8)

при $h = h_0$, а в силу равносильности систем (1) и (8) оно является искомым допустимым управлением и для системы (1) при $h = h_0$, при этом система (1) является полностью управляемой при $h = h_0$, и теорема 6 доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть $(z_k, u_k) \in M$. Учитывая равенства (24), (23), $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, краевые условия $z_0 = z^{\{0\}}$, $z_l = z^{\{1\}}$, получим:

$$\begin{aligned} L(z_k, u_k, \varphi) &= - \sum_{k=0}^{l-1} \left(\varphi \left(\tilde{f}(z_k, u_k) \right) - \varphi(z_k) - f^0(z_k, u_k) \right) + \varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) = \\ &= - \sum_{k=0}^{l-1} \left(\varphi(z_{k+1}) - \varphi(z_k) - f^0(z_k, u_k) \right) + \varphi(z_l) - \varphi(z_0) = \\ &= -\varphi(z_1) + \varphi(z_0) + f^0(z_0, u_0) - \varphi(z_2) + \varphi(z_1) + f^0(z_1, u_1) - \dots - \varphi(z_{l-1}) + \\ &+ \varphi(z_{l-2}) + f^0(z_{l-2}, u_{l-2}) - \varphi(z_l) + \varphi(z_{l-1}) + f^0(z_{l-1}, u_{l-1}) + \varphi(z_l) - \varphi(z_0) = \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} f^0(z_k, u_k) = I(z_k, u_k), \end{aligned}$$

и лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Доказательство данной леммы опирается на теорему 5.1 из [19], которая применительно к минимизации функционала (22) утверждает: процесс (z_k^*, u_k^*) является оптимальным в том и только том случае, если

$$f^0(z_k^*, u_k^*) = \min_{(z_k, u_k) \in D} f^0(z_k, u_k), \quad k = \overline{0, l-1}.$$

Поскольку $\varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) \equiv \text{const}$, то из равенства (24) следует, что на минимизацию функционала $L(z_k, u_k, \varphi)$ влияет лишь выражение $\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k)$. Тогда, учитывая равенство (25) и применяя теорему 5.1 из [19] к функционалу (24), получим:

$$\begin{aligned} - \sum_{k=0}^{l-1} R(z_k^*, u_k^*) &= \min_{(z_k, u_k) \in D} \left(- \sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k) \right) \text{ и} \\ \min_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi) &= \min_{(z_k, u_k) \in D} \left(- \sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k) \right) + \varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) = \\ &= - \sum_{k=0}^{l-1} R(z_k^*, u_k^*) + \varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) = L(z_k^*, u_k^*, \varphi), \quad k = \overline{0, l-1}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть

$$l_\varphi = \min_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi),$$

тогда

$$(П.17) \quad L(z_k, u_k, \varphi) \geq l_\varphi \text{ при } (z_k, u_k) \in D,$$

и с учетом леммы 2

$$(П.18) \quad L(z_k^*, u_k^*, \varphi) = l_\varphi.$$

Согласно (22) и леммы 1 имеем $L(z_k, u_k, \varphi) = I(z_k, u_k)$ при $(z_k, u_k) \in M$. Тогда из (П.17) и (П.18) следует: $I(z_k, u_k) \geq l_\varphi$ при $(z_k, u_k) \in M$, $I(z_k^*, u_k^*) = l_\varphi$. Значит, $I(z_k^*, u_k^*) \leq I(z_k, u_k)$ при $(z_k, u_k) \in M$, и (z_k^*, u_k^*) – оптимальный процесс для системы (8) при $h = h_0$, при этом u_k^* – оптимальное управление этой системы. Так как $I(z_k, u_k) = I(u_k)$ и системы (1) и (8) равносильны, а также имеют общий критерий качества процесса управления, то $u^*(t_k) = u_k^*$ – оптимальное управление системы (1) при $h = h_0$, и теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Рассмотрим на множестве D функционал (24). Пусть

$$l_\varphi = \inf_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi).$$

Согласно лемме 1 имеем $L(z_k, u_k, \varphi) = I(z_k, u_k)$ при $(z_k, u_k) \in M$. $M \subset D$, тогда

$$\inf_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi) \leq \inf_{(z_k, u_k) \in M} L(z_k, u_k, \varphi)$$

и

$$(П.19) \quad \inf_{(z_k, u_k) \in M} I(z_k, u_k) \geq l_\varphi.$$

С другой стороны, из условия теоремы следует, что

$$-\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}) \rightarrow \inf_{(z_k, u_k) \in D} \left(-\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k) \right) \text{ при } s \rightarrow \infty,$$

а так как $\varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) \equiv \text{const}$, то $L(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}, \varphi) \rightarrow l_\varphi$ при $s \rightarrow \infty$. Учитывая (П.19) и определение точной нижней грани функционала, приходим к выводу:

$$I(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}) \rightarrow \inf_{(z_k, u_k) \in M} I(z_k, u_k),$$

т.е. $\{z_k^{(s)}, u_k^{(s)}\}$ – минимизирующая последовательность допустимых процессов для функционала $I(z_k, u_k) = \sum_{k=0}^{l-1} u_k^\top u_k$, тогда $\{u^{(s)}(t_k)\}$ – минимизирующая последовательность допустимых управлений системы (1) при $h = h_0$ для функционала (5), на которой он стремится к своей точной нижней грани, и теорема 8 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунова О.С., Агапитов Е.Б., Баранкова И.И. и др.* Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами // *Электротехнические системы и комплексы*. 2019. № 2 (43). С. 25–34.
2. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // *Вест. Перм. ун-та*. 2011. № 2 (9). С. 13–23.
3. *Шпилевая О.Я., Котов К.Ю.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // *Автометрия*. 2008. Т. 44. № 5. С. 71–87.
4. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // *Тр. МАИ*. 2020. Вып. 113. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17>
5. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // *АиТ*. 1987. № 7. С. 57–66.
6. *Акманова С.В.* Об управляемости и стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия Математика*. 2025. Т. 52. С. 3–20.
7. *Акманова С.В.* О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации // *АиТ*. 2024. № 9. С. 41–58.
8. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности переключаемых систем // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2021. Т. 27. № 2. С. 67–78.
9. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
10. *Альбрехт Э.Г., Сазанова Л.А.* О построении допустимых управлений в глобально управляемых нелинейных дискретных системах // *Изв. УрГУ*. 2003. № 26. С. 11–23.
11. *Сазанова Л.А.* Об управлении дискретными системами // *Дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Екатеринбург: УрГУ, 2002. 95 с.
12. *Красовский Н.Н.* Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // *Прикладная математика и механика*. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 209–229.
13. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
14. *Субботин А.И.* Об управлении движением квазилинейной системы // *Дифференц. уравнения*. 1967. Т. 3. № 7. С. 1113–1118.
15. *Альбрехт Э.Г.* Об управлении движением нелинейных систем // *Дифференц. уравнения*. 1966. Т. 2. № 3. С. 324–334.
16. *Альбрехт Э.Г.* Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем // *Дифференц. уравнения*. 1969. Т. 5. Вып. 3. С. 430–442.
17. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
18. *Nevliudov I., Omarov M., Romashov Y.* One approach to find optimal controls for discrete dynamic systems with numerical methods application // *Advanced Mathematical Models & Applications*. 2023. V. 8. No. 3. P. 548–564.
19. Основы теории оптимального управления / *Под ред. В.Ф. Кротова*. М.: Высш. шк., 1990.
20. *Никольский М.С.* О линейных многошаговых управляемых процессах // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.* 2020. № 4. С. 28–33.

21. *Расина И.В.* Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов // *АиТ.* 2012. № 10. С. 3–17. <http://mi.mathnet.ru/rus/at4078>
22. *Wigström O., Lennartson B.* An Integrated CP/OR method for optimal control of modular hybrid systems // 12th IFAC/IEEE Workshop on discrete event systems. 2014. P. 486–491.
23. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // *Тр. МИАН.* 2020. Т. 308. С. 88–100. <https://www.mathnet.ru/rus/tm4050>
24. *Урюпин И.В.* Оптимизация переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов // *Дис. ... канд. физ.-мат. наук.* М.: МАИ, 2022. 97 с.
25. *Юмагулов М.Г., Акманова С.В.* Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // *Уфим. мат. журн.* 2023. Т. 15. № 2. С. 85–100.
26. *Кваркернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
27. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение IV / *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
28. *Диго Г.Б., Диго Н.Б.* Нахождение оценки неизвестной константы Липшица при оптимизации алгоритмически заданной функции // *Информатика и системы управления.* 2007. № 1(13). С. 92–97.
29. *Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г.* Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 05.04.2025

После доработки 17.10.2025

Принята к публикации 21.10.2025

© 2026 г. **К.Б. МАНСИМОВ**, д-р физ.-мат. наук,
Р.О. МАСТАЛИЕВ, д-р философии по математике (rashad.mastaliyev@au.edu.az)
(Университет «Азербайджан», Баку;
Институт систем управления МНО Азербайджанской республики, Баку)

**ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ
В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
СТОХАСТИЧЕСКИМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ
УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая стохастической системой гиперболических уравнений первого порядка и возникающая при моделировании ряда химико-технологических процессов под влиянием случайных шумов. Исследуются на оптимальность особые в смысле принципа максимума Понтрягина управления.

Ключевые слова: стохастическая гиперболическая система уравнений первого порядка, двухпараметрический винеровский процесс, оптимальность, принцип максимума Понтрягина, особое управление, условия оптимальности второго порядка.

DOI: 10.7868/S2413977726010057

1. Введение

Различные качественные аспекты, в том числе вывод необходимых условий оптимальности первого порядка и исследования особого случая задач оптимального управления для детерминированных динамических систем, описываемых гиперболическими уравнениями первого порядка, изучены в [1–6] и др.

Подобная задача оптимального управления в стохастическом случае рассмотрена в [7], и при этом установлены необходимые условия оптимальности первого порядка (аналог принципа максимума Понтрягина, линеаризованный принцип максимума, аналог уравнения Эйлера [8]).

Актуальность исследований в этом направлении обуславливается необходимостью наиболее точного описания, например, систем автоматического управления, ряда химико-технологических процессов [9–14], реалистичным вариантом которого является стохастическое описание, учитывающее воздействие на объект управления случайных факторов.

Настоящая работа посвящена изучению особого в смысле принципа максимума Понтрягина случая и выводу необходимых условий оптимальности

второго порядка для особых управлений в стохастической задаче управления, описываемой системой нелинейных стохастических гиперболических уравнений первого порядка, записанной в канонической форме.

Применяемая схема исследования представляет собой модификацию и развитие схем из [5, 6] с учетом стохастических свойств рассматриваемой задачи.

2. Постановка задачи

Допустим, что управляемый процесс в заданной области $D = [t_0, t_1][x_0, x_1]$ описывается следующей системой стохастических нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} &= f(t, x, z, y, u) + p(t, x, z) \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t}, \\ \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} &= g(t, x, z, y, u) + q(t, x, y) \frac{\partial W_2(t, x)}{\partial x}, \quad (t, x) \in D, \end{aligned}$$

с краевыми условиями типа Гурса

$$(2) \quad \begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x \in [x_0, x_1], \\ y(t, x_0) &= b(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Здесь $(z(t, x), y(t, x))$ – $(n + m)$ -мерная искомая вектор-функция; $f(t, x, z, y, u)(g(t, x, z, y, u))$ – заданная $n(m)$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, y) до второго порядка включительно; $p(t, x, z)(q(t, x, y))$ – $(n \times n)((m \times m))$ -мерная измеримая и ограниченная матрица-функция; белые шумы $\frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial W_2(t, x)}{\partial x}$ являются производными соответственно по t и по x от двухпараметрического винеровского процесса $W_1(t, x), W_2(t, x)$ [10, 13], а $a(x), b(t)$ – заданные измеримые и ограниченные на $[x_0, x_1], [t_0, t_1]$ соответственно вектор-функции соответствующих размерностей.

В качестве допустимых управлений берется класс измеримых относительно неубывающей борелевской σ -алгебры $\mathcal{F} = \bar{s}(W(t, s), t_0 \leq t \leq t_1, x_0 \leq s \leq x_1)$ и ограниченных на D r -мерных вектор-функций $u(t, x)$ со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r (u(t, x) \in L_\infty(D, U))$.

Решение $(z(t, x), y(t, x))$ системы (1)–(2), соответствующее определенному допустимому управлению $u(t, x)$, понимается в смысле [15].

Всюду предполагается, что для каждого допустимого управления соответствующее решение краевой задачи (1)–(2) существует и единственно в области D .

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$(3) \quad S(u) = E \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} F_3(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) dx dt + \right. \\ \left. + \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, z(t_1, x)) dx + \int_{t_0}^{t_1} F_2(t, y(t, x_1)) dt \right\},$$

определенного на решениях краевой задачи (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $F_1(x, z), F_2(t, y), F_3(t, x, z, y, u)$ – заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по вектору состояния (т.е. по (z, y)) до второго порядка включительно, а E – знак математического ожидания.

Допустимое управление $u(t, x)$, доставляющее минимум функционалу (3) при ограничениях (1), (2), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – оптимальным процессом.

Предполагается, что в рассматриваемой стохастической задаче оптимальное управление существует.

Основной целью работы является вывод необходимых условий оптимальности второго порядка (случай особых управлений) в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами.

3. Формула приращения второго порядка функционала качества

Пусть $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – фиксированный, а $(\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y(t, x) + \Delta y(t, x))$ – произвольный допустимые процессы.

Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина

$$H(t, x, z, y, u, \psi, \xi) = \\ = -F_3(t, x, z, y, u) + \psi' f(t, x, z, y, u) + \xi' g(t, x, z, y, u),$$

а также обозначения типа:

$$\Delta_v f[t, x] = f(t, x, z(t, x), y(t, x), v) - f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)), \\ H_z[t, x] = H_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), \xi(t, x)).$$

Здесь

$$(\psi(t, x), \xi(t, x), \alpha(t, x), \beta(t, x)) \in \\ \in L_\infty(D, R^n) \times L_\infty(D, R^m) \times L_\infty(D, R^{n \times n}) \times L_\infty(D, R^{m \times m})$$

являются решениями следующей стохастической сопряженной задачи:

$$\begin{aligned}\psi_t(t, x) &= -\frac{\partial H(t, x, z, y, u, \psi, \xi)}{\partial z} + \alpha(t, x) \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t}, \quad \psi(t_1, x) = \frac{\partial F_1(x, z(t_1, x))}{\partial z}, \\ \xi_x(t, x) &= -\frac{\partial H(t, x, z, y, u, \psi, \xi)}{\partial y} + \beta(t, x) \frac{\partial W_2(t, x)}{\partial x}, \quad \xi(t, x_1) = \frac{\partial F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y}.\end{aligned}$$

Теперь применяя формулу Тейлора и учитывая введенные обозначения, приращение критерия качества (3), соответствующее допустимым управлениям $u(t, x)$ и $\bar{u}(t, x)$, можно записать в виде

$$\begin{aligned}(4) \quad \Delta S(u) &= -E \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}} H[t, x] dx dt + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 F_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} \Delta y(t, x_1) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\Delta_{\bar{u}} H'_z[t, x] \Delta z(t, x) + \Delta_{\bar{u}} H'_y[t, x] \Delta y(t, x) \right] dx dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\Delta z'(t, x) H_{zz}[t, x] \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) H_{zy}[t, x] \Delta y(t, x) + \right. \\ &\left. + \Delta y'(t, x) H_{yy}[t, x] \Delta y(t, x) \right] dx dt + \eta_1(t, x; \Delta u) \Big\},\end{aligned}$$

где $\eta_1(t, x; \Delta u)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}\eta_1(t, x; \Delta u) &= E \left\{ \int_{x_0}^{x_1} o_1 \left(\|\Delta z(t_1, x)\|^2 \right) dx + \int_{t_0}^{t_1} o_2 \left(\|\Delta y(t, x_1)\|^2 \right) dt - \right. \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_3 \left(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\| \right)^2 dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\Delta z'(t, x) \Delta_{\bar{u}} H_{zz}[t, x] \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) \Delta_{\bar{u}} H_{zy}[t, x] \Delta y(t, x) + \right. \\ &\left. + \Delta y'(t, x) \Delta_{\bar{u}} H_{yz}[t, x] \Delta z(t, x) + \Delta y'(t, x) \Delta_{\bar{u}} H_{yy}[t, x] \Delta y(t, x) \right] dx dt \Big\},\end{aligned}$$

$\|\Delta z\|$ – норма вектора $\Delta z = (\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_n)$ в R^n , определяемая формулой

$$\|\Delta z\| = \sum_{i=1}^n |\Delta z_i|, \text{ и всюду } \frac{o_i(\alpha^2)}{a^2} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

С другой стороны, из краевой задачи (1)–(2) линеаризацией получаем, что $(\Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ является решением следующих стохастических линеаризованных систем уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta z_t &= f_z[t, x] \Delta z(t, x) + \Delta_{\bar{u}} f_y[t, x] \Delta y(t, x) + \Delta_{\bar{u}} f[t, x] + \\ &+ p_z[t, x] \Delta z(t, x) \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t} + \eta_2(t, x; \Delta u), \\ \Delta y_x &= g_z[t, x] \Delta z(t, x) + \Delta_{\bar{u}} g_y[t, x] \Delta y(t, x) + \Delta_{\bar{u}} g[t, x] + \\ &+ q_y[t, x] \Delta y(t, x) \frac{\partial W_2(t, x)}{\partial x} + \eta_3(t, x; \Delta u) \end{aligned} \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\Delta z(t_0, x) = 0, x \in [x_0, x_1]; \quad \Delta y(t, x_0) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

где по определению

$$\begin{aligned} \eta_2(t, x; \Delta u) &= \Delta_{\bar{u}} f_z[t, x] \Delta z + \Delta_{\bar{u}} f_y[t, x] \Delta y + o_4(\|\Delta z + \Delta y\|) + \\ &+ o_5(\|\Delta z(t, x)\|) \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t}, \\ \eta_3(t, x; \Delta u) &= \Delta_{\bar{u}} g_z[t, x] \Delta z + \Delta_{\bar{u}} g_y[t, x] \Delta y + o_6(\|\Delta z + \Delta y\|) + \\ &+ o_7(\|\Delta y(t, x)\|) \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Здесь величины $o_i(\cdot)$, $i = \overline{4, 7}$ определяются соответственно из разложений функций $f(\cdot)$, $p(\cdot)$, $g(\cdot)$, $q(\cdot)$ по формуле Тейлора первого порядка соответствующей управлениям $\bar{u}(t, x)$ и $u(t, x)$.

Интерпретируя уравнения (5) как линейные неоднородные стохастические уравнения относительно $\Delta z(t, x)$, $\Delta y(t, x)$ и учитывая краевые условия (6) на основе аналога формулы Коши из [15], получим

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^t V_{11}(t, x; \tau, x) \Delta_{\bar{u}} f[\tau, x] d\tau + \eta_4(t, x; \Delta u), \quad (7)$$

$$\Delta y(t, x) = \int_{x_0}^x V_{22}(t, x; t, s) \Delta_{\bar{u}} g[t, s] ds + \eta_5(t, x; \Delta u). \quad (8)$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned}
\eta_4(t, x; \Delta u) &= \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left\{ \frac{\partial V_{11}(t, x; \tau, s)}{\partial x} [\Delta \bar{u} f[\tau, s] + \eta_2(\tau, s; \Delta u)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial V_{12}(t, x; \tau, s)}{\partial x} [\Delta \bar{u} g[\tau, s] + \eta_3(\tau, s; \Delta u)] \right\} ds d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^t V_{11}(t, x; \tau, x) \eta_2(\tau, x; \Delta u) d\tau, \\
\eta_5(t, x; \Delta u) &= \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left\{ \frac{\partial V_{21}(t, x; \tau, s)}{\partial t} [\Delta \bar{u} f[\tau, s] + \eta_2(\tau, s; \Delta u)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial V_{22}(t, x; \tau, s)}{\partial t} [\Delta \bar{u} g[\tau, s] + \eta_3(\tau, s; \Delta u)] \right\} ds d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^t V_{22}(t, x; \tau, s) \eta_3(t, s; \Delta u) ds,
\end{aligned}$$

а $V_{ij}(t, x; \tau, s)$, $(t_0 \leq t \leq t_1, x_0 \leq s \leq x \leq x_1)$, $i, j = 1, 2$ – матричные функции, являющиеся решениями следующих стохастических задач [15]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{11}(t, x; \tau, s)}{\partial \tau} &= -V_{11}(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] - V_{12}(t, x; \tau, s) g_z[\tau, s] - \\
&\quad - V_{11}(t, x; \tau, s) p[\tau, s] \frac{\partial W_1(\tau, s)}{\partial \tau}, \\
\frac{\partial V_{12}(t, x; \tau, s)}{\partial s} &= -V_{11}(t, x; \tau, s) f_y[t, s] - V_{12}(t, x; \tau, s) g_y[\tau, s] - \\
&\quad - V_{12}(t, x; \tau, s) q[\tau, s] \frac{\partial W_2(\tau, s)}{\partial s}, \\
\frac{\partial V_{21}(t, x; \tau, s)}{\partial t} &= -V_{21}(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] - V_{22}(t, x; \tau, s) g_z[\tau, s] - \\
&\quad - V_{21}(t, x; \tau, s) p[\tau, s] \frac{\partial W_1(\tau, s)}{\partial \tau}, \\
\frac{\partial V_{22}(t, x; \tau, s)}{\partial s} &= -V_{21}(t, x; \tau, s) f_y[\tau, s] - V_{22}(t, x; \tau, s) g_y[\tau, s] - \\
&\quad - V_{22}(t, x; \tau, s) q[\tau, s] \frac{\partial W_2(\tau, s)}{\partial s},
\end{aligned}$$

$$V_{11}(t, x; t, s) = E_1, \quad V_{12}(t, x; \tau, x) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t,$$

$$V_{21}(t, x; \tau, s) = 0, \quad V_{22}(t, x; t, s) = E_2,$$

$x_0 \leq s \leq x$, где E_1, E_2 – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Для дальнейших изложений введем в рассмотрение $(n \times n)$ -матричную функцию $R(x, \tau, s)$ и $(m \times m)$ -матричную функцию $Q(t, \tau, s)$ посредством следующих формул:

$$\begin{aligned}
 R(x, \tau, s) &= \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} V'_{11}(t, x; \tau, x) H_{zz}[t, x] V_{11}(t, x; s, x) dt - \\
 &\quad - V'_{11}(t_1, x; \tau, x) \frac{\partial^2 F_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} V_{11}(t_1, x; s, x), \\
 Q(t, \tau, s) &= \int_{\max(\tau, s)}^{x_1} V'_{22}(t, x; t, x) H_{yy}[t, x] V_{22}(t, x; t, s) dx - \\
 &\quad - V'_{22}(t, x_1; \tau, t) \frac{\partial^2 F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} V_{22}(t, x_1; t, s).
 \end{aligned}$$

Учитывая введенные обозначения и следуя [5, 6], при помощи представлений (7), (8) решений Δz и Δy формулу приращения второго порядка (4) критерия качества (3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \Delta S(u) &= E \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}} H[t, x] dx dt - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} f'[\tau, x] R(x, \tau, s) \Delta_{\bar{u}} f[s, x] ds dx d\tau - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}} g'[\tau, x] Q(t, \tau, s) \Delta_{\bar{u}} g[t, s] dt ds d\tau - \\
 &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H'_z[\tau, x] V_{11}(\tau, x; t, x) dt \right] \Delta_{\bar{u}} f[t, x] dx dt - \\
 &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_x^{x_1} \Delta_{\bar{u}} H'_y[t, s] V_{22}(t, s; t, x) ds \right] \Delta_{\bar{u}} g[t, x] dx dt \Big\} + \\
 &\quad + \eta(t, x; \Delta u),
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
\eta(t, x; \Delta u) = E & \left\{ \eta_1(t, x; \Delta u) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\Delta z'(t, x) H_{zy}[t, x] \Delta y(t, x) + \right. \right. \\
& + \Delta y'(t, x) H_{yz}[t, x] \Delta z(t, x) + \eta_4(t, x) H_{zz}[t, x] \Delta z(t, x) \Big] dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{t_0}^t V_{11}(t, x; \tau, x) \Delta_{\bar{u}} f[t, x] dt \right)' H_{zz}[t, x] \eta_4(t, x) dx dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} V_{11}(t_1, x; \tau, x) \Delta_{\bar{u}} f[t, x] \frac{\partial^2 F_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \eta_4(t_1, x; \Delta u) dx dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \eta_4'(t_1, x; \Delta u) \frac{\partial^2 F_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) dx - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \eta_5'(t, x; \Delta u) H_{yy}[t, x] \Delta y(t, x) dx dt - \\
(10) \quad & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x V_{22}(t, x; \tau, s) \Delta_{\bar{u}} g[t, s] ds \right)' H_{yy}[t, x] \eta_5(t, x; \Delta u) dx dt - \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} V_{22}(t, x_1; \tau, s) \Delta_{\bar{u}} g[t, s] \frac{\partial^2 F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} \eta_5(t, x_1; \Delta u) ds dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \eta_5'(t, x_1) \frac{\partial^2 F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} \Delta y(t, x_1) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}} H_z'[t, x] \eta_4(t, x; \Delta u) dx dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}} H_y'[t, x] \eta_5(t, x; \Delta u) dx dt \Big\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что построенная формула приращения (9) позволяет в дальнейшем получить как необходимое условие оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина, так и исследовать случай вырождения принципа максимума и его следствий с единых позиций.

4. Стохастический аналог принципа максимума Понтрягина

Сначала приведем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Почти для всех $(t, x) \in D$ справедливы оценки

$$(11) \quad \|\Delta z(t, x)\| \leq K_1 E \left(\int_{t_0}^t \|\Delta_{\bar{u}} f[\tau, x]\| d\tau + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|\Delta_{\bar{u}} g[\tau, s]\| ds d\tau \right),$$

$$(12) \quad \|\Delta y(t, x)\| \leq K_2 E \left(\int_{x_0}^x \|\Delta_{\bar{u}} g[t, s]\| ds + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|\Delta_{\bar{u}} f[\tau, s]\| ds d\tau \right),$$

где $K_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Из формулы приращения (9) следует справедливость утверждения [7].

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами (1)–(3) необходимо, чтобы неравенство

$$(13) \quad E \Delta_v H[\theta, \gamma] \leq 0$$

выполнялось для всех $(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ и при $v \in U$.

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_v H[\theta, \gamma] = & H(\theta, \gamma, z(\theta, \gamma), y(\theta, \gamma), v, \psi(\theta, \gamma), \xi(\theta, \gamma)) - \\ & - H(\theta, \gamma, z(\theta, \gamma), y(\theta, \gamma), u(\theta, \gamma), \psi(\theta, \gamma), \xi(\theta, \gamma)), \end{aligned}$$

$a(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ – произвольная точка Лебега (правильная точка [16] управления $u(t, x)$).

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Неравенство (13) является необходимым условием оптимальности первого порядка и представляет собой стохастический аналог принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи управления (1)–(3).

5. Необходимые условия оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений

Несмотря на то, что принцип максимума Понтрягина (13) является самым сильным необходимым условием оптимальности первого порядка для рассматриваемой задачи управления (1)–(3), нередки случаи его выполнения тривиальным образом (особый случай [3–6, 17]).

Следуя [3–6, 17], введем определение особого управления для рассматриваемой задачи.

Определение 1. Допустимое управление $u(t, x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, если для всех $(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ и $v \in U$

$$(14) \quad E \Delta_v H [\theta, \gamma] = 0.$$

В особом случае, т.е. в случае выполнения соотношения (14), исследуя формулу приращения (9), доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $u(t, x)$ в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами (1)–(3) необходимо, чтобы для любого $v \in U$, $(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ выполнялись следующие соотношения:

$$(15) \quad A(\theta, \gamma, v) = E [\Delta_v f' [\theta, \gamma] R(\gamma, \theta, \theta) + \Delta_v H'_z [\theta, \gamma]] \Delta_v f [\theta, \gamma] \leq 0,$$

$$(16) \quad B(\theta, \gamma, v) = E [\Delta_v g' [\theta, \gamma] Q(\theta, \gamma, \gamma) + \Delta_v H'_y [\theta, \gamma]] \Delta_v g [\theta, \gamma] \leq 0.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Теперь рассмотрим один частный случай, требующий отдельного изучения.

Пусть в уравнении (1)

$$(17) \quad \begin{aligned} f(t, x, z, y, u) &= A_1(t, x)z + B_1(t, x)y + f_1(t, x, u), \\ g(t, x, z, y, u) &= A_2(t, x)z + B_2(t, x)y + f_2(t, x, u). \end{aligned}$$

А минимизируемый функционал имеет следующий вид:

$$(18) \quad S(u) = E \left\{ \int_{x_0}^{x_1} C'(x)z(t_1, x) dx + \int_{t_0}^{t_1} F_2(t, y(t, x_1)) dt \right\}.$$

Введем обозначения

$$(19) \quad \begin{aligned} K(t, \gamma, v) &= V_{22}(t, x_1; t, \gamma) \Delta_{\bar{u}} g[t, \gamma] + \\ &+ \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial V_{21}(t, x_1; \tau, \gamma)}{\partial t} \Delta_v f[\tau, \gamma] + \frac{\partial V_{22}(t, x_1; \tau, \gamma)}{\partial t} \Delta_{\bar{u}} g[\tau, \gamma] \right] d\tau. \end{aligned}$$

Справедлива

Теорема 3. Для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $u(t, x)$ в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами (1), (2), (17), (18) необходимо, чтобы неравенство

$$E \int_{t_0}^{t_1} K(t, \gamma, v) \frac{\partial^2 F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} K(t, \gamma, v) dt \geq 0$$

выполнялось для всех $\gamma \in [x_0, x_1]$, $v(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Отметим, что симметрический результат имеет место в случае критерия качества вида

$$S(u) = E \left\{ \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, z(t_1, x)) dx + \int_{t_0}^{t_1} D'(t) y(t, x_1) dt \right\}.$$

6. Заключение

В целях развития стохастического аналога метода приращений в рассматриваемой стохастической задаче оптимального управления системами гиперболических уравнений первого порядка построена формула приращения второго порядка функционала качества. На основе построенной формулы приращения доказано необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. Далее с помощью специальных вариаций допустимого управления доказываются необходимые условия оптимальности особых (в смысле принципа максимума Понтрягина) управлений для рассматриваемой стохастической задачи управления с распределенными параметрами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Из системы уравнений (5) с учетом (6) получим

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) &= \int_{t_0}^t [f(\tau, x, \bar{z}, \bar{y}, \bar{u}) - f(\tau, x, z, y, u)] d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t [p(\tau, x, \bar{z}) - p(\tau, x, z)] \frac{\partial W_1(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau, \\ \Delta y(t, x) &= \int_{x_0}^x [g(t, s, \bar{z}, \bar{y}, \bar{u}) - g(t, s, z, y, u)] ds + \\ &+ \int_{x_0}^x [q(t, s, \bar{z}) - q(t, s, z)] \frac{\partial W_2(t, s)}{\partial s} ds. \end{aligned}$$

Отсюда переходя к норме и используя условие Липшица, а также принимая от обеих частей полученных неравенств математические ожидания, получим

$$\begin{aligned} E \|\Delta z(t, x)\| &\leq E \left\{ \int_{t_0}^t \|\Delta_{\bar{u}} f[t, x]\| dt + L_1 \int_{t_0}^t (\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|) dt \right\}, \\ E \|\Delta y(t, x)\| &\leq E \left\{ \int_{x_0}^x \|\Delta_{\bar{u}} g[t, s]\| ds + L_2 \int_{x_0}^x (\|\Delta z(t, s)\| + \|\Delta y(t, s)\|) ds \right\}. \end{aligned}$$

Применяя к последним двум неравенствам известную лемму Гронуолла–Вендроффа (см., например, [18]), имеем

$$(П.1) \quad E \|\Delta z(t, x)\| \leq E \left\{ \int_{t_0}^t \|\Delta_{\bar{u}} f[t, x]\| dt + L_3 \int_{t_0}^t \|\Delta y(t, x)\| dt \right\},$$

$$(П.2) \quad E \|\Delta y(t, x)\| \leq E \left\{ \int_{x_0}^x \|\Delta_{\bar{u}} g[t, s]\| ds + L_4 \int_{x_0}^x \|\Delta z(t, s)\| ds \right\},$$

где

$$L_i = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Усиливая неравенства (П.1), (П.2) друг другом и снова применяя лемму Гронуолла–Вендроффа, получаем справедливость оценки (11) для $\|\Delta z(t, x)\|$ и оценку (12) для $\|\Delta y(t, x)\|$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Считая, что $u(t, x)$ – фиксированное допустимое управление, его специальное приращение определим в виде

$$(П.3) \quad \Delta u_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} v - u(t, x), & (t, x) \in D_\varepsilon = [\theta, \theta + \varepsilon) \times [\gamma, \gamma + \varepsilon^2), \\ 0, & (t, x) \in D/D_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем $(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$ – произвольная правильная точка управления $u(t, x)$, $v \in U$ – произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ – произвольное, достаточно малое число.

Через $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(t, x))$ обозначим специальное приращение системы (1)–(2), соответствующее специальному приращению (П.3) управления $u(t, x)$.

Используя оценки (11), (12) для $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(t, x))$, получаем

$$E \|\Delta z_\varepsilon(t, x)\| \leq \begin{cases} 0, & (t, x) \in D \setminus D_\varepsilon, \\ K\varepsilon, & (t, x) \in D_\varepsilon, \end{cases}$$

$$E \|\Delta y_\varepsilon(t, x)\| \leq \begin{cases} 0, & (t, x) \in D \setminus D_\varepsilon, \\ K\varepsilon, & (t, x) \in D_\varepsilon. \end{cases}$$

Учитывая эти оценки в формуле (10), убедимся в том, что остаточный член $\eta(\Delta u_\varepsilon(t, x))$ является величиной порядка $o(\varepsilon^4)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \Delta S_\varepsilon(u) = E \bigg\{ & - \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon^2} \Delta_v H[t, x] dx dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \int_{\theta}^{\gamma+\varepsilon^2} \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v f'[\tau, x] R(x, \tau, s) \Delta_v f[s, x] ds dx d\tau - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon^2} \int_{\gamma}^{\varepsilon^2} \Delta_v g'[\tau, x] Q(t, \tau, s) \Delta_v g[t, s] d\tau ds dt - \\
 & - \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon^2} \left[\int_t^{t_1} \Delta_v H'_z[\tau, x] V_{11}(\tau, x; t, x) dt \right] \Delta_v f[t, x] dx dt - \\
 & - \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon^2} \left[\int_x^{x_1} \Delta_v H'_y[t, s] V_{22}(t, s; t, x) ds \right] \Delta_v g[t, x] dx dt \bigg\} + o(\varepsilon^4).
 \end{aligned}
 \tag{П.4}$$

Отсюда после применения теоремы о среднем и с учетом, что $\Delta S_\varepsilon(u) = S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) \geq 0$, следует справедливость утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

С учетом (14) из разложения (П.4) получим, что

$$\begin{aligned}
 \Delta S_\varepsilon(u) &= S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = \\
 &= E\varepsilon^4 \left[\Delta_v f'[\theta, \gamma] R(\gamma, \theta, \theta) + \Delta_v H'_z[\theta, \gamma] \right] \Delta_v f[\theta, \gamma] + o(\varepsilon^4) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение (15).

А если определить специальное приращение особого управления по формуле

$$u_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} v - u(t, x), & (t, x) \in D_\varepsilon = [\theta, \theta + \varepsilon^2] \times [\gamma, \gamma + \varepsilon] \\ 0, & (t, x) \in D/D_\varepsilon, \end{cases}$$

то из разложения (9) следует, что вдоль особого в смысле принципа максимума Понтрягина процесса $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$ выполнилось условие (16). Таким образом, теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3.

В случае задачи (1), (2), (17), (18) из формул (7)–(9) соответственно следует, что

$$\begin{aligned}
 \Delta S(u) &= -E \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}} H[t, x] dx dt + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} \Delta y(t, x_1) dt + \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta y(t, x_1)\|^2) dt, \\
 \Delta z(t_1, x) &= \int_{t_0}^{t_1} V_{11}(t_1, x; \tau, x) \Delta_{\bar{u}} f[t, x] dt + \\
 (\text{П.5}) \quad &+ \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\frac{\partial V_{11}(t_1, x; \tau, s)}{\partial x} \Delta_{\bar{u}} f[t, s] + \frac{\partial V_{12}(t_1, x; \tau, s)}{\partial x} \Delta_{\bar{u}} g[t, s] \right] ds dt, \\
 \Delta y(t, x_1) &= \int_{x_0}^{x_1} V_{22}(t, x_1; \tau, s) \Delta_{\bar{u}} g[t, s] ds + \\
 &+ \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\frac{\partial V_{21}(t, x_1; \tau, s)}{\partial t} \Delta_{\bar{u}} f[t, s] + \frac{\partial V_{22}(t, x_1; \tau, s)}{\partial t} \Delta_{\bar{u}} g[t, s] \right] ds dt.
 \end{aligned}$$

Специальное приращение управления $u(t, x)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} v(t) - u(t, x), & (t, x) \in D_\varepsilon = [t_0, t_1] \times [\gamma, \gamma + \varepsilon] \\ 0, & (t, x) \in D \setminus D_\varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное достаточное малое число $v(t) \in U$, $\gamma \in [x_0, x_1]$. Тогда из (П.5) следует, что при $(t, x) \in [t_0, t_1] \times [\gamma, x_1]$

$$\begin{aligned}
 \Delta y_\varepsilon(t, x_1) &= \varepsilon [V_{22}(t, x_1; t, \gamma) \Delta_v g[t, \gamma] + \\
 &+ \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial V_{21}(t, x_1; \tau, s)}{\partial t} \Delta_v f[\tau, s] + \frac{\partial V_{22}(t, x_1; \tau, \gamma)}{\partial t} \Delta_{\bar{u}} g[\tau, \gamma] \right] d\tau + o(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Поэтому учитывая обозначение $K(t, \gamma, v)$, определяемое формулой (19), получим, что

$$\begin{aligned}
 \Delta S_\varepsilon(u) &= -E \int_{t_0}^{t_1} \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} \Delta_{v(t)} H[t, x] dx dt + \\
 &+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} K(t, \gamma, v) \frac{\partial^2 F_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} K(t, \gamma, v) dt + o(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Из этого разложения вытекает утверждение теоремы 3. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волин Ю.М., Островский Г.М., Финкельштейн А.В.* Метод штрафных функций и принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления // Управляемые системы. 1973. Вып. 11. С. 88–95.
2. *Волин Ю.М., Островский Г.М., Финкельштейн А.В.* Метод штрафных функций и условия оптимальности обобщенных решений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 12. С. 2246–2255.
3. *Васильев О.В.* К исследованию особого управления в одной системе с распределенными параметрами // Управляемые системы. 1976. Вып. 15. С. 3–15.
4. *Васильев О.В.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Прикл. математика, 1978.
5. *Мансимов К.Б.* К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41. № 10. С. 1505–1520.
6. *Мансимов К.Б., Марданов М.Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку: «Элм», 2010.
7. *Мансимов К.Б., Масталиев Р.О.* Необходимые условия оптимальности первого порядка в одной стохастической задаче управления с распределенными параметрами/ВСПУ-2024. М.: ИПУ РАН, 17–20 июня 2024. С. 547–549.
8. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. URSS, 2011.
9. *Prato G.D., Tubaro L.* Stochastic partial differential equations and applications. Springer-Verlag, 1985.
10. *Oksendal B.* Optimal control of stochastic partial differential equations // Stochastic Analysis and Applications. 2005. V. 23. P. 165–179.
11. *Бункин Н.Ф., Морозов А.Н.* Стохастические системы в физике и технике. М.: МГТУ, 2011.
12. *Qi Lu, Xu Zhang.* Control Theory for Stochastic Distributed Parameter Systems, an Engineering Perspective // Annual Reviews in Control. 2021. V. 51. P. 268–330.
13. *Qi Lu, Xu Zhang.* Mathematical control theory for stochastic partial differential equations. Cham, Switzerland, Springer, 2021.
14. *Prato G.D., Tubaro L.* Stochastic Partial Differential Equations and Applications. New York: Marcel Dekker, 2002.
15. *Мансимов К.Б., Масталиев Р.О.* О представлении решения краевой задачи Гурса для стохастических гиперболических уравнений с частными производными первого порядка // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 145–151.
16. *Новожинов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И.* Методы оптимального управления системами математической физики. Горький: Изд-во ГГУ, 1986.
17. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2011.
18. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // ЖВМ и матем. физ. 1972. Т. 12. № 1. С. 61–77.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 16.08.2024

После доработки 20.09.2025

Принята к публикации 23.09.2025

© 2026 г. Ю.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (tot1983@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА РАЗРЫВНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Исследуется устойчивость системы с переключениями, возникающая при применении разрывной обратной связи для стабилизации интегратора 2-го порядка. Это предельный случай рассмотренной ранее обратной связи в виде вложенных функций насыщения, когда внешняя функция насыщения или сигмоида заменяется на разрывную функцию $\text{sign}(x)$. Использование такой обратной связи позволяет легко учесть ограниченность ресурса управления и обеспечить выполнение ограничения на фазовую скорость приближения к положению равновесия, что особенно важно при больших начальных отклонениях. Предложена функция Ляпунова для замкнутой системы, с помощью которой и результатов теории Филиппова доказана глобальная асимптотическая устойчивость начала координат, если кривая переключения является непрерывно дифференцируемой, монотонной и проходящей через ноль функцией. Свойство глобальной устойчивости начала координат сохраняется, если ослабить требование на гладкость всей функции переключения и потребовать непрерывную дифференцируемость везде, за исключением конечного набора точек, где производная не существует, но непрерывность сохраняется. В случае, когда кривая переключения разрывная, доказано, что начало координат является сшитым центром по классификации Филиппова. При этом в замкнутой системе существует полуустойчивый цикл, охватывающий множество точек разрыва на кривой переключения. В качестве численных примеров построены линия уровня функции Ляпунова и фазовые траектории на плоскости для разных типов кривой переключения.

Ключевые слова: стабилизация цепочки двух интеграторов, система с переключениями, глобальная асимптотическая устойчивость, кривая переключения, функция Ляпунова.

DOI: 10.7868/S2413977726010068

1. Введение

В 2024 г. в соавторстве с А.В. Пестеревым были написаны две работы: “Глобальная стабилизация интегратора второго порядка обратной связью в виде вложенных *сатураторов*”¹ и “Глобальная стабилизация интегратора второго

¹ Сатуратором называется негладкая функция насыщения $\text{sat}_p(\cdot)$, $p > 0$, определенная следующим образом: $\text{sat}_p(w) = w$, когда $|w| \leq p$, и $\text{sat}_p(w) = pw/|w|$ при $|w| > p$.

порядка обратной связью в виде вложенных *сигмoids*".² Небольшое отличие в названиях (*сигмoиды* и *сатураторы*) означает фундаментальное различие исследуемых систем. В первой статье [1] исследуется система с гладкой обратной связью, а во второй [2] – с негладкой. Хотя в обоих случаях для доказательства глобальной устойчивости используются функции Ляпунова с похожей структурой (сумма квадратичного и интегрального слагаемых), доказательства заметно отличаются, что легко видеть, если сравнить две статьи. Хронологически авторам сначала удалось доказать устойчивость системы с гладкой обратной связью в виде вложенных сигмoид. Естественным образом возник вопрос о возможности обобщения полученного результата на случай негладкой (в виде вложенных сатураторов) и/или разрывной (полученной, например, заменой внешнего сатуратора или сигмoиды на $\text{sign}(x)$) обратной связи. Однако доказательство глобальной устойчивости, приведенное в [1], оказалось не применимо к негладкой системе, так как в отличие от гладкого случая производная соответствующей функции Ляпунова не является отрицательно определенной функцией во всем пространстве, поэтому изложение в статье, представленной в [1], было ограничено гладким случаем. Позднее, после того как рукопись была представлена в [1], авторам удалось доказать глобальную устойчивость и для негладкого случая, показав, что области пространства, в которых функция Ляпунова тождественно равна нулю, не могут содержать целых траекторий. Новые результаты были представлены в журнале [2].

К настоящему моменту остался неисследованным случай разрывной системы (различные физические примеры, которые могут быть описаны такими системами, приведены в [3]), а также гладких функций насыщения [4–6]. Впервые такой тип функции в управлении можно встретить в [4, 5], однако в обоих случаях доказывается только локальная стабилизация. Главное их отличие от функции насыщения типа $\text{sat}(x)$ заключается в том, что вместо линейной части используется нелинейная функция, такая что в крайних точках линейного участка производная существует и является непрерывной. Данное различие никак не влияет на доказательство глобальной устойчивости, приведенное в [2], и поэтому результаты [2] могут быть использованы и для функций этого типа.

Данная работа посвящена первому, более сложному случаю, а именно исследованию глобальной устойчивости системы, замкнутой разрывной обратной связью. Для доказательства глобальной устойчивости будем использовать в качестве кандидата в функции Ляпунова функцию, состоящую из суммы квадратичного и интегрального слагаемого [2]

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \text{sat}(k_3 \text{sat}(k_1 \xi)) d\xi.$$

² Сигмoидой называется гладкая строго возрастающая нечетная функция скалярной переменной $\sigma(x)$, удовлетворяющая следующим условиям: а) $\sigma(x) \rightarrow \pm 1$, когда $x \rightarrow \pm\infty$; б) $\max_x \sigma'(x) = \sigma'(0)$; в) $\sigma'(0) = 1$; г) $\sigma(x) = -\sigma(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

При стремлении k_3 к бесконечности функция $V(x)$ принимает вид

$$(1) \quad V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + |x_1|.$$

Функция (1) не является гладкой, и поэтому напрямую к ней нельзя применить теорему Филиппова [7], однако можно воспользоваться его доказательством глобальной устойчивости системы с переключениями конкретного вида. Идея доказательства в следующем: сначала доказывается неположительность производной вне поверхности переключения и вне поверхности разрыва производной функции Ляпунова. Затем вычисляются производные функции Ляпунова на кривых переключения. Далее рассматриваются траектории и точечные особенности там, где производная функции Ляпунова равна нулю, и применяется теорема Барбашина–Красовского [8, 9]. Альтернативный подход был предложен Матросовым [10, 11] и далее развит Молчановым [12]³. Он заключается в обобщении теорем Ляпунова об устойчивости на случай выпуклых кусочно-линейных функций Ляпунова, однако его применение для плоских систем с известной нелинейностью нецелесообразно.

Для дальнейшего изложения понадобятся следующие определения из [7]. Рассмотрим уравнение или систему в векторной записи

$$(2) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

с кусочно непрерывной функцией f в области G^4 ; $x \in R^n$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $M \in R^{n+1}$ – множество (меры нуль) точек разрыва функции f по x .

Для каждой точки (t, x) области G указывается множество $F(t, x)$ в n -мерном пространстве. Если в точке (t, x) функция f непрерывна, то множество $F(t, x)$ состоит из одной точки, совпадающей со значением функции f в этой точке. Если же (t, x) – точка разрыва функции f , то множество $F(t, x)$ задается тем или иным способом.

Определение 1 [7]. *Решением уравнения (2) называется решение дифференциального включения*

$$(3) \quad \dot{x} \in F(t, x),$$

т.е. абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, определенная на интервале или отрезке I , для которой почти всюду на I справедливо $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$.

³ Оригинальные работы Матросова В.М. вышли раньше работы [12], однако их доступность для ознакомления сильно ограничена, поэтому в качестве ссылок приведены современные сборники [10, 11], содержащие различные работы Матросова В.М., которые вышли значительно позже оригинальных статей.

⁴ G – конечная область $(n+1)$ -мерного пространства t, x . Область G состоит из конечного числа областей G_i , $i = 1, \dots, l$, в каждой из которых функция f непрерывна вплоть до границы.

Определение 2 [7]. *Простейшее выпуклое доопределение.* Для каждой точки $(t, x) \in G$ пусть $F(t, x)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(t, x^*)$, когда $(t, x^*) \notin M$, $x^* \rightarrow x$, $t = \text{const}$. Решением уравнения (2) называется решение включения (3) с только что построенным $F(t, x)$. Так как M – множество меры нуль, то при почти всех $t \in I$ мера сечения множества M плоскостью $t = \text{const}$ равна нулю. При таких t множество $F(t, x)$ определено для всех $(t, x) \in G$.

В точках непрерывности функции f множество $F(t, x)$ состоит из одной точки $f(t, x)$, и решение удовлетворяет уравнению (2) в обычном смысле. Если же точка $(t, x) \in M$ лежит на границах сечений двух или нескольких областей $G_1, \dots, G_k$ плоскостью $t = \text{const}$, то множество $F(t, x)$ есть отрезок, выпуклый многоугольник или многогранник с вершинами $f_i(t, x)$, $i \leq k$, где $f_i(t, x) = \lim_{(t, x^*) \in G_i, x^* \rightarrow x} f(t, x^*)$, причем предел всегда существует в силу построения согласно определению 1.

Определение 3 [7]. *Решение $x = \chi(t)$ ($t_0 < t < \infty$) дифференциального включения (3) при $I = (t_0, \infty)$ называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого такого x_0 , что $|x_0 - \chi(t_0)| < \delta$, каждое решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ при $t_0 < t < \infty$ существует и удовлетворяет неравенству $|x(t) - \chi(t)| < \varepsilon$ ($t_0 < t < \infty$).*

Асимптотическая устойчивость (3) определяется аналогично, но с дополнительным условием $x(t) - \chi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Определение 4 [7]. *Рассмотрим систему с управлением u :*

$$(4) \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad u = u(x) \in U(t, x).$$

Решением называется пара функций: абсолютно непрерывная функция $x(t)$ и измеримая функция $u(x(t))$, которые почти всюду на рассматриваемом интервале удовлетворяют системе (4).

Чтобы рассмотреть множество всех решений системы (4), можно ее заменить дифференциальным включением (3), где $F(t, x) = f(t, x, U(t, x))$. Тогда устойчивость решения $x(t) = \chi(t)$ включения (3) означает, что при $|x(t) - \chi(t)| < \delta$ решение $x(t)$ уравнения $\dot{x} = f(t, x, U(t, x))$ удовлетворяет уравнению (4) при всевозможных допустимых управлениях $u(t)$.

Определение 5 [7]. *Точка c называется стационарной, если $x(t) \equiv c$ есть решение включения (3).*

Определение 6 [7]. *Расстояние между точками или множествами обозначается буквой r :*

$$r(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2},$$

$$r(a, B) = \inf_{b \in B} r(a, b), \quad r(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} r(a, b);$$

δ -окрестностью M^δ множества M называется множество таких точек x , что $r(x, M) < \delta$.

Определение 7 [7]. Множество $M \subset R^n$ (не обязательно стационарное) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждое решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0)$ из δ -окрестности множества M при $t_0 \leq t < \infty$ существует и удовлетворяет неравенству $r(x(t), M) < \varepsilon$, $t_0 \leq t < \infty$ где $r(x, M)$ – расстояние от точки x до множества M .

Определение 8 [7]. Стационарное множество называется устойчивым в целом, если оно устойчиво и каждое решение при $t \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к этому множеству. Стационарное множество называется точечно устойчивым в целом, если оно устойчиво и каждое решение при $t \rightarrow \infty$ стремится к стационарной точке.

В работе будут рассмотрены только плоские системы, т.е. $n = 2$ в приведенных выше определениях. Вектор на плоскости будем записывать в виде $x = [x_1; x_2] \in R^2$, где x_1, x_2 – проекции вектора на оси координат соответственно.

Для обозначения скалярного произведения двух векторов x, y будем использовать выражение $x \cdot y = [x_1; x_2] \cdot [y_1; y_2] = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

2. Гладкая кривая переключения

Рассмотрим задачу стабилизации интегратора 2-го порядка

$$(5) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(x)$$

с помощью разрывной обратной связи:

$$(6) \quad u(x) = -\text{sign}(S(x_1, x_2)),$$

где $\text{sign}(w) = 1$, если $w > 0$, $\text{sign}(w) = -1$, если $w < 0$ и $\text{sign}(w) = [-1, 1]$, если $w = 0$. Функция $S(x_1, x_2)$ определяет кривую переключения (разрыва), которая делит фазовую плоскость (x_1, x_2) на области G^- ($S < 0$) и G^+ ($S > 0$). Согласно определениям (3) и (4) в данном случае $U(t, x) = [-1, 1]$, а решение системы (5), (6) – это решение дифференциального включения (3), где $F(t, x) = [x_2; -\text{sign}(S(x_1, x_2))]$.

Разобьем фазовое пространство R^2 на множества (см. рис. 1, 2, 3) так, что $R^2 = D_1 \cup D_2^+ \cup D_2^- \cup D_3^+ \cup D_3^-$, где

- $D_1 = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) = 0\}$ – множество точек, лежащих на кривой разрыва;
- $D_2^+ = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) > 0 \text{ и } x_1 < 0\}$;
- $D_2^- = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) < 0, x_1 > 0\}$;
- $D_3^+ = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) > 0 \text{ и } x_1 \geq 0\}$;
- $D_3^- = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) < 0, x_1 \leq 0\}$,

тогда в силу новых обозначений $G^- = D_2^- \cup D_3^-$, $G^+ = D_2^+ \cup D_3^+$.

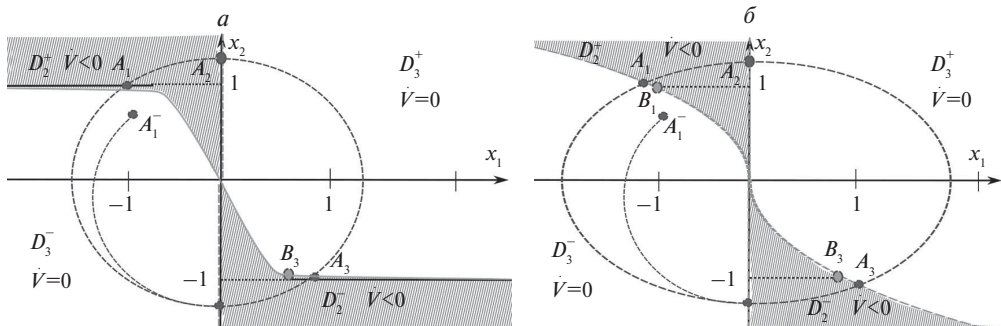


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости R^2 на множества D_1 , $D_2^\pm$, $D_3^\pm$ для гладкой поверхности разрыва. a – сигмоида, b – полиномиальная функция вида $y = -|\xi|^{1/n-1}\xi$, $n > 1$.

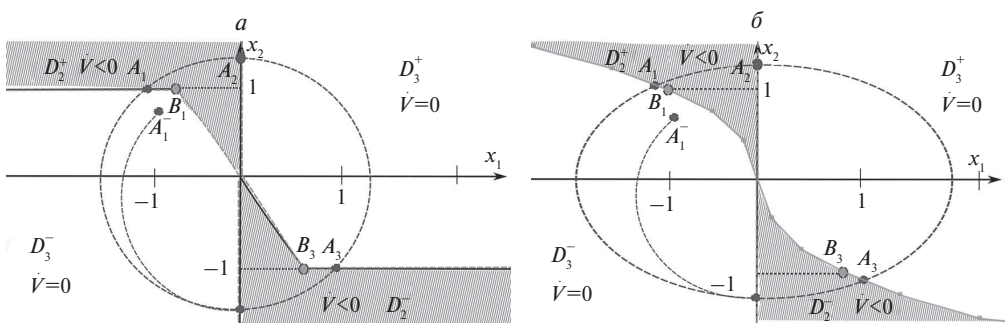


Рис. 2. Разбиение фазовой плоскости R^2 на множества D_1 , $D_2^\pm$, $D_3^\pm$ для непрерывной поверхности разрыва. a – сатуратор, b – кусочно-линейная аппроксимация полиномиальной функции вида $y = -|\xi|^{1/n-1}\xi$, $n > 1$.

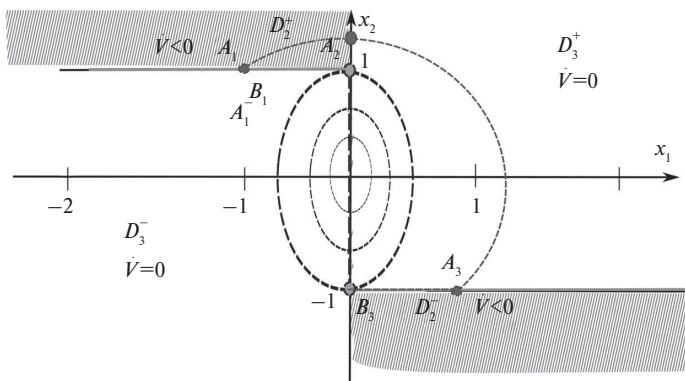


Рис. 3. Разбиение фазовой плоскости R^2 на множества $D_1 = D_1^0 \cup D_1^+ \cup D_1^-$, $D_2^\pm$, $D_3^\pm$ для разрывной функции переключения.

Теорема 1. Пусть

$$(7) \quad S(x_1, x_2) = x_2 + \phi(x_1),$$

где непрерывно дифференцируемая функция $\phi(\xi)$, $\xi \in R$ удовлетворяет свойствам:

$$1) \ 0 \leq \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} < +\infty;$$

$$2) \ \exists 0 < \delta \leq 1 \text{ такое, что } \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} > 0, |\xi| < \delta;$$

$$3) \ \phi(0) = 0;$$

$$4) \ \phi(\xi) = -\phi(-\xi),$$

тогда система (5)–(7) с функцией $\phi(x_1)$ глобально асимптотически устойчива.

Замечание 1. Поверхность разрыва для закона управления выбрана в виде (7), чтобы исключить проблемы с разрешимостью и единственностью в системе с разрывной правой частью [13]. То есть кривая переключения для системы (5), (6) имеет вид: $x_2 = -\phi(x_1)$.

Доказательство. Докажем, что функция (1) является функцией Ляпунова системы (5)–(7).

1. Сначала покажем, что $\dot{V}(x) \leq 0$ при $S \neq 0$ и $x_1 \neq 0$. Дифференцируя $V(x)$ в силу системы (5), (6) при $x_1 \neq 0$, получим

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= -x_2 \text{sign}(x_2 + \phi(x_1)) + \text{sign}(x_1)x_2 = \\ &= -[\text{sign}(x_2 + \phi(x_1)) - \text{sign}(\phi(x_1))]x_2. \end{aligned}$$

В силу монотонности sign справедливо неравенство $[\text{sign}(s + s_0) - \text{sign}(s_0)]s \geq 0 \ \forall (s + s_0) \neq 0, \ \forall s_0 \neq 0$, откуда следует знакоотрицательность производной: $\dot{V}(x) \leq 0$ вне кривой переключения и $x_1 \neq 0$. Области, где выполняется строгое неравенство, заштрихованы на рис. 1, 2 и они соответствуют подмножествам областей $D_2^\pm$.

2. Теперь покажем, что множество $\dot{V}(x) = 0$ не содержит целых траекторий при $S \neq 0$ и $x_1 \neq 0$. Производная функции $V(x)$ обращается в ноль при $x_2 = 0$ на множествах D_3^+ и D_3^- , в которых оба слагаемых в квадратных скобках одновременно равны $+1$ и -1 соответственно. Легко видеть, что указанные множества не могут содержать целых траекторий. Действительно, траекториями системы в D_3^- и D_3^+ являются параболы

$$(9) \quad x_1 = \mp \frac{1}{2}x_2^2 + C.$$

Так как ни одна из парабол не может целиком лежать в D_3^- или D_3^+ (рис. 1) и при этом движение происходит с постоянным ускорением, система через конечное время неизбежно попадает на множество D_1 – кривую переключения. Теперь предположим, что $x_2 = 0$, тогда $x_1 = c_1$. Пусть $c_1 > 0$, тогда, интегрируя систему, имеем $x_2 = c_1 t + c_2 = 0$. Последнее верно только при $c_1 = 0$,

когда $t > 0$. Противоречие. Значит, на множестве $x_2 = 0$ тоже нет целых траекторий.

3. Теперь покажем, что $\dot{V}(x) < 0$ при $S \neq 0$ и $x_1 = 0$. На этом множестве $V(x) = x_2^2/2$, а производная в силу системы имеет вид $\dot{V}(x) = -x_2 \text{sign}(x_2 + \phi(x_1))_{x_1=0} = -|x_2| < 0$, $x_2 \neq 0$.

4. Теперь покажем, что $\dot{V}(x) \leq 0$ при $S = 0$ и $x_1 \neq 0$. Сначала надо доопределить векторное поле на кривой разрыва. Для этого построим выпуклую оболочку для каждой пары векторов на кривой разрыва. Чтобы воспользоваться результатом Филиппова, перепишем систему в новых обозначениях и найдем проекции векторного поля на нормаль в каждой точке кривой переключения.

Правая часть системы (5)–(7) в векторном виде записывается как $f^+ = [x_2; -1]$ при $S > 0$ и $f^- = [x_2; 1]$ при $S < 0$, при этом множество разрыва меры ноль в определении $M = D_1$. Так как S – гладкая поверхность, найдем проекции векторного поля f_N^+ ($S > 0$) и f_N^- ($S < 0$) на нормаль к кривой разрыва в каждой точке. Используя формулы Филиппова ([7], с. 42, 85, 134), запишем уравнения:

$$(10) \quad f_N^\pm(x_1) = \frac{\nabla S(x_1) \times f^\pm(x_1)}{\|\nabla S(x_1)\|} = -(\rho(x_1) \pm 1) / \|\nabla S(x_1)\|,$$

$$\rho(x_1) = \phi(x_1) \frac{d\phi(x_1)}{dx_1},$$

$$(11) \quad \nabla S(x_1) = \left[\frac{d\phi(x_1)}{dx_1}; 1 \right], \quad \|\nabla S(x_1)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{d\phi(x_1)}{dx_1} \right)^2} \neq 0.$$

В силу построения системы (5), (6) (только одно физическое положение равновесия и одна кривая переключения) в ней возможны следующие точечные и линейные особенности [7]:

- 1) $f_N^- f_N^+ > 0$ – протыкание поверхности (пересекают линию) и она не является линейной особенностью (случай AA_0), например в [14];
- 2) $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$, $f^0 \neq [0; 0]$ – устойчивый скользящий режим, в котором система движется согласно правой части $f^0 = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-$, $\alpha = f_N^- / (f_N^- - f_N^+) \in (0, 1)$ (случай AA_1), например в [15];
- 3) $f_N^- f_N^+ < 0$, $f^0 = [0; 0]$ – кривая состоит из стационарных точек (случай AA_2), например маятник с сухим трением [16];
- 4) $f_N^- < 0$, $f_N^+ > 0$, $f^0 \neq [0; 0]$ – неустойчивый скользящий режим, система постоянно сходит с поверхности разрыва и не может ее проткнуть (случай AA_3).

Покажем сначала, что для системы (5), (6) с проекциями векторного поля (10), (11) случай AA_2 невозможен. В рассматриваемом случае вектор f_0 имеет вид

$$(12) \quad f^0 = [-\phi(x_1); 1 - 2\alpha].$$

Для любого $0 \leq \alpha \leq 1$ и $x_1 \neq 0$, $f^0 \neq [0; 0]$, т.е. случай AA_2 невозможен, так как в замкнутой системе нет дополнительных стационарных точек, кроме начала координат.

Докажем, что случай AA_3 также невозможен. Пусть $f_N^- < 0$, тогда $\rho(x_1) > 1$ из (10), и в силу монотонности функции и нечетности $\phi(x_1)$ выполняется $f_N^+ < 0$, т.е. имеем случай AA_0 . Аналогично, из предположения $f_N^+ > 0$ следует, что $f_N^- > 0$, а значит, имеем случай AA_0 . Случай AA_3 невозможен.

Теперь найдем условия, при которых имеет место скользящий режим. Вычислим значение α по приведенной выше формуле:

$$(13) \quad \alpha = \frac{1}{2}(1 - \rho(x_1)).$$

Из (13) и определения скользящего режима следует, что он возможен только при $|\rho(x_1)| < 1$. Легко проверить, что в этом случае имеем $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$.

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ получаем $\rho(x_1) = \pm 1$ и для точки $x_1 > 0$ имеем $f_N^- > 0$, $f_N^+ = 0$, а для точки $x_1 < 0$ имеем $f_N^- = 0$, $f_N^+ < 0$. В обоих случаях это точечная особенность типа ab [7], означающая начало или окончание скользящего режима. В рассматриваемом случае данная точечная особенность не является положением равновесия, так как модуль векторного поля в этой точке отличен от нуля, а правая часть системы однозначно определена: либо f^+ , либо f^- .

Таким образом, в замкнутой системе на кривой переключения возможны только два режима: 1) и 2). Протыкание кривой разрыва означает непрерывность траекторий на ней, а значит, в этих точках производная функции Ляпунова может быть доопределена по непрерывности, т.е. с учетом пунктов 1–3 она может быть только $\dot{V}(x) \leq 0$.

Остается найти $\dot{V}$ при $S = 0$. Вычисляем f_0 , используя (12), (13), и формируем новую систему дифференциальных уравнений, которой подчиняется движение исходной системы на кривой разрыва. Согласно определению [7] она имеет вид $\dot{x} = f_0$ и может быть записана как

$$(14) \quad \dot{x}_1 = -\phi(x_1), \quad \dot{x}_2 = \rho(x_1).$$

Производная функции (1) в силу системы (14) и после исключения x_2 записывается формулой

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= -\rho(x_1)\phi(x_1) - \text{sign}(x_1)\phi(x_1) = \\ &= -\phi(|x_1|) \left(\phi(|x_1|) \frac{d\phi(x_1)}{dx_1} + 1 \right) < 0, \quad x_1 \neq 0. \end{aligned}$$

При $\frac{d\phi(x_1)}{dx_1} = 0$ следует, что $x_2 = \text{const}$, а x_1 постоянно убывает. Такое движение будет продолжаться до тех пор, пока производная $\frac{d\phi(x_1)}{dx_1}$ не станет положительной, после чего начнет убывать и переменная x_2 .

5. Положительность функции $V(x)$ во всем R^2 , кроме начала координат, очевидна, при этом $V(x)$ стремится к бесконечности при $\|x\| \rightarrow \infty$. Таким образом, функция $V(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина–Красовского [8, 9] (теорема Ла-Салля [17]) и, следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (5)–(7) в целом. Теорема доказана.

Замечание 2. Функция Ляпунова вида (1) для системы (5), (6) не является функцией Лурье–Постникова [18], так как система (5), (6) не приводится к виду Лурье (в ней нельзя выделить линейную систему).

Замечание 3. Использование классических подходов в построении функций Ляпунова для разрывных систем [19, 20] приводит в данной задаче только к доказательству либо локальной устойчивости [21–23], либо устойчивости в большом [10, 24].

3. Непрерывная кривая переключения

Теорема 2. Определим множество $Q = R \setminus I_L$, $I_L = \{-\xi^k, -\xi^{k-1}, \dots, -\xi^1, \xi^1, \dots, \xi^{k-1}, \xi^k, \xi^k \in R, k = 1, \dots, L, L \in Z^+\}$. Пусть непрерывная дифференцируемая функция $\phi_1(\xi)$, $\xi \in Q$ удовлетворяет свойствам:

- 1) $0 \leq \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} < +\infty$;
- 2) $\exists 0 < \delta \leq \xi^1$ такое, что $0 < \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi}$, $|\xi| < \delta$;
- 3) $\phi_1(0) = 0$;
- 4) $\phi_1(\xi) = -\phi_1(-\xi)$.

Пусть также выполняется равенство $\phi_1(\xi) = -\phi_1(-\xi)$, $\xi \in I_L$, тогда система (5)–(7) с функцией $\phi(x_1) = \phi_1(x_1)$ глобально асимптотически устойчива.

Доказательство. Так как функция $\phi_1(x_1)$ не является гладкой, кривая переключения $x_2 = -\phi_1(x_1)$ также будет негладкой. Таким образом отличие функций $\phi(x_1)$ в теоремах 1 и 2 заключается в отсутствии производных в конкретных точках ξ^k , $k = 1, \dots, L$ на множестве меры нуль. Так как система (5)–(7) плоская, то каждую такую точку на кривой разрыва можно трактовать как множество пересечения только двух гладких кривых разрыва и применить метод доопределения векторного поля в случае нескольких гладких поверхностей разрыва [7, с. 42]. Выберем любую точку из множества I_L , например с индексом l , тогда проекция векторного поля $f_{N_l}^\pm$ конкретно в этой точке фазового пространства $(x_1^l, -\phi_1(x_1^l))$ складывается из проекций, вычисленных для двух соседних гладких сегментов кривой разрыва. Обозначим проекции векторного поля, вычисленные по формулам (10), слева от точки разрыва как $f_{N_{l-1}}^\pm = f_N^\pm(x_1^l - \epsilon)$ и справа как $f_{N_{l+1}}^\pm = f_N^\pm(x_1^l + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, тогда проекции векторного поля вычисляются как

$$(16) \quad f_{N_l}^\pm = \frac{1}{2}(f_{N_{l-1}}^\pm + f_{N_{l+1}}^\pm).$$

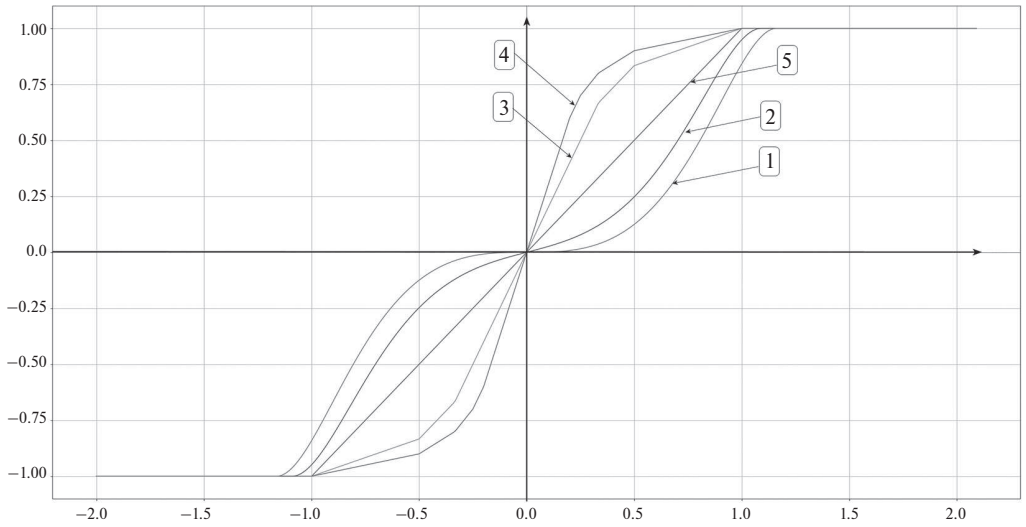


Рис. 4. Примеры функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1 или теоремы 2.

В силу непрерывности решения, глобальной устойчивости нуля может не быть, только если данная точка является стационарной, т.е. выполняются условия для случая 3) в теореме 1; более точно, нужно проверить, что $f_l^0 = \alpha_l f^+ + (1 - \alpha_l) f^- \neq [0; 0]$, $\alpha_l = f_{N_l}^- / (f_{N_l}^- - f_{N_l}^+)$. Из (12) после подстановки соответствующей функции имеем:

$$(17) \quad f_l^0 = [-\phi_1(x_1^l); 1 - 2\alpha_l].$$

Так как $x_1^l \neq 0$ по условиям теоремы, из (17) следует, что $f_l^0 \neq [0; 0]$ для любого $0 \leq \alpha_l \leq 1$. А значит, точка $(x_1^l, -\phi_1(x_1^l))$ не является стационарной. В остальных точках работает теорема 1. Теорема 2 доказана.

Схематически траектории движения, характерные для систем (5)–(7) с функцией $\phi(x_1)$ и $\phi_1(x_1)$, изображены пунктирной линией на рис. 1 и 2 соответственно. В обоих случаях, начав движение из точки $A_1 \in D_2^+$ в точку $A_2 \in D_3^+$, в силу отрицательности производной функции Ляпунова справедливо неравенство $V(A_1) > V(A_2)$. Затем движение идет по параболе в области D_3^+ , где $\dot{V} = 0$, т.е. выполняется неравенство $V(A_1) > V(A_3) = V(A_2)$, где $A_3 \in D_1$. Далее возможны два варианта: траектория протыкает кривую разрыва и попадает в D_2^- либо попадает в устойчивый скользящий режим и движется по нему в точку B_3 . При этом в конечной точке выполняется строгое неравенство $V(A_1) > V(B_3)$.

Рассмотрим примеры функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1. На рис. 4 под номерами 1 и 2 изображены гладкие функции насыщения $\Phi_1(\xi) = \sin(\psi(k\xi))$, где $\psi(k\xi) = \text{sat}_{(\frac{\pi}{2k})^{1/3}}(k\xi^3)$, и $\Phi_2(\xi) = \sin(\psi(k\xi))$, где $\psi(k\xi) = \text{sat}_{\xi^*}(\xi^3 + \xi/4)$. Через ξ^* в последней формуле обозначено решение полиномиального уравнения $\xi^3 + \xi/4 = \pi/2$.

В качестве примера функции $\phi_1(x_1)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, можно взять кусочно-линейную функцию с L изгибами. Например, на рис. 4 под номером 3 изображена функция $\Phi_3(\xi) = \frac{1}{3}(\text{sat}(k_1\xi) + \text{sat}(k_2\xi) + \text{sat}(k_3\xi))$, $k_1 = 0,3$, $k_2 = 2,65$, $k_3 = 5$, с тремя перегибами, а под номером 4 – с четырьмя перегибами $\Phi_4(\xi) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^4 \text{sat}(k_i\xi) \right)$, $k_i = \frac{i}{3}$, $i = 1, \dots, 4$. Простейшей функцией из приведенного класса является функция sat , обозначенная номером 5 на рис. 4.

4. Разрывная кривая переключения

Теорема 3. Пусть

$$(18) \quad \phi_2(\xi) = K \text{sign}(\xi), \quad \xi \in R, \quad 0 < K < +\infty.$$

Система (5)–(7) с функцией $\phi(x_1) = \phi_2(x_1)$ имеет глобально полуустойчивый цикл, который проходит через точки $(0, \pm K)$, а начало координат является сшитым центром согласно классификации Филиппова.

Доказательство. По аналогии с теоремой 2 сначала разделим кривую $S = 0$ на три гладких сегмента: $D_1^+ = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) = 0, x_1 > 0\}$, $D_1^- = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) = 0, x_1 < 0\}$, $D_1^0 = \{(x_1, x_2) : x_2 \in (-K, K), x_1 = 0\}$.

Так как это прямые линии, для каждой из них ее нормаль можно выписать явно: $n^+ = n^- = [0; 1]$ – для $D_1^\pm$ и $n^0 = [1; 0]$ – для D_1^0 (по определению направление нормали выбирается в сторону множества $S > 0$).

Используя (10) и подставляя $\nabla S = n_0$, находим проекции векторного поля на множестве D_1^0 :

$$(19) \quad f_{n_0}^\pm = [1; 0][x_2; \pm 1]_{x_2 \in D_1^0} = x_2, \quad x_2 \in D_1^0.$$

Из (19) следует выполнение неравенства $f_{n_0}^+ f_{n_0}^- > 0$, $x_2 \in D_1^0 \setminus 0$, т.е. на множестве D_1^0 , за исключением $x_2 = 0$, имеет место случай AA_0 , определенный в теореме 1. Таким образом, правая часть системы имеет вид $f = f^+$ при $x_2 > 0$ и $f = f^-$ при $x_2 < 0$ на множестве D_1^0 , за исключением $x_2 = 0$. Выберем любую точку на множестве D_1^0 , например $(0, \delta)$, $0 < \delta < K$. Так как система (5)–(7), (18) имеет доопределенную правую часть, ее можно проинтегрировать из этой точки. После несложных преобразований получаем параболу (9) с $C = \pm \delta^2/2$. Этой же фазовой кривой удовлетворяет точка $(0, -\delta)$ с противоположной по знаку, но одинаковой по модулю проекцией векторного поля на кривую разрыва, значит, по терминологии Филиппова [7] начало координат является центром. Первая часть утверждения доказана.

Пусть теперь $\nabla S = [0; 1]$. Используя (10), находим проекции векторного поля на множестве D_1^+ :

$$(20) \quad f_n^\pm = [0; 1][x_2; \pm 1] = \pm 1 \in D_1^+.$$

На множестве D_1^- получаем тот же результат, который означает, что на этих множествах имеет место скользящий режим и при этом $\alpha_n = \frac{1}{2}$. Посчитаем новое векторное поле f^0 , имеем:

$$(21) \quad f_n^0 = \frac{1}{2}[x_2; -1] + \frac{1}{2}[x_2; 1] = [x_2; 0], \quad x_2 \in D_1^\pm.$$

Итак, на множестве D_1^- $f_n^0 = [1; 0]$, а на множестве D_1^+ $f_n^0 = [-1; 0]$, причем модуль его не меняется. Теперь посчитаем проекцию векторного поля в точках $(0, -K)$ и $(0, K)$. Выберем точку $x^l = (0, K)$ в обозначениях теоремы 2 и применим формулу (16), куда подставим соответствующие значения проекции векторного поля на нормали из множеств D_1^+ и D_1^0 , имеем:

$$(22) \quad f_{N_K}^\pm = \frac{1}{2}(x_2 \pm 1)|_{x_2=K} = K \pm 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}(1 - K).$$

Теперь находим f_K^0 для точки $(0, K)$:

$$(23) \quad f_K^0 = \frac{1}{2}(1 - K)[x_2; -1] + \frac{1}{2}(1 + K)[x_2; 1] = [K; K].$$

Очевидно, $f_K^0 \neq [0; 0]$, значит, точка $(0, K)$ не является стационарной. Повторяя рассуждения для точки $(0, -K)$, находим $f_{-K}^0 = [-K; -K] \neq [0; 0]$, значит точка $(0, -K)$ не является стационарной. Строим решение, проходящее через эти точки, которое имеет вид (9) с параметром $C = \pm K^2/2$. После сшивки двух парабол по оси x_2 получаем замкнутую траекторию – предельный цикл [7]. Покажем, что он устойчивый для всех точек, лежащих на плоскости вне его.

Для области вне цикла рассмотрим функцию (1). Пусть произвольная траектория начинается в точке $A_1 \in D_2^+$ вне цикла (рис. 3). В силу теоремы 1 производная Функции Ляпунова в точке $A_1 \in D_2^+$ отрицательная, а в точке $A_2 \in D_3^+$ равна нулю. Тогда справедливо неравенство $V(A_1) > V(A_2)$. Далее, так как в D_3^+ $\dot{V} = 0$ система движется по параболе в точку $A_3 \in D_1$. С учетом первого неравенства получаем, что $V(A_3) = V(A_2) < V(A_1)$, т.е. траектория приблизилась к циклу в смысле нормы $V(x)$. На кривой разрыва A_3B_3 возникает устойчивый скользящий режим с векторным полем (21), а значит, траектория приходит в точку $(0, -K)$, попадая на цикл за конечное время и не пересекая кривую переключения. Аналогично для точек из D_3^- . Таким образом построенный цикл из двух сшитых парабол будет устойчивым для всех точек, лежащих на плоскости вне его. Теорема доказана.

5. Численная иллюстрация

В качестве иллюстрации были построены линии уровня функции Ляпунова (1) для системы (5)–(7) с функциями $\phi = x_1^{1/3}$, $\phi_1 = \text{sat}(x_1)$ и ϕ_2 (18) с $K = 1$. На рис. 5 показана одна из линий уровня (сплошная линия) и несколько фазовых траекторий (пунктирные линии), начинающихся на ней. Начальные точки траекторий помечены кружочками. Как видно из рисунка, ни одна

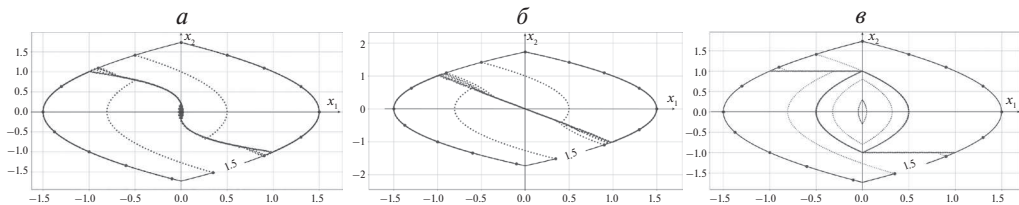


Рис. 5. Линия уровня функции Ляпунова и фазовые траектории на плоскости (x_1, x_2) . Точками выделены начальные условия, соответствующие изображенным фазовым траекториям.

из траекторий не выходит за пределы инвариантного множества, ограниченного линией уровня. Сегменты траекторий, идущие вдоль границы множества, лежат в подмножествах D_3^- и D_3^+ , в которых производная функции Ляпунова в силу системы равна нулю.

На рис. 5,а после попадания траектории на кривую разрыва происходит устойчивый скользящий режим до некоторого момента, а затем траектория попадает в область, где происходит пересечение кривой разрыва и попадание в область, где функция Ляпунова становится отрицательной, а затем ситуация повторяется. В этом случае начало координат – сшитый устойчивый фокус ([7, с. 166]).

На рис. 5,б после попадания траектории на кривую разрыва происходит устойчивый скользящий режим до нуля. В этом случае начало координат сшитый устойчивый узел или линейная особенность типа AA_1 ([7, с. 166]).

На рис. 5,в после попадания траектории на кривую разрыва происходит устойчивый скользящий режим до точки $(0, 1)$ или $(0, -1)$ в зависимости от начальных условий, далее траектории наматываются на цикл. К сожалению, из-за ошибок округления может происходить ситуация, когда траектория движется по циклу меньшего размера. Если выбрать точку внутри цикла, получим другой цикл меньшего размера, и так далее до нуля. В этом случае начало координат – сшитый центр ([7, с. 166]).

6. Заключение

Рассмотрена задача стабилизации цепочки двух интеграторов разрывной обратной связью. Это – предельный случай рассмотренной ранее обратной связи в виде вложенных функций насыщения. В работе предложена функция Ляпунова для замкнутой системы, с помощью которой и результатов теории Филиппова доказана глобальная асимптотическая устойчивость начала координат для разных типов непрерывной кривой переключения. В случае, когда кривая переключения разрывная, доказано, что начало координат является сшитым центром по классификации Филиппова. При этом в замкнутой системе существует полуустойчивый цикл, охватывающий это положение равновесия. Результат работы сформулирован в виде трех теорем. В качестве

численных примеров построены линия уровня функции Ляпунова и фазовые траектории на плоскости для разных типов кривой переключения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Ю.В., Пестерев А.В. Глобальная стабилизация интегратора 2-го порядка обратной связью в виде вложенных сигмOID // Известия РАН. ТиСУ. 2024. Т. 58. № 3. С. 5–10.
2. Пестерев А.В., Морозов Ю.В. Глобальная стабилизация интегратора второго порядка обратной связью в виде вложенных сатураторов // АиТ. 2024. № 4. С. 55–60.
3. Пономарев В.М., Литвинов А.П. Основы автоматического регулирования и управления. М.: Высшая школа, 1974.
4. Olfati-Saber R. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles // Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
5. Матюхин В.И., Пятницкий Е.С. Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной // АиТ. 2004. № 8. С. 14–38.
6. Hua M.-D., Samson C. Time sub-optimal nonlinear pi and pid controllers applied to longitudinal headway car control // Int. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.
7. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
8. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. М.: Наука, 1967.
9. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.
10. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
11. Красовский Н.Н. Проблемы устойчивости и управления / Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика Владимира Мефодьевича Матросова. М.: Физматлит, 2013.
12. Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. III // АиТ. 1986. № 5. С. 38–49.
13. Матросов И.В. О единственности справа решений невырожденных алгебродифференциальных уравнений с разрывами // АиТ. 2007. № 1. С. 11–19.
14. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
15. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
16. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982.
17. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.
18. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. № 3. С. 246–248.

19. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Том 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2016.
20. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 3rd edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
21. *Li Y., Lin Z.* Stability and Performance of Control Systems with Actuator Saturation. Basel: Birkhauser, 2018.
22. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1984.
23. *Пуш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
24. *Матюхин В.И.* Управление механическими системами. М.: Физматлит, 2009.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 04.10.2024

После доработки 17.06.2025

Принята к публикации 12.08.2025

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2026 г. В.Г. БАБИКОВ, канд. физ.-мат. наук (babikov@ipu.ru),
А.А. ГАЛЯЕВ, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СПЛАЙН-СЕТОК В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ¹

Настоящая работа является дополнением к циклу работ авторов по теме задач обнаружения и классификации слабых сигналов. В продолжение этой темы в предлагаемом исследовании представлены результаты прикладного характера. Здесь авторы фокусируются на адаптивных метрических сетках в приложении к информационным диаграммам и выработке новых классификационных признаков.

Ключевые слова: информационная энтропия, дискретное преобразование Фурье, статистический дисбаланс, статистическая сложность, спектральная сложность, метрическая сетка.

DOI: 10.7868/S2413977726010079

1. Введение

Классические способы решения задачи обнаружения используют дополнительную информацию о свойствах сигнала. Так, решение задачи оптимальной фильтрации требует знания свойств сигнала: периодичности, полосы частот и др. [1]. Решение задачи различения двух гипотез опирается на лемму Неймана–Пирсона, определяет факт превышения оптимального порога при заданной вероятности ложной тревоги и требует оценки статистических свойств выборочных распределений шума и смеси сигнала и шума [2]. В [3] представлена разновидность леммы Неймана–Пирсона, особенность которой состоит в том, что не допускается ошибаться, принимая одну гипотезу вместо другой. Решение задачи о разладке требует настройки алгоритма на изменение неизвестных статистических характеристик распределений шума и смеси сигнала и шума, так же как в задаче поиска аномалий [4]. Все перечисленные способы демонстрируют качественную и надежную работу при превышении сигнала над шумом, но при малых отношениях сигнал/шум или в тяжелой помеховой обстановке зачастую дают неверный ответ.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

Что касается использования информационных характеристик для решения задач статистической физики, классификации медицинских анализов (например, в целях изучения текстуры изображений гистопатологии молочной железы) и др., то этот подход уже имеет долгую историю. Уже в 1999 г. в [5] для количественного описания сложности двумерных узоров была введена мера сложности, основанная на среднем приросте информации. В [6] поднимаются вопросы, связанные с разработкой общей меры сложности – или закономерности, или структуры – для двумерных систем. Такие задачи возникают, например, при исследовании поверхностей в геологии.

Статья [7] посвящена исследованию возможности классификации текстур посредством двумерных порядковых паттернов, в частности посредством диаграммы статистической сложности. В [8] авторы подтверждают, что диаграмма статистической сложности является популярным инструментом для отличия стохастических сигналов (шума) от детерминированного хаоса (в англоязычной литературе встречается термин для этого инструмента – complexity-entropy (CE) plane). Однако авторами статьи было обнаружено, что как высокоразмерные детерминированные временные ряды, так и стохастические суррогатные данные (шумы) могут быть расположены в одной и той же области диаграммы и их представления показывают очень похожее поведение для различных сигнально-шумовых смесей или даже типов сигналов. Поэтому классификация этих данных по их положению в плоскости диаграммы может оказаться сложной или даже вводящей в заблуждение.

Вопрос о сложности различения шума и шумоподобных детерминированных сигналов также подробно освещается в [9]. Эта работа посвящена исследованию диаграмм статистической и спектральной сложностей. Диаграммы строятся следующим образом: информационная энтропия отмечается по оси абсцисс, статистическая (спектральная) сложность – по оси ординат. В тексте работы диаграммы статистической сложности обозначаются как (S, C_{TV}) и, соответственно, диаграммы спектральной сложности как (S, C_S) . В работе даны соответствующие определения, сделаны существенные замечания о чувствительности диаграмм, сформулированы и доказаны леммы об оценке верхней и нижней границ на диаграммах статистической и спектральной сложностей для различных сигнально-шумовых смесей. Определены некоторые важные закономерности поведения шумоподобных и слабых сигналов, возможности их обнаружения в условиях белого и голубого шумов.

В перечисленных и других многочисленных работах, посвященных методам двумерного информационного анализа, использующим информационные диаграммы, показана возможность решения задач обнаружения и классификации. В то время как в статье авторов [9] представлена альтернативная интерпретация этих методов, которая состоит в том, что диаграммы статистической сложности (как и некоторые другие двумерные информационные диаграммы) находятся во взаимно-однозначном соответствии с количеством дискретных компонент спектра сигнала и отношением сигнал/шум. Совер-

шенно неожиданным представляется то, что, рассчитывая значения информационной энтропии и статистической сложности для полученной сигнально-шумовой смеси, одновременно можно определить количество эффективных дискрет спектра и энергетические доли сигнала и шума, но тем не менее это так – в статье последовательно посредством построения аналитических сеток показано, что диаграммы статистической и спектральной сложности могут быть сведены к двухмерной диаграмме дискретности и отношения сигнал/шум. Уточним, что в упомянутой работе представлены аналитические оценки метрических сеток для диаграмм статистической и спектральной сложностей. Инструмент метрических сеток (при определенных условиях) позволяет определить однозначное соответствие между кортежем информационных характеристик S, C_{TV} и кортежем параметров d (количество дискрет в спектре), SNR (отношение сигнал/шум). При этом при построении метрических сеток требуется прежде определить, какой шум присутствует в сигнально-шумовой смеси (белый шум, голубой шум или какой-либо другой шум).

Естественный шум, конечно, отличается от детерминированного белого, голубого и других шумов. В связи с этим требуется построение так называемых адаптивных сеток. Об этом пойдет речь в разделе “Адаптивные сетки” настоящей работы.

2. Диаграммы спектральной и статистической сложностей

В ранее опубликованных работах по теме информационных характеристик авторы сосредотачивались, главным образом, на новых чувствительных информационных критериях, что важно при решении задачи обнаружения [10–12], а также на построении метрических сеток, которые играют роль в решении задачи классификации [3, 9].

Новая спектральная мера $C_S(p)$ (1), предложенная в [10], особенно эффективна при обнаружении слабых сигналов с малым ($d < 50$ при $N \geq 2048$) количеством дискрет d в смеси с белым шумом. В [9] даны соответствующие определения (по сути d – количество гармонических колебаний равной амплитуды в так называемом d -сигнале). Далее в выражениях (1)–(4) представлен ряд обозначений, требуемых для решения задачи обнаружения/классификации слабых сигналов:

$$(1) \quad C_S(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left(\sum_{k=1}^N \left| p_k + \frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1} \right| \right)^2.$$

$$(2) \quad C_{TV}(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \left| p_i - \frac{1}{N} \right| \right)^2.$$

В свою очередь статистическая сложность является произведением информационной энтропии $S(p)$ и статистического дисбаланса D_{TV} ($C_{TV}(p) = S(p) \cdot D_{TV}(p)$):

$$(3) \quad D_{TV}(p) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^N \left| p_i - \frac{1}{N} \right| \right)^2,$$

$$(4) \quad S(p) = -\frac{1}{\log_2 N} \left(\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \right),$$

где N – длина спектрального ряда данных, p_k – энергетический спектр, K_N – нормировочный множитель, близкий к единице и зависящий от N .

В ранее опубликованных работах было показано, что диаграммы² статистической и спектральной сложности представляют собой эффективный инструмент в решении задач обнаружения и классификации. Причем информационные диаграммы, построенные на основе спектральной сложности $C_S(p)$, в меньшей степени применимы к решению задачи классификации, чем информационные диаграммы, основанные на статистической сложности $C_{TV}(p)$ (2). Так, информационная метрика, обладающая преимуществом в решении задачи обнаружения, уступает другой метрике при решении задачи классификации. Поэтому далее авторы развивают метод информационных диаграмм, основанный на статистической сложности, который как раз чувствительнее при определении количества дискрет в спектре сигнала.

Работа [9] посвящена построению аналитических сеток для диаграмм статистической и спектральной сложности (белый шум). Отметим, что у аналитических сеток большое преимущество – возможность построения обратных непрерывных функций и, как следствие, получение быстрого результата для высокоточной оценки дискрет d и отношения сигнал/шум по полученным оценкам значения энтропии и статистической сложности. В тех случаях, когда шум сильно отличается от белого, а сигналы слабые, приходится строить адаптивные сетки.

На рис. 1 представлены примеры метрических сеток на диаграмме статистической сложности в условиях голубого и розового шумов. Обратим внимание, что в условиях розового шума по сравнению с голубым или белым шумами появляется возможность «разглядывать» шумоподобные сигналы, т.е. классифицировать сигналы с большим количеством дискрет, в частности короткие импульсы. Так, на рис. 1,а (голубой шум) сигналы с количеством дискрет $d > 256$ практически неразличимы, в то время как на рис. 1,б (розовый шум) появляется возможность различить сигналы с количеством

² Диаграмма сложности представляет собой зависимость сложности от энтропии: значение O_x на диаграмме соответствует энтропии, рассчитанной по нормированному энергетическому спектру сигнально-шумовой смеси для заданного временного интервала (окна), а значение O_y соответственно определяется расчетным значением сложности.

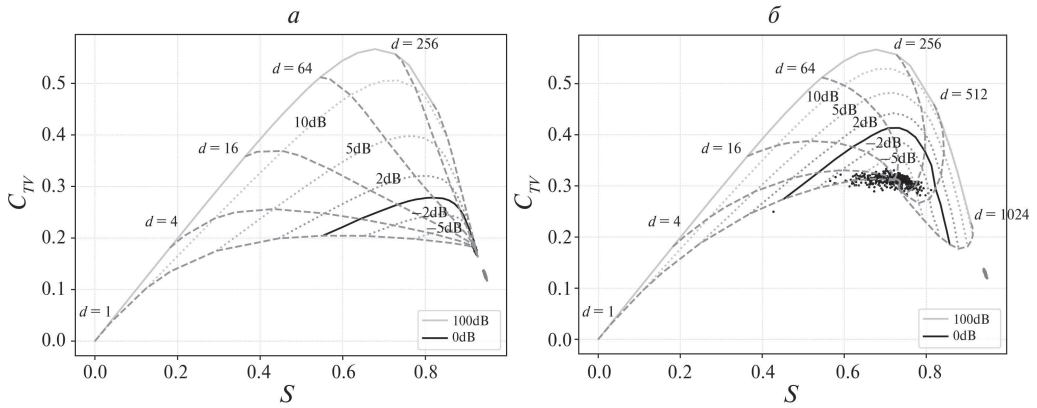


Рис. 1. Сравнение метрических сеток для голубого и розового шумов для $N = 2048$ (для белого шума: $S = 0,945$, $C_{TV} = 0,125$); *а* – сетка для голубого шума, *б* – сетка для розового шума.

дискрет $d > 1024$, т.е. когда количество спектральных компонент сигнала больше размера всего спектра (т.е. когда сигнал шумоподобен).

Следует сказать также и о том, что альтернативные диаграммы, построенные на основании энтропии и статистического дисбаланса D_{TV} (3), позволяют в большинстве случаев эффективнее разделять дискреты и решать задачу классификации, чем диаграммы, построенные на основе статистической сложности C_{TV} . Это связано с тем, что при появлении сигнала в белом шуме энтропия S (4) и дисбаланс D_{TV} меняются разнонаправлено и при перемножении $C_{TV} = S \cdot D_{TV}$ они частично подавляют друг друга. В работах авторов рассматриваются диаграммы статистической сложности, так как этот метод известен и часто используется на практике. Следующие исследования будут посвящены также и диаграммам на основе энтропии и статистического дисбаланса.

В целях решения задачи обнаружения и классификации на практике требуется построение так называемых адаптивных сеток. Дело в том, что при решении прикладных задач исследователь сталкивается с проблемой определения типа шума, который может значительно отличаться от белого, голубого и т.д. Важно иметь на вооружении инструмент, который бы позволял быстро адаптировать метрическую сетку к реальным условиям. Далее в статье об этом поговорим подробнее.

Отдельно стоит сказать, что размер спектра N определяет возможности по оценке количества дискрет в спектре. Ранее в [3] была дана оценка для определения максимального количества дискрет в белом шуме $d < \frac{N}{3}$. На рис. 2 представлено сравнение предельных возможностей по обнаружению сигналов посредством статистической и спектральной сложностей для $N = 2048$ и для $N = 8192$ в зависимости от числа дискрет сигнала в белом шуме. На рис. 2,б показано сравнение белых метрических сеток для $N = 2048$ и для $N = 8192$.

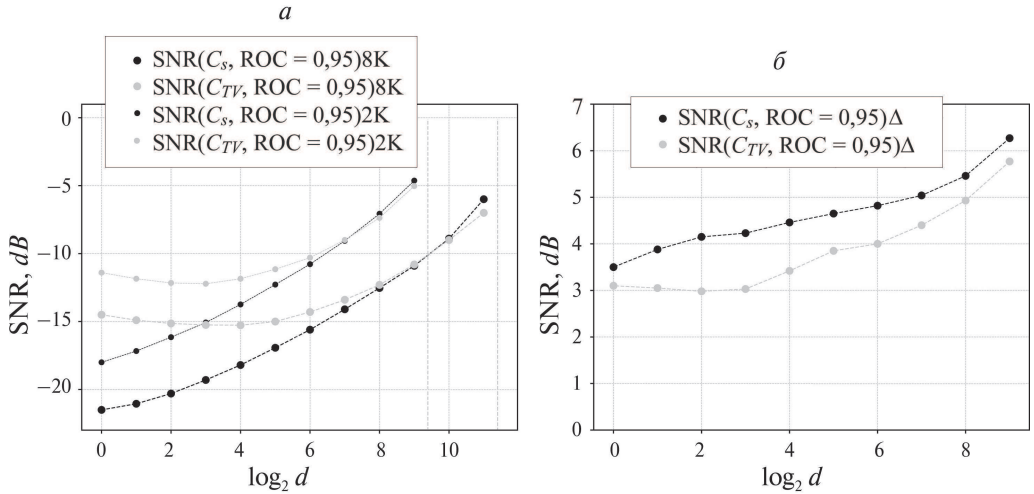


Рис. 2. Сравнение предельных возможностей обнаружения сигнала в зависимости от количества дискрет d и размера спектра N ; a – предельный уровни SNR в зависимости от дискретности ($\text{AUC} = 0,95$), b – эффект от увеличения размерности (8K vs 2K), изменение предельных SNR.

На графиках заметно, что возможности классификации и обнаружения сигналов при помощи метрических сеток с ростом N возрастают [9]. Кривая серого цвета демонстрирует снижение SNR для сигналов с малым количеством дискрет примерно на 3дБ при увеличении размера спектра с $N = 2048$ до $N = 8192$ для диаграммы статистической сложности и примерно на 4дБ для диаграммы спектральной сложности. Это важное наблюдение, потому как становится ясно, что с ростом N чувствительность диаграммы спектральной сложности растет быстрее, чем чувствительность диаграммы статистической сложности. Результат зависимости предельного SNR в зависимости от количества дискрет в спектре был получен посредством численного эксперимента ($\text{ROC} = 0,95$)³.

3. Адаптивные сетки

На практике требуется построение так называемых адаптивных сеток, которые можно получить следующим образом: по накопленным наблюдениям по пеленгам фазированной решетки, по которым наблюдается минимум энергии (условно отсутствует сигнал), оцениваются средние энтропия $\hat{S}$ и статистическая сложность $\hat{C}_{TV}$, далее генерируется шум, так чтобы в каждом окне математическое ожидание энтропии было равно $\hat{S}$, а математическое ожида-

³ Площадь под ROC-кривой (Receiver Operating Characteristic) или AUC (Area Under the Receiver Operating Characteristic curve). В целом, значение ROC-AUC 0,5 предполагает отсутствие какой-либо способности обнаруживать сигнал в шуме на основе заданного критерия, значение от 0,7 до 0,8 считается приемлемым, от 0,8 до 0,9 считается высоким, а значение более 0,9 считается превосходным.

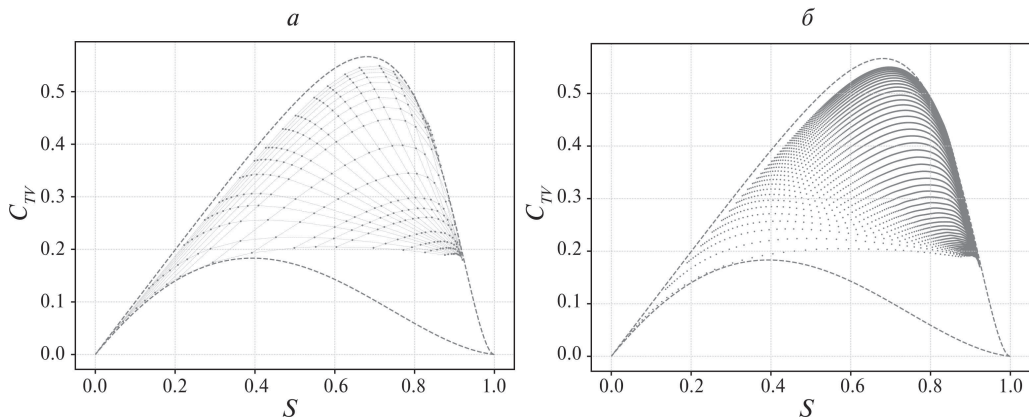


Рис. 3. Оценка узлов голубой сетки (а) и расчет сплайн-сетки (б) для диаграммы статистической сложности ($N = 2048$).

ние статистической сложности было равно $\hat{C}_{TV}$, этот шум смешивается с простыми сигналами разного количества дискрет (комбинация синусоидальных сигналов одинаковой амплитуды) с целью получения d -сигналов с заданными характеристиками, затем посредством усреднения по 200 кейсам оценивается энтропия и сложность каждого узла метрической сетки (каждый узел характеризуется количеством дискрет d и уровнем отношения сигнал/шум SNR), далее по узлам грубой сетки строится сплайн-сетка (получаем детализированную сетку). О таком способе построения метрических сеток говорится в [9] в целях сравнения аналитических сеток с численным экспериментом.

На рис. 3,а представлена метрическая сетка для диаграммы статистической сложности ($N = 2048$) в целях обнаружения и классификации сигналов в голубом шуме, которая была построена согласно описанному выше алгоритму для адаптивных сеток. Узлы решетки определяются следующими значениями дискретности и отношениями сигнал/шум: $d \in \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 20, 28, 36, 52, 68, 96, 128, 192, 256, 384, 512\}$, $\text{SNR} \in \{-10, -7, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Каждый узел построен усреднением по 200 кейсам. В Приложении представлен пример построения аналитической метрической сетки для голубого шума.

На рис. 3,б представлена метрическая сплайн-сетка, которая построена на основе грубой сетки 3,а (на рисунке представлена сетка размером 500×500) при помощи двумерной интерполяции RectBivariateSpline (в Python имеется также более простой аналог interp2d). Двумерная сплайн интерполяция при построении метрической сетки позволяет значительно повысить степень ее детализации (в условиях ограниченного времени расчета), что, в свою очередь, позволяет с высокой точностью оценивать дискретность и отношение сигнал/шум [9].

4. Признаки, порождаемые дискретностью и отношением сигнал/шум

Задача классификации связана с разнообразными информационными критериями. Как было показано в [9], посредством информационных характеристик, таких как энтропия и статистическая сложность, можно получать оценки уровней дискретности d и отношения сигнал/шум SNR, которые, в свою очередь, порождают целое семейство сильных классификационных критериев. Остановимся на некоторых из них.

1. Уровень корреляции d и SNR. Высокий уровень корреляции дискретности и отношения сигнал/шум внутри некоторого временного интервала может свидетельствовать об изменении дистанции до объекта.

2. Разница в дискретности (абсолютная и относительная) между средним значением дискретности d сигнально-шумовой смеси, измеренной по k окнам (длительность каждого окна τ), и D оценкой дискретности сигнально-шумовой смеси, измеренной по всему временному окну $k\tau$: $D - d$, $D/d - 1$. Уровень этой разницы позволяет определить, насколько стабильны частоты дискрет. Такой критерий может быть, например, полезен при определении variability сердечного ритма.

3. Уровни дискретности и отношения сигнал/шум для сигнально-шумовой смеси после вычитания огибающей спектра. Подробнее о методах вычитания огибающей и выделении линейчатого спектра говорится в [13].

4. Взвешенная по энергии частота d главных дискрет спектра (обладающих наибольшей энергией). Этот показатель может быть полезен для оценки частоты вершины холма кавитационного шума.

5. Уровень локализации спектра и другие критерии.

Поясним подробнее понятие «Уровень локализации спектра». Как уже было сказано, диаграмма дискретности [9] обладает уникальными свойствами, которые позволяют извлекать дополнительную информацию для решения задачи классификации. В частности, согласно диаграмме дискретности у исследователя появляется возможность формализовать поиск количества «эффективных» дискрет d в спектре. Это, в свою очередь, позволяет построить распределение для этой случайной величины. Отметим также, что дискретность d и отношение сигнал/шум, являясь уникальными характеристиками сигнала, также являются важнейшими классификационными признаками в задаче классификации, но это далеко не все. Одним из самых важных критериев, который порождается дискретностью, является уровень локализации спектра. Суть этого критерия состоит в определении индексов d дискрет, которые удалось выделить при формировании критерия дискретности d посредством применения инструмента Диаграммы дискретности. Пусть Z – суммарное расстояние d дискрет с максимальной энергией до среднего значения по выборке из этих d дискрет (расстояние определяется модулем разницы между индексом дискреты в неупорядоченном спектре и средним значением всех индексов этих d дискрет). Итак, определим минимальное и максимальное

возможное суммарное расстояние d дискрет от их среднего:

$$Z_{\min}(N, d) = \begin{cases} \frac{d^2 - 1}{4}, & d = 2k + 1, \\ \frac{d^2}{4}, & d = 2k. \end{cases}$$

$$Z_{\max}(N, d) = \begin{cases} \left(N - \frac{d+3}{4}\right) \left(\frac{d-1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(N - d - \frac{N}{d} - 2\right), & d = 2k + 1, k > 1, \\ \frac{dN}{2} - \frac{d^2}{4}, & d = 2k. \end{cases}$$

Определим критерий частотной локализации на основании представленных выше формул (интервал значений критерия должен находиться внутри интервала $(0, 1)$, для этого воспользуемся оценками $Z_{\min}, Z_{\max}$ для четных значений дискретности d). Уровнем локализации спектра будем называть следующее выражение:

$$(5) \quad K_z = \frac{Z - Z_{\min}}{Z_{\max} - Z_{\min}} = \frac{4Z - d^2}{2(Nd - d^2)}.$$

Такой критерий позволяет ответить на вопрос, насколько спектр наблюдаемого сигнала локализован в отдельной области спектра. А средняя частота по d дискретам позволяет определить область локализации. Такой критерий позволяет производить классификацию множества типов сигналов. В качестве практического приложения можно рассмотреть такой пример: для белого шума (как и для широкополосной помехи или взрыва) значение этого критерия близко к 0,5, для морских судов в зависимости от дедвейта этот показатель варьируется в пределах интервала 0,1–0,4, а для криков некоторых морских животных этот критерий близок к нулю.

5. Заключение

Настоящая работа является третьей работой в линейке работ авторов, посвященных метрическим сеткам для диаграммы сложности. Прикладной характер работы связан прежде всего с понятием адаптивной сетки и выделением целого ряда информативных классификационных признаков. В совокупности все эти статьи формируют метод метрических сеток и построения диаграммы дискретности, суть которого сводится к оценке количества дискрет в спектре и отношения сигнал/шум по одному временному окну в условиях малого отношения сигнал/шум.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ранее в [10] была получена оценка энтропии в зависимости от размера спектрального ряда N для белого шума:

$$S(N) \approx 1 + \frac{\gamma - 1}{\ln N} \approx 1 - \frac{0,422}{\ln N},$$

где γ – постоянная Эйлера–Маскерони.

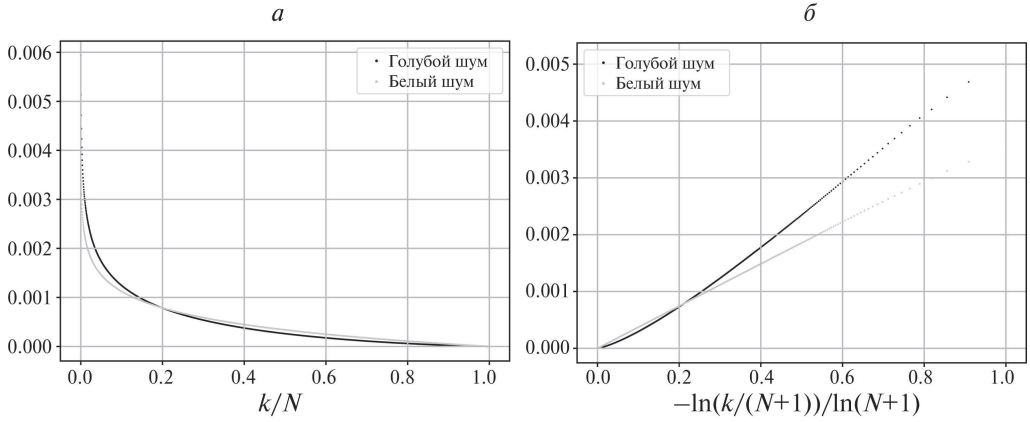


Рис. 4. Пояснение к формуле (П.1); *a* – упорядоченный спектр одной реализации фрейма длины $N = 2048$ для белого и голубого шума, *б* – те же реализации для белого и голубого шумов, горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

Приближенная оценка энтропии для голубого шума, которая также дает хорошее приближение, может быть получена с помощью формулы

$$(П.1) \quad S(N) \approx 1 - \frac{0,616}{\ln N}.$$

Экспериментально подтверждено, что эта формула для голубого шума оценивает истинное значение энтропии с точностью до четвертого знака после запятой ($128 < N < 16\,384$). На рис. 4 представлена плотность распределения нормированных упорядоченных энергетических спектров белого и голубого шумов для $N = 2048$.

Формула (П.1) позволяет получить приближенную метрическую сетку для голубого шума:

$$S(q, d, N) = S_0(N)(1 - q) - \frac{\ln \left(\left(\frac{q}{d} \right)^q (1 - q)^{1-q} \right)}{\ln N},$$

$$D_{TV}(q, d, N) = \frac{1}{4} \left(\alpha(d, N) + 1 + q + \beta(1 - q^2) + \right. \\ \left. + (1 - q) \left(-1 + 2 \exp \left(\frac{1}{q - 1} \right) \right) \right)^2,$$

$$C_{TV}(q, d, N) = S(q, d, N) \cdot D_{TV}(q, d, N),$$

где $N \gtrsim 1000$ – размер спектрального ряда, а $S_0(N)$ – значение информационной энтропии для голубого шума $S_0(N) \approx 1 - \frac{0,616}{\ln N}$ (для $N = 2048$ $S_0 \approx 0,9192$), $\alpha(d, N) = -\frac{2d}{N}$, $\beta \approx 0,12$ – эмпирически полученный коэффициент, q – энергетическая доля d -сигнала в сигнально-шумовой смеси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ronald L.A., Duncan W.M.* Signal analysis: time, frequency, scale, and structure // N.J.: Wiley-IEEE Press, 2004.
2. *Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. Современная математика. М.: МЦНМО: НМУ, 2020.
3. *Babikov V.G., Galyaev A.A.* Information diagrams and their capabilities for classifying weak signals // Probl. Inform. Transmiss. 2024. V. 60. No. 2. P. 127–140.
4. *Kishan G.M., Chilukuri K.M., Huang HuaMing.* Anomaly Detection Principles and Algorithms. Cham. Springer, 2017.
5. *Andrienko Y.A., Brilliantov N.V., Kurths J.* Complexity of two-dimensional patterns // Eur. Phys. J. B. 2000. V. 15. No. 3. P. 539–546.
6. *Feldman D.P., Crutchfield J.P.* Structural information in two-dimensional patterns: Entropy convergence and excess entropy // Physical Review E. 2003. V. 67. No. 5. P. 1–12.
7. *Bandt C., Wittfeld K.* Two new parameters for the ordinal analysis of images // Chaos. 2023. V. 33. No. 7. P. 1–20.
8. *Kottlarz I., Parltitz U.* Ordinal pattern-based complexity analysis of high-dimensional chaotic time series // Chaos. 2023. V. 33. No. 7. P. 1–11.
9. *Babikov V.G., Galyaev A.A.* Complexity-entropy plane analytical representation // Probl. Inform. Transmiss. 2025. V. 61. No. 1. P. 27–40.
10. *Галеев А.А., Бабилов В.Г., Лысенко П.В., Берлин Л.М.* Новая спектральная мера сложности и ее возможности по обнаружению сигналов в шум // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 518. С. 80–88.
11. *Galyaev A.A., Babikov V.G., Lysenko P.V., Berlin L.M.* Addition to the article “A new spectral measure of complexity and its capabilities for detecting signals in noise” // Doklady Mathematics. 2024. V. 518. P. 89–92.
12. *Галеев А.А., Берлин Л.М., Лысенко П.В., Бабилов В.Г.* Порядковые статистики нормированного спектрального распределения для обнаружения слабых сигналов в белом шуме // АиТ. 2024. № 12. С. 49–69.
13. *Babikov O.V., Babikov V.G.* Estimating the fundamental frequency of a propeller shaft-blade harmonic series using the hilbert transform and autocorrelation // Mathematical Problems of Control. 2025. No. 3. P. 12–23.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 03.08.2025

После доработки 24.09.2025

Принята к публикации 06.10.2025

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Семёнова О.В., Вишневский В.М. Стохастические системы поллинга: развитие и новые приложения	3
--	---

Линейные системы

Никонов В.И. Об алгебро-геометрическом подходе к исследованию устойчивости относительно части переменных линейных систем с постоянными коэффициентами	28
--	----

Нелинейные системы

Абдуллаев В.М., Гашимов В.А. Граничное управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и прошедшей во времени обратной связи	42
Акманова С.В. Построение допустимых и оптимального управлений для нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем	62
Мансимов К.Б. , Масталиев Р.О. Об оптимальности особых управлений в одной задаче оптимального управления стохастическими гиперболическими уравнениями первого порядка	89
Морозов Ю.В. Глобальная стабилизация интегратора второго порядка разрывной обратной связью	104

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Бабилов В.Г., Галаев А.А. О некоторых свойствах сплайн-сеток в задачах классификации	120
---	-----

C O N T E N T S

Surveys

Semenova O.V., Vishnevsky V.M. Stochastic Polling Systems: Development and New Applications	3
--	---

Linear Systems

Nikonov V.I. On an Algebro-Geometric Approach to the Study of Stability with Respect to a Part of the Variables of Linear Systems with Constant Coefficients. . .	28
--	----

Nonlinear Systems

Abdullayev V.M., Hashimov V.A. Boundary Control of Rod Heating Process Using Current and Past Time Feedback	42
Akmanova S.V. Admissible and Optimal Control Design for Nonlinear Continuous-Discrete Dynamic Systems	62
Mansimov K.B. , Mastaliyev R.O. On Optimality of Singular Controls in One Optimal Control Problem of the First Order Stochastic Hyperbolic Equations . . .	89
Morozov Yu.V. Global Stabilization of the Second-Order Integrator by Discontinuous Feedback	104

Intellectual Control Systems, Data Analysis

Babikov V.G., Galyaev A.A. On Some Properties of Spline Grids in Classification Problems	120
---	-----