



ISSN 0005-2310 (Print)
ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

2

ФЕВРАЛЬ

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2026 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН, канд. физ.-мат. наук (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОБЗОР МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В обзоре дается сравнительная характеристика условий реализуемости основных методов построения наблюдателей состояний линейных динамических SISO систем (систем с одним входом и одним выходом) с неизвестными параметрами. Отличительной особенностью работы является сравнение между собой наблюдателей состояний, синтезируемых на базе методов робастного, инвариантного и адаптивного управления. Обзор написан без излишних математических деталей и своей целью ставит ознакомление широкого круга читателей с основными принципами построения и функционирования наблюдателей состояний линейных систем с неизвестными параметрами.

Ключевые слова: наблюдатели состояний, параметрическая неопределенность, робастность, инвариантность, адаптивность.

DOI: 10.7868/S2413977726020019

1. Введение

Наблюдатели состояний – это специальные алгоритмы, реализуемые в программной среде и позволяющие по доступной априорной информации и онлайн измерениям входа и выхода в каждый момент времени восстанавливать неизмеряемые состояния системы. Появление и развитие наблюдателей состояний является ответом математического сообщества на стремление инженеров повысить надежность и упростить конструкцию системы измерений как составной части автоматизированной системы управления. Наиболее широкое внедрение наблюдатели получили в автоматизированном электроприводе, где на сегодняшний день большинство систем управления синхронными и асинхронными приводами реализуется средствами бездатчикового управления [1]. Такого успеха невозможно было бы достичь без глубокой теоретической проработки задачи оценивания состояний.

Математическая теория построения наблюдателей зародилась с работами Д. Луюнбергера [2] и Р. Калмана [3], которые соответственно поставили детерминированную и стохастическую задачи оценивания. К настоящему времени эти две параллельные задачи получили невероятное число расширений и обобщений как в непрерывном, так и в дискретном времени. Это

обстоятельство заставляет авторов этой работы ограничиться рассмотрением и анализом лишь только малой части из имеющихся результатов и наработок. Читателям, желающим более глубоко погрузиться и широко охватить проблематику, рекомендуем обратиться к обзорам [4, 5] и книгам [6–12].

В этой работе будем рассматривать самый простой случай линейной динамической системы с одним входом и одним выходом, причем будем изучать восстановление состояний такой системы в ее исходной форме записи (физических состояний), а не виртуальных состояний ее канонических форм. Если матрицы такой системы заранее точно известны и выполнен критерий наблюдаемости, то наблюдатель Люенбергера [2] является решением задачи оценивания и позволяет с заданной экспоненциальной скоростью сходимости восстановить неизмеряемые состояния. Однако как решать задачу, если матрицы системы неизвестны или известны недостаточно точно? Поиском ответа на этот вопрос параллельно занимаются теории робастного [8–10], инвариантного [7, 8, 11] и адаптивного [12] управления¹.

Робастные наблюдатели. Эта группа в основном связана с совершенствованием (и созданием новых) оффлайн методов расчета параметров корректирующей обратной связи в базовой структуре наблюдателя Люенбергера. Разрабатываются и совершенствуются различные методы расчета, позволяющие на этапе параметрического синтеза наблюдателя заложить гарантии качества оценивания неизмеряемых состояний системы в условиях параметрической неопределенности и дополнительно решить некоторые задачи оптимизации (H_2 -, H_∞ -норм передаточной функции, квадратичного функционала в линейно-квадратичной задаче, размера инвариантного (или ограничивающего) эллипсоида в задачах, связанных с подавлением внешних возмущений и пр.). Общими ограничениями робастных методов является необходимость *i*) априорного знания амплитуды возмущения и размаха параметрической неопределенности, *ii*) удовлетворения параметрической неопределенности системы специальным параметризацией. Подходы этой группы в разное время развивали зарубежные и отечественные исследователи, такие как S. Bhattacharyya, J. Doyle, K. Zhou, H. Kwakernaak, I. Petersen, B. Barmish, R. Tempo, W. Schmitendorf, F. Jabbari, D. Bernstein, M. Corless, C.H. Lien, de Souza C.E., Geromel J.C., D. Peaucelle, Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков, И.Г. Владимиров, А.П. Курдюков, Д.В. Баландин, М.М. Коган, А.Г. Александров, В.Н. Честнов, С.К. Коровин, В.В. Фомичев, А.В. Ушаков, Р.О. Оморov и др.

Оценивание на базе теории инвариантности. Основанием методов этой группы является идея обеспечения нечувствительности процесса восстановления неизмеряемых состояний по отношению к параметрическим и/или сигнальным возмущениям. Инвариантность достигается с помощью алгебраического исключения обобщенного возмущения из уравнений ошибки на-

¹ Здесь приведены ссылки на книги, обобщающие и систематизирующие основные результаты в упомянутых областях.

блюдения или с помощью силового подавления его влияния на ошибку оценивания корректирующими обратными связями в классе функций с большими коэффициентами или разрывными сигналами. Условиями реализуемости наблюдателей на базе теории инвариантности является, во-первых, знание размаха неопределенности системы (для попадания на поверхность скольжения), а во-вторых, выполнение строгих условий согласованности по выходу (для существования поверхности скольжения). Приложение методов теории инвариантности к задаче восстановления состояний прежде всего связано с именами C. Edwards, S.K. Spurgeon, B.L. Walcott, T. Floquet, J.-P. Barbot, M. Darouach, P. Kudva, S. Zak, A. Levant, L. Fridman, Y. Shtessel, K. Khalil, J. Slotine, В.И. Уткин, А.С. Позняк, С.А. Краснова, В.А. Уткин, А.Н. Жирабок и др.

Адаптивные наблюдатели. Наблюдатели из этой группы одновременно выполняют оценку неизмеряемых состояний и идентификацию неизвестных параметров системы. Благодаря этой, в сущности простой, идее использование информации о размахе параметрической неопределенности при синтезе не требуется. Вместо этого классические адаптивные наблюдатели для асимптотической сходимости оценок состояний к истинным значениям требуют выполнения условия неисчезающего возбуждения некоторой функции от измеряемых сигналов (управления и выхода). В течение продолжительного периода времени это условие ограничивало практический интерес к методам адаптивного восстановления состояний, поскольку в различных интерпретациях и трактовках оказалось эквивалентно *i)* глобальному частотному богатству управления со степенью, равной динамическому порядку системы, *ii)* полной наблюдаемости расширенной системы (состояния + неизвестные параметры). Усилиями G. Chowdharry, R. Ortega, Y. Pan, S.B. Roy, А.А. Бобцова, С.В. Арановского и многих других исследователей это условие удалось ослабить до требования конечного возбуждения регрессора, эквивалентного частотному богатству управления на интервале времени или локальной полной наблюдаемости расширенной системы. Развитие методов синтеза адаптивных наблюдателей состояний во многом определили K. Narendra, G. Lueders, R. Carroll, D. Lindorf, G. Kreisselmeier, A. Annaswamy, P. Ioannou, R. Marino, P. Tomei, A. Isidori, R. Ortega, S.B. Roy, D. Efimov, А.А. Бобцов, В.О. Никифоров, А.А. Пыркин, С.В. Арановский, Н.Н. Карабутов и др.

Целью этой работы является сравнение между собой условий реализуемости наблюдателей состояний, синтезируемых на базе этих трех теорий. Актуальность проведения такого сравнительного анализа авторы видят в двух обстоятельствах. Во-первых, использование наблюдателей в практических задачах требует от инженера выбора алгоритма, наилучшим образом соответствующего условиям решаемой прикладной задачи. Это, в свою очередь, требует знания основных методов построения наблюдателей состояний и условий их применимости. В компактной форме такую информацию и предоставляет эта обзорная работа, позволяющая ознакомиться с основными существующими подходами. Во-вторых, исследователи, развивающие одну теорию оцени-

вания (робастную, инвариантную или адаптивную), не всегда, но очень часто говорят на разных языках с коллегами, работающими над решением той же задачи, но с помощью методов из другой теории. Авторы надеются, что этот обзор позволит улучшить ситуацию и достичь большего взаимопонимания между упомянутыми группами, что в перспективе приведет к обогащению новыми подходами всех трех теорий.

Разумеется, представить исчерпывающе полный обзор невозможно, поэтому заметим, что в этой работе обсуждаются результаты, наиболее интересные с субъективной точки зрения авторов и в основном касающиеся задачи восстановления физических, а не виртуальных координат состояний. При этом авторы не только не снимают с себя ответственности перед *i)* читателями за субъективизм и неполноту информации, *ii)* исследователями за возможное отсутствие ссылок на их работы по рассматриваемой тематике, но и надеются получить обратную связь, которая несомненно будет полезна.

Обзор имеет следующую структуру. В разделе 2 актуальность задачи оценивания вектора состояний демонстрируется с точки зрения задачи стабилизации линейного объекта с постоянными параметрами. В разделах 3–5 подробно рассмотрены существующие подходы к построению наблюдателей с помощью методов робастного, инвариантного и адаптивного управления соответственно. Раздел 6 посвящен анализу применимости оценок, формируемых рассмотренными наблюдателями, для целей управления по обратной связи. Обзор завершается общими выводами, представленными в разделе 7. Область научных интересов авторов связана с адаптивной теорией управления, поэтому в структуре обзора методам построения адаптивных наблюдателей уделено большее внимание.

В дальнейшем тексте использованы следующие обозначения: $|\cdot|$ есть абсолютное значение, $\|\cdot\|$ – векторная или матричная норма, $I_{n \times n} = I_n$ – единичная матрица размерности $n \times n$, $0_{n \times n}$ – нулевая матрица размерности $n \times n$, 0_n – нулевой вектор длины n , $\det\{\cdot\}$ обозначает определитель, $\text{adj}\{\cdot\}$ – союзная матрица, $\text{tr}\{\cdot\}$ – след матрицы, $\text{rank}(\cdot)$ – ранг матрицы, $\dim(\cdot)$ – размерность вектора или матрицы, $\sigma\{\cdot\}$ – спектр матрицы, $\text{sign}(\cdot)$ – функция знака, $\ln(\cdot)$ – натуральный логарифм, $\text{vec}(\cdot)$ – операция векторизации матрицы, $\text{mat}(\cdot)$ – операция, обратная операции векторизации, $\text{diag}\{\cdot\}$ – диагональная матрица. Минимальное и максимальное собственное число матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обозначается соответственно $\lambda_{\min}(A) = \min_i (\text{Re}\{\lambda_i(A)\})$ и $\lambda_{\max}(A) = \max_i (\text{Re}\{\lambda_i(A)\})$, где $i = 1, \dots, n$. Для обозначения экспоненциальной скорости сходимости используется латинская аббревиатура exp . Для некоторого отображения $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ его Якобиан определяется как $\nabla_x \mathcal{F}(x) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x)$. Также используется тот факт, что для любой (возможно, вырожденной) матрицы M размерностью $n \times n$ выполняется следующее: $\text{adj}\{M\}M = \det\{M\}I_{n \times n}$, и $f \in L_q$ означает $\sqrt[q]{\int_{t_0}^t \|f(s)\|^q ds} < \infty$ для всех $t \geq t_0$.

2. Взгляд на задачу оценивания через призму задачи управления

Многие реальные технические системы с достаточной точностью могут быть описаны линейными моделями с постоянными параметрами (здесь и далее рассматриваются системы “один вход – один выход”):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= C^T x(t), \end{aligned}$$

где $t \geq t_0 \geq 0$ – время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизмеряемые физические состояния с неизвестными начальными условиями x_0 , $u(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый сигнал или формируемое управление, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – неизвестная матрица и вектор, $C \in \mathbb{R}^n$ – известный вектор, формирующий измеряемый выход $y(t) \in \mathbb{R}$. Пары (C^T, A) и (A, B) полностью наблюдаемы и управляемы соответственно (определения и критерии управляемости и наблюдаемости могут быть найдены в [6, 13]).

Одной из базовых проблем теории управления является решение задачи стабилизации, т.е. приведение состояний линейных систем из произвольных ограниченных начальных состояний x_0 к началу координат. Если пара матриц (A, B) известна и управляема, то эта задача может быть решена с использованием обратной связи по состоянию:

$$(2.2) \quad u(t) = -Kx(t),$$

где строка $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ выбрана из условия $\lambda_{\max}(A - BK) < 0$ и может быть рассчитана, например, модальным методом [14, 15]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} AM - MA_{ref} &= Bh, \\ K &= hM^{-1}, \end{aligned}$$

где матрица A_{ref} и вектор h выбираются так, что $\sigma\{A\} \cap \sigma\{A_{ref}\} = \emptyset$, а пара (h, A_{ref}) наблюдаема.

Однако поскольку состояния системы недоступны для измерения, а параметры матриц A и B неизвестны по постановке, обратная связь (2.2) нереализуема, и естественным образом возникает задача синтеза динамической обратной связи в следующих видах:

$$(2.4a) \quad u(t) = -K_r \hat{x}(t),$$

$$(2.4б) \quad u(t) = -\hat{K}(t) \hat{x}(t),$$

где:

(2.4a) – робастная динамическая обратная связь (K_r обеспечивает $\lambda_{\max}(A - BK_r) < 0$ для всех матриц A и B , принадлежащих некоторым известным семействам);

(2.4б) – адаптивная динамическая обратная связь (законы изменения $\hat{K}(t)$ и $\hat{x}(t)$ совместно обеспечивают асимптотическую устойчивость положения

равновесия системы (2.1)). В частном случае $\hat{K}(t)$ может быть оценкой параметров K модального регулятора (2.2), (2.3).

Для реализации обратных связей (2.4а) и (2.4б) требуется формирование оценок состояний системы (2.1) таким образом, что:

$$(2.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0,$$

где $\hat{x}(t)$ – оценка состояний системы, $\tilde{x}(t)$ – ошибка восстановления/наблюдения/оценивания.

Далее в обзоре делается акцент на методах решения задачи (2.5) с помощью результатов теорий робастного, инвариантного и адаптивного управления, а вопросы построения закона формирования динамического коэффициента $\hat{K}(t)$ и формул (процедур) расчета параметров K_r почти везде выносятся за рамки обзора.

В этой связи в целях корректного анализа методов из литературных источников принимается выполненным следующее классическое допущение.

Допущение 1. Реализуемое в системе управление $u(t)$ ограничено и для всех моментов времени обеспечивает ограниченность состояний $x(t)$.

Замечание 1. Кроме рассмотренной в этом разделе проблемы стабилизации системы по динамической обратной связи, для которой, как уже поминалось ранее, вместо $\hat{x}(t)$ может быть достаточно оценок виртуальных состояний канонической наблюдаемой формы системы, практика изобилует другими задачами, требующими оценки вектора неизмеряемых физических состояний системы $x(t)$. Например, это диагностика отказов, мониторинг и регистрация неизмеряемых переменных технологических процессов, построение цифровых двойников и другие прикладные задачи. Поэтому цель определена именно в форме (2.5).

3. Робастные наблюдатели

Стандартный наблюдатель Люенбергера описывается следующим уравнением:

$$(3.1) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A_n \hat{x}(t) + B_n u(t) + L(y(t) - C^T \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0,$$

где $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица номинальных параметров системы, $B_n \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – матрица номинальных коэффициентов усиления по управлению, $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – вектор корректора, пара (C^T, A_n) наблюдаема.

Если в системе (2.1) реализуются равенства $A = A_n$, $B = B_n$, то, как следует из уравнения (в этом разделе обзора переопределим $e(t) = -\tilde{x}(t)$):

$$(3.2) \quad \dot{e}(t) = (A_n - LC^T)e(t), \quad e(t_0) = x_0 - \hat{x}_0,$$

наблюдатель (3.1) решает поставленную задачу (2.5) при гурвицевости $A_n - LC^T$.

Если $A \neq A_n$ и/или $B \neq B_n$, то вместо (3.2) приходим к следующему уравнению:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - A_n \hat{x}(t) - B_n u(t) - L(y(t) - C^T \hat{x}(t)) \pm A_n x(t) = \\ &= (A_n - LC^T)e(t) + (B - B_n)u(t) + (A - A_n)x(t). \end{aligned}$$

Робастные наблюдатели состояний основываются на идее обеспечения выполнения целевого условия (2.5) не для одной пары известных матриц A_n, B_n , а для некоторого заранее заданного и известного семейства матриц. С точки зрения устойчивости траекторий системы (3.3) можно выделить две различные ситуации.

Задача фильтрации. Допущение 1 выполнено, сигнал $u(t)$ измеряем, но недоступен для формирования. В этих условиях наблюдатель (3.1) не позволяет решить поставленную задачу (2.5) без дополнительных ограничений на класс сигнала $u(t)$. Если $u \in L_2$, то поставленная цель (2.5) может быть достигнута, и дополнительно возникает задача $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрации, т.е. назначения заданного $\gamma > 0$ отношения L_2 нормы ошибки $e(t)$ к L_2 норме сигнала $u(t)$:

$$(3.4) \quad \sqrt{\int_{t_0}^{\infty} e^2(s) ds} \leq \gamma \sqrt{\int_{t_0}^{\infty} u^2(s) ds}.$$

Если же $u \in L_\infty$ и A гурвицева, то (3.1) обеспечивает только сходимость ошибки оценивания в некоторую ограниченную область фазового пространства, и возникает задача ее минимизации в некотором смысле.

Задача о линейном динамическом регуляторе. Управление есть линейная функция от состояний наблюдателя, т.е. $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$, а коэффициенты обратной связи K_r , наряду с вектором корректора L доступны для назначения. В этой ситуации путем совместного расчета K_r и L возможно обеспечить достижение цели (2.5).

Для решения этих задач в робастной теории выполняют параметризацию имеющихся в матрицах A и B параметрических неопределенностей. Например, часто используется структурированная форма (такие возмущения еще называют ограниченными по норме) [16]:

$$(3.5) \quad A = A_n + F_A \Delta_A H_A, \quad B = B_n + F_B \Delta_B H_B,$$

где матричные неопределенности $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$ и $\Delta_B \in \mathbb{R}^{p_B \times q_B}$ удовлетворяют ограничениям

$$\|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_B\| \leq 1,$$

а весовые матрицы $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$, $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$, $F_B \in \mathbb{R}^{n \times p_B}$, $H_B \in \mathbb{R}^{q_B \times n}$ известны.

Альтернативным вариантом является аффинная параметризация [17]:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} R(q) &= (A(q), B(q)) \in \mathcal{R}, \\ \mathcal{R} &:= \left\{ R(q) : R(q) = \sum_{i=1}^s q_i R_i; \sum_{i=1}^s q_i = 1, q_i \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Независимо от выбранной параметризации неопределенности обычно дополнительно предполагается, что A_n гурвицева (этого всегда можно добиться путем предварительной коррекции номинальной части системы).

Рассмотрим возможные решения задачи фильтрации и управления линейным динамическим регулятором при наличии структурированной (3.5) или аффинной (3.6) неопределенности.

3.1. Задача робастной фильтрации

Поскольку в задаче фильтрации вход $u(t)$ предполагается недоступным для формирования, то успех ее решения полностью зависит от априорных предположений о классе этого сигнала. Различают задачи фильтрации в стохастической постановке (например, $u(t)$ – случайный белый шум с нулевым средним) и детерминированной (например, $u \in L_2$ или $u \in L_\infty$). В этом обзоре ограничимся рассмотрением некоторых решений задачи фильтрации в детерминированной постановке.

3.1.1. $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрация

Задача $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрации состоит в получении оценки состояний $\hat{x}(t)$ такой, что при $u \in L_2$ выполнено условие (2.5) и при $x_0 = 0$ для заданного $\gamma > 0$ верно (3.4) для всех неопределенностей (3.5) или (3.6).

На сегодняшний день решение этой задачи получено как для структурированных (3.5), так и для аффинных (3.6) неопределенностей (см. соответственно [18, 19] и [20–23]). Для структурированной неопределенности решение получается в терминах решений двух связанных уравнений Риккати (2-Риккати подход). Для случая аффинной неопределенности решения получаются в терминах линейных матричных неравенств, выводимых на базе квадратичных функций Ляпунова, как не зависящих [20, 21], так и зависящих [22, 23] от параметра. Для подробного сравнительного обзора существующих решений рекомендуем заинтересованному читателю ознакомиться с монографией [9]. В данной работе ограничимся описанием одного алгоритма, доставляющего (2.5) и (3.4) при аффинной неопределенности.

Решение задачи $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрации, как правило, строится с помощью наблюдателя, задаваемого следующим уравнением:

$$(3.7) \quad \dot{\hat{x}}(t) = G\hat{x}(t) + Ly(t), \quad \hat{x}(t) = \hat{x}_0.$$

В отличие от (3.1) здесь входной сигнал $u(t)$ при формировании оценок состояний не используется, а для расчета доступен не только вектор корректора L , но и матрица G , которая более не фиксируется равной номинальной матрице системы A_n . Процедуру расчета этих параметров дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ и $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ – решения линейных матричных неравенств (ЛМН)

$$(3.8) \quad \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \Omega_{1,i} + \Omega_{1,i}^T & Y_1 + \Omega_{2,i}^T & P_1 B_i & I \\ * & Y_1 + Y_1^T & P_2 B_i & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i = 1, \dots, s,$$

где

$$\Omega_{1,i} = P_1 A_i + Y_2 C^T, \quad \Omega_{2,i} = P_2 A_i + Y_2 C^T,$$

относительно $Y_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^n$ и $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ при заданном $\gamma > 0$.

Тогда параметры $G = \hat{P}_2^{-1} \hat{Y}_1$, $L = \hat{P}_2^{-1} \hat{Y}_2$ доставляют выполнение целевых условий (2.5) и (3.4).

Доказательство приведено в [9].

У наблюдателя (3.7), рассчитанного путем решения ЛМН (3.8), можно выделить три основных проблемы. Во-первых, это выполнение цели (2.5) только при удовлетворении неопределенностью заранее принятой параметризации (3.6), что, на самом деле, свойственно всем робастным решениям. Во-вторых, это излишний консерватизм, заложенный в процедуре синтеза и связанный с использованием общей функции Ляпунова для s вершин многогранника (3.6). В-третьих, это достижение цели (2.5) только при выполнении ограничительного условия $u \in L_2$. Для решения второй проблемы в [22, 23] развиты процедуры, решающие задачу (3.4) на основе функции Ляпунова, зависящей от параметра.

3.1.2. Метод инвариантных эллипсоидов

В более распространенном на практике случае $u \notin L_2$, $u \in L_\infty$ и при гурвицевости матрицы $A_n - LC^T$ на основании (3.3) можно сделать вывод только об асимптотической сходимости ошибки оценивания по норме в некоторую трубку:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| \leq e_{\max},$$

где $e_{\max}$ зависит как от оценки сверху на сигнал $(B - B_n)u(t) + (A - A_n)x(t)$, так и от выбранного вектора корректора L .

Более аккуратное описание асимптотического поведения ошибки для этой ситуации может быть получено с помощью понятия инвариантного эллипсоида системы.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_e = \{e \in \mathbb{R}^n: e^T P_e^{-1} e \leq 1\}, \quad P_e > 0$$

называется инвариантным для системы (3.3) + (3.5), если при всех неопределенностях $\|\Delta_A\| \leq 1$, $\|\Delta_B\| \leq 1$ и всех управлениях $|u(t)| \leq 1$ верно:

- 1) $e_0 \in \mathcal{E}_e \Rightarrow e(t) \in \mathcal{E}_e$ для всех $t \geq t_0$;
- 2) $e_0 \notin \mathcal{E}_e \Rightarrow e(t) \rightarrow \mathcal{E}_e$ при $t \rightarrow \infty$.

Матрица $P_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется матрицей эллипсоида $\mathcal{E}_e$.

Очевидно, что для рассматриваемой системы (3.3) существует бесконечно много инвариантных эллипсоидов. Так как достичь цели (2.5) в задаче фильтрации при $u \in L_\infty$, $A \neq A_n$ и/или $B \neq B_n$ оказывается невозможно средствами робастного управления, то остается только попытаться заключить ошибку $e(t)$ в минимальный из всех эллипсоидов. Минимальность эллипсоида можно понимать по-разному, наиболее часто в литературе в качестве критерия минимальности принимается минимизация суммы квадратов полуосей эллипсоида или, эквивалентно, минимизация следа матрицы P_e эллипсоида [13]. Строго задача минимизации суммы квадратов полуосей эллипсоида формулируется следующим образом.

Предположим, что сигнал $u(t)$ ограничен $|u(t)| \leq 1$ (такое ограничение всегда удастся выполнить путем нормировки). Тогда требуется рассчитать вектор корректора $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, обеспечивающий выполнение для траекторий системы (3.3) целевых условий (1) и (2) из определения 1, где матрица эллипсоида $\mathcal{E}_e$ имеет минимальный след $\text{tr } P_e$.

Решение такой задачи строится следующим образом. Рассматривают расширенную систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_n + F_A \Delta_A H_A & 0 \\ F_A \Delta_A H_A & A_n - LC^T \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}}_{g(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_n + F_B \Delta_B H_B \\ F_B \Delta_B H_B \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(t),$$

закрывают состояния $g(t)$ в эллипсоид $\mathcal{E}_g$, задаваемый матрицей

$$P = \begin{bmatrix} P_x & 0 \\ 0 & P_e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P > 0,$$

и минимизируют эллипсоид, задаваемый матрицей P_e . В результате с помощью технических приемов, основанных на втором методе Ляпунова, леммы Питерсена [24], S-процедуры и леммы Шура, можно получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\hat{Q}_e$ и $\hat{Y}$ – решение задачи минимизации:

$$\text{tr } H \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & Q_x B_n & Q_x F_A & Q_x F_B \\ * & \Omega_2 & 0 & Q_e F_A & Q_e F_B \\ * & * & -\alpha I + \varepsilon_2 H_B^T H_B & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{bmatrix} H & I \\ I & Q_e \end{bmatrix} \geq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= A_n^T Q_x + Q_x A_n + \alpha Q_x + \varepsilon_1 H_A^T H_A, \\ \Omega_2 &= A_n^T Q_e + Q_e A_n - Y C^T - C Y^T + \alpha Q_e, \end{aligned}$$

относительно переменных $Q_x = Q_x^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_e = Q_e^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ и числового параметра $\alpha > 0$.

Тогда минимальный инвариантный эллипсоид определяется матрицей $\hat{P}_e = \hat{Q}_e^{-1}$, а соответствующая этому эллипсоиду матрица коррекции наблюдателя задается выражением $L = \hat{Q}_e^{-1} \hat{Y}$.

Доказательство приведено в [25].

По теореме 2 расчет вектора корректора L для фиксированного $\alpha > 0$ сводится к задаче полуопределенного программирования, которая решается численно с применением различных пакетов прикладных программ.

К открытым проблемам наблюдателей, синтезированных методом инвариантных эллипсоидов, следует отнести принципиальную неспособность выполнения цели (2.5) без дополнительных предположений о сигнале управления $u(t)$. Эта проблема вызвана тем обстоятельством, что независимо от выбора вектора корректора в уравнении (3.3) будет присутствовать неисчезающая компонента $(B - B_n)u(t) + (A - A_n)x(t)$, трактуемая как возмущение. Второй проблемой является необходимость выполнения оптимизации по параметру $\alpha > 0$ (выпуклость целевой функции по этому параметру не доказана) при решении задачи минимизации следа эллипсоида. Третьей и более существенной проблемой является решение поставленной задачи только при удовлетворении истинной неопределенности параметров A и B принятой параметризации (3.5). Если истинная неопределенность не удовлетворяет этой параметризации (т.е. весовые матрицы F_A, H_A и F_B, H_B не соответствуют действительности), то корректор уже не обеспечивает оптимальности в смысле следа инвариантного эллипсоида. Выбор весовых матриц с запасом, конечно, может позволить решить эту проблему, но приводит к излишнему консерватизму получаемых оценок.

3.2. Управление по динамической обратной связи

Как и было сказано ранее, вопросы формирования обратной связи почти всегда выносятся за рамки данного обзора. Однако в данном случае выбор обратной связи позволяет улучшить свойства синтезируемого наблюдателя.

При управлении по динамической обратной связи возможно устранить первый недостаток наблюдателя (3.1), грубо говоря, путем обеспечения сходимости слагаемого $(B - B_n)u(t) + (A - A_n)x(t)$ к нулю с помощью выбора управления в форме обратной связи $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$ и стабилизации самой системы (2.1). При наличии параметрической неопределенности широко используемый в линейных системах принцип разделимости перестает выполняться [6]. Это означает, что для стабилизации системы (2.1) с помощью обратной связи по состояниям наблюдателя необходим совместный расчет параметров наблюдателя и регулятора с целью обеспечения устойчивости расширенной системы, составленной из уравнений как объекта, так и наблюдателя. Кратко остановимся на применении Риккати подхода и техники линейных матричных неравенств для совместного расчета параметров L и K_r .

3.2.1. Риккати подход

Для системы (2.1) с неопределенностью (3.5) будем формировать управление с помощью линейного динамического регулятора (2.4а) по состояниям наблюдателя (3.1). Тогда требуется рассчитать параметры $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ и $K_r \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ таким образом, что

$$(3.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

Решение этой задачи с помощью Риккати подхода получено в [26] и формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть существуют числа $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что выполнены следующие условия:

i) *Существует $P_c = P_c^T > 0$, удовлетворяющая уравнению Риккати*

$$(3.10a) \quad \begin{aligned} & A_n^T P_c + P_c A_n + 2H_A^T H_A + \varepsilon_1 Q_1 - \\ & - P_c \left[\frac{1}{\varepsilon_1} (B_n (R_1^{-1} - 2R_1^{-1} H_B^T H_B R_1^{-1}) B_n^T - 2F_B F_B^T) - F_A F_A^T \right] P_c = 0, \end{aligned}$$

где $R_1 = R_1^T > 0$, $Q_1 = Q_1^T > 0$.

ii) *Существует $P_o = P_o^T > 0$, удовлетворяющая уравнению Риккати*

$$(3.10b) \quad \begin{aligned} & A_n^T P_o + P_o A_n - \frac{1}{\varepsilon_2} C R_2^{-1} C^T + P_o \left(F_A F_A^T + \frac{2}{\varepsilon_1} F_B F_B^T + \varepsilon_2 Q_2 \right) P_o + \\ & + \frac{2}{\varepsilon_2} P_c B_n R_1^{-1} H_B^T H_B R_1^{-1} B_n^T P_c = 0, \end{aligned}$$

где $R_2 = R_2^T > 0$, $Q_2 = Q_2^T > 0$.

iii) *Матрицы P_c и P_o удовлетворяют неравенству*

$$(3.10b) \quad \begin{aligned} & \varepsilon_1 \left(Q_1 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} P_c B_n R_1^{-1} B_n^T P_c \right) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2} P_c B_n R_1^{-1} B_n^T P_c \left[P_o Q_2 P_o + \frac{1}{\varepsilon_2^2} C R_2^{-1} C^T \right]^{-1} P_c B_n R_1^{-1} B_n^T P_c > 0. \end{aligned}$$

Тогда выбор $K_r = \frac{1}{\varepsilon_1} R_1^{-1} B_n^T P_c$ и $L = \frac{1}{\varepsilon_2} P_o^{-1} C R_2^{-1}$ обеспечивает достижение поставленной цели (3.9).

Доказательство приведено в [26].

К уравнениям (3.10а) и (3.10б) приходят путем мажорирования слагаемых с неопределенностью Δ_A , Δ_B в производной функции $V = x^T P_c x + e^T P_o e$ с помощью неравенства

$$a^T M F N b \leq a^T M M^T a + b^T N^T N b,$$

верного для F таких, что $F^T F \leq I$, и любых $a, b \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Неравенство (3.10в) получено по лемме Шура и означает положительную определенность матрицы Ω , задающую для V производную $\dot{V} \leq -\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$.

3.2.2. Техника линейных матричных неравенств

Использование техники ЛМН [27] в задаче управления по динамической обратной связи вместе с L и K_r требует расчета матрицы состояний наблюдателя. Поэтому перепишем (3.1) в виде

$$\dot{\hat{x}}(t) = G \hat{x}(t) + B_n u(t) + L(y(t) - C^T \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t) = \hat{x}_0.$$

Требуется рассчитать параметры $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ и $K_r \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ таким образом, чтобы поставленная цель (3.9) была выполнена. С помощью технических приемов, основанных на втором методе Ляпунова, лемм Питерсена и Шура, в [28] был получен следующий результат:

Теорема 4. Пусть $\hat{Q}_{\hat{x}}$, $\hat{Y}_1$, $\hat{Q}_e$, $\hat{Y}_2$ и $\hat{\alpha}$, $\hat{Y}_3$ – решение ЛМН:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & Q_{\hat{x}} H_A^T & -Y_1^T H_B^T \\ * & \Omega_{22} & Q_e H_A^T & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0$$

при ограничении

$$C^T Q_e = \alpha C^T,$$

где

$$\Omega_{11} = Y_3 + Y_3^T - B_n Y_1 - Y_1^T B_n^T,$$

$$\Omega_{12} = Y_2 C^T + Q_{\hat{x}} A_n^T - Y_3^T,$$

$$\Omega_{22} = A_n Q_e + Q_e A_n^T - Y_2 C^T - C Y_2^T + \varepsilon_1 F_A F_A^T + \varepsilon_2 F_B F_B^T$$

относительно $Q_{\hat{x}} = Q_{\hat{x}}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_e = Q_e^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^n$, $Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha > 0$.

Тогда параметры $K_r = \hat{Y}_1 \hat{Q}_{\hat{x}}^{-1}$, $G = \hat{Y}_3 \hat{Q}_{\hat{x}}^{-1}$ и $L = \hat{Y}_2 \hat{\alpha}^{-1}$ доставляют выполнение цели (3.9).

Доказательство приведено в [28].

К общим открытым проблемам Риккати и ЛМН подходов стоит отнести необходимость выбора управляющего воздействия в виде $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$ и совместного расчета параметров наблюдателя и регулятора.

3.3. Выводы по обзору робастных наблюдателей

Отличительной особенностью всех рассмотренных робастных подходов к построению наблюдателей состояний является предположение об удовлетворении параметрической неопределенности системы параметризациям (3.5) или (3.6). На практике удовлетворение этого предположения требует знания диапазона изменения всех неизвестных параметров. Излишний консерватизм в оценке таких диапазонов может приводить к большим коэффициентам в обратных связях и, как следствие, к неработоспособным решениям.

4. Оценивание состояний на базе теории инвариантности

Инвариантные наблюдатели конструируются из условий исключения (алгебраического или “силового”) влияния параметрической неопределенности на процесс восстановления состояний системы [7, 29–31]. На первом этапе синтеза таких решений уравнение (2.1) переписывается в следующем виде:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_n + \Delta A)x(t) + (B_n + \Delta B)u(t) = A_n x(t) + B_n u(t) + Dw(x, u), \\ Dw(x, u) &= \Delta Ax(t) + \Delta Bu(t), \end{aligned}$$

где $\Delta A, \Delta B$ – агрегированные параметрические неопределенности соответствующих размерностей, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – известный вектор, взвешивающий и распределяющий неопределенности по уравнениям, $w(x, u) \in \mathbb{R}^m$ – неизвестное ограниченное (по допущению 1) возмущение $\|w(x, u)\| \leq w_{\max}$.

Поставленная цель (2.5) теперь трактуется как восстановление состояний системы (2.1) в условиях действия неизмеряемого входного воздействия $w(x, u)$. Рассмотрим решения этой задачи на базе инвариантного наблюдателя Люенбергера и различных наблюдателей на скользящих режимах.

4.1. Инвариантный наблюдатель Люенбергера

В соответствии с результатами [32, 33] оценки неизмеряемых состояний предлагается формировать с помощью следующей системы уравнений:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= Nz(t) + Gu(t) + Ly(t), \\ \hat{x}(t) &= z(t) - Ey(t), \end{aligned}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$ и матрицы соответствующих размерностей выбраны следующим образом:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} (I + EC^T) D &= 0, \\ N &= (I + EC^T) A_n - (L + NE) C^T, \\ (I + EC^T) B_n &= G, \end{aligned}$$

а вектор L доставляет гурвицевость матрице N .

Для ошибки восстановления $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ в силу (4.2) справедливо следующее соотношение:

$$\tilde{x}(t) = z(t) - EC^T x(t) - x(t) = z(t) - (I + EC^T) x(t),$$

а тогда дифференциальное уравнение в отклонениях принимает вид

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{z}(t) - (I + EC^T) \dot{x}(t) = \\ &= Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) - (I + EC^T) (A_n x(t) + B_n u(t) + Dw(x, u)) = \\ &= Nz(t) + Ly(t) - (I + EC^T) A_n x(t) = \\ &= Nz(t) + LC^T x(t) - Nx(t) - (L + NE) C^T x(t) = \\ &= Nz(t) - Nx(t) - NEC^T x(t) = N\tilde{x}(t). \end{aligned}$$

Как хорошо видно из уравнения (4.4), инвариантность ошибки оценивания $\tilde{x}(t)$ по отношению к параметрической неопределенности $w(x, u)$ достигнута благодаря ее алгебраическому исключению из уравнения в отклонениях. Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (4.3) и гурвицевости матрицы N были установлены и уточнены соответственно в работах [32] и [33]. В рассматриваемом случае класса систем “один вход–один выход” эти условия формулируются следующим образом.

Теорема 5. Уравнения (4.3) имеют решения, если и только если выполнены условия:

- 1) $m = \dim(y(t)) = 1$,
- 2) $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$,
- 3) *инвариантные нули тройки (A_n, D, C^T) устойчивы (имеют отрицательную действительную часть).*

Доказательство приведено в [32, 33].

Первые два условия теоремы 5 ограничительны для приложений. В частности, первое условие необходимо (но не достаточно [34]) для выполнения второго условия и не допускает наличия в различных уравнениях системы двух функционально различных неопределенностей. Например, наблюдатель (4.2) оказывается неприменим для следующей системы второго порядка:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x_1(t) \\ a_2 x_1(t) + a_3 x_2(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned}$$

где $m = 2 > \dim(y(t)) = 1$, что противоречит первому условию.

В свою очередь, второе условие, или условие согласования по выходу, требует действия возмущения на уравнение, состояние которого измеряется. Например, наблюдатель (4.2) неприменим для следующей системы второго порядка:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (a_2 x_1(t) + a_3 x(t) + b_1 u), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned}$$

где $\text{rank}(C^T D) = 0 \neq \text{rank}(D) = 1$, что противоречит второму условию.

Независимость ошибки оценивания от произвольного, ограниченного внешнего возмущения – основное конкурентное преимущество инвариантного наблюдателя Люенбергера в сравнении с робастными аналогами (3.1) и (3.7). Однако строгие структурные ограничения не позволяют использовать рассмотренный наблюдатель для восстановления состояний широкого класса реальных технических систем с не согласованной по выходу неопределенностью.

4.2. Наблюдатель на скользящих режимах.

Условия согласования по выходу

Инвариантность ошибки восстановления состояний по отношению к параметрическим возмущениям может быть достигнута не только с помощью алгебраического исключения неопределенности, но и с помощью организации специальных скользящих режимов [7, 29–31]. Первый наблюдатель на скользящих режимах был предложен В. И. Уткиным [35], позже это решение было улучшено в [36] с помощью дополнительной корректирующей обратной связи Люенбергера. В [37] был предложен альтернативный способ выбора поверхности скольжения, а также установлены необходимые и достаточные условия существования всех трех видов наблюдателей на скользящих режимах [35–37].

По алгоритму [37] системе в форме представления (4.1) ставится в соответствие следующий наблюдатель:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + B_n u(t) - G_l (\hat{y}(t) - y(t)) + G_n v(t), \\ \hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_l &= T^{-1} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{22} - F_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad G_n = T^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \\ v(t) &:= \begin{cases} -\rho \frac{P(\hat{y}(t) - y(t))}{\|P(\hat{y}(t) - y(t))\|}, & \text{если } \hat{y}(t) - y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

F_m – гурвицева матрица, P – решение уравнения Ляпунова для F_m , $\rho > 0$ – достаточно большое число, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – полноранговая матрица линейного подобия, F_{12}, F_{22} – известные матрицы, алгоритм определения которых будет ясен по ходу дальнейшего изложения.

В соответствии с результатами [37, 38] наблюдатель (4.7) реализуем и доставляет сходимость ошибки восстановления состояний (2.5) при выполнении условий существования следующих структурных преобразований.

Лемма 1. Пусть выполнены условия:

- 1) $m = \dim(y(t)) = 1$,
- 2) $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$,
- 3) *инвариантные нули тройки (A_n, D, C^T) устойчивы.*

Тогда существует неособое преобразование координат $\begin{pmatrix} z_1(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Tx(t)$, приводящее систему (4.1) и наблюдатель (4.7) к блочному виду:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1(t) &= F_{11}z_1(t) + F_{12}y(t) + G_1u(t), \\
 \dot{y}(t) &= F_{21}z_1(t) + F_{22}y(t) + G_2u(t) + D_2w(x, u), \\
 \dot{\hat{z}}_1(t) &= F_{11}\hat{z}_1(t) + F_{12}\hat{y}(t) + G_1u(t) - F_{12}e_y(t), \\
 \dot{\hat{y}}(t) &= F_{21}\hat{z}_1(t) + F_{22}\hat{y}(t) + G_2u(t) - (F_{22} - F_m)e_y(t) + v(t),
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

где $D_2 > 0$, F_{11} – гурвицева по построению, $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$ – ошибка наблюдения выхода системы.

Доказательство приведено в [37, 38].

Подробный алгоритм вычисления матрицы подобия T изложен в [7, 29–31, 35, 37] и сводится к аннулированию внешнего возмущения в уравнении, соответствующему неизмеряемой переменной. Дифференциальное уравнение в отклонениях между уравнениями системы и наблюдателя в новых координатах (4.8) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{z}}_1(t) &= F_{11}\tilde{z}_1(t), \\
 \dot{e}_y(t) &= F_{21}\tilde{z}_1(t) + F_m e_y(t) + v(t) - D_2w(x, u).
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Из гурвицевости F_{11} следует экспоненциальная сходимость к нулю ошибки $\tilde{z}_1(t)$. С помощью второго метода Ляпунова возможно показать попадание переменной $e_y(t)$ на прямую $e_y(t) = 0$ за конечное время. Методом эквивалентного управления $\mu^{-1}\dot{v}_{eq}(t) = v(t) - v_{eq}(t)$, $\mu > 0$, можно также показать $D_2^{-1}v_{eq}(t) \rightarrow w(x, u)$. Поскольку T – неособое преобразование, то из экспоненциальной устойчивости ошибок (4.9) мгновенно имеем достижение цели (2.5).

Таким образом, наблюдатель на скользящих режимах (4.7) требует таких же строгих структурных ограничений, как и инвариантный к внешним возмущениям наблюдатель Люенбергера (4.2). Однако в отличие от решения (4.2) в

наблюдателе (4.7) механизм подавления влияния внешнего возмущения основан на робастных свойствах движения изображающей точки по поверхности скольжения. Более подробное сравнение свойств этих двух типов инвариантных наблюдателей было проведено в [39, 40].

4.3. Наблюдатели на скользящих режимах.

Расширенные условия согласования

Условие согласования возмущения с измеряемым выходом $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$ значительно ограничивает класс систем, восстановление состояний которых осуществимо с помощью наблюдателей (4.2) и (4.7). Ослабить это требование возможно путем увеличения размерности выхода $y(t)$ с помощью добавления к уже имеющимся новых физических или виртуальных измерений. Добавление физических измерений приводит к необходимости установки дополнительных датчиков, что противоречит теоретической постановке задачи, а на практике часто нецелесообразно или невозможно. Остается способ расширения числа измерений с помощью виртуальных состояний. В [41] предлагается ввести в рассмотрение виртуальную выходную переменную

$$(4.10) \quad \xi(t) = \mathcal{O}^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} C^T \\ \vdots \\ C^T A_n^{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$

и построить наблюдатель состояний:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + B_n u(t) - G_l \left(\hat{y}_a(t) - \hat{\xi}(t) \right) + G_n v(t), \\ \hat{y}_a(t) &= \mathcal{O}^{-1} \hat{x}(t), \end{aligned}$$

где $\hat{y}_a(t)$ – оценка выхода (4.10) с помощью наблюдателя (4.11), $\hat{\xi}(t)$ – оценка выхода (4.10) с помощью наблюдателя, определяемого в дальнейшем изложении, а матрицы G_l, G_n и функция $v(t)$ определены по аналогии с (4.7).

В соответствии с результатами [41, 42] наблюдатель (4.11) реализуем и доставляет сходимость ошибки восстановления состояний при выполнении следующих условий приводимости системы в блочную и треугольную формы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия:

$$1) \ m = \dim(y(t)) = 1,$$

$$2) \ \text{rank}(\mathcal{O}^{-1}D) = \text{rank}(D),$$

$$3) \ \begin{bmatrix} C^T \\ \vdots \\ C^T A_n^{n-2} \end{bmatrix} D = 0,$$

$$4) \ \text{инвариантные нули тройки } (A_n, D, C^T) \text{ устойчивы.}$$

Тогда:

- а) существует [41] неособое преобразование координат $\begin{pmatrix} z_1(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} = Tx(t)$, приводящее систему (4.1) с выходом $\xi(t)$ и наблюдатель (4.11) к блочному виду (4.8) с точностью до замены $y(t)$ и $\hat{y}(t)$ на $\xi(t)$ и $\hat{y}_a(t)$;
- б) существует [42] неособое преобразование (4.10), приводящее систему (4.1) к треугольной форме:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_0 \xi(t) + B_0 \delta(t) + B_e u(t), \\ y(t) &= C_0^T \xi(t), \end{aligned}$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_n & I_{n-1} \\ & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} C^T B_n \\ \vdots \\ C^T A_n^{n-2} B_n \\ C^T A_n^{n-1} B_n \end{bmatrix},$$

$$\delta(t) = C^T A_n^n x(t) + C^T A_n^{n-1} D w(t), \quad C_0^T = [1 \quad 0_{n-1}^T].$$

Доказательство приведено в [41, 42].

Реализация наблюдателя (4.11) требует получения оценки $\hat{\xi}(t)$ выхода (4.10), который одновременно является состоянием треугольной системы (4.12). В [41] предлагается оценить состояния системы (4.12) за конечное время с помощью каскадного наблюдателя:

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\hat{\zeta}}_1(t) &= v \left(y(t) - \hat{\zeta}_1(t) \right) \\ \dot{\hat{\zeta}}_2(t) &= E_1 v \left(\tilde{\zeta}_2(t) - \hat{\zeta}_2(t) \right) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\zeta}}_{n-1}(t) &= E_{n-2} v \left(\tilde{\zeta}_{n-1}(t) - \hat{\zeta}_{n-1}(t) \right) \\ \dot{\hat{\zeta}}_n(t) &= E_{n-1} v \left(\tilde{\zeta}_n(t) - \hat{\zeta}_n(t) \right) \end{aligned} \right. + B_e u(t),$$

$$\hat{\xi}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ v \left(\tilde{\zeta}_2(t) - \hat{\zeta}_2(t) \right) \\ \vdots \\ v \left(\tilde{\zeta}_{n-1}(t) - \hat{\zeta}_{n-1}(t) \right) \end{bmatrix},$$

где $\tilde{\zeta}_1(t) = y(t)$ и

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_i(t) &= v \left(\tilde{\zeta}_{i-1}(t) - \hat{\zeta}_{i-1}(t) \right), \quad 2 \leq i \leq n, \\ E_j &= \begin{cases} 1, & \text{если } \left| \tilde{\zeta}_i(t) - \hat{\zeta}_i(t) \right| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad j \leq i, \\ v(.) &= \varphi(t) + \lambda_s |.|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(.), \quad \lambda_s > 0, \\ \dot{\varphi}(t) &= \alpha_s \text{sign}(.), \quad \alpha_s > 0.\end{aligned}$$

Уравнение в отклонениях между системами (4.12) и (4.13) имеет вид

$$(4.14) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\zeta}}_1(t) = \xi_2(t) - v(y(t) - \hat{\zeta}_1(t)) \\ \dot{\tilde{\zeta}}_2(t) = \xi_3(t) - E_1 v(\tilde{\zeta}_2(t) - \hat{\zeta}_2(t)) \\ \vdots \\ \dot{\tilde{\zeta}}_{n-1}(t) = \xi_n(t) - E_{n-2} v(\tilde{\zeta}_{n-1}(t) - \hat{\zeta}_{n-1}(t)) \\ \dot{\tilde{\zeta}}_n(t) = \delta(t) - E_{n-1} v(\tilde{\zeta}_n(t) - \hat{\zeta}_n(t)), \end{cases}$$

и при достаточно больших значениях параметров λ_s, α_s в (4.14) последовательно возникают скольльзящие режимы на прямых $\tilde{\zeta}_i(t) - \hat{\zeta}_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n}$, что приводит к сходимости ошибки $\hat{\xi}(t) - \xi(t)$ за конечное время T_ξ . После завершения процесса оценки выхода (4.10) системы (4.1) за конечное время $T_x \geq T_\xi$ возникает скольльзящий режим на $\hat{y}_a(t) - \hat{\xi}(t) = 0$, что, в соответствии с анализом (4.9), обеспечивает выполнение поставленной цели (2.5).

В соответствии с результатами [41] при измерении нового выхода (4.10) даже при невыполнении условия согласования $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$ может быть выполнено расширенное условие согласования 2)–3) из леммы 2 и реализуем наблюдатель (4.11), обеспечивающий сходимость ошибки восстановления состояний.

Например, для (4.6) имеем:

$$\begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \end{bmatrix} D = D \Rightarrow \text{rank}(C_a^T D) = \text{rank}(D),$$

что позволяет восстановить состояния системы (4.6) с помощью (4.11) + (4.13)².

Альтернативные способы восстановления состояний треугольных систем подробно обсуждались в [43, 44] и по аналогии с (4.13) могут быть использованы для формирования оценки выходной переменной $\xi(t)$ при тех же структурных ограничениях из леммы 2. Отметим также возможность в силу наблюдаемости пары (A, C^T) без реализации (4.11) оценить состояния $x(t)$ за конечное время по формуле $\hat{x}(t) = \mathcal{O}\hat{\xi}(t)$.

² Для (4.6) верно $\xi(t) = x(t)$, поэтому на самом деле реализация (4.11) не требуется.

При выполнении расширенных условий согласования 2)–3) из леммы 2 система уже после первого выбора виртуального выхода (4.10) приводится к треугольному виду, позволяющему для восстановления состояний использовать наблюдатели типа (4.11) + (4.13) или (4.11) + $\hat{x}(t) = \mathcal{O}\hat{\xi}(t)$. Для систем большой размерности с несколькими входами/выходами рассмотрения одного виртуального выхода может быть недостаточно для приведения всей системы к треугольной форме [11, 45]. В этом случае преобразования продолжаются до тех пор, пока вся система не будет разбита на блоки треугольной формы. Полученное в результате таких итераций расщепление уравнений системы называется блочной формой наблюдаемости с учетом возмущений (БФНВ), относительно которой, строго говоря, известно два факта:

- i) состояния и возмущения системы наблюдаемы по измерениям, если и только если система приводима к БФНВ [11],
- ii) система приводима к БФНВ при невыполнении условий согласования 2) из теоремы 5 и 3) из леммы 2 [45].

Поэтому инвариантные наблюдатели на скользящих режимах из [11, 45], построенные на основе БФНВ, обладают наиболее слабыми структурными ограничениями в сравнении с другими инвариантными наблюдателями состояний (например, (4.7), (4.11) + (4.13)). Однако приведение системы в БФНВ – довольно кропотливый итерационный процесс, а часть структурных ограничений в этой форме представления системы также, по-видимому, не могут быть ослаблены. Например, следуя шагу 1(а) конструктивного критерия наблюдаемости [11, раздел 3.2], запишем ранее рассмотренную систему (4.5) в следующем виде (с сохранением авторских обозначений):

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_{11}y(t) + D_1x_1(t) + Q_1\psi(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_1(t) &= A_{x_{11}}y(t) + A_{x_1}x_1(t) + Q_{x_1}\psi(t) + B_{x_1}u(t), \end{aligned}$$

где в терминах системы (4.5) приняты переобозначения:

$$\begin{aligned} y_1(t) &:= y(t) = x_1(t), \quad x_1(t) := x_2(t), \quad \psi(t) := \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} = w(x, u), \\ A_{11} &= 0, \quad D_1 = 1, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = 0, \\ A_{x_{11}} &= A_{x_1} = 0, \quad B_{x_1} = 1, \quad Q_{x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для приведения системы (4.5), (4.15) в полную БФНВ необходимо выполнение следующего условия (формула (**)) в [11]):

$$\text{rank}(Q_1) - \text{rank}([Q_1 \ D_1]) \neq 0.$$

В рассматриваемом случае (4.5) имеем $\text{rank}(Q_1) - \text{rank}([Q_1 \ D_1]) = 0$, что не позволяет привести систему к БФНВ, а значит, по конструктивному критерию из [11] состояния и возмущения системы (4.5) ненаблюдаемы, а для приводимости системы к БФНВ необходимо выполнение неравенства $m \leq \dim(y(t))$, которое для рассматриваемого в данной статье класса линейных систем (2.1) с одним выходом почти всегда не выполняется.

Таким образом, все существующие инвариантные наблюдатели состояний на базе скользящих режимов [11, 35–41, 43–45], в том числе и недавние работы [46, 47], позволяющие улучшить качество переходных процессов по формируемым оценкам состояний, накладывают на динамическую систему с одним выходом строгие структурные требования. Более того, как показывает конструктивный критерий наблюдаемости [11, 45], часть из этих условий для систем с одним выходом даже потенциально не могут быть ослаблены в классе наблюдателей со скользящими режимами. Действительно, введем для системы (4.5), (4.15) наблюдатель в форме:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1(t) &= A_{11}\hat{y}_1(t) + D_1\hat{x}_1 + B_1u + L(\hat{y}_1(t) - y_1(t)) - \rho \operatorname{sign}(\hat{y}_1(t) - y_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_1(t) &= A_{x11}\hat{y}_1(t) + A_{x1}\hat{x}_1 + B_{x1}u - K_{x1}\operatorname{sign}(\hat{y}_1(t) - y_1(t)),\end{aligned}$$

что позволяет получить следующее уравнение в отклонениях:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{y}}_1(t) &= (A_{11} + L)\tilde{y}_1(t) + D_1\tilde{x}_1(t) - Q_1\psi(t) - v(t), \\ \dot{\tilde{x}}_1(t) &= A_{x11}\tilde{y}_1(t) + A_{x1}\tilde{x}_1(t) - Q_{x1}\psi(t) - \frac{K_{x1}}{\rho}v(t), \\ v(t) &= \rho \operatorname{sign}(\tilde{y}_1(t)), \quad \tilde{y}_1(t) = \hat{y}_1(t) - y_1(t).\end{aligned}$$

При достаточно большом $\rho > 0$ в первой подсистеме возникает скользящий режим на прямой $\tilde{y}_1(t) = 0$, позволяющий методом эквивалентного управления получить:

$$\begin{aligned}0 &= D_1\tilde{x}_1(t) - Q_1\psi(t) - v_{eq}(t), \\ \dot{\tilde{x}}_1(t) &= \left(A_{x1} - \frac{K_{x1}}{\rho}D_1\right)\tilde{x}_1(t) - Q_{x1}\psi(t) + \frac{K_{x1}}{\rho}Q_1\psi(t) = \\ &= \left(A_{x1} - \frac{K_{x1}}{\rho}D_1\right)\tilde{x}_1(t) - \psi_2(t) + \frac{K_{x1}}{\rho}\psi_1(t),\end{aligned}$$

откуда в общем случае следует только ограниченность ошибки $\tilde{x}_1(t)$, а цель (2.5) может быть достигнута только при выполнении условия $\psi_2(t) - \frac{K_{x1}}{\rho}\psi_1(t) = 0$, которое для рассматриваемого примера (4.5), (4.15) не выполняется, поскольку для всех $K_{x1} \in \mathbb{R}$ верно $a_2x_1(t) + a_3x_2(t) - \frac{K_{x1}}{\rho}a_1x_1(t) \neq 0$.

Для реальных технических систем разные параметрические возмущения потенциально могут воздействовать на каждое уравнение системы, т.е. в параметризации (4.1) часто выполняется неравенство $m > 1$, что ограничивает потенциал использования наблюдателей на скользящих режимах в задаче восстановления состояний линейных систем с параметрической неопределенностью.

4.4. Выводы по обзору наблюдателей на базе теории инвариантности

Инвариантные наблюдатели за счет алгебраического исключения или организации скользящих режимов обеспечивают нечувствительность ошибки оценивания состояний к параметрической неопределенности системы. Это

свойство позволяет без дополнительных предположений относительно параметризации неопределенности и свойств сигнала $u(t)$ выполнять поставленную цель (2.5).

Открытыми проблемами для инвариантных наблюдателей являются необходимость использования разрывных корректирующих сигналов, чувствительных к помехам измерений, и выполнения достаточно строгих условий согласования по выходу.

5. Адаптивные наблюдатели

В отличие от робастных методов восстановления состояний адаптивные алгоритмы теоретически не требуют каких-либо априорных сведений о параметрах системы (2.1), поскольку совместно с оцениванием состояний выполняют идентификацию значений неизвестных параметров. В сравнении с наблюдателями, инвариантными по отношению к возмущениям, адаптивные алгоритмы с помощью специальных параметризаций способны учитывать структуру действующего на систему возмущения, что во многих случаях позволяет не требовать выполнения условий согласования по выходу.

Структуру адаптивного наблюдателя состояний логично (но наивно) выбрать следующим образом:

$$(5.1) \quad \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) + \hat{L}(t)(\hat{y}(t) - y(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0,$$

где все неизвестные матрицы системы заменены на их динамические оценки.

Тогда уравнение в отклонениях между уравнениями (2.1) и (5.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) + \hat{L}(\hat{y}(t) - y(t)) - Ax(t) - Bu(t) \pm \\ &\quad \pm L(\hat{y}(t) - y(t)) \pm A\hat{x}(t) = \\ (5.2) \quad &= A\hat{x}(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{L}\tilde{y}(t) + \tilde{A}(t)\hat{x}(t) - Ax(t) + LC^T\tilde{x}(t) = \\ &= (A + LC^T)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{L}(t)\tilde{y}(t) + \tilde{A}(t)\hat{x}(t), \\ &\quad \tilde{y}(t) = C^T\tilde{x}(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t)$ – ошибки идентификации параметров системы (2.1), $\tilde{L}(t)$ – ошибка идентификации L , доставляющей $\lambda_{\max}(A + LC^T) < 0$.

Как следует из дифференциального уравнения (5.2), существует два принципиальных механизма достижения цели (2.5). Во-первых, можно попытаться формировать оценки таким образом, что сумма $\tilde{B}(t)u(t) + \tilde{L}(t)\tilde{y}(t) + \tilde{A}(t)\hat{x}(t)$ сходится к нулю. Во-вторых, можно обеспечить сходимость к нулю ошибок $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t)$ и $\tilde{L}(t)$.

Традиционно законы адаптации, использующие первый механизм, строятся с помощью второго метода Ляпунова, в соответствии с которым в рассмотрение вводится квадратичная форма:

$$(5.3) \quad V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + tr(\tilde{A}^T \tilde{A}) + \tilde{B}^T \tilde{B} + \tilde{L}^T \tilde{L},$$

где $P = P^T > 0$ – решение уравнения Ляпунова при $Q = Q^T > 0$.

Несложными, но объемными преобразованиями производная функции (5.3) может быть приведена к виду

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \dot{V} = & -\tilde{x}^T Q \tilde{x} + 2\text{tr} \left(\tilde{A}^T P \tilde{x} \hat{x}^T + \tilde{A}^T \dot{\hat{A}} \right) + \\ & + 2\tilde{B}^T P \tilde{x} u + 2\tilde{B}^T \dot{\hat{B}} + 2\tilde{L}^T P \tilde{x} \tilde{y} + 2\tilde{L}^T \dot{\hat{L}}. \end{aligned}$$

Тогда следующие законы настройки:

$$(5.5) \quad \dot{\hat{L}}(t) = -P \tilde{x}(t) \tilde{y}(t), \quad \dot{\hat{B}}(t) = -P \tilde{x}(t) u(t), \quad \dot{\hat{A}}(t) = -P \tilde{x}(t) \hat{x}^T(t)$$

обеспечивают $\dot{V} = -\tilde{x}^T Q \tilde{x}$, что с помощью леммы Барбалата позволяет доказать асимптотическую сходимость ошибки оценивания $\tilde{x}(t)$. Однако законы настройки (5.5) используют не доступную для измерения ошибку оценивания и, следовательно, нереализуемы.

Законы настройки, использующие второй механизм стабилизации уравнения в отклонениях, строятся с помощью градиентного метода идентификации и поэтому требуют параметризации по измеряемым сигналам $u(t)$ и $y(t)$ регрессионного уравнения относительно $n^2 + n$ параметров матриц A, B . Покажем, что такая параметризация в общем случае получена быть не может.

Передаточная функция, связывающая управление $u(t)$ и выход системы $y(t)$, имеет вид ($m \leq n - 1$):

$$(5.6) \quad W(s) = C^T (sI_n - A)^{-1} B = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0},$$

т.е. с измеряемыми сигналами $u(t)$ и $y(t)$ (и их производными) связаны только $2n \leq n^2 + n$ параметров.

Перепишем выражение (5.6) в виде (где s – оператор дифференцирования)

$$(5.7) \quad (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) u(t) = (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) y(t).$$

Применив к левой и правой частям выражения (5.7) оператор $\frac{1}{\Lambda(s)}$ ($\Lambda(s)$ – приведенный гурвицев полином порядка n) и выразив из полученного уравнения величину $\frac{s^n}{\Lambda(s)} y(t)$, можем получить параметризацию:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} z(t) &= \frac{s^n}{\Lambda(s)} y(t) = \varphi^T(t) \psi, \\ \varphi(t) &= \left[-\frac{\alpha_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} y(t) \quad \frac{\alpha_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} u(t) \right]^T, \quad \alpha_{n-1}^T(s) = [s^{n-1} \quad \dots \quad s \quad 1], \\ \psi &= [a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad b_0], \end{aligned}$$

связывающую сигналы $u(t)$ и $y(t)$ с параметрами передаточной функции (5.6).

Сигналы $\varphi(t)$ и $z(t)$ известны (могут быть вычислены по $u(t)$ и $y(t)$), а значит, уравнение (5.8) может быть использовано для синтеза законов идентификации параметров ψ с применением градиентного метода. Однако так как при $n > 1$ бесконечному числу триплетов (A, B, C) соответствует одна передаточная функция (5.6), то в общем случае параметры матриц (A, B) произвольного представления в пространстве состояний (2.1) не могут быть идентифицированы уникальным образом с использованием информации только о $u(t)$ и $y(t)$. Возможно нахождение параметров только полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (5.8), непосредственно связанных с измеряемыми сигналами и их производными. Поэтому в общем случае построение законов настройки, использующих второй механизм стабилизации ошибки оценивания $\tilde{x}(t)$, также невозможно.

Таким образом, независимо от выбранного механизма стабилизации уравнения в отклонениях (5.2) в общем случае адаптивный наблюдатель (5.1) нереализуем и требуется выдвижение дополнительных условий, позволяющих рассматривать более узкие классы систем, для которых задача оценивания состояний в условиях параметрической неопределенности становится разрешимой.

В существующей литературе выделяют два типа условий. Первый тип описывает класс систем, для которых применение второго метода Ляпунова (аналогично (5.3)–(5.5)) позволяет получить реализуемые законы настройки. Второй тип условий описывает класс систем, для которых нахождение параметров передаточной функции (5.2) оказывается достаточно для восстановления состояний системы (2.1). Перейдем к подробному анализу этих требований и адаптивных наблюдателей, которые могут быть построены при их удовлетворении.

5.1. Адаптивные наблюдатели состояний систем со строго-положительно вещественной передаточной функцией от возмущения к выходу

Идея этого подхода состоит в определении условий, при которых в законах идентификации вместо неизмеряемой ошибки оценивания состояний $\tilde{x}(t)$ допустимо использовать только ошибку оценивания выхода $\tilde{y}(t)$. А именно, оказывается, что такая замена состоятельна для систем со строго-положительно вещественной (СПВ) передаточной функцией от возмущения к выходу.

Основные этапы синтеза наблюдателей для систем со строго-положительно вещественной передаточной функцией от возмущения к выходу представлены на рис. 1.

Как следует из рис. 1, на первом этапе синтеза параметрические возмущения системы представляются в качестве нового неизвестного входа:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_n + \Delta A)x(t) + (B_n + \Delta B)u(t) = \\ (5.9) \quad &= A_n x(t) + B_n u(t) + D\Phi(x, u)\Theta, \\ D\Phi(x, u)\Theta &= \Delta A x(t) + \Delta B u(t), \end{aligned}$$

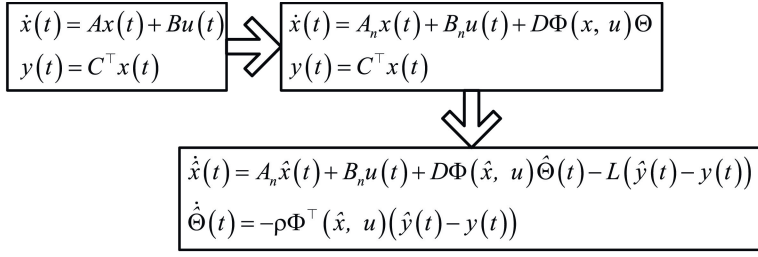


Рис. 1. Процедура синтеза адаптивных наблюдателей для систем со строго-положительно вещественной передаточной функцией.

где $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{m \times p}$ – линейная функция, $\Theta \in \mathbb{R}^p$ – вектор неизвестных параметров.

В отличие от параметризации (4.1), используемой при синтезе инвариантных наблюдателей, здесь обобщенное возмущение факторизуется в виде линейной регрессии с неизвестными параметрами и неизмеряемым регрессором.

Адаптивный наблюдатель состояний системы (5.9) предлагается [48] задать следующим образом:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + B_n u(t) + D\Phi(\hat{x}, u)\hat{\Theta}(t) - L(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \dot{\hat{\Theta}}(t) &= -\rho \Phi^T(\hat{x}, u)(\hat{y}(t) - y(t)), \end{aligned}$$

где $\rho > 0$ – коэффициент усиления, $L \in \mathbb{R}^n$ – известный вектор, выбранный так, что $A_n + LC^T$ гурвицева, а закон формирования оценок $\hat{\Theta}(t) \in \mathbb{R}^p$ выведен вторым методом Ляпунова.

Условия сходимости оценок состояний к истинным значениям при использовании (5.10) описаны в следующей лемме.

Лемма 3. Пусть выполнены условия:

- 1) $\|\Phi(x, u) - \Phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\|$, $\gamma > 0$;
- 2) для $Q = Q^T > 0$ существует решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} (A_n + LC^T)^T P + P(A_n + LC^T) &= -Q, \\ PD &= C, \end{aligned}$$

причем верно $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} > \gamma$.

Тогда адаптивный наблюдатель (5.5) гарантирует:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|D\Phi(\hat{x}, u)\hat{\Theta}(t) - D\Phi(x, u)\Theta\| = 0.$$

Доказательство приведено в [48].

Выполнение второго условия из леммы 3 позволяет выполнить замену в законе адаптации $\tilde{x}^T(t)PD$ на $\hat{y}(t) = C^T \hat{x}(t)$ и получить реализуемый закон настройки из (5.10), в чем нетрудно убедиться, рассмотрев $V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + \rho^{-1} \hat{\Theta}^T \hat{\Theta}$.

Первое условие леммы 3 всегда выполняется при выборе линейного по состояниям управления, поскольку в силу параметризации (5.9) функция $\Phi(x, u)$ линейна по обоим входам. В соответствии с леммой Калмана–Якубовича–Попова система уравнений из второго условия имеет решение, если и только если передаточная функция от возмущения $\Phi(x, u)$ к выходу $y(t)$ является строго-положительно вещественной. Более того, уравнение $PD = C^T$ разрешимо, если PD лежит в линейной оболочке C^T , что требует выполнения условия согласования по выходу $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$, а значит, и равенства $m = \dim(y(t)) = 1$.

Таким образом, условия сходимости оценок, формируемых адаптивным наблюдателем состояний (5.10), совпадают с условиями применимости базового инвариантного наблюдателя Люенбергера (4.2) и наблюдателя со скользящим режимом (4.7). В [49] разработан подход к ослаблению условия согласования по выходу. По аналогии с решением [41] в [49] предлагается с помощью наблюдателя с сильной обратной связью сначала получить новый выход (4.10), для которого предполагаются выполненными условия леммы 3, а после этого, с использованием нового выхода (4.10), реализовать адаптивный наблюдатель (5.5). Недостатки решения [49] совпадают с недостатками [41], т.е. область применимости наблюдателя [49] ограничена системами, для которых выполнено расширенное условие согласования.

Расширенное и стандартное условия согласования ограничительны и не позволяют синтезировать адаптивные наблюдатели состояний для систем с параметрическими неопределенностями, действующими на различные уравнения системы (например, для (4.5)).

5.2. Адаптивные наблюдатели состояний на базе преобразования системы в каноническую наблюдаемую форму

Как отмечалось ранее, с управлением и выходом связаны параметры числителя и знаменателя передаточной функции (5.3). Это наблюдение мотивирует преобразование системы (2.1) в каноническую наблюдаемую форму пространства состояний, неизвестными параметрами в которой как раз и являются эти параметры. Для этого вводится неособое (для полностью наблюдаемых систем) преобразование подобия $\xi(t) = Tx(t)$, задаваемое следующим образом:

$$(5.11) \quad T^{-1} = [A^{n-1}O_n \quad A^{n-2}O_n \quad \cdots \quad O_n], \quad O_n = O[0_{1 \times (n-1)} \quad 1]^T, \\ O^{-1} = [C \quad A^T C \quad \cdots \quad (A^{n-1})^T C]^T,$$

и в соответствии с [50, 51] позволяющее записать уравнения системы (2.1) в следующем виде:

$$(5.12) \quad \dot{\xi}(t) = A_0 \xi(t) + \psi_a y(t) + \psi_b u(t),$$

$$(5.13) \quad y(t) = C_0^T \xi(t), \quad \xi(t_0) = Tx_0,$$

где

$$\begin{aligned}\psi_a &= TAT^{-1}C_0 = [a_{n-1} \ a_{n-2} \ \dots \ a_0]^T, \\ \psi_b &= TB = [b_{n-1} \ b_{n-2} \ \dots \ b_0]^T, \\ A_0 &= \begin{bmatrix} 0_n & I_{n-1} \\ & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad C_0^T = C^T T^{-1} = [1 \ 0_{n-1}^T].\end{aligned}$$

Тогда задача оценивания (2.5) физических состояний транслируется в задачу оценивания виртуальных состояний:

$$(5.14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\xi}(t) - \xi(t)\| = 0 \quad (\text{exp}),$$

где $\hat{\xi}(t)$ – оценка виртуальных состояний системы, $\tilde{\xi}(t)$ – ошибка восстановления /наблюдения/оценивания.

В отличие от (2.5) цель (5.14) достижима с использованием техник адаптивного управления. Например, законы оценки неизвестных параметров ψ_a и ψ_b могут быть построены по регрессионному уравнению (5.8). Однако возникает противоречие между поставленной задачей (5.14) и практической необходимостью оценивания физических состояний для использования в динамических обратных связях (2.4а) и (2.4б). Другими словами, оценки состояний $\hat{\xi}(t)$ бесполезны для использования в цепи выбранной априорно обратной связи (2.4а) и (2.4б). Более того, на практике оценки $\hat{x}(t)$ физических состояний могут требоваться не только при формировании управления, но и для других целей (например диагностики отказов, управления с прогнозом, мониторинга, онлайн настройки цифровых двойников и т.д.). Разрешением сложившегося противоречия является формирование оценок физических состояний следующим образом:

$$(5.15) \quad \hat{x}(t) = \hat{T}_I(t) \hat{\xi}(t),$$

где для удобства записи принято переобозначение $T_I := T^{-1}$, а оценка $\hat{T}_I(t)$ матрицы подобия T_I получена с помощью оценок параметров системы (5.12) по следующей формуле пересчета:

$$(5.16) \quad \hat{T}_I(t) = f_{T_I}(\hat{\psi}),$$

здесь $f_{T_I}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ – функция пересчета параметров передаточной функции в матрицу линейного подобия, $\hat{\psi}(t) = [\hat{\psi}_a^T(t) \ \hat{\psi}_b^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, а $\hat{\psi}_a(t), \hat{\psi}_b(t)$ – оценки параметров соответственно знаменателя и числителя передаточной функции (5.3).

Тогда исходная цель (2.5) оказывается эквивалентна обеспечению существования предельных равенств:

$$(5.17) \quad \begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}(t)\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\xi}(t) - \xi(t)\| = 0 \quad (\text{exp}), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\psi}(t) - \psi\| = 0 \quad (\text{exp}).\end{aligned}$$

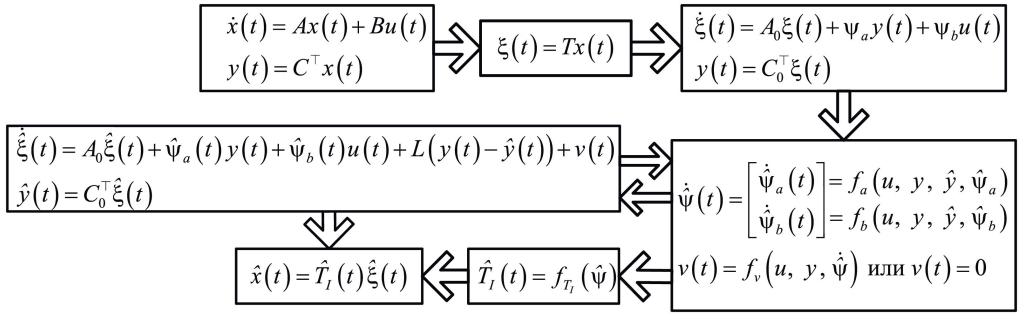


Рис. 2. Процедура синтеза адаптивных наблюдателей на базе преобразования системы в каноническую наблюдаемую форму.

Для достижения цели (5.17) с помощью наблюдателя (5.15) + (5.16) требуется, во-первых, существование непрерывной по Липшицу функции пересчета $f_{T_l}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а во-вторых, построение законов оценки параметров и неизмеряемых состояний, обеспечивающих существование предельных равенств (5.17).

Схема процедуры синтеза наблюдателя (5.15) представлена на рис. 2.

Сначала рассмотрим существующие процедуры выбора законов идентификации (функций $f_a(\cdot)$ и $f_b(\cdot)$ на рис. 2). После этого покажем необходимость удовлетворения условия Липшица для выполнения (2.5) при выполнении (5.17) и использовании (5.16).

5.2.1. Адаптивный наблюдатель Люенбергера. Метод Ляпунова

Впервые задача адаптивного оценивания состояний линейных систем в канонической форме наблюдаемости была рассмотрена в работах Р. Кэррола и Д. Линдорфа [51] и Г. Людерса и К. Нарендры [52]. Примечателен тот факт, что эти две очень близкие по постановке задачи и содержанию работы были опубликованы спустя 10 лет после фундаментальной работы Д. Люенбергера [2] в одном номере журнала IEEE Transactions on Automatic Control с разницей в 61 страницу. Позже в работе [53] ранние результаты [51, 52] подверглись пересмотру и были выведены с единых позиций. В современных устоявшихся обозначениях наблюдатели типа [51–53] изложены в учебнике [54]. В соответствии с рассматриваемым подходом структура наблюдателя состояний системы (5.5) задается в следующем виде:

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}(t) &= A_0 \hat{\xi}(t) + \hat{\psi}_a(t) y(t) + \hat{\psi}_b(t) u(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)) + v(t), \\ \hat{y}(t) &= C_0^T \hat{\xi}(t), \end{aligned}$$

где $v(t) \in \mathbb{R}^n$ – дополнительный сигнал, а коэффициент корректирующей обратной связи L выбран из условия $\lambda_{\max}(A_0 + LC_0^T) < 0$.

Уравнение в отклонениях между (5.18) и (5.12) принимает вид:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}(t) &= A_m \tilde{\xi}(t) + \tilde{\psi}_a(t) y(t) + \tilde{\psi}_b(t) u(t) + v(t), \\ \tilde{y}(t) &= C_0^T \tilde{\xi}(t), \end{aligned}$$

где $A_m = A_0 + LC_0^T$.

Основная идея подхода [51–53] состоит в преобразовании с помощью специального выбора сигнала $v(t)$ уравнения в отклонениях (5.19) в форму, допускающую существование так называемой адаптивной управляющей функции Ляпунова.

Лемма 4. Существует сигнал $v(t) \in \mathbb{R}^n$, формируемый по измеряемым сигналам, такой что система (5.19) приводится к форме:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_m e(t) + B_c \varphi^T(t) \tilde{\psi}(t), \\ \tilde{y}(t) &= C_0^T e(t), \end{aligned}$$

где $C_0^T (sI_n - A_m)^{-1} B_c$ – строго-положительно вещественная (СПВ) передаточная функция, $\varphi(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ – регрессор, формируемый по управлению и выходу, $e(t) \in \mathbb{R}^n$ – новый вектор состояний.

Доказательство приведено в [54, с. 280].

По лемме Калмана–Якубовича–Попова [54] для систем с СПВ передаточной функцией разрешима система уравнений

$$\begin{aligned} (A_0 + LC_0^T)^T P + P (A_0 + LC_0^T) &= -Q, \quad Q = Q^T > 0, \\ PB_c &= C_0, \end{aligned}$$

а значит, рассмотрение квадратичной управляющей функции

$$V = e^T P e + \tilde{\psi}^T \Gamma^{-1} \tilde{\psi}$$

позволяет получить следующий результат.

Теорема 6. Адаптивный наблюдатель (5.18) и закон настройки его параметров

$$(5.20) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\Gamma \tilde{y}(t) \varphi(t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0,$$

при $\xi \in L_\infty$ и $u \in L_\infty$ обеспечивают:

- (i) ограниченность всех сигналов,
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0$,
- (iii) $\dot{\tilde{\psi}} \in L_2 \cap L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{\tilde{\psi}}(t)\| = 0$.

Если дополнительно для всех $t \geq t_0$ существуют $T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что³

$$\int_t^{t+T} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha > 0,$$

то существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}.$$

Доказательство приведено в [54, с. 282].

В рассмотренном решении уравнения динамики наблюдателя (5.18) от динамики системы (5.12) заведомо отличает затухающий в асимптотике, но значительно искажающий оценки $\hat{\xi}(t)$ в переходном процессе дополнительный сигнал $v(t)$. Кроме того, закон настройки параметров наблюдателя (5.18) не может быть выбран произвольно, а выводится через управляющую функцию Ляпунова и потому не дает каких-либо гарантий качества переходных процессов по параметрической ошибке $\tilde{\psi}(t)$ (например, не гарантирует монотонность вектора ошибок по норме или элементам).

5.2.2. Адаптивный наблюдатель Люенбергера. Идентификационный подход

Для устранения взаимосвязи через $\tilde{y}(t)$ динамики идентификатора (5.20) и наблюдателя (5.18), а также для улучшения качества переходных процессов по ошибке $\tilde{\psi}(t)$ был развит [54] идентификационный подход к построению адаптивных наблюдателей состояний. Структура наблюдателя выбирается в виде (5.18), но дополнительный сигнал из уравнений исключается установкой $v(t) \triangleq 0$, а законы идентификации выводятся без использования функций Ляпунова. Основой для построения закона идентификации является регрессионное уравнение (5.8), полученное с помощью динамических фильтров.

Регрессионное уравнение (5.8) позволяет использовать для идентификации параметров передаточной функции (5.6) широкий класс методов из арсенала теории параметрической идентификации (градиентный метод, вариации метода наименьших квадратов и пр. [54]). В частности, при применении градиентного метода идентификации оказывается верна [54] следующая теорема.

Теорема 7. Адаптивный наблюдатель (5.18) при $v(t) \triangleq 0$ и закон настройки его параметров:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) = \dot{\tilde{\psi}}(t) &= -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - z(t) \right) = \\ (5.21) \quad &= -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - \varphi^T(t) \psi \right), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \end{aligned}$$

при $\xi \in L_\infty$ и $u \in L_\infty$ обеспечивают:

³ Это требование называется условием постоянного (неисчезающего) возбуждения регрессора и далее обозначается как $\varphi \in \text{PE}$.

- (i) ограниченность всех сигналов,
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0$,
- (iii) $\dot{\tilde{\psi}} \in L_2 \cap L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{\tilde{\psi}}(t)\| = 0$.

Если дополнительно выполнено условие $\varphi \in \text{PE}$, то существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}.$$

Доказательство приведено в [54, с. 271].

Как следует из сравнения предпосылок и результатов теорем 6 и 7, свойства наблюдателя (5.18) + (5.20), выведенного по методу адаптивной управляющей функции Ляпунова, и наблюдателя (5.18) + (5.21) на базе идентификационного подхода совпадают. Однако законы формирования оценок $\hat{\psi}(t)$ и $\hat{\xi}(t)$ в наблюдателе (5.18) + (5.21) развязаны, а дополнительный сигнал $v(t)$, искажающий оценки $\hat{\xi}(t)$, не используется. Кроме того, как можно убедиться, рассмотрев квадратичную форму $V = \tilde{\psi}^T \Gamma^{-1} \tilde{\psi}$, закон идентификации (5.21) в отличие от (5.20) при выборе $\Gamma = \gamma I_{2n} > 0$ гарантирует невозрастание нормы ошибки $\tilde{\psi}(t)$:

$$\|\tilde{\psi}(t_a)\| \leq \|\tilde{\psi}(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b,$$

что в сравнении с (5.20) позволяет улучшить качество переходных процессов по оценкам $\hat{\psi}(t)$ и $\hat{\xi}(t)$.

Рассмотренный идентификационный подход и параметризация (5.8) открывают широкие возможности для построения адаптивных наблюдателей состояний с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора и ускоренной/улучшенной сходимостью. Данные решения будут рассмотрены позднее в подразделе 5.2.6.

5.2.3. Расширенный фильтр Калмана

Совместное оценивание состояний и неизвестных параметров системы (5.12) также может быть выполнено с помощью расширенного фильтра Калмана [3]. Для его применения система переписывается в следующем виде:

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 & \Psi(t) \\ 0_{2n \times n} & 0_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \xi_e(t) = A_e(t) \xi_e(t), \\ y(t) &= C_e^T \xi_e(t) = [1 \quad 0_{3n-1}] \xi_e(t), \end{aligned}$$

где $\xi_e(t) = [\xi(t) \quad \psi]^T$ – расширенный вектор координат состояний, $\Psi(t) = [y(t) I_n \quad u(t) I_n] \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ – измеряемый сигнал, $A_e(t) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ – известная нестационарная матрица.

Расширенный фильтр Калмана–Бьюси [3] для системы (5.22) задается следующими уравнениями:

$$(5.23) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_e(t) &= A_e(t) \hat{\xi}_e(t) + L(t) \left(y(t) - C_e^T \hat{\xi}_e(t) \right), \\ L(t) &= P(t) C_e R^{-1}, \\ \dot{P}(t) &= A_e(t) P(t) + P(t) A_e^T(t) + Q - P(t) C_e R^{-1} C_e^T P(t), \end{aligned}$$

где $R^{-1} \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ – ковариации возможных возмущений, действующих на уравнение состояний и уравнение выхода соответственно.

Условием экспоненциальной сходимости оценок $\hat{\xi}_e(t)$ к истинным значениям при использовании алгоритма калмановской фильтрации (5.23) является [10, 54] равномерная полная наблюдаемость расширенной системы (5.22).

Определение 2. Пара $(C_e, A_e(t))$ равномерно полностью наблюдаема, если для всех $t \geq t_0$ существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, T > 0$ такие, что верно неравенство

$$(5.24) \quad \alpha_2 I_{3n} \geq \int_t^{t+T} \Phi(\tau, t) C_e C_e^T \Phi(\tau, t) d\tau \geq \alpha_1 I_{3n},$$

где $\Phi(t, t_0)$ – матрица фундаментальных решений системы (5.22), задаваемая уравнением

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A_e(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I_{3n}.$$

Как следует из определения, калмановская фильтрация (5.23) требует равномерной невырожденности грамиана (5.24) с размерностью $3n \times 3n$, в то время как ранее рассмотренные адаптивные наблюдатели требуют невырожденности некоторого интеграла размерностью $2n \times 2n$. Значит, в общем случае условия сходимости адаптивных наблюдателей (5.18) + (5.20) и (5.18) + (5.21) если не совпадают, то оказываются слабее условий сходимости расширенного фильтра Калмана (5.23). Следуя обзору [55], с помощью ряда объемных выкладок можно также показать, что невырожденность (5.24) всегда требует выполнения условия неисчезающего возбуждения регрессора $\varphi(t)$ в параметризации (5.8).

5.2.4. Алгебраический наблюдатель.

Параметризация Крейссельмейера

Рассмотренные адаптивные наблюдатели формируют оценки состояний с помощью дифференциальных уравнений, правая часть которых зависит от оценок неизвестных параметров и содержит корректирующую обратную связь Люенбергера. Поэтому переходные процессы по оценкам параметров системы существенно влияют на качество переходных процессов по оценкам состояний, а дополнительное замыкание уравнения наблюдателя корректирующей обратной связью еще сильнее ухудшает ситуацию, приводя к возникновению так называемых всплесков. С целью устранения отмеченных проблем

Г. Крейссельмейером было предложено [56] с помощью специальных параметризаций формировать оценки состояний с помощью не дифференциального, но алгебраического уравнения, не требующего использования корректирующей обратной связи.

Существо подхода следующее. В рассмотрение вводится набор дифференциальных фильтров для управления и выхода:

$$(5.25) \quad \begin{aligned} \dot{\Omega}(t) &= A_K^T \Omega(t) + C_0 u(t), \quad \Omega(t_0) = 0_n, \\ \dot{P}(t) &= A_K^T P(t) + C_0 y(t), \quad P(t_0) = 0_n, \end{aligned}$$

где $A_K = A_0 + KC_0^T$ – гурвицева матрица.

Согласно результатам [56], оказывается справедлива запись:

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \xi(t) &= H^T(t) \psi + e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0), \\ \psi^T &= [\psi_a^T - K^T \quad \psi_b^T], \quad H^T(t) = [h_1(t) \dots h_{2n}(t)], \\ h_i(t) &= F_i P(t), \quad h_{i+n}(t) = F_i \Omega(t), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $H(t) \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ – измеряемый регрессор, $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица трансформации, составленная из коэффициентов полинома числителя векторной функции $(sI - A_K)^{-1} e_i$, $e_i \in \mathbb{R}^n$ – вектор с единичным i -м элементом.

Параметризация (5.16) мотивирует оценку неизмеряемых состояний системы (5.12) по алгебраическому уравнению

$$(5.27) \quad \hat{\xi}(t) = H^T(t) \hat{\psi}(t),$$

где оценки $\hat{\psi}(t)$ формируются по регрессионному уравнению

$$(5.28) \quad \begin{aligned} y(t) &= C_0^T \xi(t) = \varphi(t) \psi + C_0^T e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0), \\ \varphi(t) &= C_0^T H^T(t) \end{aligned}$$

с помощью широкого класса законов параметрической идентификации.

Например, градиентный закон идентификации

$$(5.29) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - y(t) \right), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0$$

при $\xi \in L_\infty$, $u \in L_\infty$ и выполнении условия $\varphi \in \text{PE}$ гарантирует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}.$$

Здесь заметим, что в силу гурвицевости A_K экспоненциально затухающее слагаемое в (5.26) и (5.28) не влияет на асимптотические свойства ошибок оценивания, но ограничивает достижимую скорость сходимости [54]. В отличие от ранее рассмотренных наблюдателей при алгебраическом восстановлении состояний (5.27) + (5.29) улучшение качества переходных процессов по $\tilde{\psi}(t)$ приводит к равномерному улучшению качества переходных процессов по оценкам $\hat{\xi}(t)$ (оценки параметров в уравнении наблюдателя не интегрируются, а корректирующая обратная связь отсутствует).

5.2.5. Алгебраический наблюдатель.

Альтернативная параметризация

Вычисление регрессора $H(t)$ для реализации параметризации (5.26) требует довольно кропотливого вычисления матриц подобия F_i , особенно при росте n . Упрощенная параметризация предложена в [57, 58]. Вместо двух фильтров с векторными состояниями (5.25) предлагается использовать три фильтра — два с матричным состоянием и один с векторным:

$$(5.30) \quad \begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= A_K \chi(t) + K y(t), & \chi(t_0) &= 0_{n \times 1}, \\ \dot{P}(t) &= A_K P(t) + I_n y(t), & P(t_0) &= 0_{n \times n}, \\ \dot{\Omega}(t) &= A_K \Omega(t) + I_n u(t), & \Omega(t_0) &= 0_{n \times n}. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с выкладками [57, 58] параметры ψ удовлетворяют следующему линейному регрессионному уравнению:

$$(5.31) \quad \begin{aligned} \xi(t) &= \chi(t) + H^T(t) \psi + e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0), \\ H^T(t) &= [\Omega(t) \ P(t)] \in \mathbb{R}^{n \times 2n}. \end{aligned}$$

В справедливости записи (5.31) можно убедиться непосредственным дифференцированием ошибки $\xi(t) - \chi(t) + H^T(t) \psi$. Аналогично (5.28) умножение выражения (5.31) на C_0^T дает регрессионное уравнение

$$(5.32) \quad \begin{aligned} z(t) &= y(t) - C_0^T \chi(t) = \varphi^T(t) \psi + C_0^T e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0), \\ \varphi^T(t) &= C_0^T H^T(t), \end{aligned}$$

позволяющее реализовать наблюдатель вида

$$(5.33) \quad \dot{\hat{\xi}}(t) = \chi(t) + H^T(t) \hat{\psi}(t),$$

где $\hat{\psi}(t)$ может быть сформирована по (5.32) с помощью широкого класса законов параметрической идентификации.

5.2.6. Наблюдатели с ускоренной/улучшенной сходимостью

Одним из основных преимуществ алгебраических адаптивных наблюдателей вида (5.27) и (5.33) по сравнению с адаптивными наблюдателями дифференциального типа (5.18) + (5.20), (5.18) + (5.21) является прямая зависимость скорости сходимости ошибки наблюдения $\xi(t)$ от скорости сходимости параметрической ошибки и параметров фильтров (5.25) или (5.30).

Действительно, при $\xi \in L_\infty$ и $u \in L_\infty$ оказывается верно

$$\|\tilde{\xi}(t)\| \leq H_{\max} \|\tilde{\psi}(t)\| + e^{A_K(t-t_0)} \xi_{\max},$$

что позволяет регулировать скорость сходимости $\tilde{\xi}(t)$ с помощью выбора A_K и увеличения скорости сходимости $\tilde{\psi}(t)$.

В то же время скорость сходимости ошибки в дифференциальном уравнении в отклонениях (5.18), как известно, определяется не только скоростью сходимости его входа, но и собственными числами матрицы замкнутой системы $A_0 + L_0 C^T$. При этом увеличение (по модулю) действительной части собственных чисел может приводить к значительным выбросам в переходном процессе.

Оценка скорости сходимости рассмотренного ранее градиентного закона идентификации типа (5.21) или (5.29) в соответствии с результатами [59] при $\Gamma = \gamma I_{2n}$ и выполнении условия постоянного возбуждения регрессора может быть выписана в следующем виде:

$$\left\| \tilde{\psi}(t) \right\| \leq \sqrt{a} \left\| \varphi \right\| e^{-\frac{1}{2} \gamma a^{-1} (t-t_0)} \left\| \tilde{\psi}(t_0) \right\|, \\ a = \gamma b^{-1} e^{2bT}, \quad b = -\frac{1}{2T} \ln \left(1 - \frac{\gamma \alpha}{1 + \gamma^2 T^2 \left\| \varphi \right\|_\infty^4} \right).$$

Таким образом, при использовании стандартных законов идентификации градиентного типа с помощью увеличения коэффициента усиления $\gamma > 0$ скорость сходимости параметрической ошибки не может быть произвольно увеличена, поскольку с увеличением γ произведение γa^{-1} может уменьшиться. Поэтому при использовании алгебраических наблюдателей (5.27) и (5.33) со стандартными градиентными законами идентификации вида (5.21), (5.29), также как и при использовании наблюдателей (5.18) + (5.20) или (5.18) + (5.21), оказывается непросто увеличить скорость сходимости оценки неизмеряемых состояний без ухудшения качества переходных процессов. Для разрешения этой проблемы были предложены модифицированные законы параметрической идентификации с ускоренной сходимостью. Не теряя общности выводов, для простоты изложения свойства улучшенных законов идентификации рассмотрим на примере задачи идентификации в параметризации (5.32), временно не учитывая слагаемое $C_0^T e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0)$, но имея в виду обозначенные ограничения, накладываемые им на достижимую скорость сходимости.

1) Схема расширения регрессора Крейссельмейера. Г. Крейссельмейер предложил [56] преобразовать в регрессионном уравнении (5.32) векторный регрессор $\varphi(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ в симметричную положительно-полуопределенную матрицу $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\Phi(t) = \Phi^T(t) \geq 0$ с помощью следующей фильтрации ($l > 0$):

$$(5.34) \quad \begin{aligned} \dot{Y}(t) &= -lY(t) + \varphi(t)z(t), \quad Y(t_0) = 0_{2n}, \\ \dot{\Phi}(t) &= -l\Phi(t) + \varphi(t)\varphi^T(t), \quad \Phi(t_0) = 0_{2n \times 2n}, \end{aligned}$$

которая в силу $\psi = \text{const}$ позволяет получить новое регрессионное уравнение:

$$(5.35) \quad Y(t) = \Phi(t)\psi.$$

По уравнению (5.35) можно построить новый закон идентификации:

$$(5.36) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\Gamma \left(\Phi(t) \hat{\psi}(t) - Y(t) \right), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0,$$

который обладает существенно отличными от ранее рассмотренных законов свойствами [60]:

- 1) $\lambda_{\min}(\Phi(t)) \notin L_1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0$,
 $\varphi \in \text{PE} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0 \text{ (exp)};$
- 2) $\|\tilde{\psi}(t_a)\| \leq \|\tilde{\psi}(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b;$
- 3) при $\varphi \in \text{PE}$ и $\Gamma = \gamma I_{2n}$ скорость экспоненциальной сходимости параметрической ошибки $\tilde{\psi}(t)$ может быть произвольно увеличена путем увеличения γ .

Наиболее значимым является третье свойство закона (5.36), объяснимое свойством

$$\varphi \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \lambda_{\min}(\Phi(t)) > \mu > 0,$$

доказанным в [61] и позволяющим получить следующую оценку на норму параметрической ошибки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{\psi}\|^2 &= -2\gamma \tilde{\psi}^T \Phi \tilde{\psi} \leq -2\gamma \lambda_{\min}(\Phi) \|\tilde{\psi}\|^2 \\ &\Downarrow \\ \|\tilde{\psi}(t)\| &\leq e^{-\gamma \int_{t_0}^t \lambda_{\min}(\Phi) d\tau} \|\tilde{\psi}(t_0)\| \leq e^{-\gamma \mu (t-t_0)} \|\tilde{\psi}(t_0)\|, \end{aligned}$$

из которой непосредственно следует третье свойство.

Фильтрация (5.34) при идентификации (5.36) дополнительно к текущей косвенной информации о параметрах системы позволяет использовать некоторый объем (определяемый параметром l) предыстории. Это позволяет в каждый момент времени иметь косвенную информацию (через $Y(t)$ и $\Phi(t)$) о всех неизвестных параметрах, что и приводит к возможности увеличения скорости сходимости с помощью увеличения γ . Таким образом, при использовании алгебраического наблюдателя состояний (5.33), дополненного идентификатором с ускоренной сходимостью (5.36), открывается возможность увеличения скорости экспоненциальной сходимости ошибок восстановления состояний с помощью увеличения γ . Заметим также, что наблюдатель (5.33) + (5.36), в отличие от ранее рассмотренных, не требует выполнения условия неисчезающего возбуждения для достижения асимптотической (но не экспоненциальной) сходимости ошибки оценивания.

2) Процедура динамического расширения и смешивания регрессора.

В [62] предложено использовать переменный коэффициент усиления в законе (5.36)⁴:

$$(5.37) \quad \Gamma = \gamma \operatorname{adj} \{ \Phi(t) \}, \quad \gamma > 0,$$

что по свойству $\operatorname{adj} \{ \Phi(t) \} \Phi(t) = \det \{ \Phi(t) \} I_{2n \times 2n}$ позволяет получить:

$$(5.38) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\gamma \operatorname{adj} \{ \Phi(t) \} \left(\Phi(t) \hat{\psi}(t) - Y(t) \right) = \\ &= -\gamma \left(\Delta(t) \hat{\psi}(t) - \mathcal{Y}(t) \right) \\ &\Downarrow \\ \dot{\hat{\psi}}_i(t) &= \dot{\tilde{\psi}}_i(t) = -\gamma \Delta(t) \tilde{\psi}_i(t), \\ \Delta(t) &= \det \{ \Phi(t) \}, \quad \mathcal{Y}(t) = \operatorname{adj} \{ \Phi(t) \} Y(t) = \Delta(t) \psi, \end{aligned}$$

в результате чего новый закон (5.38) обладает свойствами 1)–3) закона (5.36) и дополнительно гарантирует монотонность по элементам параметрической ошибки:

$$(5.39) \quad \left| \tilde{\psi}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\psi}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Как будет показано чуть позже, свойство (5.39) оказывается существенным при пересчете по формуле (5.16) оценок $\hat{\psi}(t) = [\hat{\psi}_a(t) \quad \hat{\psi}_b(t)]^T$ в оценку матрицы линейного подобию $\hat{T}(t)$. Действительно, при выполнении (5.39) верно

$$(5.40) \quad \left. \begin{array}{l} \hat{\psi}_i(t_0) \in \Xi \\ \psi_i \in \Xi \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\psi}_i(t) \in \Xi,$$

что, в некоторых случаях, при определенной априорной информации о параметрах системы (знания что $\psi_i \in \Xi$), позволяет исключать разрывы в преобразовании (5.15). Подробнее роль свойства (5.40) будет обсуждаться позднее.

3) Ослабление условия экспоненциальной сходимости. Процедура интегрального динамического расширения и смешивания регрессора. Рассмотренные законы идентификации (5.20), (5.21), (5.29), (5.36) или (5.38) гарантируют экспоненциальную сходимость параметрической ошибки и ошибки оценивания при неисчезающем возбуждении регрессора (невырожденности интеграла размерностью $2n \times 2n$), что обычно требует наличия в управляющем воздействии как минимум n различных частот [54, 64]. На практике удовлетворение этого условия требует ввода в управление незатухающих гармонических тестовых воздействий, что может противоречить исходной цели управления системой.

⁴ Отметим, что похожая процедура скаляризации регрессора была предложена на 10 лет ранее в менее цитируемой работе [63].

С целью ослабления условий сходимости оценок состояний и параметров к истинным значениям в литературе были предложены законы идентификации с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора. Таким условием выступает условие конечного возбуждения регрессора ($\varphi \in \text{FE}$)⁵. В отличие от неисчезающего возбуждения регрессора условие конечного возбуждения требует невырожденности некоторого интеграла не на всей временной оси, а только на ее конечной части. В терминах условий сходимости фильтра Калмана–Бьюси (5.23), это ослабленное условие эквивалентно наблюдаемости расширенной системы (5.22) только на отдельном интервале времени [3]. Условие конечного возбуждения регрессора может быть выполнено добавлением к управлению экспоненциально затухающего гармонического сигнала с n различными частотами, что не препятствует достижению асимптотической цели регулирования. Для многих систем это условие выполняется и при полном отсутствии тестовых сигналов.

Для ослабления условия неисчезающего возбуждения регрессора было предложено множество различных подходов к обработке регрессора и функции линейного регрессионного уравнения. Подробный обзор таких методов дан в [65–68]. Основная идея большинства подходов заключается в «запоминании» специальным образом полученной на интервале конечного возбуждения косвенной информации о неизвестных параметрах.

В [69] предлагается вместо (5.34) использовать следующую фильтрацию ($\sigma > 0$):

$$(5.41) \quad \begin{aligned} \dot{Y}(t) &= e^{-\sigma(t-t_0)} \varphi(t) z(t), \quad Y(t_0) = 0_{2n}, \\ \dot{\Phi}(t) &= e^{-\sigma(t-t_0)} \varphi(t) \varphi^T(t), \quad \Phi(t_0) = 0_{2n \times 2n}, \end{aligned}$$

что позволяет получить новое регрессионное уравнение вида (5.35), для регрессора которого при выполнении условия $\varphi \in \text{FE}$ верно неравенство:

$$(5.42) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{t_0}^t e^{-\sigma(\tau-t_0)} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \int_{t_0}^{t_e} e^{-\sigma(\tau-t_0)} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \\ &\geq e^{-\sigma(t_e-t_0)} \int_{t_0}^{t_e} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha e^{-\sigma(t_e-t_0)} I_{2n} > 0. \end{aligned}$$

На основе уравнения (5.35), полученного с помощью фильтрации (5.41), может быть реализован закон идентификации как с матричным регрессором (5.36), так и со скалярным (5.38). Свойства этих законов отличаются только видом монотонности параметрической ошибки (по норме или по элементам):

⁵ Условие $\varphi \in \text{FE}$ означает, что существуют $t_e > t_r \geq t_0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\int_{t_r}^{t_e} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha > 0$.

- 1) $\varphi \in \text{FE} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0 \text{ (exp)};$
- 2) (5.41) + (5.36) $\Rightarrow \|\tilde{\psi}(t_a)\| \leq \|\tilde{\psi}(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b,$
(5.41) + (5.38) $\Rightarrow \|\tilde{\psi}_i(t_a)\| \leq \|\tilde{\psi}_i(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b, i \in \{1, \dots, n\};$
- 3) при $\varphi \in \text{FE}$ и $\Gamma = \gamma I_{2n}$ скорость экспоненциальной сходимости параметрической ошибки $\psi(t)$ может быть произвольно увеличена путем увеличения γ .

Как следует из сравнения свойств законов (5.34) + (5.36), (5.34) + (5.38) и (5.41) + (5.36), (5.41) + (5.38), вторая группа наследует достоинства первой, но при этом ослабляет требование, необходимое для достижения целей (2.5) и (5.17).

Ослабление требования неисчезающего возбуждения регрессора позволяет расширить задачу идентификации в параметризациях (5.26) и (5.31) путем учета экспоненциально затухающего слагаемого⁶:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= H^T(t) \psi_e, \\ \psi_e^T &= [\psi_a^T - K^T \quad \psi_b^T \quad \xi^T(t_0)], \quad H^T(t) = [h_1(t) \dots h_{2n}(t) \quad e^{A_K(t-t_0)}], \\ \xi(t) &= \chi(t) + H^T(t) \psi_e, \\ H^T(t) &= [\Omega(t) \quad P(t) \quad e^{A_K(t-t_0)}], \end{aligned}$$

что при реализации соответствующего закона идентификации новых параметров ψ_e приводит к следующей оценке на ошибку восстановления состояний

$$\|\tilde{\xi}(t)\| \leq H_{\max} \|\tilde{\psi}_e(t)\|$$

и снимает накладываемые собственными числами матрицы A_K ограничения на скорость сходимости ошибки $\tilde{\xi}(t)$, обеспечивая ее регулирование только с помощью одного скалярного параметра γ .

4) Ослабление условия неисчезающего возбуждения регрессора. Алгоритм идентификации со сходимостью за конечное время. Иной закон идентификации [70] с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора обеспечивает сходимость ошибок идентификации параметров/состояний за конечное время и имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_i^{\text{FTC}}(t) &= \frac{1}{1 - \phi_c(t)} \left[\hat{\psi}_i(t) - \phi_c(t) \hat{\psi}_i(t_0) \right], \\ (5.43) \quad \phi_c(t) &= \begin{cases} \sigma, & \text{если } \phi \geq \sigma \\ \phi(t), & \text{если } \phi < \sigma, \end{cases} \quad \dot{\phi}(t) = -\gamma \Delta^2(t) \phi(t), \quad \phi(t_0) = 1. \end{aligned}$$

⁶ Расширить задачу идентификации без ослабления требования неисчезающего возбуждения не представляется возможным, поскольку этому требованию не удовлетворяет любой вектор, содержащий затухающий элемент.

В [70] доказана сходимость $\hat{\psi}_i^{\text{FTC}}(t)$ к ψ_i за конечное время t_e при выполнении условия

$$(5.44) \quad \int_{t_0}^{t_e} \Delta^2(\tau) d\tau \geq -\frac{1}{\gamma_i} \ln(\sigma).$$

Для пояснения механизма релаксации запишем решение уравнения (5.38):

$$(5.45) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}_i(t) &= \phi(t) \tilde{\psi}_i(t_0) \\ &\Downarrow \\ \hat{\psi}_i(t) - \phi(t) \hat{\psi}_i(t_0) &= [1 - \phi(t)] \psi_i. \end{aligned}$$

Поскольку $\phi(t)$ – невозрастающая функция времени в силу $\Delta^2(t) \geq 0$, то при выполнении условия (5.44) в момент времени t_e происходит переключение логического оператора (5.43) и значения неизвестных параметров находятся аналитически по формуле (5.45). Регрессор $1 - \phi(t)$ и функция $\hat{\psi}_i(t) - \phi(t) \hat{\psi}_i(t_0)$ в параметризации (5.45) выполняют роль $\Phi(t)$ и $Y(t)$ из параметризации (5.35) + (5.41). При выполнении условия (5.44) начиная с некоторого момента времени регрессор $1 - \phi(t)$ глобально отличен от нуля, т.е. получена и сохранена косвенная информация о всех неизвестных параметрах, а значит, они могут быть восстановлены аналитически. Таким образом, аналогом закона (5.43) в терминах параметризации (5.41) является следующий закон:

$$(5.46) \quad \hat{\psi}^{\text{FTC}}(t) = \begin{cases} \hat{\psi}(t_0), & \text{если } \det\{\Phi(t)\} < \rho \leq \det\{\alpha e^{-\sigma t_e} I_{2n}\}, \\ \Phi^{-1}(t) Y(t) & \text{иначе,} \end{cases}$$

который в силу выполнения неравенства (5.42) также позволяет найти параметры за конечное время при правильном выборе ρ . Открытой проблемой законов со сходимостью за конечное время (5.43) или (5.46) выступает высокая чувствительность к параметрам σ, γ_i, ρ , от выбора значений которых целиком зависит параметрическая сходимость (или ее отсутствие при неудачном выборе).

5.2.7. Проблема разрывов в пересчете (5.16)

Подробно рассмотрев большинство из существующих алгоритмов и процедур оценивания виртуальных состояний $\xi(t)$ канонической наблюдаемой формы (5.12) и идентификации параметров ψ_a, ψ_b числителя и знаменателя передаточной функции (5.6), вернемся к проблеме реализации наблюдателя (5.15) + (5.16) физических состояний исходной системы (2.1).

Во-первых, для получения оценок (5.15) необходимо существование формулы пересчета (5.16) параметров передаточной функции (5.6) в элементы матрицы T_I . Вообще говоря, полная наблюдаемость системы оказывается необходимым, но не достаточным условием существования такого выражения.

Пример 1. Рассмотрим полностью наблюдаемую при $\theta_2 \neq 0$ систему:

$$A = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с преобразованием (5.11) параметры числителя и знаменателя передаточной функции (5.6) заданы следующим образом:

$$(5.47) \quad \psi_a = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_4 \\ \theta_2\theta_3 - \theta_1\theta_4 \end{bmatrix}, \quad \psi_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2\theta_5 \end{bmatrix},$$

а преобразование T_I определено так:

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta_4\theta_2^{-1} & \theta_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Система алгебраических уравнений (5.47) не имеет решений, а значит, реализовать формулу (5.16) невозможно, несмотря на полную наблюдаемость системы. ■

Во-вторых, даже если формула пересчета (5.16) существует, то из экспоненциальной сходимости ошибок $\tilde{\psi}(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$ следует экспоненциальная сходимость ошибки восстановления физических состояний $\tilde{x}(t)$, если функция $f_{T_I}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ непрерывна по Липшицу.

Лемма 5. Пусть $\tilde{\psi}(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$ экспоненциально сходятся к нулю, тогда предел (2.5) существует, если для всех $a, b \in \mathbb{R}^{2n}$ найдется постоянная $\mu > 0$ такая, что:

$$(5.48) \quad \|f_{T_I}(a) - f_{T_I}(b)\| \leq \mu \|a - b\|.$$

Доказательство. Запишем уравнение для ошибки слежения:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \hat{T}_I(t) \hat{\xi}(t) - T_I \xi(t) \pm \hat{T}_I(t) \xi(t) = \hat{T}_I(t) \tilde{\xi}(t) + \tilde{T}_I(t) \xi(t) \pm T_I \tilde{\xi}(t) = \\ &= \tilde{T}_I(t) \tilde{\xi}(t) + T_I \tilde{\xi}(t) + \tilde{T}_I \xi(t), \end{aligned}$$

Используя условие (5.48), имеем оценку сверху:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \|\tilde{T}_I\| \|\tilde{\xi}(t)\| + \|T_I\| \|\tilde{\xi}(t)\| + \|\tilde{T}_I(t)\| \|\xi(t)\| \leq \\ &\leq (\|T_I\| + \mu \|\tilde{\psi}(t)\|) \|\tilde{\xi}(t)\| + \mu \|\tilde{\psi}(t)\| \|\xi(t)\|, \end{aligned}$$

откуда следует экспоненциальная сходимость ошибки $\tilde{x}(t)$ при экспоненциальной сходимости $\tilde{\psi}(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$. ■

Для математических моделей физических систем формулы пересчета (5.16) обычно содержат операцию деления, что нарушает условие (5.48) и, независимо от используемого закона идентификации параметров $\hat{\psi}(t)$, может приводить к разрывам по оценкам $\hat{T}_I(t)$, а значит, и $\hat{x}(t)$. Подтвердим этот тезис на следующих примерах.

Пример 2. Рассмотрим систему (2.1) со следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с преобразованием (5.11) параметры числителя и знаменателя передаточной функции (5.6) заданы следующим образом:

$$\psi_a = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_1^2 \end{bmatrix}, \quad \psi_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \theta_3 \end{bmatrix},$$

а преобразование T_I определено так:

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta_2 \theta_1^{-1} & \theta_1^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда формула пересчета (5.16) принимает вид

$$\hat{T}_I(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\hat{\psi}_{1a}(t)}{\sqrt{\hat{\psi}_{2a}(t)}} & \frac{1}{\sqrt{\hat{\psi}_{2a}(t)}} \end{bmatrix}.$$

Функция пересчета не удовлетворяет условию Липшица и испытывает разрыв при $\hat{\psi}_{2a}(t) = 0$. Более того, оказываются недопустимы отрицательные оценки $\hat{\psi}_{2a}(t)$. ■

Рассмотренные ранее законы идентификации параметров ψ_a, ψ_b по динамическим свойствам параметрической ошибки могут быть разделены на три группы:

- 1) не обеспечивают монотонность ошибки $\tilde{\psi}(t)$ ни по норме, ни по элементам (5.20), (5.23);
- 2) гарантируют монотонность по норме (5.21), (5.29), (5.36);
- 3) обеспечивают монотонность по элементам (5.34) + (5.38), (5.41) + (5.38), (5.34) + (5.43).

Для законов идентификации из первых двух групп гарантировать непопадание оценки $\hat{\psi}_{2a}(t)$ в недопустимую область $\hat{\psi}_{2a}(t) \leq 0$ в переходном процессе не представляется возможным даже при выборе начальных условий так, что $\hat{\psi}_{2a}(t_0) > 0$. Следовательно, закон восстановления физических состояний (5.15) + (5.16) оказывается нереализуем при использовании наблюдателей и идентификаторов (5.18) + (5.20), (5.18) + (5.21), (5.23), (5.26) + (5.29), (5.33) + (5.34) + (5.36) и (5.33) + (5.41) + (5.36).

Законы идентификации со скалярным регрессором (5.34) + (5.38), (5.41) + (5.38), (5.44) + (5.43) обеспечивают монотонность по элементам параметрической ошибки, а следовательно, в силу (5.39) и (5.40) в данном примере оказывается верно

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\psi}_2(t_0) > 0 \\ \psi_2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\psi}_2(t) > 0,$$

поскольку априорно из определения ψ_a известно $\psi_a = \psi_{2a} > 0$.

Свойство (5.40) позволяет применить идентификаторы и наблюдатели (5.33) + (5.34) + (5.38), (5.33) + (5.41) + (5.38), (5.33) + (5.34) + (5.43) для реализации наблюдателя физических состояний (5.15) + (5.16). Однако свойства (5.39) и (5.40) являются хрупкими по отношению к внешним возмущениям, а в более реалистичных практических задачах для реализации этих идентификаторов может потребоваться недоступная априорная информация. Подтвердим последний вывод на примере.

Пример 3. Рассмотрим систему (2.1) со следующими матрицами:

$$(5.49) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_1 & \theta_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с преобразованием (5.11) параметры числителя и знаменателя передаточной функции (5.6) заданы следующим образом:

$$(5.50) \quad \psi_a = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 (\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix}, \quad \psi_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 (\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix},$$

а преобразование T_I определено так:

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} & \frac{1}{\theta_1 - \theta_2} \end{bmatrix}.$$

Тогда формула пересчета (5.16) принимает вид

$$\hat{T}_I(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\hat{\psi}_{1a}^2(t)}{\hat{\psi}_{2a}(t)} & \frac{\hat{\psi}_{1a}(t)}{\hat{\psi}_{2a}(t)} \end{bmatrix},$$

откуда следует наличие разрыва в функции (5.16) при $\hat{\psi}_{2a}(t) = 0$.

Законы идентификации из первых двух групп по-прежнему не могут быть реализованы, а для реализации законов из третьей группы требуется знание знака произведения $\theta_1 (\theta_1 - \theta_2)$, поскольку верно следующее:

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\hat{\psi}_2(t_0) \right) &= \text{sign}(\psi_2) \\ &\downarrow \\ \text{sign} \left(\hat{\psi}_2(t) \right) &= \text{sign}(\psi_2), \end{aligned}$$

где $\psi_2 = \psi_{2a} = \theta_1 (\theta_1 - \theta_2)$.

В отличие от предыдущего примера в рассматриваемом случае (5.49), (5.50) информация о знаке ψ_2 из выражения (5.50) получена быть не может, а значит, без дополнительной априорной информации о параметрах системы законы идентификации из третьей группы также оказываются нереализуемыми. Значит, для системы (5.49) закон восстановления физических состояний (5.15) + (5.16) нереализуем при применении любого из существующих законов идентификации параметров передаточной функции (5.6). ■

Рассмотренные примеры 1–3 показывают, что в общем случае при параметрической неопределенности системы (2.1) с помощью наблюдателей на базе преобразования системы в каноническую наблюдаемую форму разрешима задача оценивания только виртуальных координат $\xi(t)$, бесполезных для использования в целях реализации динамических обратных связей заданного вида (2.4а) и (2.4б).

Однако в редких частных ситуациях, когда формула пересчета (5.16) существует и удовлетворяет (возможно локально) условию Липшица, данные решения, в отличие от других адаптивных и инвариантных наблюдателей, не требуют выполнения ограничительных условий согласования по выходу. Действительно, если $\psi \in \mathcal{D}_\psi$, а функция $f_{T_I}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ существует и удовлетворяет локальному условию Липшица в $\mathcal{D}_\psi$ и в силу (5.40) обеспечено $\hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi$, то с помощью наблюдателя типа (5.15) + (5.16) оказывается возможно восстановить состояния системы, не удовлетворяющей условиям согласования по выходу. Например, система из примера 2 не удовлетворяет условию согласования по выходу:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} u = A_n x + B_n u + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 - 1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 - 1 \end{bmatrix}}_{D\Phi(x,u)\Theta},$$

но, в силу свойства (5.40) при определенном выборе начальных условий оценок ее состояния могут быть восстановлены с помощью наблюдателей (5.33) + (5.34) + (5.38), (5.33) + (5.41) + (5.38), (5.33) + (5.34) + (5.43). Как показано в примере 3, для выполнения условия $\hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi$ может потребоваться недоступная информация о параметрах системы.

Таким образом, сложности, связанные с реализацией наблюдателей состояний на базе преобразования системы в каноническую наблюдаемую форму, заключаются не столько в получении алгоритмов формирования оценок $\hat{\psi}_a(t)$, $\hat{\psi}_b(t)$ и $\hat{\xi}(t)$, обеспечивающих (5.17), сколько в реализации формулы пересчета (5.16), которая может:

- не существовать даже для полностью наблюдаемых систем;
- существовать, но не удовлетворять условию Липшица (содержать операции деления, возведения в степень, взятия корня, их комбинации и т.д.).

Для преодоления проблемы разрывов в пересчете (5.16) в литературе предложено несколько различных подходов. Прежде чем перейти к их рассмотрению, разберемся с условиями существования формулы пересчета (5.16). Заметим, что в примерах 1–3 рассматривались системы с перепараметризацией, т.е. с числом неизвестных параметров большим, чем необходимо для экономного описания системы. Такой класс систем в пространстве состояний задается следующим образом:

$$(5.51) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t), \\ y(t) &= C^T x(t), x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

где $A : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^n$ – это отображения физических параметров $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ в матрицы системы, а все остальные величины определены так же, как в (2.1).

Тогда с помощью переобозначения $\psi_a := \psi_a(\theta)$, $\psi_b := \psi_b(\theta)$, $T := T(\theta)$ также учтем зависимость от неизвестных параметров θ матрицы преобразований координат и параметров канонической наблюдаемой формы (5.12), (5.13). Теперь условия существования формулы пересчета (5.16) можно сформулировать в терминах достаточных условий существования обратной функции, позволяющей пересчитать параметры канонической наблюдаемой формы $\psi_a(\theta)$, $\psi_b(\theta)$ в физические параметры:

$$(5.52) \quad \det^2 \{ \nabla_\theta \psi_{ab}(\theta) \} > 0, \\ \psi_{ab}(\theta) = \mathcal{L}_{ab} \begin{bmatrix} \psi_a(\theta) \\ \psi_b(\theta) \end{bmatrix} = \mathcal{L}_{ab} \psi(\theta),$$

где

$$\psi(\theta) = [\psi_a^\top(\theta) \quad \psi_b^\top(\theta)]^\top.$$

Если условие (5.52) выполнено, то существует обратная функция такая, что $\mathcal{F}(\psi_{ab}) = \theta$, а значит, отображение $f_{T_I} : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ из (5.16) будет задано следующим образом:

$$(5.53) \quad f_{T_I}(\hat{\psi}) = (T_I \circ \mathcal{F})(\mathcal{L}_{ab}\hat{\psi}).$$

Мотивация условия (5.52) следующая. Как ранее было показано, по сигналам входа $u(t)$ и выхода $y(t)$, при выполнении определенных условий сходимости, могут быть идентифицированы параметры канонической наблюдаемой формы. Матрица обратного преобразования координат вычисляется через физические параметры системы. Значит, рассчитать ее оказывается возможно только тогда, когда параметры канонической наблюдаемой формы могут быть пересчитаны в параметры θ . Рассматривая систему с перепараметризацией (5.51), при выполнении условий существования обратной функции можем описать существующие способы устранения разрывов в пересчете (5.16).

1) Метод проекции градиента. Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{D}_\psi := \{ \psi \in \mathbb{R}^{2n} : \overline{\psi_i} \leq \psi_i \leq \underline{\psi_i}, i = 1, \dots, 2n \},$$

где $\underline{\psi_i}$ и $\overline{\psi_i}$ – известные величины.

Предположим, что для всех $\psi \in \mathcal{D}_\psi \subset \mathbb{R}^{2n}$ верно условие (5.48). Тогда для устранения проблемы разрывов остается обеспечить выполнение импликации $\hat{\psi}(t_0) \in \mathcal{D}_\psi \Rightarrow \hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi, \forall t \geq t_0$. Этого свойства добиваются путем дополнения закона идентификации оператором проекций [54, с. 788]; [71, с. 133],

позволяющим проецировать получаемые оценки на множество $\mathcal{D}_\psi$. Например, закон идентификации (5.21), дополненный оператором проекций, примет вид:

$$(5.54) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \lambda(t) + \mu(t), \quad \lambda(t) = -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - z(t) \right), \quad \hat{\psi}(t_0) \in \mathcal{D}_\psi \\ \mu(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \hat{\psi}_i(t) \in (\underline{\psi}_i, \overline{\psi}_i), \text{ или} \\ & \text{если } \hat{\psi}_i(t) = \overline{\psi}_i \text{ и } \lambda(t) \leq 0, \text{ или} \\ & \text{если } \hat{\psi}_i(t) = \underline{\psi}_i \text{ и } \lambda(t) \geq 0, \\ -\lambda(t) & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Закон (5.54) обладает всеми свойствами, описанными в теореме 7, и дополнительно обеспечивает выполнение условия $\hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi, \forall t \geq t_0$, что при выполнении условия Липшица в $\mathcal{D}_\psi$ позволяет формировать оценку $\hat{T}_I(t)$ без разрывов. Аналогичным образом возможно дополнить оператором проекций все ранее рассмотренные законы идентификации. Использование модифицированного закона (5.54) ограничивает необходимость знания оценок сверху и снизу $\underline{\psi}_i$ и $\overline{\psi}_i$ и необходимость формулирования условий отсутствия разрывов в терминах ограничений на ψ_i . Вообще говоря, проецировать получаемые оценки можно не только на рассмотренное множество, а на любое выпуклое множество [54, с. 788], заданное следующим образом:

$$\mathcal{D}_\psi := \{ \psi \in \mathbb{R}^{2n} : g(\psi) \leq 0 \}.$$

В этом случае закон идентификации (5.54) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \begin{cases} \lambda(t), & \text{если } g(\hat{\psi}) < 0 \text{ или } g(\hat{\psi}) = 0 \text{ и } \lambda^T(t) \nabla g \leq 0, \\ \lambda(t) - \Gamma \frac{\nabla g \nabla g^T}{\nabla g^T \Gamma \nabla g} \lambda(t) & \text{иначе,} \end{cases} \\ \lambda(t) &= -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - z(t) \right), \quad \hat{\psi}(t_0) \in \mathcal{D}_\psi \end{aligned}$$

и обеспечивает $\hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi, \forall t \geq t_0$. К сожалению, в прикладных задачах множество значений $\psi(\theta)$, на которых достигаются разрывы в формуле (5.16), часто оказывается невыпуклым, что мотивировало развитие других подходов.

2) Асимптотический каскадный пересчет. Рассмотрим предложенный в [72] подход к устранению разрывов в пересчете (5.16), (5.53). Предположим, что разрывы в формуле пересчета вызваны исключительно операциями деления на функции от $\psi_{ab}(\theta)$ и θ . В этом случае отображения $\mathcal{F}(\theta)$ и $T_I(\theta)$ допускают разложение на матричный числитель и знаменатель следующим образом:

$$(5.55a) \quad \mathcal{S}(\psi_{ab}) = \mathcal{G}(\psi_{ab}) \mathcal{F}(\psi_{ab}) = \mathcal{G}(\psi_{ab}) \theta,$$

$$(5.55b) \quad \mathcal{P}(\theta) = \mathcal{Q}(\theta) \text{vec}(T_I(\theta)),$$

где $\mathcal{S} : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n_\theta}$, $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ — это известные отображения.

Теперь, подставив $\hat{\psi}_{ab}(t) = \mathcal{L}_{ab}\hat{\psi}(t)$ в (5.55а), имеем регрессионное уравнение (оценки $\hat{\psi}(t)$ здесь могут быть получены любым ранее рассмотренным алгоритмом идентификации):

$$(5.56) \quad \mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta,$$

где

$$\mathcal{Y}_\theta(t) := \mathcal{S}(\hat{\psi}_{ab}), \quad \mathcal{M}_\theta(t) := \mathcal{G}(\hat{\psi}_{ab}).$$

По уравнению (5.56) можем построить, например, следующий закон идентификации ($\gamma > 0$):

$$(5.57) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma \mathcal{M}_\theta^T(t) (\mathcal{M}_\theta(t)\hat{\theta}(t) - \mathcal{Y}_\theta(t)), \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0.$$

Теперь, имея вектор оценок $\hat{\theta}(t)$ и действуя аналогично (5.56), (5.57), можем получить искомую оценку матрицы преобразования координат:

$$(5.58) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{T}}_I(t) &= -\text{mat} \left[\gamma \mathcal{M}_{T_I}^T(t) (\mathcal{M}_{T_I}(t) \text{vec}(\hat{T}_I(t)) - \mathcal{Y}_{T_I}(t)) \right], \\ \hat{T}_I(t_0) &= \hat{T}_{I0}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{M}_{T_I}(t) := \mathcal{Q}(\hat{\theta}), \quad \mathcal{Y}_{T_I}(t) := \mathcal{P}(\hat{\theta})$$

и $\text{mat}[\cdot]$ – операция, обратная операции векторизации.

Если $\mathcal{S}(\psi_{ab})$, $\mathcal{G}(\psi_{ab})$, $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{Q}(\theta)$ не испытывают разрывов при всех $\psi_{ab} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ и $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$, что обеспечено декомпозицией (5.55а), (5.55б), то асимптотический каскадный пересчет (5.57), (5.58) обеспечивает $\hat{T}_I(t) \rightarrow T_I(\theta)$ при $\hat{\psi}(t) \rightarrow \psi(\theta)$ и использовании любого из ранее рассмотренных законов идентификации параметров $\psi(\theta)$.

К недостаткам асимптотического каскадного подхода стоит отнести, во-первых, дополнительную идентификацию промежуточных параметров θ , во-вторых, медленную скорость сходимости $\hat{T}_I(t)$ к $T_I(\theta)$ из-за необходимости сходимости сначала $\hat{\psi}(t)$ к $\psi(\theta)$, затем $\hat{\theta}(t)$ к θ и только после $\hat{T}_I(t)$ к $T_I(\theta)$, в-третьих, каскадная процедура не защищает от разрывов, например, если в одном из отображений $\mathcal{S}(\psi_{ab})$, $\mathcal{G}(\psi_{ab})$, $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{Q}(\theta)$ есть операция взятия арифметического корня. В отличие от метода проекций градиента каскадная процедура (5.57), (5.58) не требует знания оценок сверху и снизу на элементы вектора $\psi(\theta)$ или выпуклости множества $\mathcal{D}_\psi$.

3) Использование неоднородных отображений. Еще одна процедура формирования оценки $\hat{T}_I(t)$ матрицы преобразования координат без разрывов базируется на понятии и свойствах неоднородных отображений.

Определение 3. Отображение $\mathcal{F}: \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times m_{\mathcal{F}}}$ неоднородно с порядком $\ell_{\mathcal{F}} \geq 1$, если существуют $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times n_{\mathcal{F}}}$, $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega) = \bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega) \omega \in \mathbb{R}^{\Delta_{\mathcal{F}} \times n_x}$ и отображение $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}: \mathbb{R}^{\Delta_{\mathcal{F}}} \mapsto \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times m_{\mathcal{F}}}$ такие, что для любых $\omega \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^{n_x}$

разрешимо функциональное уравнение

$$(5.59a) \quad \Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{F}(x) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\Xi_{\mathcal{F}}(\omega) x),$$

так что

$$(5.59b) \quad \begin{aligned} \det \{ \Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \} &\geq \omega^{\ell_{\mathcal{F}}}(t), \\ \Xi_{\mathcal{F}ij}(\omega) &= c_{ij} \omega^{\ell_{ij}}, \quad \bar{\Xi}_{\mathcal{F}ij}(\omega) = c_{ij} \omega^{\ell_{ij}-1}, \\ c_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad \ell_{ij} \geq 1. \end{aligned}$$

Пример 4. Отображение $\mathcal{F}(\theta) = \text{col}\{\theta_1\theta_2 + \theta_1, \theta_1\}$ с $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \text{diag}\{\omega^2, \omega\}$, $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega) = \text{diag}\{\omega, \omega\}$ неоднородно с порядком $\ell_{\mathcal{F}} = 3$. Поэтому основное свойство $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)\theta = \bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\omega(t)\theta$ из определения 3 позволяет с помощью измеряемой функции $\mathcal{Y}_{\theta}(t) = \omega(t)\theta$ параметризовать линейное регрессионное уравнение относительно $\mathcal{F}(\theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{F}(\theta) &= \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{Y}_{\theta}), \\ \begin{bmatrix} \omega^2(t) & 0 \\ 0 & \omega(t) \end{bmatrix} \mathcal{F}(\theta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{1\theta}(t) \mathcal{Y}_{2\theta}(t) + \mathcal{Y}_{1\theta}(t) \\ \mathcal{Y}_{1\theta}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Частным случаем условий неоднородности отображения являются условия однородности, поскольку для однородных отображений в терминах уравнения (5.59a) верно

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{F}(x) &= \mathcal{F}(\Xi_{\mathcal{F}}(\omega) x), \\ \Xi_{\mathcal{F}}(\omega) &= \omega^{\ell} I_{n_x}, \quad \ell_{ij} = \ell, \end{aligned}$$

т.е. в этом случае произведение $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{F}(x)$ может быть вычислено по самой функции $\mathcal{F}(x)$ умножением аргумента на $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)$.

В [73] была показана разрешимость функционального уравнения (5.59a) для одной достаточно общей алгебраической функции, включающей все многочлены и мономы, а также некоторые из иррациональных функций.

Утверждение 1. Пусть $n_{\mathcal{F}} = m_{\mathcal{F}} = 1$, тогда $\mathcal{F}(x) = \sum_j a_j \prod_{i=1}^{n_x} x_i^{k_{ji}}$, $k_{ji} \geq 0$ неоднородно в смысле (5.59a), (5.59b).

Доказательство утверждения приведено в [73].

Покажем, как свойства неоднородных отображений могут быть использованы для получения оценки $\hat{T}_I(t)$. Напомним, что с помощью процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (5.38) для измерения доступны сигналы $\mathcal{Y}(t)$ и $\Delta(t)$, связанные уравнением

$$\mathcal{Y}(t) = \Delta(t) \psi(\theta).$$

Тогда, умножив $\mathcal{Y}(t)$ на $\mathcal{L}_{ab}$, также имеем уравнение:

$$\mathcal{Y}_{ab}(t) = \Delta(t) \psi_{ab}(\theta),$$

где $\mathcal{Y}_{ab}(t) := \mathcal{L}_{ab} \mathcal{Y}(t)$.

Предположим, что отображения $\mathcal{S}(\psi_{ab})$, $\mathcal{G}(\psi_{ab})$ в (5.55a) неоднородны в смысле определения 3. Тогда, умножив (5.55a) слева и справа на $\Pi(\Delta)$ и используя свойства (5.59б), имеем:

$$(5.60) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\Xi_{\mathcal{S}}(\Delta)\psi_{ab}) &= \mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\Xi_{\mathcal{G}}(\Delta)\psi_{ab})\theta, \\ &\downarrow \\ \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{S}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) &= \mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\theta, \end{aligned}$$

где сигналы $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{S}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})$, $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})$ измеряемы, так как $\mathcal{Y}_{ab}(t)$ и $\Delta(t)$ измеряемы, а отображения $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\cdot)$, $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\cdot)$, $\bar{\Xi}_{\mathcal{S}}(\cdot)$, $\bar{\Xi}_{\mathcal{G}}(\cdot)$ известны.

Умножив уравнение (5.60) на $\text{adj}\{\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}$, имеем регрессионное уравнение со скалярным регрессором:

$$(5.61) \quad \mathcal{Y}_{\theta}(t) = \mathcal{M}_{\theta}(t)\theta,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\theta}(t) &:= \text{adj}\{\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{S}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}), \\ \mathcal{M}_{\theta}(t) &:= \det\{\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}. \end{aligned}$$

Предполагая неоднородность $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{Q}(\theta)$, с учетом свойства (5.59б), действуя аналогично (5.60), (5.61), получаем

$$(5.62) \quad \mathcal{Y}_{T_I}(t) = \mathcal{M}_{T_I}(t)\text{vec}(T_I(\theta)),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{T_I}(t) &:= \text{adj}\{\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_{\theta})\mathcal{Y}_{\theta})\}\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_{\theta})\mathcal{Y}_{\theta}), \\ \mathcal{M}_{T_I}(t) &:= \det\{\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_{\theta})\mathcal{Y}_{\theta})\}. \end{aligned}$$

По уравнению (5.62) можно построить следующий алгоритм идентификации:

$$(5.63) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{T}}_I(t) &= -\text{mat}\left[\gamma\mathcal{M}_{T_I}(t)\left(\mathcal{M}_{T_I}(t)\text{vec}(\hat{T}_I(t)) - \mathcal{Y}_{T_I}(t)\right)\right], \\ \hat{T}_I(t_0) &= \hat{T}_{I0}. \end{aligned}$$

В отличие от метода проекции градиента подход, основанный на неоднородных отображениях, не требует выпуклости множества $\mathcal{D}_{\psi}$ или знания какой-либо априорной информации относительно неизвестных параметров $\psi(\theta)$. В отличие от каскадного пересчета (5.57), (5.56) осуществляется идентификация только обратной матрицы преобразования координат без идентификации θ , что позволяет добиваться более быстрой скорости сходимости.

В сравнении с робастными наблюдателями адаптивные наблюдатели *i)* не требуют заданной параметризации (3.5) или (3.6) априорной информации о параметрах системы, *ii)* для достижения цели (2.5) вместо ограничительного условия $u \in L_2$ или равенства $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$ требуют только ограниченности управления и состояний (об ослаблении этого условия см. дискуссию в разделе 6.1.). По сравнению с инвариантными наблюдателями адаптивные не требуют выполнения ограничительных расширенных и стандартных условий согласования параметрической неопределенности с измеряемым выходом и поэтому применимы для более широкого класса систем.

Открытыми проблемами адаптивных наблюдателей являются *i)* выполнение цели (2.5) только при удовлетворении условия конечного возбуждения $\varphi \in FE$, т.е. необходимого и достаточного условия идентифицируемости неизвестных параметров [74], *ii)* применимость решений только к системам с постоянными параметрами (для сравнения, все рассмотренные ранее как робастные, так и инвариантные наблюдатели, не предполагают постоянства неизвестных параметров системы). Заметим, что адаптивные наблюдатели, в которых изменение параметров описывается линейным динамическим генератором с известными параметрами и неизвестными начальными условиями [75], не позволяют преодолеть вторую проблему: на практике изменения параметров системы обычно таким моделям не соответствуют.

6. Несколько слов об управлении по оценкам состояний

Сравнивая робастные, инвариантные и адаптивные наблюдатели, может сложиться впечатление, что только робастные наблюдатели не требуют априорной ограниченности $u(t)$ и $x(t)$ (см. допущение 1) и позволяют использовать формируемые оценки $\hat{x}(t)$ для целей управления по обратной связи. Действительно, в большинстве работ по адаптивным и инвариантным наблюдателям задача оценивания состояний рассматривается в отрыве от задачи управления. В качестве исключений отметим работу [72], посвященную синтезу адаптивного управления на основе адаптивного наблюдателя. Естественным образом, у пытливого читателя здесь не могут не возникнуть следующие вопросы. Для удовлетворения допущения 1 стабилизирующий регулятор уже синтезирован? Как он синтезирован, если параметры объекта неизвестны, а координаты вектора состояния неизмеряемы?

С одной стороны, стабилизирующий регулятор может быть синтезирован по выходу системы с применением, например, техник робастного управления. В этой ситуации, как и отмечалось в замечании 1, наблюдатель состояний предназначается не для формирования управления, а для целей диагностики отказов, мониторинга и регистрации неизмеряемых переменных технологических процессов, построения цифровых двойников и т.д. С другой стороны, следуя принципу “адаптивной разделимости” задачи оценивания и управления в линейных системах можно рассматривать независимо друг от друга.

Остановимся на последнем тезисе подробнее на примере адаптивного наблюдателя, состоящего из уравнений (5.15), (5.18) при $v(t) = 0$, т.е.

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{T}_I(t) \hat{\xi}(t), \\ \dot{\hat{\xi}}(t) &= A_0 \hat{\xi}(t) + \hat{\psi}_a(t) y(t) + \hat{\psi}_b(t) u(t) + L \left(C_0^T \hat{\xi}(t) - y(t) \right). \end{aligned}$$

Для простоты и без потери общности будем считать, что управление формируется робастным законом (2.4a). Законы идентификации параметров $\psi_{ab}(\theta)$ и $T_I(\theta)$ определим выражениями (5.38) + (5.41) и (5.63), т.е.

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\gamma \left(\Delta(t) \hat{\psi}(t) - \mathcal{Y}(t) \right) = -\gamma \Delta(t) \tilde{\psi}(t), \\ \dot{\hat{T}}_I(t) &= \dot{\tilde{T}}_I(t) = -\text{mat} \left[\gamma_{T_I} \mathcal{M}_{T_I}(t) \left(\mathcal{M}_{T_I}(t) \text{vec} \left(\hat{T}_I(t) \right) - \mathcal{Y}_{T_I}(t) \right) \right] = \\ &= -\text{mat} \left[\gamma_{T_I} \mathcal{M}_{T_I}^2(t) \text{vec} \left(\tilde{T}_I(t) \right) \right]. \end{aligned}$$

При выполнении условия $\varphi \in \text{FE}$ независимо от ограниченности $x(t)$ и $u(t)$ совершенно нетрудно показать (5.42) существование для всех $t \geq t_e$ оценок снизу:

$$|\Delta(t)| \geq \Delta_{LB} > 0, \quad |\mathcal{M}_{T_I}(t)| \geq \underline{\mathcal{M}}_{T_I} > 0,$$

а значит, ошибки $\tilde{\psi}(t)$ и $\tilde{T}_I(t)$ экспоненциально сходятся к нулю с показателями, назначаемыми параметрами $\gamma > 0$ и $\gamma_{T_I} > 0$, т.е.

$$(6.3) \quad \left\| \tilde{\psi}(t) \right\| = e^{-\gamma \Delta_{LB}(t-t_e)} \left\| \tilde{\psi}(t_e) \right\|, \quad \left\| \tilde{T}_I(t) \right\| = e^{-\gamma_{T_I} \underline{\mathcal{M}}_{T_I}^2(t-t_e)} \left\| \tilde{T}_I(t_e) \right\|.$$

Дифференциальные уравнения для $x(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$ можем записать в следующем виде:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A - BK_r \left(I + \tilde{T}_I(t) T(\theta) \right) & -BK_r \left(\tilde{T}_I(t) + T_I(\theta) \right) \\ \tilde{\psi}_a(t) C^T - \tilde{\psi}_b(t) K_r \left(I + \tilde{T}_I(t) T(\theta) \right) & A_m - \tilde{\psi}_b(t) K_r \left(\tilde{T}_I(t) + T_I(\theta) \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A - BK_r & -BK_r T_I(\theta) \\ 0 & A_m \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(t) &= \begin{bmatrix} -BK_r \left(\tilde{T}_I(t) T(\theta) \right) & -BK_r \left(\tilde{T}_I(t) \right) \\ \tilde{\psi}_a(t) C^T - \tilde{\psi}_b(t) K_r \left(I + \tilde{T}_I(t) T(\theta) \right) & -\tilde{\psi}_b(t) K_r \left(\tilde{T}_I(t) + T_I(\theta) \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В силу оценок (6.3) имеем $\|\mathcal{B}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, тогда, если с помощью техник робастного управления удалось рассчитать K_r так, что матрица $A - BK_r$ гурвицева, то по лемме 9.5 из [76] получаем глобальную экспоненциальную сходимость состояний $x(t)$ и ошибок оценивания $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{x}(t)$ к нулю. При использовании адаптивной обратной связи (2.46) ситуация аналогична, только в схему управления добавляется закон идентификации параметров K (например, модального регулятора (2.3)), а матрица $\mathcal{B}(t)$ теперь дополнительно зависит и от ошибки $\tilde{K}(t) = \hat{K}(t) - K$. Таким образом, рассмотренные в обзоре адаптивные наблюдатели, доставляющие выполнение цели (2.5), при $\varphi \in \text{FE}$ могут быть в полной мере обоснованно использованы для построения управления в форме (2.4а) или (2.4б).

7. Выводы по обзору

Основываясь на вышеизложенном, можно сделать следующие заключительные выводы относительно условий применимости существующих наблюдателей состояний линейных динамических систем на базе методов робастного, инвариантного и адаптивного управления:

- робастные наблюдатели состояний требуют возможности параметризации неопределенности системы в виде (3.5) или (3.6). Это, в свою очередь, требует знания границ области вариаций параметров системы. При этом такие алгоритмы обеспечивают достижение цели, если $u \in L_2$ или $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$ и параметр K_r рассчитывается совместно с параметрами наблюдателя. В общем случае $u \in L_\infty$ робастные наблюдатели обеспечивают принадлежность ошибки оценивания некоторому доступному для минимизации инвариантному эллипсоиду;

- инвариантные наблюдатели состояний решают задачу восстановления состояний при произвольной параметрической неопределенности, но при этом требуют выполнения строгих структурных ограничений – стандартных или расширенных условий согласования по выходу. Как показывает анализ, часть из этих условий для случая систем со скалярным выходом даже потенциально ослаблена быть не может (в частности, требование превышения размерности измеряемого выхода над размерностью возмущения). Поэтому область практического использования инвариантных наблюдателей состояний ограничена классом систем, для которых обозначенные строгие структурные ограничения выполняются;

- адаптивные наблюдатели состояний могут быть разделены на две группы. Методы из первой группы (см. раздел 5.1) позволяют восстанавливать состояния систем с СПВ передаточной функцией от параметрического возмущения к измеряемому выходу, что эквивалентно ограничительным условиям согласования по выходу, необходимым для применения инвариантных наблюдателей. Алгоритмы из второй группы (см. раздел 5.2) позволяют восстанавливать состояния линейных систем с полностью неизвестными параметрами при удовлетворении следующих требований: i) необходимого и достаточно-

го условия идентифицируемости [74] параметров канонической наблюдаемой формы $\psi(\theta)$, т.е. $\varphi \in \text{FE}$, *ii*) достаточного условия (5.52) существования обратной функции $\mathcal{F}(\psi_{ab})$, позволяющей пересчитать параметры $\psi(\theta)$ в физические параметры θ , *iii*) возможности устранения проблемы разрывов с помощью одной из рассмотренных в разделе 5.2.7 техник.

В целом, исследования по разработке новых методов синтеза наблюдателей состояний линейных динамических систем продолжают в рамках всех трех рассмотренных разделов теории управления, а их направление во многом определяется существующими проблемами, упомянутыми в данном обзоре, в частности в подразделах 3.3, 4.4, 5.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pacas M.* Sensorless drives in industrial applications // IEEE Industrial Electronics Magazine. 2011. V. 5. No. 2. P. 16–23.
2. *Luenberger D.* Observing the state of a linear system // IEEE Transactions on Military Electronics. 1964. V. 8. No. 2. P. 74–80.
3. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Journal of Basic Engineering. 1961. V. 83. P. 95–108.
4. *Bernard P., Andrieu V., Astolfi D.* Observer design for continuous-time dynamical systems // Annual Reviews in Control. 2022. V. 53. P. 224–248.
5. *Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1 // АИТ. 2020. № 9. С. 3–61.
Andrievsky B., Furtat I. Disturbance Observers: Methods and Applications. I // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1563–1610.
6. *O'Reilly J.* Observers for linear systems. Academic press, 1983. 252 p.
7. *Shtessel Y., Edwards C., Fridman L., Levant A.* Sliding mode control and observation. N.Y.: Springer New York, 2011. 369 p.
8. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
9. *Gao H., Li X.* Robust filtering for uncertain systems. Cham, Switzerland: Springer, 2014. 253 p.
10. *Lewis F.L., Xie L., Popa D.* Optimal and robust estimation: with an introduction to stochastic control theory. CRC press, 2017. 547 p.
11. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006. 272 с.
12. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable adaptive systems. N.Y.: Courier Corp., 2012. 509 p.
13. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления: учеб. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
14. *Bhattacharyya S.P., Souza E.De.* Pole assignment via Sylvester's equation // Systems & Control Letters. 1982. V. 1. No. 4. P. 261–263.
15. *Dudarenko N.A., Slita O.V., Ushakov A.V.* Algebraic conditions of generalized modal control // IFAC Proc. Volumes. 2012. V. 45. No. 13. P. 150–155.

16. *Petersen I.R.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Systems & Control Letters. 1987. V. 8. No. 4. P. 351–357.
17. *Geromel J.C., Peres P.L.D., Bernussou J.* On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 1991. V. 29. No. 2. P. 381–402.
18. *Fu M., de Souza C.E., Xie L.* $\mathcal{H}_\infty$ estimation for uncertain systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1992. V. 2. No. 2. P. 87–105.
19. *Xie L., de Souza C.E.* On robust filtering for linear systems with parameter uncertainty // Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control. 1995. V. 2. P. 2087–2092.
20. *Geromel J.C., De Oliveira M.C.* $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust filtering for convex bounded uncertain systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. V. 46. No. 1. P. 100–107.
21. *Jin S.H., Park J.B.* Robust $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ filtering for polytopic uncertain systems via convex optimisation // IEEE Proceedings-Control Theory and Applications. 2001. V. 148. No. 1. P. 55–59.
22. *Duan Z., Zhang J., Zhang C., Mosca E.* Robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ filtering for uncertain linear systems // Automatica. 2006. V. 42. No. 11. P. 1919–1926.
23. *Lacerda M.J., Oliveira R.C.L.F., Peres P.L.D.* Robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices // Signal Processing. 2011. V. 91. No. 5. P. 1115–1122.
24. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems & Control Letters. 1987. V. 8. No. 4. P. 351–357.
25. *Хлебников М.В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2009. No. 1. P. 147–161.
Khlebnikov M.V. Robust filtering under nonrandom disturbances: The invariant ellipsoid approach // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 133–146.
26. *Petersen I.R.* A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems // 1985 American Control Conference. 1985. P. 772–777.
27. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
28. *Lien C.H., Yu K.W.* LMI optimization approach on robustness and $\mathcal{H}_\infty$ control analysis for observer-based control of uncertain systems // Chaos, Solitons & Fractals. 2008. V. 36. No. 3. P. 617–627.
29. *Perruquetti W., Barbot J.P.* Sliding mode control in engineering. N.Y.: Marcel Dekker, 2002. 407 p.
30. *Alwi H., Edwards C., Tan C.P.* Fault detection and fault-tolerant control using sliding modes. London: Springer, 2011. 340 p.
31. *Utkin V., Poznyak A., Orlov Y., Polyakov A.* Road map for sliding mode control design. N.Y.: Springer International Publishing, 2020. 134 p.
32. *Yang F., Wilde R.W.* Observers for linear systems with unknown inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1988. V. 33. No. 7. P. 677–681.
33. *Darouach M., Zasadzinski M., Xu S.J.* Full-order observers for linear systems with unknown inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. V. 39. No. 3. P. 606–609.

34. *Dimassi H., Loria A., Belghith S.* Continuously-implemented sliding mode adaptive unknown-input observers under noisy measurements // *Systems & Control Letters*. 2012. V. 61. No. 12. P. 1194–1202.
35. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 367 с.
36. *Slotine J.J.E., Hedrick J.K., Misawa E.A.* On sliding observers for nonlinear systems // *Journal of Dynamics, Systems, Measurement, and Control*. 1987. V. 109. P. 245–252.
37. *Edwards C., Spurgeon S.K.* On the development of discontinuous observers // *International Journal of Control*. 1994. V. 59. No. 5. P. 1211–1229.
38. *Edwards C., Spurgeon S.K., Patton R.J.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. No. 4. P. 541–553.
39. *Edwards C., Tan C.P.* A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction // *European Journal of Control*. 2006. V. 12. No. 3. P. 245–260.
40. *Darouach M., Zasadzinski M., Boutat-Baddas L.* Discussion on “A comparison of sliding mode and unknown input observer for fault reconstruction” // *European Journal of Control*. 2006. V. 12. No. 3. P. 261–266.
41. *Floquet T., Edwards C., Spurgeon S.K.* On sliding mode observers for systems with unknown inputs // *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2007. V. 21. No. 8–9. P. 638–656.
42. *Isidori A.* Lectures in feedback design for multivariable systems. Basel, Switzerland: Springer International Publishing. 2017. 414 p.
43. *Kalsi K., Lian J., Hui S., Zak S.H.* Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: A high-gain approach // *Automatica*. 2010. V. 46. No. 2. P. 347–353.
44. *Zhu F.* State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers // *Journal of Process Control*. 2012. V. 22. No. 1. P. 296–302.
45. *Floquet T., Barbot J.-P.* A canonical form for the design of unknown input sliding mode observers // *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*. 2006. V. 334. P. 271–292.
46. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // *Проблемы управления*. 2015. № 5. С. 27–36.
47. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // *АиТ*. 2014. № 2. С. 106–128.
48. *Cho Y.M., Rajamani R.* A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1997. V. 42. No. 4. P. 534–537.
49. *Cecilia A., Costa-Castello R.* Addressing the relative degree restriction in nonlinear adaptive observers: A high-gain observer approach // *Journal of the Franklin Institute*. 2022. V. 359. No. 8. P. 3857–3882.
50. *Antsaklis P.J., Michel A.N.* Linear systems. N.Y.: McGraw-Hill, 1997. 672 p.
51. *Carroll R., Lindorff D.* An adaptive observer for single-input single-output linear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1973. V. 18. No. 5. P. 428–435.
52. *Luders G., Narendra K.S.* An adaptive observer and identifier for a linear system // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1973. V. 18. No. 5. P. 496–499.

53. *Narendra K.S., Kudva P.* Stable adaptive schemes for system identification and control-Part I // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1974. V. 6. P. 542–551.
54. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust adaptive control. N.Y.: McGraw-Hill, 1996. 834 p.
55. *Zhang Q.* Revisiting different adaptive observers through a unified formulation // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. 2005. P. 3067–3072.
56. *Kreisselmeier G.* Adaptive observers with exponential rate of convergence // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
57. *Прокопов Б.И.* О построении адаптивных наблюдателей // *АиТ*. 1981. Т. 22. № 5. С. 95–100.
58. *Bobtsov A., Pyrkin A., Vedyakov A., Vediakova A., Aranovskiy S.* A Modification of Generalized Parameter-Based Adaptive Observer for Linear Systems with Relaxed Excitation Conditions // *IFAC PapersOnLine*. 2022. V. 55. No. 12. P. 324–329.
59. *Efimov D., Fradkov A.* Design of impulsive adaptive observers for improvement of persistency of excitation // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2015. V. 29. No. 6. P. 765–782.
60. *Gerasimov D.N., Nikiforov V.O.* On key properties of the Lion's and Kreisselmeier's adaptation algorithms // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2022. V. 36. No. 6. P. 1285–1304.
61. *Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A.* On Preserving Excitation Properties of Kreisselmeier's Regressor Extension Scheme // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023. V. 68. No. 2. P. 1296–1302.
62. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.
63. *Baev S., Shkolnikov I., Shtessel Y., Poznyak A.* Parameter identification of non-linear system using traditional and high order sliding modes // *American Control Conference*. 2006. P. 1–6.
64. *Boyd S., Sastry S.S.* Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control // *Automatica*. 1986. V. 22. No. 6. P. 629–639.
65. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // *Annual Reviews in Control*. 2020. V. 50. P. 278–293.
66. *Pan Y., Shi T., Ortega R.* Comparative Analysis of Parameter Convergence for Several Least-Squares Estimation Schemes // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2024. V. 69. No. 5. P. 3341–3348.
67. *Pan Y., Shi T.* Adaptive Estimation and Control With Online Data Memory: A Historical Perspective // *IEEE Control Systems Letters*. 2024. V. 8. P. 267–278.
68. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Regression Filtration with Resetting to Provide Exponential Convergence of MRAC for Plants with Jump Change of Unknown Parameters // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023. V. 68. No. 8. P. 5127–5134.
69. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Unknown piecewise constant parameters identification with exponential rate of convergence // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2022. V. 37. No. 1. P. 315–346.

70. *Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A.A., et al.* New Results on Parameter Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing: Continuous and Discrete-Time Cases // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. V. 66. No. 5. P. 2265–2272.
71. *Tao G.* Adaptive control design and analysis. John Wiley & Sons, 2003. 637 p.
72. *Kreisselmeier G.* Adaptive control via adaptive observation and asymptotic feedback matrix synthesis // IEEE Transactions on Automatic Control. 1980. V. 25. No. 4. P. 717–722.
73. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Exponentially Stable Adaptive Observation for Systems Parameterized by Unknown Physical Parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2024. V. 69. No. 8. P. 5635–5642.
74. *Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J.G., Yi B.* Identifiability implies robust, globally exponentially convergent on-line parameter estimation // International Journal of Control. 2024. V. 97. No. 9. P. 1967–1983.
75. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A.* An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations // Automatica. 2023. V. 147. P. 110677.
76. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2009. 832 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 07.09.2024

После доработки 11.07.2025

Принята к публикации 15.07.2025

© 2026 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru),
Д.В. ШАТОВ, канд. техн. наук (dvshatov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

НАСТРОЙКА НЕХРУПКИХ ПИ-РЕГУЛЯТОРОВ: АНАЛИЗ¹

Статья посвящена анализу хрупкости ПИ-регуляторов. Для оценки хрупкости предзаданного ПИ-регулятора предлагаются два различных подхода, которые могут использоваться независимо друг от друга. Первый основан на идеях эллипсоидального оценивания и технике линейных матричных неравенств. Во втором подходе, опирающемся на так называемое *размыкание по параметру*, исследуемый параметр «выносятся» из системы объект-регулятор, формируя фиктивный контур управления, который после размыкания анализируется классическими частотными методами (критерий Найквиста, *D*-разбиение). Описаны особенности обоих методов анализа хрупкости, приведены численные примеры.

Ключевые слова: линейная система управления, ПИ-регулятор, хрупкость, линейные матричные неравенства, неравенство Ляпунова, критерий Найквиста, *D*-разбиение.

DOI: 10.7868/S2413977726020028

1. Введение

ПИД- и ПИ-регуляторы являются наиболее распространенными типами автоматических регуляторов; по различным оценкам (см., например, [1, 2]) к ним относится более 90% используемых в настоящее время регуляторов, и согласно прогнозам на среднесрочный период эта доля по-прежнему останется исключительно большой, около 80%. Столь обширное применение ПИД- и ПИ-регуляторов в промышленности обусловлено рядом обстоятельств. Помимо пригодности для решения большинства практических задач, невысокой стоимости, их востребованность связана с простотой: для настройки ПИ-регулятора необходимо правильно выбрать всего два коэффициента.

Вместе с тем сами процедуры их практической настройки во многом остаются эвристичными: в реальных установках ПИД- и ПИ-регуляторы часто настраиваются вручную исходя из интуитивного понимания технологического процесса и влияния на него отдельных составляющих ПИД-управления. Соответственно, проблема разработки регулярных подходов к их настройке по-прежнему сохраняет свою содержательность и актуальность.

¹ Результаты исследований, представленные в разделах 3 и 5, получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-20062), <https://rscf.ru/project/25-29-20062/>

Общий тренд последних десятилетий – это переход к численным методам синтеза ПИ- и ПИД-регуляторов (и их модификаций, называемых регуляторами низкого порядка) на основе решения задач оптимизации, когда выбирается некоторый качественный показатель, по которому осуществляется оптимизация: LQR-подход [3, 4], оптимизация по H_∞ -критерию [5, 6] и другие [7, 8].

В практических задачах в систему управления неизбежно привносится неопределенность, обусловленная неточностью технической реализации самого регулятора или необходимостью настройки его параметров в процессе эксплуатации. При этом оптимальный (в том или ином отношении) регулятор может оказаться «хрупким» в том смысле, что малые вариации его параметров могут привести к значительному снижению качества регулирования или даже к потере устойчивости замкнутой системы. Как следствие, задача построения нехрупких регуляторов, восходящая к работе [9], и, в частности, ПИ-/ПИД-регуляторов, обладает очевидной практической значимостью.

В настоящей работе ставится задача оценки нехрупкости *предзаданных* (или *номинальных*) ПИ-регуляторов и предлагаются два подхода к ее решению.

Первый подход использует для решения этой задачи специальным образом сформированное неравенство Ляпунова, выполнение которого означает существование общей квадратичной функции Ляпунова у множества возмущений параметров предзаданного ПИ-регулятора, лежащего в некотором эллипсе. Подход гарантирует устойчивость при любых (в том числе одновременных и нестационарных) возмущениях параметров, а также позволяет получить эллипсоидальные оценки выходного сигнала системы при действии ограниченных внешних возмущений. В качестве технического средства задействован аппарат линейных матричных неравенств [10, 11].

Второй подход основан на так называемом *размыкании по параметру* [12], используемому для решения задач робастного анализа. Суть метода заключается в представлении замкнутой системы объект-регулятор в специальном виде, когда исследуемый параметр «выносится» из нее, формируя *фиктивный контур управления*. Далее этот контур исследуется с помощью классического метода анализа устойчивости – критерия Найквиста [13]. Подход позволяет проанализировать статические возмущения по каждому из параметров ПИ-регулятора (т.е. найти множество интервалов устойчивости по отдельным параметрам).

Предложенные подходы основаны на различных идеях и могут применяться как независимо, так и совместно, дополняя друг друга. Например, если для объекта заранее не известен стабилизирующий ПИ-регулятор, то пользуясь вторым подходом, можно «нащупать» область стабилизирующих регуляторов, внутри которой естественно воспользоваться первым подходом.

Статья организована следующим образом: раздел 2 посвящен формальной постановке задачи, разделы 3 и 4 содержат основные результаты, раздел 5 – примеры.

В статье используются следующие обозначения: $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, T – символ транспонирования, I – единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ – собственные значения матрицы A , $\sigma(A) \doteq -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ – степень устойчивости гурвицевой матрицы A , а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц; s – символ преобразования Лапласа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= c^T x, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, измеряемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$(2) \quad \|w(t)\| \leq 1 \quad \text{при всех } t \geq 0,$$

и управлением $u(t) \in \mathbb{R}$ в виде ПИ-регулятора

$$(3) \quad u(t) = -k_1 y(t) - k_2 \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Коэффициенты k_1 и k_2 будем называть *параметрами* ПИ-регулятора (а иногда отождествлять с самим регулятором) и объединять в вектор

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Следуя [14] и введя в рассмотрение вспомогательную скалярную переменную ξ следующим образом:

$$\dot{\xi} = y, \quad \xi(0) = 0,$$

приходим к уравнениям замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{g} &= A_{cl}(k)g + D_{cl}w = \begin{pmatrix} A - k_1 bc^T & -k_2 b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, & g(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z &= C_{cl}g = (C \ 0)g, \end{aligned}$$

относительно расширенного вектора состояния

$$g = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Пусть из каких-либо соображений выбраны числовые параметры

$$k = k^0 = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{pmatrix}$$

предзаданного (номинального) ПИ-регулятора (3), стабилизирующего замкнутую систему (1). Далее представляет интерес

Задача 1. В каких пределах могут быть варьированы параметры номинального ПИ-регулятора с параметрами k^0 так, чтобы замкнутая им система (1) сохраняла устойчивость?

Эта задача является частным случаем следующей задачи.

Задача 2. Найти множество стабилизирующих ПИ-регуляторов для системы (1), т.е. построить множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ такое, что

$$\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_{\text{cl}}(k)) < 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}.$$

Точное решение задачи 2 дает использование метода D -разбиения [15], позволяющего аналитически построить границу $\partial\mathcal{K}$ множества $\mathcal{K}$. Однако для практического решения аналогичной задачи для ПИД-регулятора, включающего уже три параметра, D -разбиение не столь удобно.

В следующих разделах предлагаются два подхода к приближенному решению задачи 1, которые предоставляют простые внутренние оценки искомого множества. А именно, в разделе 3 задача исследуется с позиций квадратичной устойчивости и предлагается простой и эффективный подход, дающий эллипсоидальные оценки множества $\mathcal{K}$, а также строится нехрупкий ограничивающий эллипсоид. Второй подход, описанный в разделе 4, позволяет строить множество $\mathcal{K}$ в виде интервалов устойчивости по каждому из параметров ПИ-регулятора в отдельности, описано применение данного подхода в качестве граничного оракула.

3. Анализ хрупкости ПИ-регулятора на основе эллипсоидального оценивания

3.1. Оценка радиуса нехрупкости ПИ-регулятора

Введем обозначения

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} c^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$A_{\text{cl}}(k) = A_0 + Fk^T H.$$

Придавая параметрам (3) стабилизирующего ПИ-регулятора k^0 возмущения

$$k_1^0 + \delta_1, \quad k_2^0 + \delta_2,$$

получаем вектор $k^0 + \delta$ возмущенных параметров регулятора. При этом полагаем, что возмущения принадлежат некоторому эллипсу

$$(4) \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(R) = \{\delta \in \mathbb{R}^2: \delta^T R^{-1} \delta \leq 1\}, \quad R \succ 0.$$

Зададимся задачей отыскания наибольшего (по некоторому критерию) эллипса (4) такого, что система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором с параметрами k^0 , сохраняет устойчивость при всех возмущениях

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \in \text{int} \mathcal{E}(R)$$

его параметров. В частности, важен вопрос нахождения наибольшего *радиуса нехрупкости* $\rho(k)$ – такого, что система (1) сохраняет устойчивость при всех возмущениях $\delta: \|\delta\| < \rho$ параметров заданного ПИ-регулятора.

Рассмотрим матрицу так называемой *возмущенной* системы – замкнутой регулятором с «возмущенными» параметрами:

$$(5) \quad A_{\text{cl}}(k^0 + \delta) = A_0 + F(k^0 + \delta)^T H = A_{\text{cl}}(k^0) + F\delta^T H.$$

Как хорошо известно (см., например, [11]), выполнение неравенства Ляпунова

$$(A_{\text{cl}}(k^0) + F\delta^T H)^T Q + Q(A_{\text{cl}}(k^0) + F\delta^T H) \prec 0$$

с некоторой матрицей $0 \prec Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ при всех *допустимых* неопределенностях δ означает, что у семейства (5) есть общая квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x^T Q x$, а само семейство робастно квадратично устойчиво.

Перепишем последнее неравенство в виде

$$A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^T \delta F^T Q + QF\delta^T H \prec 0$$

или

$$A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^T R^{1/2} \bar{\delta} F^T Q + QF\bar{\delta}^T R^{1/2} H \prec 0$$

относительно неопределенности $\bar{\delta} \doteq R^{-1/2} \delta$, $\|\bar{\delta}\| \leq 1$, и воспользуемся леммой Питерсена [16].

В результате приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + \varepsilon H^T R H & QF \\ F^T Q & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0$$

относительно скалярной переменной ε и матричных переменных $Q, R \succ 0$. Заметив, что полученное ЛМН однородно по совокупности переменных, положим $\varepsilon = 1$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Разрешимость ЛМН

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^T R H & QF \\ F^T Q & -I \end{pmatrix} \prec 0$$

относительно матричных переменных $0 \prec Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ и $0 \prec R \in \mathbb{S}^2$ эквивалентна квадратичной устойчивости семейства $A_{\text{cl}}(k^0 + \delta)$ при всех допустимых неопределенностях δ .

Теперь несложно предложить простые внутренние оценки области допустимости неопределенности δ , минимизируя тот или иной критерий при ЛМН-ограничении, установленном в лемме 1.

Как известно (см. подробнее [11]), объем эллипсоида вида

$$(6) \quad \mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

равен $c_n \sqrt{\det P}$, где c_n – объем единичного шара в n -мерном пространстве, при этом функция $f(X) = -\log \det X$ матричного аргумента $X \succ 0$ является выпуклой. Соответственно, максимизация объема (в рассматриваемом двумерном случае – площади) эллипса производится следующим образом.

Лемма 2. Пусть $\hat{R}_{\text{area}}$ – решение задачи

$$\min(-\log \det R)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^T R H & QF \\ F^T Q & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad Q \succ 0, \quad R \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ и $R \in \mathbb{S}^2$. Тогда система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором (3) с параметрами k^0 , сохраняет устойчивость при всех возмущениях $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ его параметров таких, что

$$\delta^T \hat{R}_{\text{area}}^{-1} \delta < 1.$$

Оптимизировать эллипс неопределенностей можно и по другим критериям, например максимизируя радиус содержащегося в нем круга (в то же время это позволяет найти максимальный размах неопределенности δ). Как известно, условие вида

$$P \succcurlyeq \gamma I$$

означает, что эллипсоид вида (6) содержит шар радиуса $\sqrt{\delta}$ с центром в начале координат (см. подробнее [11, Замечание 2.2.3]). Это приводит к следующему утверждению.

Лемма 3. Пусть $\hat{\gamma}$, $\hat{R}_{\text{axis}}$ – решение задачи

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^T R H & QF \\ F^T Q & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad R \succ \gamma I, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$, $R \in \mathbb{S}^2$ и скалярной переменной γ . Тогда система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором (3) с параметрами k^0 , сохраняет устойчивость при всех возмущениях $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ его параметров таких, что

$$\delta^T \hat{R}_{\text{axis}}^{-1} \delta < 1,$$

и, в частности, таких что

$$\|\delta\| < \sqrt{\hat{\gamma}}.$$

Таким образом, радиус нехрупкости $\rho(k^0)$ заданного ПИ-регулятора с параметрами k^0 определяется величиной $\sqrt{\hat{\gamma}}$.

Замечание 1. Последнее утверждение леммы 3 можно получить проще: достаточно положить $R = rI$, что приводит к следующему утверждению. Пусть $\hat{r}$ – решение задачи

$$\max r \text{ при ограничениях } \begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + rH^T H & QF \\ F^T Q & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ и скалярной переменной r . Тогда система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором (3) с параметрами k^0 , сохраняет устойчивость при всех возмущениях $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ его параметров таких, что

$$\|\delta\| < \sqrt{\hat{r}}.$$

3.2. Нехрупкий ограничивающий эллипсоид

Теперь естественно задаться оцениванием влияния неопределенностей в параметрах регулятора на критерий качества в той или иной задаче управления, ассоциированной с системой (1). В настоящей работе рассмотрим классическую задачу подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений (2). Один из эффективных подходов к ее решению предполагает нахождение минимального ограничивающего эллипсоида, содержащего регулируемый выход системы (1) (см. подробнее [11]).

В рамках задачи анализа по-прежнему предполагаем предзаданным стабилизирующий ПИ-регулятор (3) с параметрами k^0 . Задача состоит в нахождении минимального эллипсоида, который будет ограничивающим по выходу z при всех возмущениях δ параметров этого регулятора таких, что $\|\delta\| \leq \gamma < \rho$. Будем его называть *нехрупким ограничивающим эллипсоидом*, соответствующим уровню нехрупкости γ .

Согласно [11] минимальный (по так называемому критерию следа – путем минимизации суммы квадратов длин его полуосей) ограничивающий эллипсоид для регулируемого выхода системы (1), замкнутой ПИ-регулятором с параметрами k^0 , задается матрицей $C_{cl}\tilde{P}C_{cl}^T$, где $\tilde{P}$ – решение параметризованной задачи полуопределенного программирования

$$\min \operatorname{tr} C_{cl} P C_{cl}^T$$

при ограничении

$$A_{cl}(k^0)P + P A_{cl}^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{cl} D_{cl}^T \preceq 0,$$

а оптимизация проводится по матричной переменной $0 \prec P \in \mathbb{S}^{n+1}$ и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Воспользовавшись этим результатом и перейдя к матрице (5) возмущенной системы, имеем условие

$$(A_{cl}(k^0) + F\delta^T H)P + P(A_{cl}(k^0) + F\delta^T H)^T + \alpha(\delta)P + \frac{1}{\alpha(\delta)} D_{cl} D_{cl}^T \preceq 0,$$

которое должно выполняться при всех δ : $\|\delta\| \leq \gamma$. Предположим, что существует число α такое, что полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях δ . Представим его в виде

$$A_{cl}(k^0)P + P A_{cl}^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{cl} D_{cl}^T + P H^T \delta F^T + F \delta^T H P \preceq 0$$

и воспользуемся леммой Питерсена [16], учитывая уровень нехрупкости γ путем соответствующего масштабирования матрицы F . В результате приходим к соотношению

$$A(k^0)P + P A^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{cl} D_{cl}^T + \varepsilon \gamma^2 F F^T + \frac{1}{\varepsilon} P H^T H P \preceq 0$$

или эквивалентно

$$\begin{pmatrix} A_{cl}(k^0)P + P A_{cl}^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{cl} D_{cl}^T + \varepsilon \gamma^2 F F^T & P H^T \\ H P & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

которое должно выполняться при некотором скалярном $\varepsilon > 0$. Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть $\hat{P}$ – решение задачи

$$\min \operatorname{tr} C_{\text{cl}} P C_{\text{cl}}^T$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}(k^0)P + P A_{\text{cl}}^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{\text{cl}} D_{\text{cl}}^T + \varepsilon \gamma^2 F F^T & P H^T \\ H P & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P \in \mathbb{S}^{n+1}$, скалярной переменной ε и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Тогда эллипсоид с матрицей $C_{\text{cl}} \hat{P} C_{\text{cl}}^T$ является нехрупким ограничивающим эллипсоидом для выхода z системы (1) при $x_0 = 0$, замкнутой стабилизирующим ПИ-регулятором (3) с параметрами k^0 , соответствующим допустимому уровню нехрупкости γ .

Замечание 2. В рамках обсуждаемого подхода несложно учесть и случай ненулевого начального условия. При этом к ограничениям теоремы добавляется ЛМН

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succ 0,$$

означающее, что точка x_0 принадлежит инвариантному эллипсоиду с матрицей P , см. подробнее [11].

4. Анализ хрупкости ПИ-регулятора методом размыкания по параметру

4.1. Идея подхода

В данном разделе описан подход к анализу хрупкости ПИ-регулятора в частотной области на основе так называемого *размыкания по параметру* [12]. Этот подход позволяет найти следующую оценку множества $\mathcal{K}$ из задачи 2: для известного стабилизирующего регулятора с параметрами k^0 при одном фиксированном параметре $k_i^0 = \text{const}$, $i = 1, 2$, определяется интервал (или объединение интервалов) устойчивости по второму параметру k_j , $j = 1, 2$, $i \neq j$.

Объект управления (1) при записи в форме «вход–выход» имеет вид

$$(7) \quad a(s)y = b(s)u,$$

где $b(s)$ и $a(s)$ – полиномы числителя и знаменателя передаточной функции объекта $b(s)/a(s) = c^T(sI - A)^{-1}b$.

Преобразуем по Лапласу уравнение ПИ-регулятора (3):

$$(8) \quad u = -\frac{k_1 s + k_2}{s} y.$$

Это дает передаточную функцию разомкнутой системы (с учетом замыкания отрицательной обратной связью в критерии Найквиста)

$$w_o(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \frac{k_1 s + k_2}{s},$$

которой соответствует характеристический полином замкнутой системы

$$D(s) = a(s)s + b(s)(k_1 s + k_2).$$

Критерий Найквиста [13] позволяет по годографу амплитудно-фазовой частотной характеристики $w_o(j\omega)$ проанализировать устойчивость полинома $D(s)$. При этом мерой робастности системы управления в классической теории автоматического управления являются запасы устойчивости по фазе и модулю (частотные «отрезковые» критерии устойчивости в [13]).

Эти же классические инструменты анализа устойчивости и робастности используются при размыкании по параметру [12]. Продемонстрируем использование этого метода для анализа хрупкости номинального стабилизирующего ПИ-регулятора k^0 по параметру k_1 .

Введем обозначения:

$$\tilde{u} \doteq -k_1^0 \tilde{y}, \quad \tilde{y} \doteq y,$$

где $\tilde{u}$ и $\tilde{y}$ – фиктивные управление и выход объекта соответственно; тогда уравнения объекта (7) можно представить как

$$\begin{aligned} a(s)y = b(s)\left(\tilde{u} - \frac{k_2^0}{s}y\right) &\Rightarrow \left(a(s) + \frac{k_2^0 b(s)}{s}\right)\tilde{y} = b(s)\tilde{u} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{y} = \frac{sb(s)}{sa(s) + k_2^0 b(s)}\tilde{u} &\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{w}_1(s)\tilde{u}. \end{aligned}$$

Получаем фиктивный контур управления, состоящий из передаточной функции $\tilde{w}_1(s)$ фиктивного объекта управления, замкнутого статическим регулятором $-k_1^0$. Выполнив аналогичное размыкание по параметру k_2 (обозначив $\tilde{u} = -k_2^0 \tilde{y}$), получим следующую передаточную функцию фиктивного объекта управления:

$$\tilde{w}_2(s) = \frac{b(s)}{s(a(s) + k_1^0 b(s))}.$$

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 4. Характеристические полиномы, полученные при замыкании передаточных функций разомкнутых фиктивных контуров, совпадают с характеристическим полиномом $D(s)$ исходной замкнутой системы (7), (8).

Действительно, указанные разомкнутые передаточные функции записываются как

$$(9) \quad \tilde{w}_{oi}(s) = k_i^0 \tilde{w}_i(s), \quad i = 1, 2,$$

что дает при замыкании $D(s)$ и где знак обратной связи в критерии Найквиста учитывается аналогично $w_o(s)$. Это означает, что по (9) можно судить об устойчивости системы (7), (8).

Отметим еще один важный факт: обе передаточные функции (9) содержат параметры ПИ-регулятора в качестве сомножителей. Тогда поиск интервалов устойчивости замкнутой системы по параметрам k_i , $i = 1, 2$, сводится к исследованию точек пересечения вещественной оси соответствующими годографами Найквиста $\text{Im}\{\tilde{w}_{oi}(j\omega)\} = 0$, $i = 1, 2$. В [15] показано, что такой подход эквивалентен одномерному D -разбиению полинома $D(s) = \tilde{a}_i(s) + k_i \tilde{b}_i(s)$, где $\tilde{b}_i(s)$ и $\tilde{a}_i(s)$ – числитель и знаменатель соответствующей передаточной функции $\tilde{w}_{oi}(s)$.

4.2. Процедура анализа хрупкости

На примере параметра k_1 опишем процедуру поиска интервалов устойчивости по $\tilde{w}_{o1}(s)$ при условии, что все корни $b(s)$ ненулевые, а среди корней $\tilde{a}(s)$ нет нулевых или чисто мнимых.

1. Годограф $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$ начинается и заканчивается в точке $(0, j0)$ при изменении ω от 0 до ∞ , т. е. он образует замкнутый контур. Решим полиномиальное уравнение $\text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j\omega)\} = 0$, $\omega \in [0, \infty)$, и обозначим его решения через ω_i , $i = 1, \dots, r$.

Вычислим значения $g_i = \text{Re}\{\tilde{w}_{o1}(j\omega_i)\}$, $i = 1, \dots, r$, и каждому g_i поставим в соответствие показатель $f_i \in \{0, \pm 1/2, \pm 1\}$, $i = 1, \dots, r$, определяемый по следующему правилу [13, с. 141]:

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i - \epsilon))\} < 0 \text{ и } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} > 0; \\ 1/2, & \text{если } \tilde{w}_{o1}(\omega_i) - \text{начало годографа и } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} > 0; \\ 0, & \text{если } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i - \epsilon))\} \cdot \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ -1/2, & \text{если } \tilde{w}_{o1}(\omega_i) - \text{начало годографа и } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} < 0; \\ -1, & \text{если } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i - \epsilon))\} > 0 \text{ и } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} < 0, \end{cases}$$

где $\epsilon > 0$ – достаточно малое число, для которого выполняется

$$\epsilon \ll \min_i |\omega_i - \omega_{i-1}|, \quad i = 2, 3, \dots, r.$$

2. По критерию устойчивости Найквиста [13] для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, число охватов частотной характеристикой $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$ против часовой стрелки критической точки $-1/k_1$ должно равняться $s_{\tilde{a}}/2$, где $s_{\tilde{a}}$ – число неустойчивых корней полинома $\tilde{a}(s)$, для устойчивой $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$ имеем $s_{\tilde{a}} = 0$, следовательно, для устойчивости в замкнутом виде ее частотная характеристика не должна охватывать критическую точку.

Число охватов критической точки может меняться только в точках вещественной оси g_i , $i = 1, \dots, r$. Охват по часовой стрелке происходит при $f_i > 0$, а против – при $f_i < 0$; при $f_i = 0$ число охватов не меняется.

Отсортируем значения g_i , $i = 1, \dots, r$, по возрастанию и изменим соответствующим образом индексацию g_i и f_i .

3. Рассмотрим сначала случай, когда $g_i < 0$, $i = 1, \dots, r - 1$, и $g_r = 0$.

Разобьем вещественную ось на открытые интервалы

$$(-\infty, g_1), (g_1, g_2), \dots, (g_{r-1}, g_r), (g_r, \infty).$$

Для первого интервала $(-\infty, g_1)$ число охватов частотной характеристикой критической точки равно нулю, и замкнутая система будет устойчива только, если $\tilde{w}_1(s)$ устойчива, при этом имеем следующие границы изменений параметра k_1 :

$$k_1^{[-\infty]} \in \left[0, -\frac{k_1^0}{g_1}\right).$$

Левая граница включена в интервал, так как разомкнутая система (7) устойчива.

Для остальных интервалов, начиная со второго, будем проверять выполнение равенства

$$(10) \quad \sum_{i=1}^q f_i = -\frac{s_{\bar{a}}}{2}, \quad q = 1, \dots, r - 1,$$

где q – индекс левой границы рассматриваемого интервала (g_q, g_{q+1}) .

Для всех интервалов, где выполняется (10), замкнутая система устойчива, тогда для конкретного q -го интервала имеем следующие границы изменений параметра k_1 :

$$k_1^{[-q]} \in \left(-\frac{k_1^0}{g_q}, -\frac{k_1^0}{g_{q+1}}\right).$$

Полная область устойчивости представляет собой объединение всех интервалов устойчивости $\bigcup k_1^{[-q]}$.

4. В общем случае g_i , $i = 1, \dots, r$, могут быть разных знаков или равняться нулю.

Для всех $g_i < 0$ выполняем действия из п. 3. При $g_i = 0$ устойчивость замкнутой системы определяется по передаточной функции разомкнутой системы (9).

Для оставшихся $g_i > 0$ выполняем следующий прием: меняем знаки одновременно у $g_i > 0$ и соответствующих им f_i , что соответствует смене знака обратной связи в замкнутой системе, и далее выполняем действия из п. 3 с той разницей, что для q -го интервала устойчивости его границы вычисляются как

$$k_1^{[+q]} \in \left(\frac{k_1^0}{g_q}, \frac{k_1^0}{g_{q+1}}\right),$$

при этом для интервала (g_r, ∞) соответствующий интервал устойчивости обозначим как

$$k_1^{[+\infty]} \in \left(\frac{k_1^0}{g_r}, 0 \right).$$

Полная область устойчивости определяется так же, как в п. 3.

Отметим, что если одновременно имеется устойчивость в интервалах $k_1^{[-\infty]}$ и $k_1^{[+\infty]}$, то их можно объединить в один общий интервал $k_1^{[\infty]}$. Однако для точек g_i , которым соответствуют $f_i = 0$ (число охватов не меняется!), при устойчивых интервалах $k_1^{[-(i-1)]}$ и $k_1^{[-i]}$ такое объединение проводить нельзя.

Замечание 3. При исследовании передаточной функции $\tilde{w}_{oi}$ общего вида, содержащей нулевые или чисто мнимые полюсы, описанная выше процедура сохраняется, однако усложняется учет числа охватов (см. исследование передаточной функции $\tilde{w}_{o2}$, имеющей один нулевой полюс, в примере 2).

Развитый подход дает полное описание интервалов устойчивости, даже если регулятор k^0 не является стабилизирующим. В этом случае подход также позволяет обнаружить интервалы устойчивости (при их наличии) по одному параметру регулятора при фиксированном втором.

4.3. Процедура анализа хрупкости как граничный оракул

Предложенная в предыдущем разделе процедура анализа хрупкости может эффективно использоваться в качестве *граничного оракула* для приближенного описания области стабилизирующих ПИ- (а также и ПИД-) регуляторов. Оно основывается на модификации известного в англоязычной литературе под названием *Hit-and-Run* [15, 17] варианта метода Монте-Карло, позволяющего эффективно генерировать точки, равномерно распределенные внутри некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, которая в общем случае не предполагается ни выпуклой, ни связной.

Идея метода Hit-and-Run состоит в последовательном выполнении трех следующих шагов:

- 1) через текущую точку $x_i \in \mathcal{D}$ в случайном направлении $d \in \mathbb{R}^m$ проводится прямая $x_i + \tau d$, $\tau \in (-\infty, \infty)$;
- 2) с помощью так называемого граничного оракула находятся точки пересечения этой прямой с границей области $\mathcal{D}$;
- 3) следующая точка x_{i+1} выбирается на полученном отрезке (в многосвязном случае – отрезках) случайным образом, после чего процесс повторяется.

Результаты раздела 4.2 позволяют реализовать граничный оракул, представляя точки пересечения границы области $\mathcal{K}$ стабилизирующих ПИ-регуляторов с прямой $k + \tau d$, где k – некоторый стабилизирующий ПИ-регулятор, а $d \in \mathbb{R}^2$ – одно из двух направлений

$$\tilde{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

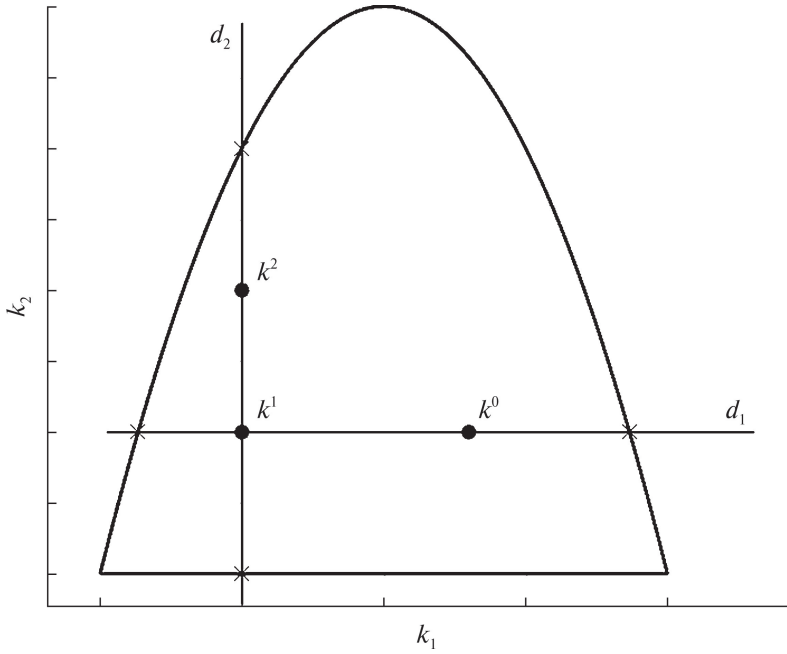


Рис. 1. Общая схема покоординатной версии метода Hit-and-Run.

совпадающих с направлениями координатных осей плоскости (k_1, k_2) . Соответственно, в предлагаемой – покоординатной – модификации метода Hit-and-Run в текущей точке k^i направление $d^i \in \mathbb{R}^2$ выбирается не случайным образом, а как

$$d^i = \begin{cases} \tilde{d}_1, & \text{если } i \bmod 2 = 1; \\ \tilde{d}_2, & \text{если } i \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

т.е. направления $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ выбираются поочередно.

На рис. 1 в плоскости параметров (k_1, k_2) показаны первые две итерации метода Hit-and-Run в предложенной модификации. Поскольку размерность области $\mathcal{K}$ стабилизирующих ПИ-регуляторов равна двум (для ПИД-регулятора – трем), это упрощение не является излишне ограничительным; рассматриваемые ниже примеры подтверждают эффективность соответствующей процедуры.

5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим линеаризованную модель объекта первого порядка с запаздыванием, широко распространенную на практике [18]:

$$(11) \quad \frac{\kappa}{Ts + 1} e^{-\tau s} \rightarrow \frac{\kappa(-\tau s/2 + 1)}{(Ts + 1)(\tau s/2 + 1)},$$

где κ – коэффициент усиления, T – постоянная времени, τ – запаздывание.

В пространстве состояний модель описывается системой вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(12) \quad a_1 = \frac{2T + \tau}{T\tau}, \quad a_2 = \frac{2}{T\tau}, \quad b_1 = -\frac{\kappa}{T}, \quad b_2 = \frac{2\kappa}{T\tau}.$$

Приняв в качестве параметров исходной модели

$$(13) \quad \kappa = 2,7, \quad T = 8,4, \quad \tau = 1,6,$$

имеем

$$A = \begin{pmatrix} -1,3690 & 1 \\ -0,1488 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -0,3214 \\ 0,4018 \end{pmatrix}.$$

Зададимся стабилизирующим регулятором с параметрами [19]

$$k^0 = \begin{pmatrix} 0,832 \\ 0,120 \end{pmatrix}.$$

Леммы 2 и 3 дают эллипсы допустимых возмущений с матрицами

$$\hat{R}_{\text{area}} = \begin{pmatrix} 0,6343 & 0 \\ 0 & 0,0135 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{R}_{\text{axis}} = \begin{pmatrix} 0,1021 & 0 \\ 0 & 0,0144 \end{pmatrix}$$

соответственно; при этом радиус нехрупкости $\rho(k^0) = 0,12$.

На рис. 2 жирными линиями показано множество $\mathcal{K}$ стабилизирующих ПИ-регуляторов, найденное с помощью D -разбиения (см. подробнее [15]), а также эллипсы допустимых возмущений: точечной линией показан эллипс $\mathcal{E}_{\text{area}}$, полученный путем максимизации его площади, пунктирной линией – эллипс $\mathcal{E}_{\text{axis}}$, полученный путем максимизации длины его наименьшей полуоси, а тонкой сплошной линией – круг с радиусом нехрупкости $\rho(k^0)$. Точкой показан ПИ-регулятор с параметрами k^0 .

Выберем в качестве регулируемого выхода все состояние системы: $z = x$, т.е. $C = I$ и положим $D = b$. Минимальный ограничивающий эллипс для системы, замкнутой ПИ-регулятором с параметрами k^0 , определяется матрицей

$$C_{\text{cl}} \tilde{P} C_{\text{cl}}^T = \begin{pmatrix} 3,5473 & 3,5892 \\ 3,5892 & 6,2562 \end{pmatrix}.$$

Теперь зададимся уровнем нехрупкости $\gamma = 0,02$. Теорема 1 дает матрицу

$$C_{\text{cl}} \hat{P} C_{\text{cl}}^T = \begin{pmatrix} 5,0026 & 5,0881 \\ 5,0881 & 9,0666 \end{pmatrix}$$

нехрупкого ограничивающего эллипса, соответствующего заданному уровню нехрупкости.

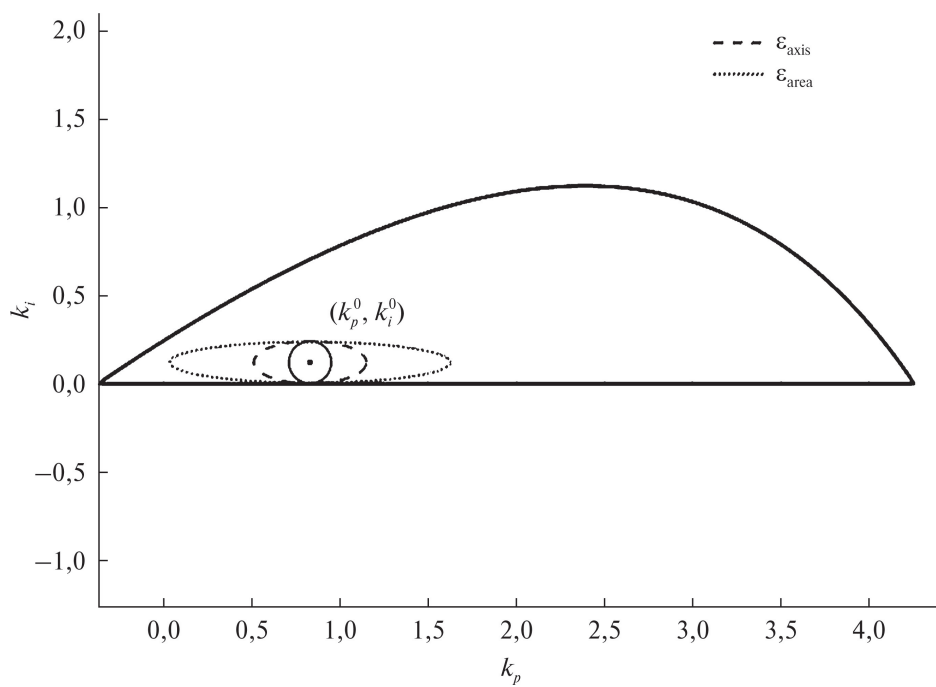


Рис. 2. Эллипсы допустимых возмущений.

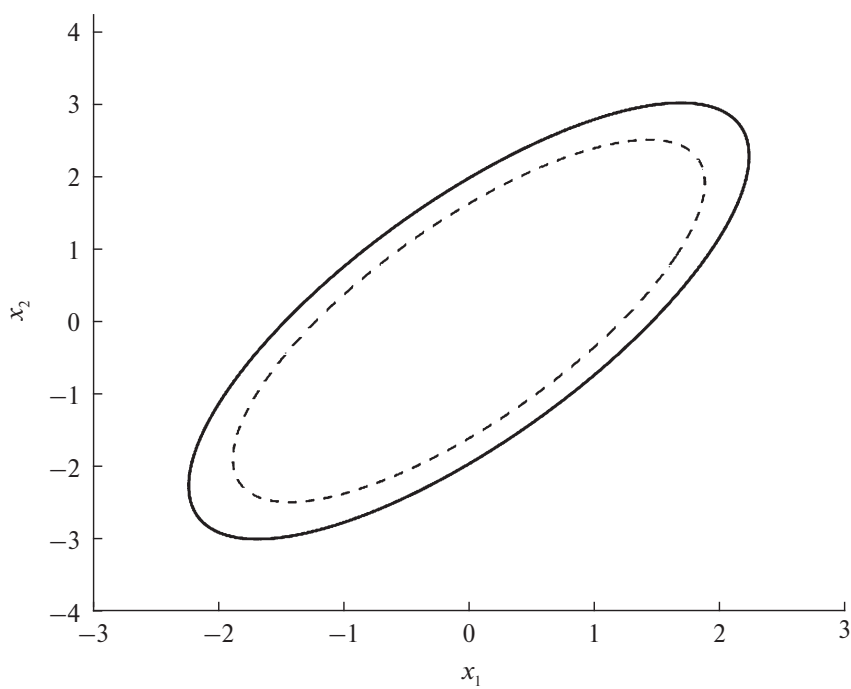


Рис. 3. Нехрупкий ограничивающий эллипс.

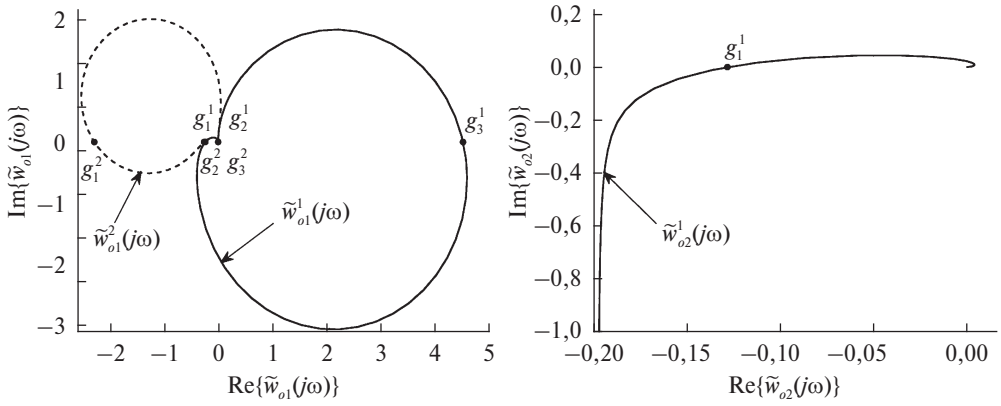


Рис. 4. Частотная характеристика разомкнутой системы: слева – $\tilde{w}_{o1}^i(j\omega)$, $i = 1, 2$, справа – $\tilde{w}_{o2}^1(j\omega)$.

На рис. 3 пунктиром показан минимальный ограничивающий эллипс, построенный без учета требования нехрупкости, а сплошной линией – найденный нехрупкий ограничивающий эллипс; по критерию следа он превышает минимальный примерно на 40%.

Здесь и далее численное моделирование выполнялось в среде МАТЛАВ с использованием программного пакета *svx* [20].

Пример 2. Вернемся к объекту из примера 1. Передаточная функция (11), записанная в форме (7), имеет вид

$$(s^2 + a_1s + a_2)y = (b_1s + b_2)u$$

или, с учетом (12)–(13),

$$(s^2 + 1,369s + 0,149)y = (-0,321s + 0,402)u.$$

Исследуем описанной в разделе 4 процедурой хрупкость двух стабилизирующих ПИ-регуляторов с параметрами

$$k^1 = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \quad k^2 = \begin{pmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Начнем с параметра k_1 . В соответствующих передаточных функциях (9) верхним индексом укажем параметр какого из ПИ-регуляторов k^1 или k^2 исследуется (аналогичные обозначения будем использовать и для всех параметров процедуры анализа хрупкости), что дает

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{o1}^1(s) &= \frac{-0,321s^2 + 0,402s}{s^3 + 1,369s^2 + 0,117s + 0,0402}, \\ \tilde{w}_{o1}^2(s) &= \frac{-0,321s^2 + 0,402s}{s^3 + 1,369s^2 - 0,012s + 0,201}. \end{aligned}$$

Их частотные характеристики показаны на рис. 4 слева: сплошной линией показана $\tilde{w}_{o1}^1(j\omega)$, а пунктирной – $\tilde{w}_{o1}^2(j\omega)$.

Полиномиальные уравнения $\text{Im}\{\tilde{w}_{o1}^i(j\omega)\} = 0$, $i = 1, 2$, имеют решения:

$$\begin{aligned}\omega_1^1 &= 0, & \omega_2^1 &= 0,1670, & \omega_3^1 &= 1,3417; \\ \omega_1^2 &= 0, & \omega_2^2 &= 0,4043, & \omega_3^2 &= 1,2393,\end{aligned}$$

что дает соответствующие пары значений g_i^j и f_i^j , $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$ (отсортированные по возрастанию g_i^j):

$$\begin{aligned}\{g_1^1 = -0,2387, f_1^1 = 1\}, & \quad \{g_2^1 = 0, f_2^1 = 1/2\}, & \quad \{g_3^1 = 4,5263, f_3^1 = -1\}; \\ \{g_1^2 = -2,2907, f_1^2 = -1\}, & \quad \{g_2^2 = -0,2596, f_2^2 = 1\}, & \quad \{g_3^2 = 0, f_3^2 = 1/2\},\end{aligned}$$

которые изображены на рис. 4 слева: значения g_i^1 – над вещественной осью, а g_i^2 – под ней.

Сначала рассмотрим $\tilde{w}_{o1}^2(j\omega)$, так как для нее расположение точек g_i^2 , $i = 1, 2, 3$, совпадает с предположением из п. 3 процедуры анализа хрупкости. Передаточная функция $\tilde{w}_{o1}^2(s)$ имеет пару неустойчивых комплексно-сопряженных полюсов, следовательно, для нее $s_a^2 = 1$, а условие (10) выполняется только для $q = 1$ на интервале (g_1^2, g_2^2) , что дает следующий интервал изменений:

$$k_1^{[-1]} \in (0,4366, 3,8523).$$

Передаточная функция $\tilde{w}_{o1}^1(s)$ устойчивая ($s_a^1 = 0$), но g_i^1 , $i = 1, 2, 3$, имеют разные знаки и необходимо пользоваться п. 4 процедуры анализа хрупкости ПИ-регулятора. Анализ g_i^1 показывает, что устойчивыми являются $k_1^{[-\infty]}$ и $k_1^{[+\infty]}$, которые можно объединить, окончательно получив

$$k_1^{[\infty]} \in (-0,2209, 4,1898).$$

При исследовании параметра k_2 можно выбрать любой из регуляторов k_1^1 и k_1^2 , так как $k_1^1 = k_1^2 = 1$. Будем использовать k_1^1 , соответствующая передаточная функция (9) имеет вид

$$\tilde{w}_{o2}^1(s) = \frac{-0,0321s + 0,0402}{s(s^2 + 1,048s + 0,551)},$$

которая является нейтральной: имеет один нулевой полюс при остальных устойчивых ($s_a^1 = 0$).

Частотная характеристика $\tilde{w}_{o2}^1(j\omega)$ изображена на рис. 4 справа. Полиномиальное уравнение $\text{Im}\{\tilde{w}_{o2}^1(j\omega)\} = 0$ имеет решение $\omega_1 = 0,547$, которое дает пару

$$\{g_1^2 = -0,128, f_1^2 = 1\}.$$

Устойчивость имеет место на интервале $(-\infty, g_1^2)$ или в пересчете в параметр k_2

$$k_2^{[-\infty]} \in (0, 0,781),$$

где нуль не включен в левую границу, так как $\tilde{w}_{o2}^1(s)$ не является асимптотически устойчивой.

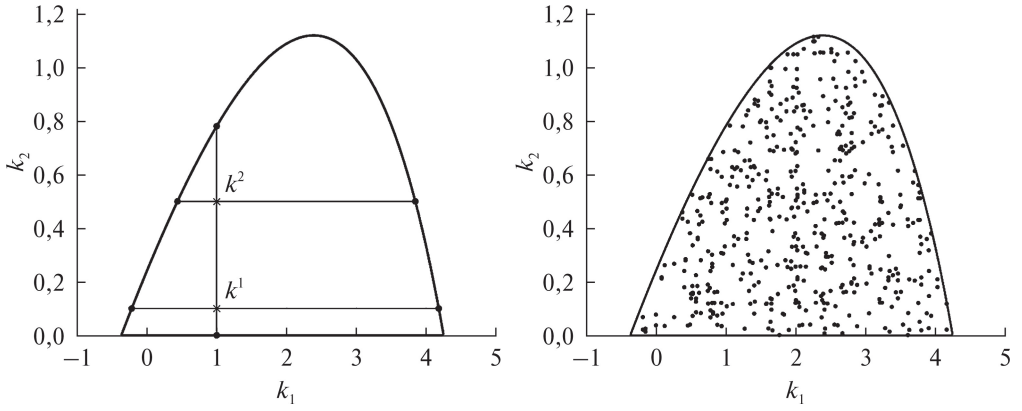


Рис. 5. Сравнение с D -разбиением: слева – анализ хрупкости k^1 и k^2 ; справа – реализация метода Hit-and-Run.

На рис. 5 слева в плоскости параметров (k_1, k_2) жирными линиями показано множество стабилизирующих ПИ-регуляторов, найденное с помощью D -разбиения [15], крестиками отмечены регуляторы с параметрами k^1 и k^2 , а тонкими линиями – найденные интервалы устойчивости для каждого рассмотренного параметра.

На рис. 5 справа показаны результаты работы покоординатной версии метода Hit-and-Run (см. раздел 4.3). В качестве стартовой точки был выбран ПИ-регулятор с параметрами $k^2 = (1, 0,5)^T$ и сгенерировано 500 точек.

Пример 3. Рассмотрим объект (7) вида

$$(s^3 + s^2 + s + 1)y = (s^2 + 2s + 5)u,$$

который управляется ПИ-регулятором с параметрами $k = (2, 0,01)^T$.

Проведем анализ хрупкости по параметру $k_1 = 2$ с помощью процедуры из раздела 4. Передаточная функция (9) запишется как

$$\tilde{w}_{o1}(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 10s}{s^4 + s^3 + 1,01s^2 + 1,02s + 0,05};$$

она имеет одну пару неустойчивых комплексно-сопряженных полюсов и для нее $s_{\tilde{a}} = 1$. Частотная характеристика $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$ показана на рис. 6.

Полиномиальное уравнение $\text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j\omega)\} = 0$ имеет решение

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,3045, \quad \omega_3 = 0,944, \quad \omega_4 = 1,7396,$$

что дает соответствующие пары значений g_i и f_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \{g_1 = -1,9679, f_1 = -1\}, \quad \{g_2 = 0, f_2 = 1/2\}, \\ \{g_3 = 10,5841, f_3 = -1\}, \quad \{g_4 = 63,8024, f_4 = 1\}, \end{aligned}$$

которые показаны на рис. 6.

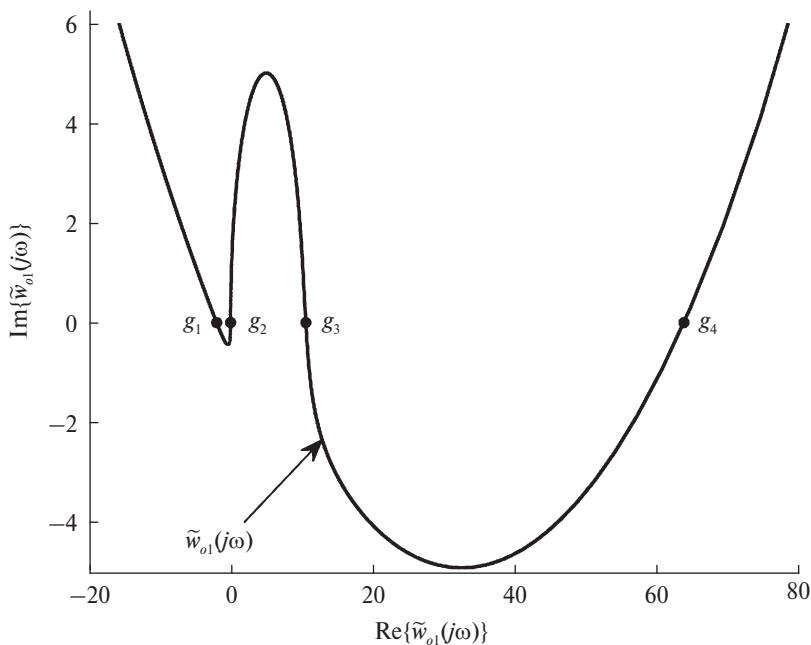


Рис. 6. Частотная характеристика разомкнутой системы $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$.

Условие (10) выполняется на интервалах (g_1, g_2) и (g_3, g_4) , поэтому при $k_2 = 0,01$ замкнутая система будет устойчивой на интервалах

$$\bigcup_q k_1^{[q]}, \quad q \in \{-1, +3\},$$

где

$$k_1^{[-1]} \in (1,0163, \infty), \quad k_1^{[+3]} \in (-0,189, -0,0313).$$

6. Заключение

В статье предлагаются два подхода к анализу хрупкости ПИ-регуляторов. Первый из них, основанный на технике линейных матричных неравенств, позволяет для номинального стабилизирующего ПИ-регулятора эффективно строить эллипсоидальные оценки допустимых неопределенностей параметров ПИ-регулятора, при которых система остается квадратично устойчивой. Также предложен метод построения нехрупкого ограничивающего эллипсоида.

Второй подход, использующий критерий Найквиста, предоставляет интервалы статических изменений по каждому из параметров ПИ-регулятора, при которых сохраняется устойчивость замкнутой системы. Описано использование данного подхода в качестве граничного оракула в версии метода Hit-and-Run.

Оба подхода просты в реализации и используют стандартные функции большинства современных программных средств, предназначенных для инженеров.

Естественным дальнейшим развитием является распространение полученных результатов на анализ хрупкости ПИД-регуляторов, а также применение предложенных подходов для решения задач синтеза нехрупких ПИ- и ПИД-регуляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Г., Паленов М.В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2014. № 2. С. 16–30.
Alexandrov A.G., Palenov M.V. Adaptive PID controllers: State of the art and development prospects // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 2. P. 188–199.
2. The IFAC Newsletter. No. 2. April, 2019. URL
https://www.ifac-control.org/newsletter_archive/IFAC_Newsletter_2019_2_April.pdf
3. He J.-B., Wang Q.-G., Lee T.-H. PI/PID controller tuning via LQR approach // *Chemical Engineering Science*. 2000. V. 55. I. 13. P. 2429–2439.
4. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2022. № 11. С. 62–82.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New criteria for tuning PID Controllers // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.
5. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ : параметрический подход // *АиТ*. 2007. № 3. С. 94–105.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. Design of the low-order controllers by the H_∞ criterion: A parametric approach // *Autom. Remote Control*. 2007. V. 68. No. 3. P. 456–466.
6. Han S., Keel L.H., Bhattacharyya S.P. PID controller design with an H_∞ criterion // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51. I. 4. P. 400–405.
7. Jin L., Kim Y.C. Fixed, low-order controller design with time response specifications using non-convex optimization // *ISA Transactions*. 2008. V. 47. I. 4. P. 429–438.
8. Hast M., Astrom K.J., Bernhardsson B., Boyd S. PID Design by convex-concave optimization // *Proc. 2013 European Control Conference (ECC)*. Zurich, Switzerland, 2013. P. 4460–4465.
9. Keel L.H., Bhattacharyya S.P. Robust, fragile, or optimal? // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1997. V. 42. No. 8. P. 1098–1105.
10. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994.
11. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
12. Честнов В.Н. Подход к задаче синтеза допусков на параметры линейных многомерных систем // *Известия АН. Теория и системы управления*. 1995. № 2. С. 72–79.
13. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматического управления. М.: Наука, 1977.

14. *Хлебников М.В.* Синтез ПИ-регулятора для подавления внешних возмущений // *АиТ.* 2023. № 8. С. 3–23.
Khlebnikov M.V. PI controller design for suppressing exogenous disturbances // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 8. P. 901–917.
15. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // *АиТ.* 2008. № 12. С. 3–40.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. D-Decomposition technique state-of-the-art // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
16. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // *АиТ.* 2008. № 11. С. 125–139.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Petersen’s lemma on matrix uncertainty and its generalization // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 11. P. 1932–1945.
17. *Smith R.L.* Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions // *Oper. Res.* 1984. V. 32. No. 6. P. 1296–1308.
18. *Åström K.J., Hägglund T.* Benchmark Systems for PID Control // *IFAC Proceedings Volumes.* 2000. V. 33. No. 4. P. 165–166.
19. *Shatov D.V.* PI and PID controllers design for tracking systems via LQ criterion // *Proc. 2023 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA).* Lipetsk, 2023. P. 551–556.
20. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. URL <http://cvxr.com/cvx>

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 09.07.2025

После доработки 27.08.2025

Принята к публикации 01.09.2025

© 2026 г. Р.П. АГАЕВ, д-р физ.-мат. наук (agaraf3@gmail.com),
Д.К. ХОМУТОВ (homutov_dk@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОЦЕНКА ЗАПАЗДЫВАНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО МАКСИМАЛЬНУЮ СТЕПЕНЬ СХОДИМОСТИ, В ЗАДАЧАХ СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

С помощью W -функции Ламберта исследована линейная модель согласования характеристик в многоагентных системах с запаздыванием. В частности, рассмотрен случай, когда все ненулевые собственные значения лапласовской матрицы действительны. Найдено выражение для значения запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости. Выведена формула для максимальной степени сходимости. Доказано, что на максимальную степень сходимости влияют только максимальное и минимальное ненулевые собственные значения, в то время как остальные собственные значения не влияют на данную характеристику. Полученные результаты служат основой для одной до сих пор нерешенной задачи — непосредственной оценки скорости сходимости в многоагентных системах с направленной структурой.

Ключевые слова: W -функция Ламберта, степень сходимости, степень устойчивости, управление с запаздыванием, лапласовская матрица, многоагентная система, консенсус.

DOI: 10.7868/S2413977726020037

1. Введение

В [1–9] был получен ряд результатов по теории многоагентных систем с информационными связями и запаздыванием. Однако зависимость скорости сходимости таких систем с запаздыванием от их спектральных свойств по-прежнему остается актуальной темой для исследований. Введенное в настоящей работе понятие степени сходимости и ее оценка могут служить основой для оценки скорости сходимости. Причем это справедливо не только для моделей многоагентных систем с лапласовской матрицей, но и для систем с произвольной устойчивой матрицей (при оценке скорости достижения точки равновесия).

В данной статье будет применяться W -функция Ламберта, на основе которой получены основные результаты. Так как W -функции Ламберта в отечественной литературе по теории управления посвящено относительно мало работ, далее приведем некоторые ключевые результаты, посвященные данной теме.

За последние 20 лет после знаменитой статьи [10] появилась серия работ [11–16] по теории управления системами с запаздыванием, где применяется W -функция Ламберта. W -функция Ламберта $W(z)$ определяется как $z = W(z)e^{W(z)}$, т.е. $W(z)$ является обратной функцией к $f(z) = ze^z$. Применение этой функции оказалось очень эффективным и в ряде случаев позволяет доказать необходимые утверждения более коротким способом.

В [12] исследована система

$$(1) \quad \dot{y}(t) = Ay(t) + By(t - \tau),$$

в которой матрицы A и B одновременно триангуляризуемы, что позволяет свести матричное уравнение к скалярному. Было приведено необходимое и достаточное условие робастной устойчивости соответствующей системы при выполнении некоторых неравенств с неопределенными коэффициентами. Аналогично результатам из [12] в [13] также получено выражение для спектра системы (1) с одновременно приводимыми к треугольной форме или коммутирующими матрицами A и B (пересекающиеся утверждения из [12] и [13] были получены одновременно и независимо).

Более подробно рассмотрим метод вычисления первичной (primary) матричной W -функции Ламберта, изложенный в [14]. Предложенный в [14] итерационный метод (4.4) авторы называют устойчивым вариантом упрощенного метода Ньютона, а именно итераций $y_{k+1} = (y_k^2 + ae^{-y_k})/(y_k + 1)$. Поскольку данная формула непосредственно получается из $y_{k+1} = y_k - f(y_k)/f'(y_k)$, в [14] речь идет о методе Ньютона–Рафсона. Для определения первичной (primary) W -функции Ламберта, удовлетворяющей уравнению $We^W - A = 0$, выражающейся многочленом от A , используется разложение Шура для A , т.е. вместо матрицы A используется ее форма Шура $T = Q^T A Q$, где T – блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой имеют порядок 1, если он соответствует действительному собственному значению, и – порядок 2, если он соответствует паре комплексных собственных значений. Также матрица Шура T представляется в виде блочно-треугольной матрицы с двумя блоками на диагонали:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Предложенный метод Ньютона с выбранными начальными матрицами для каждого диагонального блока T_{11} и T_{22} приводит к матрицам $X_{11} = W_k(T_{11})$ и $X_{22} = W_k(T_{22})$. Недостающий блок X_{12} находится уравнением Сильвестра (см. [14]). Таким образом получается

$$W_k(T) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Обратным преобразованием $A = QTQ^T$ вычисляется первичная матрица $W_k(A)$, удовлетворяющая уравнению $W_k(A)e^{W_k(A)} - A = 0$.

С помощью W -функции Ламберта в [16] для скалярного случая также была построена область устойчивости системы со звеном запаздывания.

С другими применениями W -функции Ламберта в физических задачах читатель может ознакомиться по книге [17], где, в частности, приведены результаты по конформным отображениям с помощью W -функции Ламберта, действующим на прямоугольные области на z -плоскости. В работе [18] этих же авторов для системы, описывающейся уравнением $x^{(\alpha)}(t) = Bx(t-1)$ с единичной задержкой и производной целого или дробного порядка α , приведен анализ устойчивости с помощью W -функции Ламберта.

2. Необходимые понятия и вспомогательные результаты

В этом разделе при изложении некоторых свойств W -функции Ламберта будем пользоваться результатами из знаменитой статьи [10] (см. также [19]). Со свойствами W -функции Ламберта читатель также может ознакомиться в [17].

Действительная W -функция Ламберта $W(x)$, как и в случае комплексной переменной, определяется как решение функционального уравнения $W(x)e^{W(x)} = x$.

Функция $W(x)$ определена на промежутке $-e^{-1} \leq x < +\infty$, где принимает значение от $-\infty$ до $+\infty$. Для отрицательных значений аргумента $W(x)$ отрицательна и двузначна. В точке $(-e^{-1}, -1)$ график делится на две ветви: верхняя ветвь – главная или нулевая ветвь $W_0(x)$; нижняя ветвь или минус первая ветвь $W_{-1}(x)$. На рис. 1 нулевая ветвь нарисована сплошной линией, а -1 -я – пунктирной.

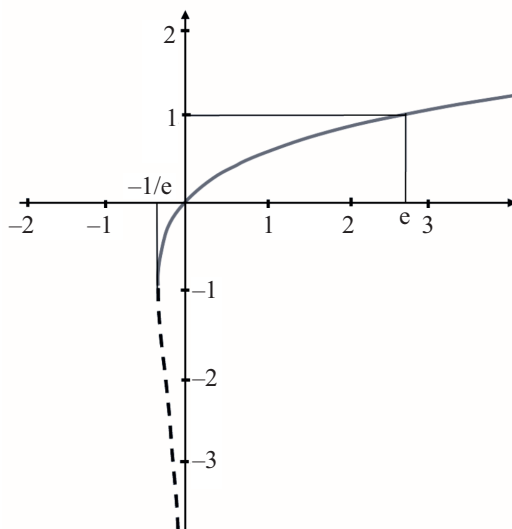


Рис. 1. Две ветви функции Ламберта для действительного случая.

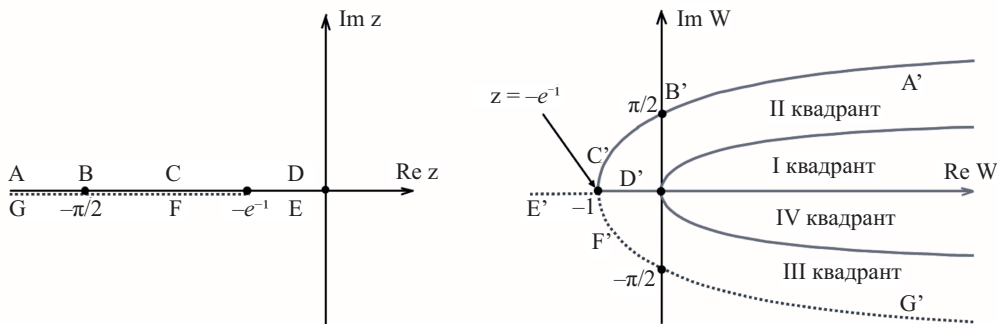


Рис. 2. Отображение мнимой и действительной осей функцией $W_0(z)$ нарисовано сплошной линией. Пунктирной линией, определяющей верхнюю границу ветви $W_{-1}(z)$, указаны отображения разреза и интервала $(-e^{-1}, 0)$ функцией $W_{-1}(z)$.

В комплексной области W -функция Ламберта является многозначной. Комплексной плоскости ставится в соответствие множество значений функций $w = W_k(z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $z = x + iy$, $w = u + iv$. Областью определения для $W_0(z)$ является вся комплексная плоскость с разрезом $(-\infty, -e^{-1}]$, т.е. с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси: $\{z : -\infty < \text{Re}(z) \leq -e^{-1}, \text{Im}(z) = 0\}$. Для других ветвей ($k \neq 0$) область определения представляет собой всю плоскость с разрезом $(-\infty, 0]$, т.е. $\{z : -\infty < \text{Re}(z) \leq 0, \text{Im}(z) = 0\}$. Отметим, что приведенные разрезы до точек разветвления позволяют определить однозначные ветви функции Ламберта, которые не переходят друг в друга. В силу $W(z)e^{W(z)} = z$ имеет место:

$$(2) \quad \begin{cases} x = e^u(u \cos v - v \sin v); \\ y = e^u(v \cos v + u \sin v). \end{cases}$$

В (2) из условия $y = 0$ получим выражение $u = -v \text{ctg } v$, $-\pi < v < \pi$, определяющее границу между множеством значений ветви W_0 и множествами значений ветвей W_{-1} и W_1 (см. рис. 2).

Замечание 1. Для кривой $u = -v \text{ctg } v$ точка $v = 0$ является точкой устранимого разрыва. Однако в силу того, что $W_0(-e^{-1}) = -1$ и $W_{-1}(-e^{-1}) = -1$, граница между областями не будет иметь разрыва.

Кривые, разделяющие области значений других ветвей, определяются следующим множеством точек (см. [10]):

$$\{(u, v) : u = -v \text{ctg } v, 2\pi k < \pm v < (2k + 1)\pi\}, k = 1, 2, \dots$$

Заметим, что при одном значении k получаются две кривые, задающие границы между ветвями W_k , W_{k+1} и W_{-k} , W_{-k-1} .

При доказательстве основных результатов понадобится следующая лемма (лемма 3 в [12]).

Лемма 1. Для любого $z \in \mathbb{C}$ верно

$$\max\{\operatorname{Re}(W_k(z)) : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \operatorname{Re}(W_0(z)).$$

Многоагентную систему с множеством агентов $V = \{1, \dots, n\}$ удобно представить в виде орграфа связей $\Gamma = (V, E)$, где $E \subset V \times V$ – множество взвешенных дуг. Если агент j влияет на агента i с весом a_{ij} , то существует дуга из вершины j в вершину i с тем же весом.

Определение 1. Лапласовская матрица $L = (l_{ij})$, соответствующая орграфу Γ , строится следующим образом:

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i; \\ \sum_{k \neq i} a_{ik}, & j = i. \end{cases}$$

Рассмотрим базовый протокол консенсуса в многоагентной системе первого порядка с запаздыванием

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -Lx(t - \tau), & t > 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор-столбец характеристик агентов в момент времени t ($x_i(t)$ – характеристика i -го агента). Запаздывание по времени τ в системе может возникнуть при передаче данных, измерении, управлении и т.п.

Определение 2. Протокол (3) сходится к консенсусу, если существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c\mathbf{1}$, где $x(t)$ – решение системы (3), $\mathbf{1}$ – вектор-столбец из единиц, c – некая константа, значение консенсуса. В таком случае говорят, что в системе (3) достигается асимптотический консенсус или просто – достигается консенсус.

В определении 2 для каждой начальной функции требуется только существование константы c . Однако в [21] доказано, что для протокола (3) значение такой константы c зависит от начальной функции.

Для L ноль всегда является собственным значением, и его алгебраическая кратность совпадает с геометрической. В настоящей работе будем рассматривать такую систему, для которой L имеет только действительный спектр с простым нулевым собственным значением и простую структуру. Условие простого нулевого собственного значения для графа эквивалентно связности, а для орграфа – наличию остоного дерева, и является необходимым условием достижения консенсуса при любом векторе начальных значений (а при $\tau = 0$ – и достаточным). Класс лапласовских матриц L , удовлетворяющих этим двум условиям, является минимальным расширением класса

связных симметричных матриц L . Ненулевые собственные значения произвольной матрицы L имеют положительные действительные части, что можно проверить, например, с помощью теоремы Гершгорина.

Для сходимости протокола необходимо, чтобы действительные части всех ненулевых корней характеристической функции были отрицательны. Корни характеристической функции зависят от τ . Граничное значение τ_0 – это такое значение запаздывания, для которого при $\tau < \tau_0$ в системе достигается консенсус при любой начальной функции $\phi(\theta)$, а при $\tau > \tau_0$ консенсус не достигается. Зависимость граничного значения запаздывания от спектральных свойств соответствующей матрицы была исследована многими авторами. Например, в [20] рассматривалась система (3) с симметричной матрицей, для которой было установлено, что граничное значение запаздывания τ_0 равно $\frac{\pi}{2\lambda_{\max}}$. Однако ранее в [22] рассматривалась линейная система с произвольной устойчивой матрицей A , спектр которой мог содержать комплексные числа. Так авторы привели достаточно сложное доказательство теоремы, где получили выражение для граничного значения τ_0 . Данный результат для задачи консенсуса ниже представлен в виде теоремы 1, для которой приведем короткое доказательство с помощью W -функции Ламберта.

Характеристической функцией системы (3) будет

$$(4) \quad F(s) = \det(sI + e^{-\tau s}L) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} (s + \lambda e^{-\tau s}) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} f_{\lambda}(s),$$

где $\sigma(L)$ – спектр матрицы L .

Уравнение

$$(5) \quad s + \lambda e^{-\tau s} = 0$$

представим в виде $\tau s e^{\tau s} = -\tau \lambda$.

Поскольку $W(z)e^{W(z)} = z$, то τs (s – корень уравнения (5)) будет значением W -функции Ламберта в $-\tau \lambda$, т.е.

$$(6) \quad W(-\tau \lambda) = \tau s.$$

Аналогично определению *степени устойчивости*, которое определяется для устойчивых матриц, для системы (3) определим понятие степени сходимости к согласованному значению.

Определение 3. Назовем *степенью сходимости к согласованному значению для системы (3) величину* $\zeta_0 = -\max(\operatorname{Re}(s))$, где s – ноль функции $G(s) = \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} f_{\lambda}(s)$.

Цель настоящей работы – найти значение запаздывания τ^* , при котором степень сходимости является максимальной. Однако для матрицы даже с действительным спектром степень сходимости для систем с запаздыванием не всегда характеризует скорость сходимости соответствующего протокола

(для симметричных сетей без запаздывания степень сходимости характеризует скорость сходимости и называется *числом Фидлера*). Поэтому понятие степени сходимости в большей степени характеризует «запас» сходимости к согласованному значению (как «запас» устойчивости в теории управления). В [23] $\gamma^* = -\zeta_0$ называют спектральной функцией абсциссы, а соответствующий корень характеристического квазимногочлена – доминантным корнем. Основываясь на доминантных корнях, в [23] авторы утверждают, что при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$, значение $\gamma^* = -\gamma$ аппроксимирует экспоненциальную скорость убывания состояний агентов посредством самых правых корней.

Если в системе достигается консенсус, то $\zeta_0 > 0$. В силу леммы 1 для исследования степени сходимости, как и для нахождения граничного значения запаздывания, достаточно рассмотреть корень, соответствующий нулевой ветви W -функции Ламберта.

Как было отмечено выше, следующая теорема для любой устойчивой матрицы A была доказана в [22] (см. теорему 3.4). Здесь приведем ее короткое доказательство для системы (3). Таким же образом может быть доказана теорема 3.4 из [22].

Теорема 1. *Если 0 – простое собственное значение для L , то протокол консенсуса (3) сходится для любых $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$, где $\rho = |\lambda|$, $\varphi = |\arg(\lambda)|$.*

3. Основные результаты

Рассмотрим систему (3), в которой матрица L имеет действительный спектр, т.е. $\sigma(L) = \{0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n\}$. Для такой системы рассмотрим следующую задачу: найти значение τ^* , которое обеспечивает максимальную степень сходимости. С этой целью при фиксированном $\lambda \neq 0$ понадобится проанализировать поведение функции $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ на промежутке $-\pi/2 < -\tau\lambda < 0$ (при $-\tau\lambda < -\pi/2$ действительные части $W_0(-\tau\lambda)$ положительны).

Утверждение 1. 1) Действительная часть функции $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ возрастает на промежутке $-\pi/2 < -\tau\lambda < -e^{-1}$; 2) на промежутке $-e^{-1} < -\tau\lambda < 0$ эта функция убывает.

Утверждение 2. Пусть s_0 – решение уравнения $f_\lambda(s) = s + \lambda e^{-\tau s} = 0$ ($\lambda > 0$) с максимальной действительной частью. Тогда $\arg \min_{\tau} \operatorname{Re}(s_0) = \tau_\lambda^* = \frac{1}{e\lambda}$.

Утверждение 3. Пусть для каждого $\lambda_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, минимальная действительная часть решения уравнения (5) достигается при $\tau_{\lambda_i}^*$. Тогда:

1) если $\lambda_2 < \lambda_n$, то максимальная степень сходимости системы (3) достигается при $\tau^* \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$; 2) если $\lambda_2 = \lambda_n = \lambda$, то $\tau^* = \tau_\lambda^*$.

Таким образом, для любого $\tau \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$, значение $W_0(-\tau\lambda_n)$ будет находиться на дуге AC , а $W_0(-\tau\lambda_2)$ будет принадлежать интервалу $(-1, 0)$ (см. рис. 3,а).

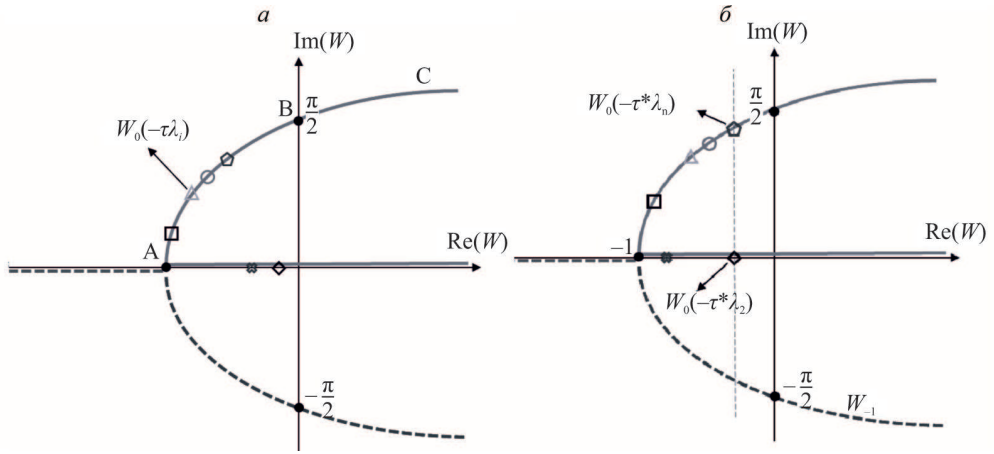


Рис. 3. а – Значения $W_0(-\tau\lambda)$. б – Значения $W_0(-\tau^*\lambda_2)$ и $W_0(-\tau^*\lambda_n)$ при $\tau = \tau^*$. Пунктирной линией указано отображение $W_{-1}(z)$, отображение $W_0(z)$ приведено сплошной линией.

Если действительная часть $W_0(-\tau\lambda_n)$ меньше $W_0(-\tau\lambda_2)$, то, увеличивая τ , можно добиться случая, когда $\text{Re}(W_0(-\tau\lambda_n)) = W_0(-\tau\lambda_2)$. А если $\text{Re}(W_0(-\tau\lambda_n)) > W_0(-\tau\lambda_2)$, то, убавляя τ , можно достичь их равенства (см. рис. 3, б).

В следующей теореме получено выражение для τ , которая обеспечивает максимальную степень сходимости ζ_0 .

Теорема 2. Пусть $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}$ и $\xi = -\arccos(q) \cdot \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$. Тогда максимальная степень сходимости ζ_0 достигается при $\tau = \tau^* = \frac{-\xi e^\xi}{\lambda_2}$, значение которой равно $\zeta_0 = \frac{\lambda_2}{e^\xi}$.

В работе [24] для не ориентированного графа и случая запаздывания число ζ_0 используется для характеристики скорости достижения консенсуса в протоколе консенсуса второго порядка с некоторым параметром γ . Решение такой задачи авторы сводят к оптимизационной задаче, где в условие ограничения входят значение параметра γ и первое ненулевое собственное значение матрицы L . Тем не менее, для двух систем со степенями сходимости ζ_0^1 и ζ_0^2 , при $\zeta_0^1 > \zeta_0^2$ скорость сходимости первой системы может быть меньше второй. Это может быть связано, например, с жордановой клеткой размерности больше единицы у лапласовской матрицы. Поэтому для исследования системы с действительным спектром у L , проблема скорости сходимости должна быть исследована с учетом скорости сходимости функционального ряда, выражающего данное решение.

4. Числовой пример

В этом разделе приведен пример для многоагентной системы с информационными влияниями и запаздыванием, оргграф в которой соответствует

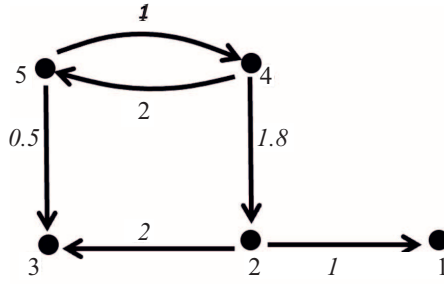


Рис. 4. Орграф связей для пяти агентов.

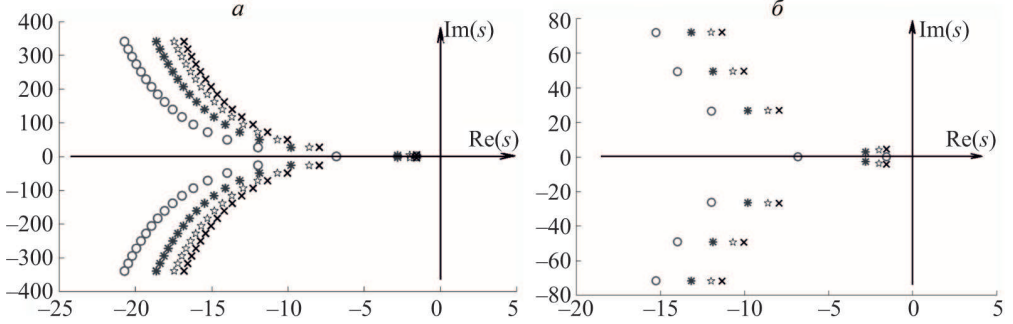


Рис. 5. *а* – Локализация корней s квазимногочлена, вычисленных с помощью W -функции Ламберта для четырнадцати ветвей. *б* – Локализация корней s для четырех ветвей. $\frac{1}{\tau^*} W_0(-\tau^* \lambda_2) = \frac{1}{\tau^*} \text{Re}(W_0(-\tau^* \lambda_n)) = -1,545$.

лапласовской матрице простой структуры с действительным спектром. На рис. 4 приведен орграф для пяти агентов. На дугах указаны веса влияний агентов. Лапласовская матрица орграфа имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,8 & 0 & -1,8 & 0 \\ 0 & -2 & 2,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

L имеет следующий спектр: $\sigma(L) = \{0; 1; 1,8; 2,5; 3\}$. Согласно теореме 2 определяем: $\lambda_2 = 1$; $\lambda_5 = 3$; $q = 1/3$. $-\xi = \arccos(q) \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} = \arccos(1/3) \frac{1/3}{\sqrt{8/9}} \approx 0,4352$. Тогда при запаздывании $\tau^* = -\frac{\xi e^\xi}{\lambda_2} \approx 0,2816$ степень сходимости к консенсусу будет максимальной и ее значение равно $\zeta_0 = \frac{\lambda_2}{e^\xi} = 1,545$. Корни характеристической функции (4), кроме нулевого, отмечены на рис. 5. Заметим, что граничное значение запаздывания τ_0 будет равно $\frac{\pi}{2 \cdot 3} \approx 0,5236$.

На рис. 6, *а* приведен график достижения консенсуса без запаздывания с вектором начальных значений x_0 . Видно, что при запаздывании $\tau^* \approx 0,2816$ и с начальной функцией $\phi(\theta) = x_0$ агенты приходят к консенсусу быстрее, чем

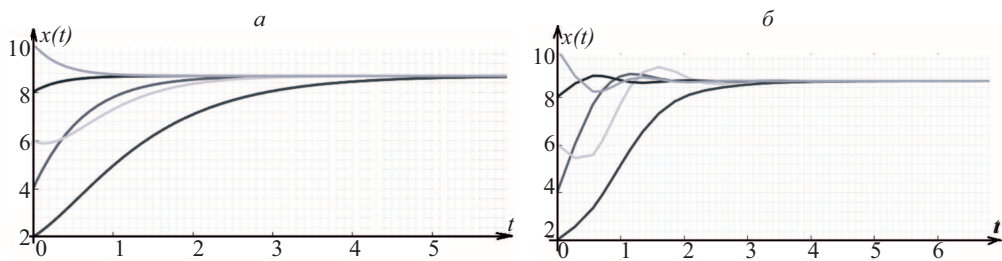


Рис. 6. *а* – Достижение консенсуса без запаздывания. *б* – Достижение консенсуса с запаздыванием $\tau^* \approx 0,2816$.

без запаздывания (рис. 6, *б*). Для обоих случаев вектор $x_0 = (2, 4, 6, 8, 10)^T$. Значение консенсуса при вышеприведенном начальном условии не зависит от запаздывания и определяется выражением $px_0 = \frac{26}{3}$, где $p = (0, 0, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ – строка собственного проектора единичного ранга для лапласовской матрицы. Отметим, что p – левый собственный вектор нулевого собственного значения для L .

В этом примере видно, что для несимметричной матрицы простой структуры увеличение степени сходимости привело к увеличению скорости сходимости. Однако, если несимметричная матрица содержит жордановы клетки размерности больше единицы, то такое соответствие может нарушаться. Иначе говоря, увеличение степени сходимости не всегда приводит к увеличению скорости сходимости.

Заметим, что как следует из числового примера, увеличение скорости сходимости приводит к появлению колебаний в переходном процессе. В отличие от традиционных систем управления, где для подавления колебаний могут быть использованы фильтры, демпфирующие устройства и т.п., в многоагентных системах пока не известны методы решения этой проблемы. Действительно, при групповом движении это может привести к столкновениям между агентами. Считаем, что это – интересная и актуальная задача и является предметом дальнейшего изучения.

5. Заключение

В работе с помощью W -функции Ламберта была исследована зависимость степени сходимости от запаздывания в многоагентной системе первого порядка. Для линейной системы с запаздыванием, в которой лапласовская матрица имеет действительный спектр, получено выражение для запаздывания τ^* , обеспечивающего максимальную степень сходимости. Доказано, что значение τ^* зависит только от минимального ненулевого и максимального собственных значений лапласовской матрицы с действительным спектром. Благодаря W -функции Ламберта было получено новое, короткое доказательство для граничного значения запаздывания. Полученные результаты могут быть применены для произвольной системы с несимметричной матрицей, у которой спектр состоит только из действительных чисел.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим характеристическую функцию (4) системы (3), где $f_\lambda(s) = s + \lambda e^{-\tau s}$, $\lambda = a + ib \in \sigma(L) \setminus \{0\}$. Напомним, что для лапласовской матрицы всегда справедливо $a > 0$. Тогда в силу (6) и леммы 1 граничное значение запаздывания, обеспечивающее отрицательность действительных частей нулей функции $f_\lambda(s)$, будет определяться равенством

$$W_0(-\tau\lambda) = iv,$$

которое можно записать как

$$(П.1) \quad ive^{iv} = -\lambda\tau.$$

Из (П.1) непосредственно получим

$$(П.2) \quad \begin{cases} v \sin v = a\tau; \\ v \cos v = -b\tau. \end{cases}$$

Тогда из (П.2) получим $\operatorname{tg} v = -\frac{a}{b}$.

Пусть $\varphi = |\arg(\lambda)|$, $\rho = |\lambda|$. Рассмотрим все возможные случаи b .

а) $b = 0$. В этом случае $-\tau\lambda$ принадлежит отрицательной части действительной оси и $W_0(-\tau\lambda) = W_0(-\frac{\pi}{2})$ (см. рис. 2). Очевидно, что $-\tau\lambda = -\frac{\pi}{2}$ и $\tau = \frac{\pi}{2\lambda}$.

б) $b < 0$. В этом случае $-\tau\lambda$ принадлежит второму квадранту и, как видно из рис. 2, $0 < v < \pi/2$. Поэтому $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi) \Rightarrow v = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

в) Если $b > 0$, то $-\tau\lambda$ принадлежит третьему квадранту и, согласно рис. 2, $-\pi/2 < v < 0$. Поэтому $\operatorname{tg} v = -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Следовательно, $v = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

В случае б) подставив $v = \frac{\pi}{2} - \varphi$ в (П.1), получим

$$i \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = -\rho\tau e^{-i\varphi}.$$

Умножив обе части на $-i$, получим:

$$(П.3) \quad \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \rho\tau e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \rho\tau.$$

В случае в) подставив $v = \varphi - \frac{\pi}{2}$ в (П.1), получим

$$(П.4) \quad \begin{aligned} i \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} &= -\rho\tau e^{i\varphi}, \\ \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} &= -i\rho\tau e^{i\varphi} = \rho\tau e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \rho\tau. \end{aligned}$$

Итак, из (П.3) и (П.4) следует

$$\tau = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

Тогда с учетом пункта а) граничным значением запаздывания для системы (3) будет $\tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$. $\square$

Доказательство утверждения 1. 1) При $-\tau\lambda < -\frac{1}{e}$, т.е. при $\tau > \frac{1}{e\lambda}$, функция $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ принимает комплексные значения. В силу того, что $W_0(-\frac{\pi}{2}) = i\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{Re}(W_0(x)) < 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, при $-\frac{\pi}{2} < -\tau\lambda < -\frac{1}{e}$, т.е. при $\frac{1}{e\lambda} < \tau < \frac{\pi}{2\lambda}$, $\operatorname{Re}(s) < 0$. На данном интервале с увеличением τ уменьшается величина $\frac{1}{\tau}$, как и модуль действительной части $W_0(-\tau\lambda)$. Таким образом действительная часть $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ приобретает отрицательное значение и по модулю убывает с увеличением τ , т.е. возрастает на рассматриваемом промежутке.

2) В силу того, что

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))},$$

имеет место

$$s' = \left(\frac{W_0(-\tau\lambda)}{\tau} \right)'_{\tau} = -\frac{W_0^2(-\tau\lambda)}{\tau^2(1+W_0(-\tau\lambda))}.$$

С другой стороны, на промежутке $-\frac{1}{e} < -\tau\lambda < 0$, т.е. при $0 < \tau < \frac{1}{e\lambda}$, значения функции $W_0(-\tau\lambda)$ отрицательны и больше -1 (см. рис. 1). Поэтому функция $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ убывает на промежутке $0 < \tau < \frac{1}{e\lambda}$ по τ . На данном промежутке $-e\lambda < s < -\lambda$. $\square$

Доказательство утверждения 2. Если s_0 – решение уравнения $s + \lambda e^{-\tau s} = 0$, то согласно (5) и (6) τs_0 определится многозначной функцией $W(-\tau\lambda)$. С другой стороны, в силу леммы 1 максимальная действительная часть s_0 можно определить функцией $\frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$. Также, в силу утверждения 1 минимальная действительная часть функции $\frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ достигается при $-\tau\lambda = -\frac{1}{e}$, т.е. при $\tau = \frac{1}{e\lambda}$. $\square$

Доказательство утверждения 3. 1) Очевидно, что $\tau_{\lambda_n}^* < \dots < \tau_{\lambda_2}^*$. Пусть τ^* – значение запаздывания, которое обеспечивает максимальную степень сходимости для системы (3). Покажем, что $\tau^* \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$. Действительно, если $\tau^* \leq \tau_{\lambda_n}^*$, то все значения $W_0(-\tau^* \lambda_i)$, $i = 2, \dots, n$, действительны и принадлежат интервалу $(-1, 0)$ действительной оси. При этом ближе всего к мнимой оси будет лежать корень, соответствующий λ_2 . Тогда при увеличении значения τ^* корень, соответствующий λ_2 , будет отодвигаться от мнимой оси, тем самым увеличивая степень сходимости системы. А если $\tau^* \geq \tau_{\lambda_2}^*$, то все значения $W_0(-\tau^* \lambda_i)$, $i = 2, \dots, n$, содержат мнимую часть и принадлежат дуге AC (см. рис. 3, а). При этом наибольшую действительную часть будет иметь корень, соответствующий λ_n . В этом случае, уменьшая значение τ^* , можно увеличить степень сходимости системы.

Итак, максимальная степень сходимости системы (3) будет достигнута при $\tau = \tau^* \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$, при котором

$$(П.5) \quad W_0(-\tau^* \lambda_2) = \operatorname{Re}(W_0(-\tau^* \lambda_n)).$$

2) Если у лапласовской матрицы все ненулевые собственные значения λ равны между собой, то степень сходимости определится тем ненулевым числом λ и будет равна $e\lambda$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Как следует из утверждения 3, собственные значения λ_i , $i = 3, \dots, n-1$, не влияют на τ^* . Поэтому τ^* можно найти исходя из равенства (П.5).

Обозначим: $W_0(-\tau^*\lambda_2) = u$, $W_0(-\tau^*\lambda_n) = u + iv$.

Отметим, что $-\tau^*\lambda_n$ принадлежит лучу $(-\infty, -e^{-1}]$ (см. рис. 2). Тогда для $W_0(-\tau^*\lambda_n)$ справедливо, что $u = -v \operatorname{ctg} v$.

Итак, из $W_0(-\tau^*\lambda_2) = \operatorname{Re}(W_0(-\tau^*\lambda_n))$ имеем:

$$(П.6) \quad \begin{cases} -\tau^*\lambda_2 = ue^u; \\ -\tau^*\lambda_n = e^u(u \cos v - v \sin v); \\ u = -v \operatorname{ctg} v. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы (П.6):

$$-\tau^*\lambda_n = ue^u \left(\cos v - \frac{v}{u} \sin v \right).$$

В силу того, что $u = -v \operatorname{ctg} v$, имеет место

$$\cos v - \frac{v}{u} \sin v = \cos v + \frac{\sin^2 v}{\cos v} = \frac{1}{\cos v}.$$

Тогда система (П.6) примет вид

$$\begin{cases} -\tau^*\lambda_2 = ue^u; \\ -\tau^*\lambda_n = ue^u \frac{1}{\cos v}; \\ u = -v \operatorname{ctg} v. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений получим

$$v = \arccos(q),$$

где $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}$. Подставляя полученное выражение в третье уравнение, получим

$$u = -\arccos(q) \operatorname{ctg}(\arccos(q)).$$

Стоит отметить, что

$$\operatorname{ctg}(\arccos(q)) = \frac{\cos(\arccos(q))}{\sin(\arccos(q))} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Тогда $u = -\frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \arccos(q)$. Обозначим это значение через ξ . Тогда значение τ^* можно получить из первого уравнения системы (П.6):

$$\tau^* = -\frac{\xi e^{\xi}}{\lambda_2},$$

а значение максимальной степени сходимости будет $\zeta_0 = -\frac{\xi}{\tau^*} = \frac{\lambda_2}{e^{\xi}}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Furtat I., Fridman E., Fradkov A.* Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. V. 63. No. 1. P. 298–305.
2. *Seuret A., Dimarogonas D.V., Johansson K.H.* Consensus under communication delays // 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico. 2008. P. 4922–4927.
3. *Амелина Н.О., Ананьевский М.С., Проскурников А.В. и др.* Проблемы сетевого управления / Под ред. А.Л. Фрадкова. Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2015.
4. *Munz U., Papachristodoulou A., Allgower F.* Delay robustness in consensus problems // Automatica. 2010. V. 46. No. 8. P. 1252–1265.
5. *Hou W., Fu M., Zhang H., Wu Z.* Consensus conditions for general second-order multi-agent systems with communication delay // Automatica. 2017. V. 75. P. 293–298.
6. *Hara S., Hayakawa T., Sugatani H.* Stability analysis of linear systems with generalized frequency variables and its applications to formation control // 46-th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA, 2007. P. 1459–1466.
7. *Агаев Р.П., Хомутов Д.К.* О граничном значении запаздывания и асимптотике непрерывного протокола консенсуса первого порядка // АИТ. 2024. № 6. С. 83–96.
8. *Yang W., Wang X., Shi H.* Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay // Syst. Control Lett. 2013. V. 62. No. 3. P. 269–276.
9. *Yang W., Bertozzi A.L., Wang X.* Stability of a second order consensus algorithm with time delay // 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008. P. 2926–2931.
10. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D., et. al.* On the Lambert W function // Advances in Computational mathematics. 1996. No. 5. P. 329–359.
11. *Asl F.M., Ulsoy A.G.* Analysis of a system of linear delay differential equations // J. Dyn. Sys., Meas., Control. 2003. V. 125. No. 2. P. 215–223.
12. *Shinozaki H., Mori T.* Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results // Automatica. 2006. V. 42. No. 10. P. 1791–1799.
13. *Jarlebring E., Damm T.* The Lambert W function and the spectrum of some multi-dimensional time-delay systems // Automatica. 2007. V. 43. No. 12. P. 2124–2128.
14. *Fasi M., Higham N.J., Iannazzo B.* An algorithm for the matrix Lambert W function // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2015. V. 36. No. 2. P. 669–685.
15. *Yi S., Nelson P.W., Ulsoy A.G.* Analysis and control of time delayed systems via the Lambert W function // IFAC Proceedings Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 13414–13419.
16. *Мичурин Р.А., Николаев В. Т.* Использование W -функций Ламберта при построении области устойчивости систем автоматического управления со звеном запаздывания // Вест. МГПУ. Серия «Экономика». 2013. № 3. Т. 24. С. 191–197.
17. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W -функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики / РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2006.

18. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* Характеристические корни и область устойчивости одной динамической системы с запаздыванием // *АиТ.* 2005. № 8. С. 22–23.
19. *Corless R.M., Hare D.E., Jeffrey D.J.* Unwinding the branches of the Lambert W function // *The Mathematical Scientist.* 1996. V. 21. P. 1–7.
20. *Olfati-Saber R.M., Murray R.M.* Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.
21. *Хомутов Д.К.* Протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием // *Управление большими системами.* 2025. Т. 114. С. 138–155.
22. *Hara T., Sugie J.* Stability region for systems of differential-difference equations // *Funkcialaj Ekvacioj.* 1996. V. 39. No. 1. P. 69–86.
23. *Ramirez A., Sipahi R., Mondie S., Garrido R.* Fast consensus in a large-scale multi-agent system with directed graphs using time-delayed measurements // *Philosophical Transactions of the Royal Society A.* 2019. V. 377. No. 2153. P. 20180130.
24. *Yang W., Wang X., Shi H.* Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay // *Systems & Control Letters.* 2013. V. 62. No. 3. P. 269–276.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботарёвым.

Поступила в редакцию 24.05.2025

После доработки 29.10.2025

Принята к публикации 06.11.2025

© 2026 г. Ю.Н. ЧЕЛНОКОВ, д-р физ.-мат. наук (chelnokovyun@gmail.com),
А.В. МОЛОДЕНКОВ, д-р техн. наук (molalexei@yandex.ru)
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов),
И.А. ПАНКРАТОВ, канд. техн. наук (pankratovia.mechanic@gmail.com)
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов;
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ И ЭНЕРГИИ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В КЛАССЕ ВИНТОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Исследуется задача оптимального программного управления пространственным движением (в частности, маневрированием) космического аппарата (КА), рассматриваемого как свободное твердое тело произвольной динамической конфигурации с комбинированным функционалом, объединяющим время и энергию, затраченные на управляемое движение КА. В классе винтовых обобщенных конических движений получено оптимальное аналитическое решение задачи при произвольных граничных условиях по угловому и линейному положениям и по угловой и линейной скоростям КА, которое доведено до алгоритма. Для описания пространственного движения использованы четырехмерные дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), которые являются компонентами дуального кватерниона (параболического бикватерниона) конечного перемещения Клиффорда. Решение получено с использованием теоремы Шаля о перемещении свободного твердого тела и принципа перенесения Котельникова–Штуди. Приводятся числовые примеры, показывающие эффективность предлагаемого решения задачи.

Ключевые слова: космический аппарат, программное оптимальное управление, пространственное движение, дуальный кватернион (бикватернион) Клиффорда, дуальный интегральный комбинированный функционал качества, аналитическое решение, алгоритм.

DOI: 10.7868/S2413977726020046

1. Введение

Известно, что общее пространственное перемещение свободного твердого тела эквивалентно его винтовому перемещению (теорема механики Шаля: всякое перемещение свободного твердого тела может быть осуществлено одним винтовым перемещением вдоль некоторой оси, называемой осью винтового конечного перемещения). Поэтому движение свободного твердого тела

представляет собой непрерывную последовательность мгновенных винтовых движений. При этом ориентация оси мгновенного винтового движения совпадает с ориентацией оси мгновенного вращения твердого тела, а поворот тела вокруг этой оси и поступательное перемещение тела вдоль этой оси образуют (с помощью комплексности Клиффорда) так называемый дуальный угол поворота: комплексную композицию вращательного и поступательного перемещений тела.

Ранее в литературе рассматривалась кинематическая задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела, эквивалентного его общему пространственному перемещению [1, 2]. При этом программными управлениями являлись векторы угловой и линейной скоростей тела. Для получения точного (аналитического) решения задачи было использовано дуальное кватернионное (бикватернионное) кинематическое уравнение винтового движения свободного твердого тела, впервые предложенное Ю.Н. Челноковым в 1980 г. [3–5]. Также в [6–8] решены динамические задачи аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (с использованием предложенных в этих работах дуальных кватернионных моделей движения свободного твердого тела) в рамках концепции управления по принципу обратной связи.

В [6] разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных кватернионов Клиффорда и дуальных матриц метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела, эквивалентным композиции углового (вращательного) и поступательного (орбитального) движений. Управления обеспечивают асимптотическую устойчивость «в большом» любого выбранного программного пространственного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого пространственного движения твердого тела. Для построения законов управления использованы дуальные кватернионные и матричные модели пространственного движения твердого тела, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении построенных в статье нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры за счет использования предложенных нелинейных обратных связей в законах управления. Предложены различные дуальные матричные (винтовые) законы управления пространственным движением твердого тела, для которых нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела принимают вид линейных стационарных дуальных матричных дифференциальных уравнений второго порядка (относительно винтовой части дуального кватерниона ошибки положения твердого тела), инвариантных относительно любого выбранного программного пространственного движения твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные дуальные или матричные дуальные) этих уравнений являются коэффициентами усиления нелинейных обратных свя-

зей в предложенных дуальных законах управления, обеспечивающих нужное качество переходных процессов управления. Обсуждено определение коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, свойства такого управляемого движения твердого тела.

В [7] разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных кватернионов (параболических бикватернионов Клиффорда) другой метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (в частности, КА, рассматриваемого как свободное твердое тело). Управление обеспечивает асимптотическую устойчивость «в целом» любого выбранного программного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого движения тела. Для построения законов управления предложены новые дуальные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, в которых, в отличие от [6], использованы ненормированные дуальные кватернионы конечных перемещений, дуальные кватернионы угловых и линейных скоростей и ускорений тела с ненулевыми дуальными скалярными частями (т.е. четырехмерные, а не трехмерные дуальные угловые и линейные скорости и ускорения), что позволило эффективно решить задачу синтеза управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость «в целом» любого выбранного программного движения. Для построения законов управления также использованы концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении построенных уравнений возмущенного движения тела к линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры, инвариантным относительно любого выбранного программного движения, за счет соответствующего выбора дуальных нелинейных обратных связей в предложенных дуальных кватернионных законах управления. Этот подход аналогичен подходу, использованному в [6], но применен к более общим дуальным кватернионным дифференциальным уравнениям возмущенного пространственного движения твердого тела. Построены аналитические решения дуальных кватернионных дифференциальных уравнений, описывающие динамику процесса управления пространственным движением тела с использованием предложенных дуальных кватернионных законов управления. Проанализированы свойства и закономерности такого управления.

В данной статье рассмотрена задача построения взаимосвязанного оптимального по времени и энергии программного управления пространственным движением КА, рассматриваемого как свободное твердое тело произвольной динамической конфигурации, совершающего в инерциальной системе координат оптимальное винтовое коническое движение, эквивалентное композиции поступательного (орбитального) движения центра масс КА и его углового движения (вращения) вокруг центра масс. КА находится под действием главного вектора и главного момента внешних сил, включающих в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Для описания общего пространственного движения КА используются четырехмерные ду-

альные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) и трехмерные дуальные скорости КА, которые являются компонентами дуального кватерниона конечного перемещения Клиффорда и дуального кватерниона угловой и линейной скоростей соответственно, т.е. используются дуальные кватернионы с комплексными (дуальными) компонентами. Используемая для описания этого движения комплексность Клиффорда s обладает свойством равенства нулю ее квадрата: $s^2 = 0$.

Постановка задачи (при произвольных краевых условиях по угловому и линейному положениям КА в инерциальном пространстве и по его абсолютным угловой и линейной скоростям, дуальный вектор управления не ограничен) основана на использовании динамической модели общего пространственного движения КА, эквивалентного его винтовому движению. Для решения задачи использовано дуальное кватернионное (бикватернионное) кинематическое уравнение движения свободного твердого тела [3–5] (дуальная переменная в нем – дуальный кватернион (бикватернион) конечного перемещения тела в инерциальном пространстве), а также использованы полученные авторами в статье как явные функции времени аналитические выражения для четырехмерного дуального кватерниона конечного перемещения и для трехмерных дуальных кватернионов угловых и линейных скоростей и ускорений КА, описывающих обобщенное винтовое коническое движение КА в инерциальном пространстве. Для получения указанных аналитических выражений в статье построено новое аналитическое решение дуального кватернионного кинематического уравнения пространственного движения свободного твердого тела для его обобщенного винтового конического движения. С помощью этих аналитических выражений (после выделения в них главных и моментных частей) сформированы в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики векторы программной управляющей силы и программного управляющего момента, приложенных к КА.

С использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди, позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на дуальные кватернионные (бикватернионные) формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, получен оптимальный в смысле времени и минимума энергетических затрат в классе винтовых обобщенных конических движений алгоритм программного управления пространственным движением КА. Этот алгоритм строится на основе обобщения ранее полученного приближенного аналитического решения кватернионной задачи оптимального по времени и энергозатратам разворота КА как твердого тела при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА. Это решение было получено в рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического углового движения [9–11].

Для нахождения оптимальных параметров обобщенного винтового конического движения и соответствующих им оптимальных угловых и линейных скоростей и ускорений КА использован принцип максимума Л.С. Понтрягина. Найденное аналитическое решение задачи может рассматриваться как решение задачи оптимального по времени и энергии программного управления пространственным движением КА при произвольных граничных условиях в классе обобщенных дуальных (винтовых) конических движений. Приведены результаты моделирования оптимального пространственного маневрирования КА в инерциальной системе координат с помощью предложенных дуальных кватернионных моделей и дуальных законов управления, которые показывают эффективность предложенного метода управления движением КА.

Предложенное оптимальное аналитическое решение задачи программного управления пространственным движением КА имеет не только теоретическую, но и прикладную значимость, так как позволяет использовать в системе управления движением КА полученные в нелинейной постановке аналитические выражения (как явные функции времени) для дуального кватерниона конечного перемещения КА и для дуального кватерниона его абсолютных угловой и линейной скоростей, описывающих оптимальное программное винтовое коническое движение КА в инерциальной системе координат. Также оно позволяет использовать оптимальные аналитические законы изменения во времени программной управляющей силы и программного управляющего момента, приложенные к КА. Это важно, в частности, для пространственного маневрирования КА при исключительно высоких темпах его перемещения, когда крайне ограничено время на расчет программной оптимальной пространственной траектории маневра КА и на расчет программных законов управления, позволяющих реализовать эту траекторию.

Статья продолжает исследования, начатые в [12].

2. Исходные уравнения пространственного движения свободного твердого тела

Рассмотрим свободное твердое тело, например КА, способное совершать относительно основной (инерциальной) системы координат произвольное пространственное движение, эквивалентное пространственному винтовому движению, а также эквивалентное композиции поступательного движения тела вместе с произвольно выбранной точкой тела и вращения тела вокруг этой точки. На тело действуют произвольный главный вектор и главный момент внешних сил. Они включают в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Управляемое пространственное движение тела будем рассматривать относительно инерциальной системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ (ξ) (ее начало O_1 – центр масс Земли, ось $O_1\xi_3$ направлена по оси вращения Земли, а оси $O_1\xi_1$ и $O_1\xi_2$ лежат в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли). С твердым телом жестко свяжем систему координат $CX_1X_2X_3$ (X) с началом в центре масс тела C .

Обозначим: $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ – радиус-вектор и вектор скорости центра масс твердого тела (КА) в инерциальной системе координат; $\boldsymbol{\lambda}$ – кватернион ориентации тела в этой системе координат, его компонентами являются параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) λ_j , $j = \overline{0, 3}$, одинаковые в базисах ξ и X (полагается, что в исходном положении (до поворота тела) ориентации систем координат ξ и X совпадают); $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – векторы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения тела; $\mathbf{F}_c$ и $\mathbf{M}_c$ – векторы управляющей силы и управляющего момента, приложенных к телу; $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ – главный вектор других внешних сил, действующих на твердое тело (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой), и главный момент этих сил, вычисленный относительно центра масс тела, полагаемые известными функциями времени t и переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$.

Исходные дифференциальные уравнения движения твердого тела, записанные в связанной с твердым телом системе координат X , имеют вид:

$$(2.1) \quad m [\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) \mathbf{v}_x] = \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) + \mathbf{F}_{cx}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) \mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x;$$

$$(2.2) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x = \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_x + \mathbf{M}_{cx}];$$

$$(2.3) \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x;$$

$$\mathbf{r}_x = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x = \dot{x}_1 \mathbf{i} + \dot{x}_2 \mathbf{j} + \dot{x}_3 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_x = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{v}}_x = \dot{v}_1 \mathbf{i} + \dot{v}_2 \mathbf{j} + \dot{v}_3 \mathbf{k};$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_v = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1 \mathbf{i} + \dot{\lambda}_2 \mathbf{j} + \dot{\lambda}_3 \mathbf{k};$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \dot{\omega}_1 \mathbf{i} + \dot{\omega}_2 \mathbf{j} + \dot{\omega}_3 \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_1 \mathbf{i} + \varepsilon_2 \mathbf{j} + \varepsilon_3 \mathbf{k};$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь в уравнениях (2.1), (2.2) $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{v}_x$, $\boldsymbol{\omega}_x$, $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{F}_{cx}$, $\mathbf{M}_{cx}$ – вектор-столбцы размерами 3×1 или, далее, кватернионы с нулевыми скалярными частями, составленные из проекций x_k , v_k , ω_k , ε_k , F_k , M_k , F_{ck} , M_{ck} , $k = \overline{1, 3}$, векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{F}_c$, $\mathbf{M}_c$ на оси связанной системы координат X ; m – масса тела, $\mathbf{J}$ – постоянная матрица инерции твердого тела; $\mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)$ – кососимметрическая матрица угловых скоростей тела, сопоставляемая вектору $\boldsymbol{\omega}$; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – орты гиперкомплексного пространства (векторные мнимые единицы Гамильтона); $\mathbf{a}_y$ – отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис Y ($Y = \xi, X$), определяемое как кватернион $\mathbf{a}_y = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$, компоненты которого – проекции a_k вектора $\mathbf{a}$ на базис Y ; верхняя точка означает производную по времени t (при вычислении производной от кватерниона орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ полагаются неизменными), знак « $\circ$ » означает кватернионное умножение.

Первое матричное уравнение (2.1) и матричное уравнение (2.2) являются динамическими, а второе матричное уравнение (2.1) и кватернионное уравнение (2.3) – кинематическими уравнениями пространственного движения твер-

дого тела, представляющего собой композицию поступательного (траекторного) и углового (вращательного) движений. Указанные уравнения представляют собой систему нелинейных, нестационарных дифференциальных уравнений тринадцатого порядка относительно переменных x_k , v_k и λ_j , ω_k . В случае, когда с твердым телом жестко связывается система координат $OX_1X_2X_3$ (X) с началом в другой произвольно выбранной точке O тела, в состав главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента $\mathbf{M}$ внешних сил включаются переносная сила инерции и ее момент относительно точки O твердого тела.

3. Постановка задачи управления КА с использованием дуальных кватернионов и концепции решения обратной задачи динамики

В соответствии с концепцией решения обратных задач динамики законы формирования вектор-столбца $\mathbf{F}_{cx}$ управляющей силы $\mathbf{F}_c$ и вектор-столбца $\mathbf{M}_{cx}$ управляющего момента $\mathbf{M}_c$, составленных из проекций F_{ck} и M_{ck} , $k = \overline{1,3}$, векторов $\mathbf{F}_c$ и $\mathbf{M}_c$ на оси системы координат X , связанной с КА, получаются на основе уравнений движения (2.1), (2.2) и имеют вид:

$$(3.1) \quad \mathbf{F}_{cx} = m [\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x),$$

$$(3.2) \quad \mathbf{M}_{cx} = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{J}\omega_x - \mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \omega_x).$$

В векторно-матричный закон управления (3.1) входит вектор-столбец $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x$, составленный из первых производных по времени от проекций v_k вектора $\mathbf{v}$ скорости центра масс тела C в инерциальной системе координат ξ (вектора абсолютной скорости центра масс КА) на оси вращающейся системы координат X , а в векторно-матричный закон управления (3.2) входит вектор-столбец $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, составленный из проекций ε_k вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ углового ускорения КА в инерциальной системе координат (вектора абсолютного углового ускорения тела) на оси системы координат X .

Эти вектор-столбцы $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ будем рассматривать как новые управления. Они могут быть построены, например, с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина на основе векторно-матричных и кватернионных уравнений:

$$(3.3) \quad \dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x,$$

$$(3.4) \quad \dot{\omega}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \omega_x,$$

вытекающих из уравнений движения твердого тела (2.1)–(2.3).

Подчеркнем, что новые управления $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ имеют ясный механический смысл. $\mathbf{w}_x$ – это вектор-столбец, компонентами которого являются проекции на оси связанной системы координат X составляющей $\dot{\mathbf{v}} = (d\mathbf{v}/dt)_{\text{лок}}$ вектора $\mathbf{W}$ абсолютного линейного ускорения центра масс КА C (проекция локальной производной $(d\mathbf{v}/dt)_{\text{лок}}$ от вектора $\mathbf{v}$ абсолютной скорости точки C , вычисленной в этой системе координат). Полный вектор $\mathbf{W}$ абсолютного линейного ускорения центра масс КА равен сумме векторов $\dot{\mathbf{v}}$ и $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, определенных своими проекциями в системе координат X : $\mathbf{W}_x = \dot{\mathbf{v}}_x + \omega_x \times \times \mathbf{v}_x = \mathbf{w}_x + \omega_x \times \mathbf{v}_x$ (здесь « $\times$ » – символ векторного произведения).

ε – это вектор абсолютного углового ускорения твердого тела (одна из основных характеристик абсолютного углового (вращательного) движения твердого тела), ε_x – вектор-столбец, компоненты которого – проекции вектора ε на оси системы координат X .

Введение в качестве управления составляющей $\dot{\mathbf{v}} = (d\mathbf{v}/dt)_{\text{лок}}$ вектора абсолютного линейного ускорения центра масс КА позволяет предложить для описания пространственного движения КА бикватернионную дифференциальную модель пространственного движения КА, удобную для решения задачи управления пространственным движением КА с использованием дуальных кватернионов и принципа максимума.

После нахождения новых управлений $\mathbf{w}_x$ и ε_x на основе дифференциальных уравнений (3.3) и (3.4) будут найдены и соответствующие этим управлениям фазовые переменные $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{v}_x$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}_x$, входящие в эти уравнения, а затем будут найдены управляющая сила $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющий момент $\mathbf{M}_{cx}$ в соответствии с алгебраическими соотношениями (3.1), (3.2).

Таким образом, задача построения управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ с использованием концепции решения обратных задач динамики сводится авторами к построению требуемой составляющей $\mathbf{w}_x$ абсолютного линейного ускорения и требуемого абсолютного углового ускорения ε_x , входящих в качестве новых управлений в дифференциальные уравнения (3.3), (3.4).

Очевидно, что уравнения (3.3), (3.4) верны для любого движущегося объекта (т.е. свободного твердого тела). Поэтому управления $\mathbf{w}_x$ и ε_x для всех таких тел строятся одинаковым способом. Специфика объекта (его массово-инерционные и другие характеристики, действующие внешние возмущающие силы и их моменты) учитываются при построении управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ на основе конечных соотношений (3.1), (3.2); в их правые части включены главный вектор $\mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x)$ других внешних сил, действующих на твердое тело (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой) и главный момент $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ этих сил, вычисленный относительно центра масс тела. Главный вектор и главный момент полагаются известными функциями времени t и переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$.

Поставим задачу нахождения новых управлений $\mathbf{w}_x$ и ε_x в терминах дуальных кватернионов. Введем в рассмотрение кинематический винт $\mathbf{U}$ КА, отображение которого $\mathbf{U}_x$ на связанный с телом (КА) базис X определяется дуальным кватернионом:

$$(3.5) \quad \mathbf{U}_x = U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} + U_3 \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_x + s \mathbf{v}_x, \quad U_k = \omega_k + s v_k,$$

где $\boldsymbol{\omega}_x$ и $\mathbf{v}_x$ – кватернионы: $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_x = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$; s – символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством $s^2 = 0$; $U_k = \omega_k + s v_k$, $k = \overline{1, 3}$ – дуальные ортогональные проекции кинематического винта $\mathbf{U}$ на базис X .

Тогда векторно-матричные (3.3) и кватернионные (3.4) дифференциальные уравнения можно заменить двумя следующими дуальными кватернионными (бикватернионными) дифференциальными уравнениями [6–8]:

$$(3.6) \quad \dot{\mathbf{U}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x = \mathbf{H}_x;$$

$$(3.7) \quad 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}_x;$$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_x &= U_1\mathbf{i} + U_2\mathbf{j} + U_3\mathbf{k}, & U_k &= \omega_k + sv_k, & \boldsymbol{\varepsilon}_x &= \varepsilon_1\mathbf{i} + \varepsilon_2\mathbf{j} + \varepsilon_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{w}_x &= w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}, & \mathbf{H}_x &= H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j} + H_3\mathbf{k}, & H_k &= \varepsilon_k + sw_k; \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad \boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \boldsymbol{\Lambda}_v = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0, \quad \Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0.$$

Здесь искомыми переменными являются дуальный кватернион $\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x$ (отображение кинематического винта $\mathbf{U}$ КА на связанный с КА базис X) и дуальный кватернион $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0$ перемещения КА в инерциальном пространстве. Его главная часть (кватернион $\boldsymbol{\lambda}$) описывает ориентацию КА в инерциальной системе координат, а моментная (кватернион $\boldsymbol{\lambda}^0$) – местоположение КА в этой системе координат. Декартовы координаты x_k , $k = \overline{1, 3}$, центра масс КА в этой системе координат можно определить, зная компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$. Дуальное управление в этой задаче есть дуальный кватернион $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$, т.е. дуальная композиция требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и требуемой составляющей $\mathbf{w}_x$ абсолютного линейного ускорения КА (дуальная композиция новых управлений $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$).

Введение в качестве управления составляющей вектора абсолютного линейного ускорения центра масс КА (локальной производной от вектора абсолютной скорости центра масс) позволяет предложить для описания пространственного движения КА дифференциальное дуальное кватернионное уравнение (3.6) для кинематического винта, которое в совокупности с кинематическим дуальным кватернионным уравнением (3.7) пространственного движения КА образуют полную математическую модель его пространственного движения, удобную для решения задачи управления пространственным движением КА с использованием дуальных кватернионов и принципа максимума.

Координаты ξ_k центра масс КА в инерциальной системе координат ξ (т.е. проекции его радиус-вектора $\mathbf{r}$) и проекции x_k этого вектора на оси связанной с КА системы координат X связаны с компонентами кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ соотношениями [3, 5]:

$$(3.10) \quad \mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0,$$

где верхняя волна – символ кватернионного сопряжения.

Сформулируем следующую задачу для нахождения новых управлений $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ с использованием дуальных кватернионов: необходимо построить в классе оптимальных винтовых обобщенных конических движений дуальное кватернионное программное управление $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$ (дуальную композицию

составляющей вектора абсолютного линейного ускорения центра масс КА и вектора абсолютного углового ускорения твердого тела), обеспечивающее программный перевод КА, движение которого описывается уравнениями (3.6), (3.7), из его произвольного заданного начального состояния

$$(3.11) \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}(0) + s\boldsymbol{\lambda}^0(0), \quad \mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x(0) = \boldsymbol{\omega}_x(0) + s\mathbf{v}_x(0)$$

в его заданное конечное состояние

$$(3.12) \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(t_1) = \mathbf{\Lambda}_k = \boldsymbol{\lambda}_k + s\boldsymbol{\lambda}_k^0, \quad \mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x(t_1) = \mathbf{U}_x^k = \boldsymbol{\omega}_x^k + s\mathbf{v}_x^k$$

за время t_1 , подлежащее определению.

Краевые условия $\boldsymbol{\lambda}^0(0)$ и $\boldsymbol{\lambda}_k^0$ находятся через заданные начальные и конечные значения кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{r}_\xi$ по формуле:

$$(3.13) \quad \boldsymbol{\lambda}^0 = (1/2) \mathbf{r}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} = (1/2) (\xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k}) \circ (\lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}),$$

где $\xi_k, k = \overline{1, 3}$ – координаты объекта в инерциальной системе координат.

После решения поставленной задачи в построенном управлении $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$ необходимо выделить главную $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и моментную $\mathbf{w}_x = \dot{\mathbf{v}}_x$ части. После этого выделения законы формирования управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ получаются в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики по формулам (3.1) и (3.2).

4. Аналитическое решение задачи оптимального программного управления

С использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди, позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на дуальные кватернионные формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, получим оптимальный в классе винтовых обобщенных конических движений алгоритм программного управления пространственным движением КА для задачи раздела 3 статьи. Этот алгоритм строится с использованием дуальных кватернионов Клиффорда и принципа перенесения Котельникова–Штуди путем обобщения аналитического решения кватернионной задачи оптимального по времени и энергии разворота КА в классе обобщенных конических угловых движений твердого тела при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА [9–11], которое, в свою очередь, получено на основе точного решения введенной Я.Г. Сапунковым модифицированной задачи оптимального разворота твердого тела [13]. Приведем это бикватернионное решение.

В случае, когда свободное твердое тело совершает пространственное обобщенное винтовое коническое движение, для которого кинематический винт $\mathbf{U}_x$ тела имеет вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_x(t) &= U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} + U_3 \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = \\ &= \left(\dot{F}(t) \sin G(t) \right) \mathbf{i} + \left(\dot{F}(t) \cos G(t) \right) \mathbf{j} + \dot{G}(t) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

где $F(t)$, $G(t)$, $\dot{F}(t)$, $\dot{G}(t)$ – произвольные дифференцируемые дуальные функции времени:

$$\begin{aligned} F(t) &= f(t) + sf^0(t), \quad \dot{F}(t) = \dot{f}(t) + s\dot{f}^0(t), \\ G(t) &= g(t) + sg^0(t), \quad \dot{G}(t) = \dot{g}(t) + s\dot{g}^0(t), \end{aligned}$$

дуальное кватернионное кинематическое уравнение (3.7) общего пространственного движения твердого тела имеет построенное авторами аналитическое решение:

$$(4.2) \quad \Lambda(t) = \Lambda(0) \circ \exp \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \exp \{((F(t) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(G(t)/2) \mathbf{k}\}$$

– дуальный аналог известного кватернионного решения [9–11] кинематического уравнения вращательного движения тела, « $\exp\{\cdot\}$ » обозначает дуальную кватернионную экспоненту [5].

Винтовое движение свободного твердого тела (КА), описываемое соотношениями (4.1), (4.2), можно обобщить, добавив произвольный дуальный поворот в инерциальной системе координат на дуальный постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой дуальный поворот задается с помощью произвольного постоянного дуального кватерниона $\mathbf{K} = \kappa + s\kappa^0$, $\|\mathbf{K}\| = 1$ (в правые части формул (4.1), (4.2) добавятся умножения слева и справа на дуальные кватернионы $\tilde{\mathbf{K}}$ и $\mathbf{K}$ соответственно, где $\tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{K} = \mathbf{K} \circ \tilde{\mathbf{K}} = 1$):

$$(4.3) \quad \mathbf{U}_x(t) = \tilde{\mathbf{K}} \circ \left[\left(\dot{F}(t) \sin G(t) \right) \mathbf{i} + \left(\dot{F}(t) \cos G(t) \right) \mathbf{j} + \dot{G}(t) \mathbf{k} \right] \circ \mathbf{K},$$

$$(4.4) \quad \Lambda(t) = \Lambda(0) \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \exp \{((F(t) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(G(t)/2) \mathbf{k}\} \circ \mathbf{K}.$$

Формулы (4.3), (4.4) содержат (при $s = 0$) все найденные ранее точные кватернионные аналитические решения классической задачи оптимального разворота динамически-симметричного твердого тела в том случае, когда вектор угловой скорости во все время его движения сохраняет постоянное направление или описывает в пространстве круговой конус [14, 15], и их дуальные аналоги (при $s \neq 0$), построенные здесь в статье. Предлагаемая структура кинематического винта (4.1) или (4.3), в кватернионном случае – вектора угловой скорости КА, хорошо соотносится с концепцией Пуансо: всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела.

Ограничимся случаем, когда постоянный дуальный кватернион $\mathbf{K}$ представляется в виде произведения двух постоянных дуальных кватернионов:

$$(4.5) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp \{(A_1/2) \mathbf{i}\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp \{(A_2/2) \mathbf{j}\},$$

где $A_1 = \alpha_1 + s\alpha_1^0$, $A_2 = \alpha_2 + s\alpha_2^0$ – некоторые дуальные скалярные постоянные. Отметим, что дуальные кватернионы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ определяют дуальные повороты винта $\mathbf{U}_x$ вокруг осей $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Дуальный поворот вокруг оси $\mathbf{k}$ уже включен в (4.4), так как в дуальную функцию $G(t)$ входит аддитивная постоянная.

Сопряженный дуальный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$(4.6) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp \{-(A_1/2) \mathbf{i}\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp \{-(A_2/2) \mathbf{j}\}.$$

Тогда кинематический винт $\mathbf{U}_x$ свободного твердого тела (КА) и аналитическое решение дуального кватернионного кинематического уравнения (3.7) для рассматриваемого пространственного винтового движения КА примут вид:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_x(t) = & \exp \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \exp \{-(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \\ & \circ \left[\left(\dot{F}(t) \sin G(t) \right) \mathbf{i} + \left(\dot{F}(t) \cos G(t) \right) \mathbf{j} + \dot{G}(t) \mathbf{k} \right] \circ \\ & \circ \exp \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(A_1/2) \mathbf{i}\}, \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \Lambda(t) = & \Lambda(0) \circ \exp \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \exp \{-(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \\ & \circ \exp \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \exp \{((F(t) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \\ & \circ \exp \{(G(t)/2) \mathbf{k}\} \circ \exp \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(A_1/2) \mathbf{i}\}. \end{aligned}$$

Декартовы координаты ξ_k центра масс тела в инерциальной системе координат и проекции x_k радиус-вектора центра масс на оси связанной с твердым телом системы координат X находятся через компоненты кватернионов λ и λ^0 по формулам (3.10), а проекции вектора скорости центра масс КА в инерциальной системе координат на ее же координатные оси – по кватернионной формуле

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_\xi = \dot{\mathbf{r}}_\xi = \dot{\xi}_1 \mathbf{i} + \dot{\xi}_2 \mathbf{j} + \dot{\xi}_3 \mathbf{k} = & 2 \left(\dot{\lambda}^0 \circ \tilde{\lambda} + \lambda^0 \circ \tilde{\dot{\lambda}} \right) = \\ = & 2 \dot{\lambda}^0 \circ \tilde{\lambda} - \lambda^0 \circ \omega_x \circ \tilde{\lambda} = \left(2 \dot{\lambda}^0 - \lambda^0 \circ \omega_x \right) \circ \tilde{\lambda}. \end{aligned}$$

Поставим задачу нахождения оптимальных параметров винтового конического движения КА (обобщающую задачу нахождения оптимальных параметров обобщенного углового конического движения КА [9–11]).

Будем рассматривать вторые производные от дуальных функций $F(t)$ и $G(t)$ (от дуальных параметров винтового конического движения) в качестве управляющих параметров. Пусть $\dot{F} = F_1$, $\dot{G} = G_1$ – дуальные фазовые координаты, а U_{c1} , U_{c2} – дуальные управляющие параметры. Тогда управляемая система будет описываться следующей системой скалярных дуальных дифференциальных уравнений:

$$(4.10) \quad \dot{F} = F_1, \quad \dot{G} = G_1, \quad \dot{F}_1 = U_{c1}, \quad \dot{G}_1 = U_{c2},$$

где $F = f + sf^0$, $G = g + sg^0$, $F_1 = f_1 + sf_1^0$, $G_1 = g_1 + sg_1^0$ – дуальные фазовые координаты, $U_{c1} = u_{c1} + su_{c1}^0$, $U_{c2} = u_{c2} + su_{c2}^0$ – дуальные управления.

Система (4.10) четырех скалярных дуальных дифференциальных уравнений эквивалентна системе восьми скалярных вещественных дифференциальных уравнений:

$$(4.11) \quad \dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_{c1}, \quad \dot{g}_1 = u_{c2};$$

$$(4.12) \quad \dot{f}^0 = f_1^0, \quad \dot{g}^0 = g_1^0, \quad \dot{f}_1^0 = u_{c1}^0, \quad \dot{g}_1^0 = u_{c2}^0.$$

Подсистемы вещественных дифференциальных уравнений (4.11) и (4.12) независимы, так как исходная система (4.10) дуальных дифференциальных уравнений линейна.

Тогда для дуальной управляемой системы (4.10) или вещественной управляемой системы (4.11), (4.12) можно сформулировать следующую задачу: требуется найти дуальные оптимальные управления $U_{c1}(t) = u_{c1}(t) + su_{c1}^0(t)$, $U_{c2}(t) = u_{c2}(t) + su_{c2}^0(t)$ или вещественные оптимальные управления $u_{c1}(t)$, $u_{c2}(t)$ и $u_{c1}^0(t)$, $u_{c2}^0(t)$, которые переводят управляемую систему (4.10) ((4.11), (4.12)) из начального состояния

$$(4.13) \quad \left. \begin{aligned} F &= F(0) = f(0) + sf^0(0), & G &= G(0) = g(0) + sg^0(0), \\ F_1 &= F_1(0) = f_1(0) + sf_1^0(0), & G_1 &= G_1(0) = g_1(0) + sg_1^0(0); \end{aligned} \right\} \sim \\ \sim \left\{ \begin{aligned} f &= f(0), & f^0 &= f^0(0), & g &= g(0), & g^0 &= g^0(0), \\ f_1 &= f_1(0), & f_1^0 &= f_1^0(0), & g_1 &= g_1(0), & g_1^0 &= g_1^0(0) \end{aligned} \right.$$

в конечное состояние

$$(4.14) \quad \left. \begin{aligned} F &= F(t_1) = f(t_1) + sf^0(t_1), & G &= G(t_1) = g(t_1) + sg^0(t_1), \\ F_1 &= F_1(t_1) = f_1(t_1) + sf_1^0(t_1), & G_1 &= G_1(t_1) = g_1(t_1) + sg_1^0(t_1) \end{aligned} \right\} \sim \\ \sim \left\{ \begin{aligned} f &= f(t_1), & f^0 &= f^0(t_1), & g &= g(t_1), & g^0 &= g^0(t_1), \\ f_1 &= f_1(t_1), & f_1^0 &= f_1^0(t_1), & g_1 &= g_1(t_1), & g_1^0 &= g_1^0(t_1) \end{aligned} \right.$$

доставляют минимум дуальному комбинированному функционалу:

$$(4.15) \quad J = \int_0^{t_1} (1 + U_{c1}^2 + U_{c2}^2) dt$$

и удовлетворяют соотношениям (4.7), (4.8) в начальный и конечный моменты времени (конечный момент времени t_1 не задан и подлежит определению):

$$(4.16) \quad \begin{aligned} &[(F_1(0) \sin G(0)) \mathbf{i} + (F_1(0) \cos G(0)) \mathbf{j} + G_1(0) \mathbf{k}] = \\ &= \mathbf{exp} \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \mathbf{exp} \{(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{U}_x(0) \circ \\ &\circ \mathbf{exp} \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{exp} \{-(A_2/2) \mathbf{j}\}, \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad \begin{aligned} &[(F_1(t_1) \sin G(t_1)) \mathbf{i} + (F_1(t_1) \cos G(t_1)) \mathbf{j} + G_1(t_1) \mathbf{k}] = \\ &= \mathbf{exp} \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \mathbf{exp} \{(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{U}_x(t_1) \circ \\ &\circ \mathbf{exp} \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{exp} \{-(A_2/2) \mathbf{j}\}; \end{aligned}$$

$$(4.18) \quad \begin{aligned} &\Lambda(0) \circ \mathbf{exp} \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{exp} \{-(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \\ &\circ [\mathbf{exp} \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \mathbf{exp} \{((F(t_1) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \mathbf{exp} \{(G(t_1)/2) \mathbf{k}\}] \circ \\ &\circ \mathbf{exp} \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \mathbf{exp} \{(A_1/2) \mathbf{i}\} = \Lambda(t_1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & \exp \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \exp \{((F(t_1) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(G(t_1)/2) \mathbf{k}\} = \\
 (4.19) \quad & = \exp \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \tilde{\Lambda}(0) \circ \Lambda(t_1) \circ \\
 & \circ \exp \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \exp \{-(A_2/2) \mathbf{j}\}.
 \end{aligned}$$

Законы формирования управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ получаются в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики по формулам:

$$\begin{aligned}
 (4.20) \quad \mathbf{F}_{cx} &= F_{c1}\mathbf{i} + F_{c2}\mathbf{j} + F_{c3}\mathbf{k} = m [\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) = \\
 &= m [\mathbf{w}_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x),
 \end{aligned}$$

$$(4.21) \quad \mathbf{M}_{cx} = M_{c1}\mathbf{i} + M_{c2}\mathbf{j} + M_{c3}\mathbf{k} = \mathbf{J}\varepsilon_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{J}\omega_x - \mathbf{M}_x(t, \lambda, \omega_x),$$

где кватернионы $\mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, $\omega_x = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$, $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x = \dot{v}_1\mathbf{i} + \dot{v}_2\mathbf{j} + \dot{v}_3\mathbf{k}$, $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_1\mathbf{i} + \dot{\omega}_2\mathbf{j} + \dot{\omega}_3\mathbf{k}$, $\varepsilon_x = \dot{\omega}_x = \varepsilon_1\mathbf{i} + \varepsilon_2\mathbf{j} + \varepsilon_3\mathbf{k}$ получаются в результате выделения главной и моментной частей в дуальном соотношении (4.7):

$$\begin{aligned}
 (4.22) \quad \omega_1 &= f_1 \sin g \cos \alpha_2 - g_1 \sin \alpha_2, \\
 \omega_2 &= f_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + g_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\
 \omega_3 &= f_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + g_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.23) \quad \dot{\omega}_1 &= (u_{c1} \sin g + f_1 g_1 \cos g) \cos \alpha_2 - u_{c2} \sin \alpha_2, \\
 \dot{\omega}_2 &= u_{c1} (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + \\
 &+ f_1 g_1 (\cos g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin g \cos \alpha_1) + u_{c2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\
 \dot{\omega}_3 &= u_{c1} (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + \\
 &+ f_1 g_1 (\cos g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin g \sin \alpha_1) + u_{c2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.24) \quad \mathbf{v}_x &= e^{-\frac{\alpha_1}{2}\mathbf{i}} \circ \left[\boldsymbol{\beta} \times (\alpha_1^0\mathbf{i} + \alpha_2^0\mathbf{j}) + e^{-\frac{\alpha_2}{2}\mathbf{j}} \circ ((f_1^0 \sin g + f_1 g^0 \cos g)\mathbf{i} + \right. \\
 &+ (f_1^0 \cos g - f_1 g^0 \sin g)\mathbf{j} + g_1^0\mathbf{k}) \circ e^{\frac{\alpha_2}{2}\mathbf{j}} \left. \right] \circ e^{\frac{\alpha_1}{2}\mathbf{i}}, \\
 \boldsymbol{\beta} &= e^{-\frac{\alpha_2}{2}\mathbf{j}} \circ (f_1 \sin g \mathbf{i} + f_1 \cos g \mathbf{j} + g_1 \mathbf{k}) \circ e^{\frac{\alpha_2}{2}\mathbf{j}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.25) \quad \dot{\mathbf{v}}_x &= e^{-\frac{\alpha_1}{2}\mathbf{i}} \circ \left[\dot{\boldsymbol{\beta}} \times (\alpha_1^0\mathbf{i} + \alpha_2^0\mathbf{j}) + e^{-\frac{\alpha_2}{2}\mathbf{j}} \circ \left(((u_{c1}^0 - f_1 g^0 g_1) \sin g + \right. \right. \\
 &+ (f_1^0 g_1 + u_{c1} g^0 + f_1 g_1^0) \cos g) \mathbf{i} + ((u_{c1}^0 - f_1 g^0 g_1) \cos g - \\
 &- (f_1^0 g_1 + u_{c1} g^0 + f_1 g_1^0) \sin g) \mathbf{j} + u_{c2} \mathbf{k} \left. \right) \circ e^{\frac{\alpha_2}{2}\mathbf{j}} \left. \right] \circ e^{\frac{\alpha_1}{2}\mathbf{i}}, \\
 \dot{\boldsymbol{\beta}} &= e^{-\frac{\alpha_2}{2}\mathbf{j}} \circ ((u_{c1} \sin g + f_1 g_1 \cos g) \mathbf{i} + (u_{c1} \cos g - f_1 g_1 \sin g) \mathbf{j} + u_{c2} \mathbf{k}) \circ e^{\frac{\alpha_2}{2}\mathbf{j}}.
 \end{aligned}$$

Задача (4.3)–(4.25) решается авторами с помощью принципа максимума. Дуальная функция Гамильтона–Понтрягина для управляемой системы (4.10)

или (4.11) и (4.12) и комбинированного функционала (4.15) имеет вид:

$$(4.26) \quad H = -(1 + U_{c1}^2 + U_{c2}^2) + \Psi_1 F_1 + \Psi_2 G_1 + \Psi_3 U_{c1} + \Psi_4 U_{c2} = 0, \quad \forall t \in [0, t_1],$$

где $\Psi_1 = \psi_1 + s\psi_1^0$, $\Psi_2 = \psi_2 + s\psi_2^0$, $\Psi_3 = \psi_3 + s\psi_3^0$, $\Psi_4 = \psi_4 + s\psi_4^0$ – дуальные сопряженные переменные, удовлетворяющие дуальной системе уравнений:

$$(4.27) \quad \dot{\Psi}_1 = 0, \quad \dot{\Psi}_2 = 0, \quad \dot{\Psi}_3 = -\Psi_1, \quad \dot{\Psi}_4 = -\Psi_2,$$

которая эквивалентна двум системам вещественных уравнений:

$$(4.28) \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2;$$

$$(4.29) \quad \dot{\psi}_1^0 = 0, \quad \dot{\psi}_2^0 = 0, \quad \dot{\psi}_3^0 = -\psi_1^0, \quad \dot{\psi}_4^0 = -\psi_2^0.$$

Общие решения уравнений (4.27) или (4.28), (4.29), содержащие дуальные произвольные постоянные интегрирования $C_i = c_i + sc_i^0$, $i = \overline{0, 4}$, или вещественные произвольные постоянные интегрирования $c_1, \dots, c_4$ и $c_1^0, \dots, c_4^0$, имеют вид:

$$(4.30) \quad \Psi_1 = C_1, \quad \Psi_2 = C_2, \quad \Psi_3 = -C_1 t + C_3, \quad \Psi_4 = -C_2 t + C_4;$$

$$(4.31) \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4,$$

$$(4.32) \quad \psi_1^0 = c_1^0, \quad \psi_2^0 = c_2^0, \quad \psi_3^0 = -c_1^0 t + c_3^0, \quad \psi_4^0 = -c_2^0 t + c_4^0.$$

Искомые оптимальные дуальные управления

$$(4.33) \quad U_{c1} = (-C_1 t + C_3)/2, \quad U_{c2} = (-C_2 t + C_4)/2$$

доставляют максимум функции Гамильтона–Понтрягина (4.26).

Выделим в дуальных управлениях (4.33), содержащих дуальные величины

$$U_{c1} = u_{c1} + su_{c1}^0, \quad U_{c2} = u_{c2} + su_{c2}^0, \\ \Psi_3 = \psi_3 + s\psi_3^0, \quad \Psi_4 = \psi_4 + s\psi_4^0, \quad C_i = c_i + sc_i^0, \quad i = \overline{0, 4},$$

главные и моментные части (скалярные вещественные управления u_{c1} , u_{c2} и u_{c1}^0 , u_{c2}^0):

$$U_{c1} = u_{c1} + su_{c1}^0 = (\psi_3 + s\psi_3^0)/2 = [(-c_1 t + c_3) + s(-c_1^0 t + c_3^0)]/2, \\ U_{c2} = u_{c2} + su_{c2}^0 = (\psi_4 + s\psi_4^0)/2 = [(-c_2 t + c_4) + s(-c_2^0 t + c_4^0)]/2.$$

Подставляя (4.33) в систему дуальных дифференциальных уравнений (4.10), найдем общее решение для фазовых координат F , G , F_1 , G_1 , содержащее восемь дуальных произвольных постоянных $C_1 = c_1 + sc_1^0, \dots, C_8 = c_8 + sc_8^0$:

$$(4.34) \quad \begin{aligned} F(t) &= -C_1 t^3/12 + C_3 t^2/4 + C_5 t + C_6, \\ G(t) &= -C_2 t^3/12 + C_4 t^2/4 + C_7 t + C_8, \\ F_1(t) &= -C_1 t^2/4 + C_3 t/2 + C_5, \\ G_1(t) &= -C_2 t^2/4 + C_4 t/2 + C_7. \end{aligned}$$

Неизвестные дуальные постоянные $C_1, \dots, C_8$ подлежат определению. Так как постоянная C_6 входит в функцию F как аддитивная постоянная, то из формулы (4.8), содержащей выражение $\exp \{((F(t) - F(0))/2) \mathbf{j}\}$, видно, что эта дуальная постоянная не оказывает влияния. По этой причине постоянную C_6 можно положить равной нулю. Таким образом, для определения девяти неизвестных дуальных постоянных задачи $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$ и времени переходного процесса t_1 служит девять дуальных уравнений из системы (4.16), (4.17), (4.19) и скалярная часть условия (4.26) в момент времени t_1 (отметим, что в дуальном кватернионном уравнении (4.19) независимыми являются только три уравнения в дуальной скалярной форме из-за нормированности дуального кватерниона Λ). Подставляя в (4.7), (4.8) формулы (4.33), (4.34), получим аналитические дуальные формулы для нахождения искомых оптимальных законов изменения кинематического винта $\mathbf{U}_x$ свободного твердого тела и дуального кватерниона Λ , описывающего оптимальные траектории углового (вращательного) и поступательного (орбитального) движений свободного твердого тела. Эти формулы опишут оптимальное в смысле комбинированного функционала перемещение тела в классе винтовых обобщенных конических движений. Законы формирования управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ находятся в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики по формулам (4.20), (4.21).

Задача оптимального в смысле комбинированного функционала, объединяющего время и энергию, перемещения свободного твердого тела (КА) в классе винтовых обобщенных конических движений решена тем самым полностью.

Оптимальный алгоритм пространственного движения КА произвольной динамической конфигурации при произвольных краевых условиях имеет вид:

1) по заданным дуальным величинам $\Lambda(0), \Lambda(t_1), \mathbf{U}_x(0), \mathbf{U}_x(t_1)$ (формулы (3.11), (3.12) для краевых условий задачи) с помощью решения системы алгебраических дуальных уравнений (4.5), (4.6), (4.16), (4.17), (4.19), дополненной условием (4.26) для скалярной части функции Гамильтона–Понтрягина, вычисляются девять дуальных неопределенных констант $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$ и время t_1 ; далее находятся дуальные функции F, G, F_1, G_1 ;

2) используя (4.5), вычисляем постоянный дуальный кватернион $\mathbf{K}$;

3) по формуле (4.7) определяем кинематический винт КА $\mathbf{U}_x(t)$;

4) по формуле (4.8) определяем дуальный кватернион пространственного винтового движения КА $\Lambda(t)$;

5) по формулам (4.20), (4.21) строятся законы формирования управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ КА;

6) из выражения (4.15) находится значение критерия оптимизации задачи оптимального пространственного движения (маневрирования) КА.

Следует отметить, что в случаях кватернионных задач оптимального разворота сферически-симметричного КА в классах плоских эйлеровых разворотов и регулярных угловых конических движений известные оптимальные решения классической задачи и аналитические решения задачи управления угловым движением КА [9–11], оптимальные в классе обобщенных угловых конических движений, полностью совпадают. На основании принципа перенесения Котельникова–Штуди можно утверждать то же самое относительно дуальных пространственных аналогов этих управляемых движений КА.

5. Числовые примеры

В этом разделе рассматриваются примеры расчетов оптимального в классе обобщенных винтовых конических движений пространственного движения (маневрирования) КА по предложенному алгоритму, показывающие эффективность полученного аналитического решения задачи для различных динамических конфигураций КА.

Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по формулам (кватернион λ является безразмерным) [16]:

$$\begin{aligned} J^{\text{масш}} &= ((J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)/3)^{1/2}, \quad J_k^{\text{безраз}} = J_k/J^{\text{масш}}; \\ \omega_x^{\text{безраз}} &= (J^{\text{масш}})^{1/2} a^{1/4} \omega_x, \quad t^{\text{безраз}} = (J^{\text{масш}})^{-1/2} a^{-1/4} t, \\ \mathbf{M}^{\text{безраз}} &= a^{1/2} \mathbf{M}, \end{aligned}$$

а также по формулам:

$$\lambda^0{}^{\text{безраз}} = \lambda^0/L, \quad \varepsilon_x^{\text{безраз}} = J^{\text{масш}} a^{1/2} \varepsilon_x, \quad \mathbf{w}_x^{\text{безраз}} = L (J^{\text{масш}})^{-1} a^{-1/2} \mathbf{w}_x.$$

Здесь $a = 1(\text{Н} \cdot \text{м})^{-2} = 1 \text{ кг}^{-2} \cdot \text{м}^{-4} \cdot \text{с}^4$, L – масштабный множитель для расстояния.

В этом случае фазовые уравнения задачи и основные формулы предложенного алгоритма не изменятся.

Примем, что главный вектор других внешних сил $\mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x)$, входящий в формулу (4.20) для вычисления управляющей силы, вызван лишь центральной силой гравитационного притяжения КА к Земле, равной

$$\mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) = \mathbf{F}_x(\mathbf{r}_x) = -G \frac{M_0 m}{r^3} \mathbf{r}_x,$$

где G – гравитационная постоянная, а M_0 – масса притягивающего тела (Земли), $r = |\mathbf{r}_x|$.

Гравитационный момент в этом центральном поле сил определяется следующим соотношением [17]:

$$\mathbf{M}_{\text{грав}} = 3\mu \frac{\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\gamma}}{r^3}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mu = GM_0$ – гравитационный параметр притягивающего тела (Земли).

Тогда выражения для управляющих силы и момента (4.20), (4.21) в безразмерном виде запишутся так:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \mathbf{w}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x + N_G \mathbf{r}_x / |\mathbf{r}_x|^3, \\ \mathbf{M}_{cx} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x - 3N_G \mathbf{r}_x \times \mathbf{J}\mathbf{r}_x / |\mathbf{r}_x|^5. \end{aligned}$$

Здесь $N_G = GM_0 T^2 / L^3$ – безразмерный параметр задачи, $T = (J^{\text{масс}})^{1/2} \times a^{1/4}$ – масштабный множитель для времени.

Учтем, что $\|\boldsymbol{\lambda}\| = 1$, тогда формулы (5.1) для нахождения управляющей силы и управляющего момента в безразмерном виде примут вид

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_{cx} &= \mathbf{w}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x + N_G \frac{\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0}{\|\boldsymbol{\lambda}^0\|^{3/2}}, \\ \|\boldsymbol{\lambda}^0\| &= (\lambda_0^0)^2 + (\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2 + (\lambda_3^0)^2. \\ \mathbf{M}_{cx} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x - 3N_G \frac{(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0) \times \mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\|\boldsymbol{\lambda}^0\|^{5/2}}. \end{aligned}$$

Отметим, что в выражения (5.1) и (5.2) для управляющей силы не входит тензор инерции $\mathbf{J}$, т.е. закон изменения управляющей силы не зависит от вида распределения масс КА.

Граничные условия по угловому положению в пространстве и угловой скорости КА имеют вид [16, с. 137] (в статье [16] рассматривалась задача оптимального разворота КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости разворота КА при отсутствии поступательного перемещения и гравитационного момента):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(0) &= (0,7951; 0,2981; -0,3975; 0,3478), \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= (0,2739; -0,2388; -0,3), \end{aligned}$$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_k &= (0,8443; 0,3984; -0,3260; 0,1485), \\ \boldsymbol{\omega}_k &= (0,0; 0,0; -0,59). \end{aligned}$$

КА 1. Сферически-симметричное твердое тело: $J_1 = J_2 = J_3 = J^*$ кг · м². При этом $J^{\text{масс}} = J^*$ кг · м², тогда безразмерные моменты инерции равны $J_1 = J_2 = J_3 = J^* / J^{\text{масс}} = 1,0$.

КА 2. Международная космическая станция (МКС) [18]:

$J_1 = 4\,853\,000$ кг · м², $J_2 = 23\,601\,000$ кг · м², $J_3 = 26\,278\,000$ кг · м² (в размерном виде) или $J_1 = 0,2358$, $J_2 = 1,1466$, $J_3 = 1,2766$ (в безразмерном виде).

КА 3. КА «Спейс Шаттл» (почти осесимметричное твердое тело): $J_1 = 3\,400\,648$ кг · м², $J_2 \approx J_3 = 21\,041\,672$ кг · м² или $J_1 = 0,1967$, $J_2 \approx J_3 = 1,2168$.

Для того чтобы результаты расчетов можно было сравнить с тем, что получено в [16] при отсутствии поступательного перемещения КА, нужно положить начальное и конечное значения вектора линейной скорости КА равными нулевому вектору. Значения вещественных констант $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_8$, входящих в аналитическое решение задачи, полученное в [16], для углового движения с краевыми условиями (5.3), (5.4) таковы ($\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = 0, c_1^0 = c_2^0 = \dots = c_8^0 = 0$):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0,0421; & \alpha_2 &= -0,2226; & c_1 &= 3,4020; & c_2 &= -2,0123; & c_3 &= 2,2293; \\ c_4 &= -1,7026; & c_5 &= -0,4156; & c_6 &= 0; & c_7 &= -0,2220; & c_8 &= -0,9216. \end{aligned}$$

Более того, значения компонент радиус-вектора центра масс КА (в инерциальной системе координат) в начальный и конечный моменты времени должны быть одинаковыми. В расчетах авторов координаты безразмерного радиус-вектора были вычислены по параметрам орбиты КА, приведенным в [19, с. 95]:

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= \xi_1^k = 23\,399\,727,8 \text{ м}, \\ \xi_2^0 &= \xi_2^k = 23\,962\,416,6 \text{ м}, \\ \xi_3^0 &= \xi_3^k = -18\,801\,552,4 \text{ м}. \end{aligned}$$

В [19] на примере данной орбиты КА исследовалась эффективность в численном прогнозировании преобразований, регулирующих и стабилизирующих уравнения движения.

В данной постановке задачи массово-инерционные характеристики КА входят лишь в формулы для нахождения управляющей силы и управляющего момента и не влияют на законы изменения оптимальных управлений (оптимального углового и линейного ускорений). Поэтому результаты расчетов в безразмерных переменных соответствуют расчетам, приведенным в [16] при решении задачи переориентации КА.

В случае, когда начальное и конечное положения КА совпадают, найденные авторами значения компонент безразмерного вектора управляющего момента $\mathbf{M}$ в начале, середине и конце движения при отсутствии гравитационного момента близки к тем, что указаны в табл. 1, 4, 5 работы [16, с. 176–177] для сферически-симметричного КА, МКС и КА «Спейс Шаттл» соответственно.

Значение интеграла

$$(5.5) \quad J^{\text{модиф}} = \int_0^{t_1} (1 + \mathbf{M}^2) dt$$

(безразмерный минимизируемый функционал в [16]) в случае сферической симметрии КА оказалось равным 1,4746, что близко к указанному в конце

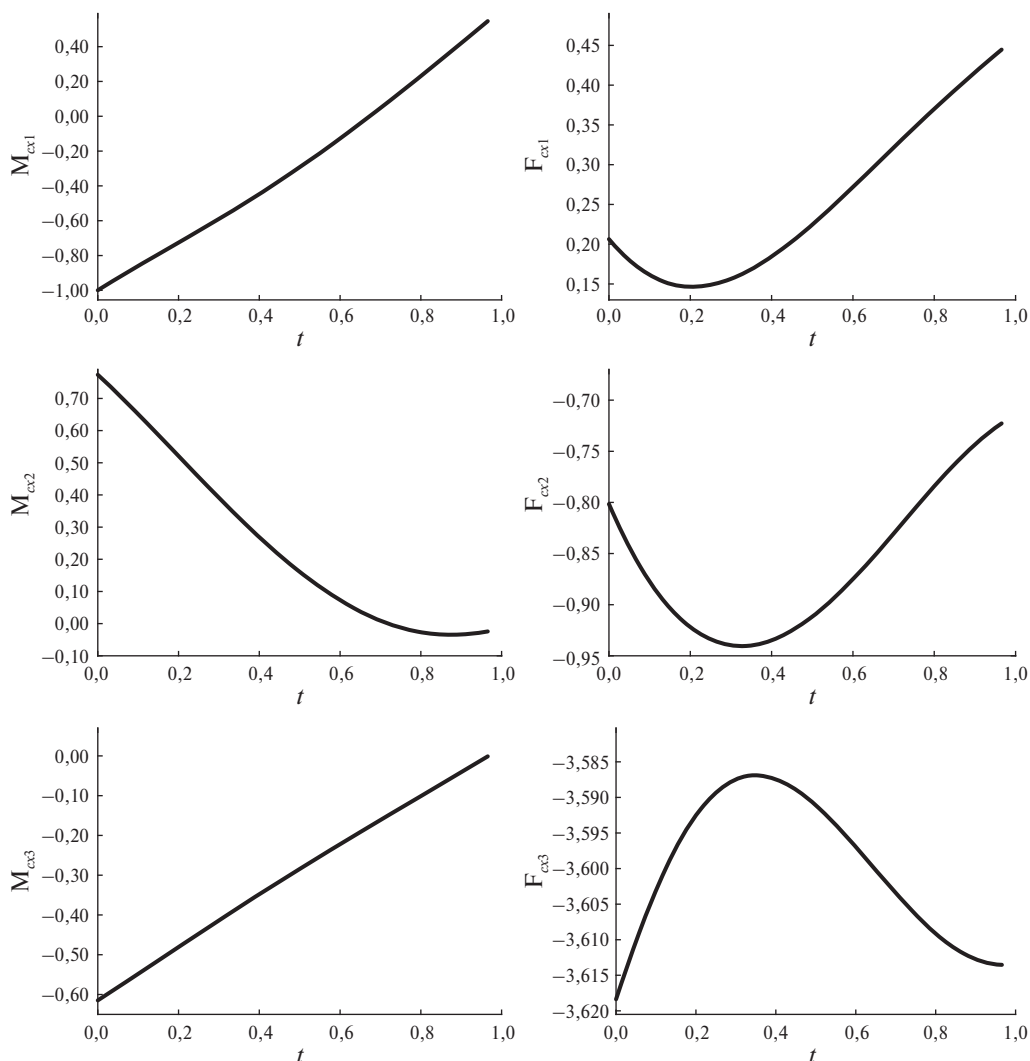


Рис. 1. Компоненты векторов управляющего момента и управляющей силы для КА 1 при отсутствии поступательного перемещения.

с. 176 статьи [16] числу 1,4749 для задачи оптимального управления угловым движением КА в классе угловых конических движений. Время окончания управляемого процесса оказалось равным 0,9657, что близко к указанному в табл. 1 числу 0,966.

При этом значение критерия оптимизации (4.15) задачи оптимального пространственного движения (маневрирования) КА оказалось равным $J = 1,4708 + 0 \cdot s$, т.е. значение функционала – это скаляр.

Рассмотрим далее случай, когда масштабные множители соответствуют работе [20]: $L = 37\,000\,000,0$ м, $T = 11\,272,855470$ с. Тогда при $M_0 = 5,9722 \times 10^{24}$ кг и $G = 6,67408 \times 10^{-11}$ Н·м²·кг⁻² безразмерный параметр задачи равен $N_G = 0,99997 \approx 1,0$.

Заметим, что в случае, когда начальное и конечное положения КА совпадают и не меняются при его угловом движении, конкретные значения компонент вектора $\mathbf{r}_x$ не влияют на величины искоемых постоянных $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$. Поэтому законы изменения фазовых переменных и оптимального управления также от них не зависят. Более того, проекции радиус-вектора КА на оси инерциальной системы координат ξ будут постоянными. Также в системе координат ξ будет постоянным вектором и управляющая сила. Вектор управляющей силы будет антиколлинеарным по отношению к вектору гравитационной силы (при этом модули указанных векторов будут одинаковыми). С течением времени проекции гравитационной силы на оси системы координат X , связанной с КА, будут изменяться (проекции этой силы на оси системы координат ξ изменяться не будут).

На рис. 1 приведены законы изменения компонент векторов управляющего момента и управляющей силы (они не зависят от тензора инерции КА) в системе координат, связанной с КА, при $N_G = 0,99997 \approx 1,0$ для сферически-симметричного КА (в этом случае гравитационный момент отсутствует). В системе координат ξ вектор управляющей силы является постоянным вектором.

Так же законы изменения компонент векторов управляющего момента были найдены для МКС и КА «Спейс Шаттл». При этом значения интеграла (5.5) при отсутствии гравитационного момента оказались равными 1,3671 (МКС) и 1,3680 (КА «Спейс Шаттл»), что близко к указанным на с. 177 статьи [16] для модифицированной задачи оптимального управления угловым движением числам 1,3674 и 1,3683 соответственно.

На рис. 2, 3 показаны безразмерные законы изменения компонент вектора управляющего момента в системе координат, связанной с телом, для МКС и КА «Спейс Шаттл» (в левом столбце – при отсутствии гравитационного момента, в правом столбце – при наличии) при совпадении координат начального и конечного положений КА.

Из результатов расчетов следует, что для всех КА диапазон изменения третьей компоненты вектора управляющей силы на порядок меньше диапазонов изменения двух других компонент.

Далее приведены расчеты для случая, когда КА помимо углового движения также совершает управляемое поступательное движение. Пусть положение и скорость КА в безразмерных переменных соответствуют следующим параметрам орбиты [21]:

начальное положение КА

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= -12\,194\,795,0 \text{ м}, & \xi_2^0 &= 21\,779\,195,0 \text{ м}, & \xi_3^0 &= 8\,278\,547,0 \text{ м}. \\ \dot{\xi}_1^0 &= -1080,750 \text{ м/с}, & \dot{\xi}_2^0 &= -1849,256 \text{ м/с}, & \dot{\xi}_3^0 &= 3274,225 \text{ м/с}, \end{aligned}$$

конечное положение КА

$$\begin{aligned} \xi_1^k &= -12\,110\,249,0 \text{ м}, & \xi_2^k &= 21\,643\,438,0 \text{ м}, & \xi_3^k &= 8\,744\,787,0 \text{ м}. \\ \dot{\xi}_1^k &= -1063,392 \text{ м/с}, & \dot{\xi}_2^k &= -1905,728 \text{ м/с}, & \dot{\xi}_3^k &= 3247,462 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

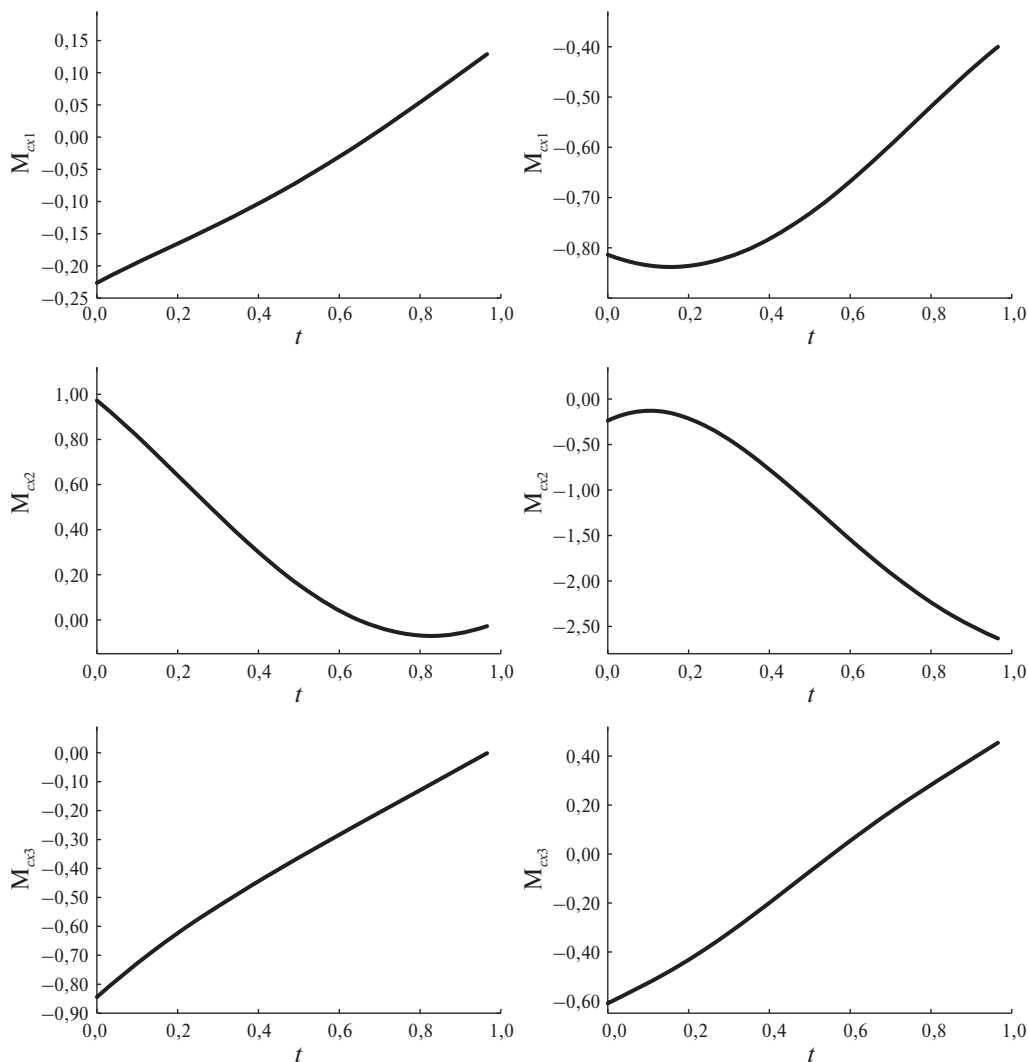


Рис. 2. Компоненты вектора управляющего момента для КА 2 при отсутствии поступательного перемещения.

В качестве начального приближения для неопределенных дуальных констант $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$ при наличии поступательного перемещения были взяты вещественные значения этих констант, соответствующие чистому развороту КА. При этом главные части указанных дуальных констант (они соответствуют чистому развороту КА) и время окончания управляемого процесса практически не изменились в результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Значение критерия оптимизации (4.15) задачи оптимального пространственного движения (маневрирования) КА оказалось равным $J = 1,4708 + 1,2897 \cdot s$ (его главная часть та же, что и в случае чистого разворота КА [16]).

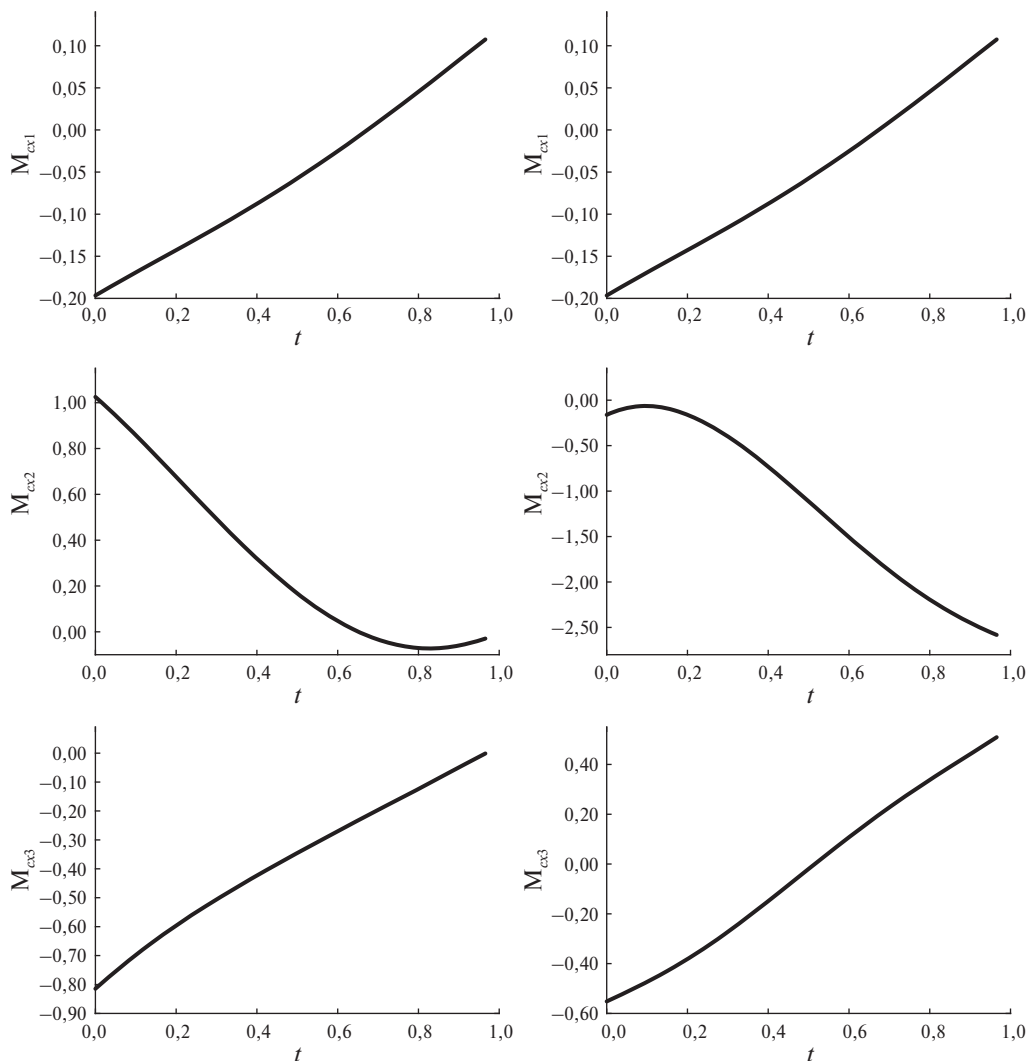


Рис. 3. Компоненты вектора управляющего момента для КА 3 при отсутствии поступательного перемещения.

Далее приведены результаты расчетов при наличии поступательного перемещения центра масс КА. Заметим, что погрешность определения компонент дуального кватерниона конечного перемещения КА в конечный момент времени как при отсутствии, так и при наличии поступательного перемещения составила примерно 10^{-16} безразмерных единиц. При этом погрешность определения компонент векторов линейной и угловой скоростей составила примерно 10^{-15} и 10^{-17} безразмерных единиц соответственно. Порядок указанных величин обусловлен порядком точности решения системы алгебраических дуальных уравнений (4.5), (4.6), (4.16), (4.17), (4.19) для нахождения неопределенных дуальных констант $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$, которая составила примерно 10^{-15} безразмерных единиц.

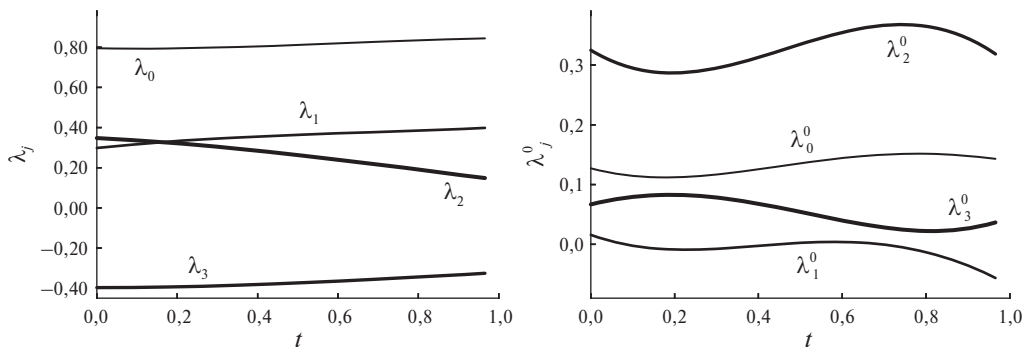


Рис. 4. Компоненты дуального кватерниона конечного перемещения для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

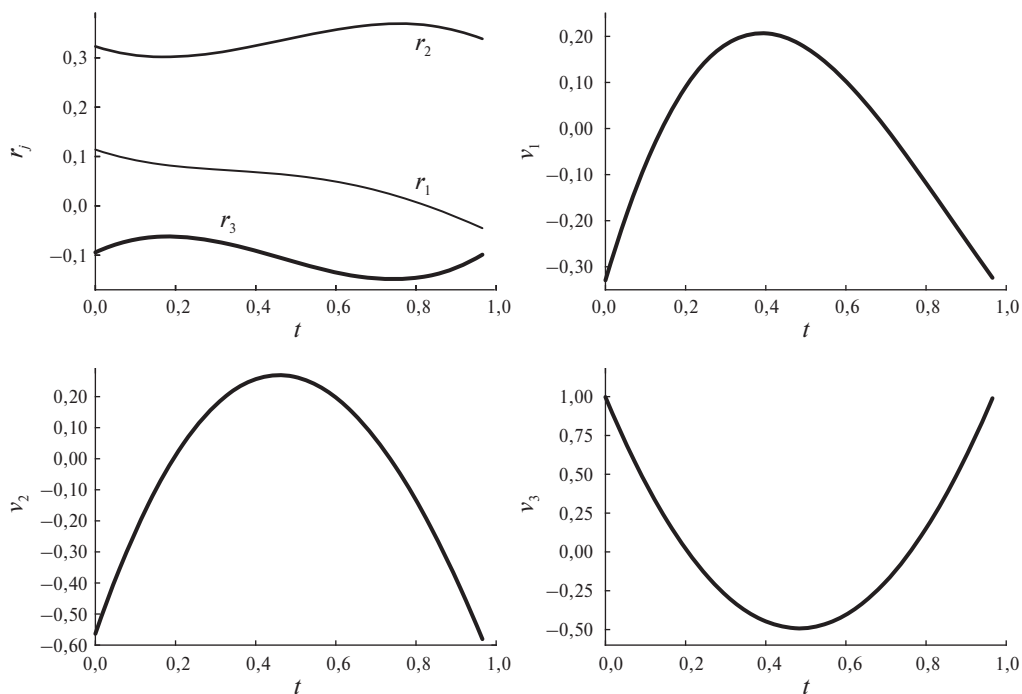


Рис. 5. Компоненты радиус-вектора и вектора линейной скорости для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

На рис. 4, 5 показаны законы изменения компонент дуального кватерниона конечного перемещения КА в инерциальном пространстве, а также проекций r_j ($j = \overline{1, 3}$) радиус-вектора и проекций v_j ($j = \overline{1, 3}$) вектора скорости его центра масс на оси связанной с КА системы координат X для случая сферически-симметричного КА. Функции $r_j(t)$ и $\lambda_j^0(t)$ есть гармонические функции времени (здесь и далее обсуждаются законы изменения безразмерных величин). Законы изменения компонент вектора $\mathbf{v}_x$ можно аппроксими-

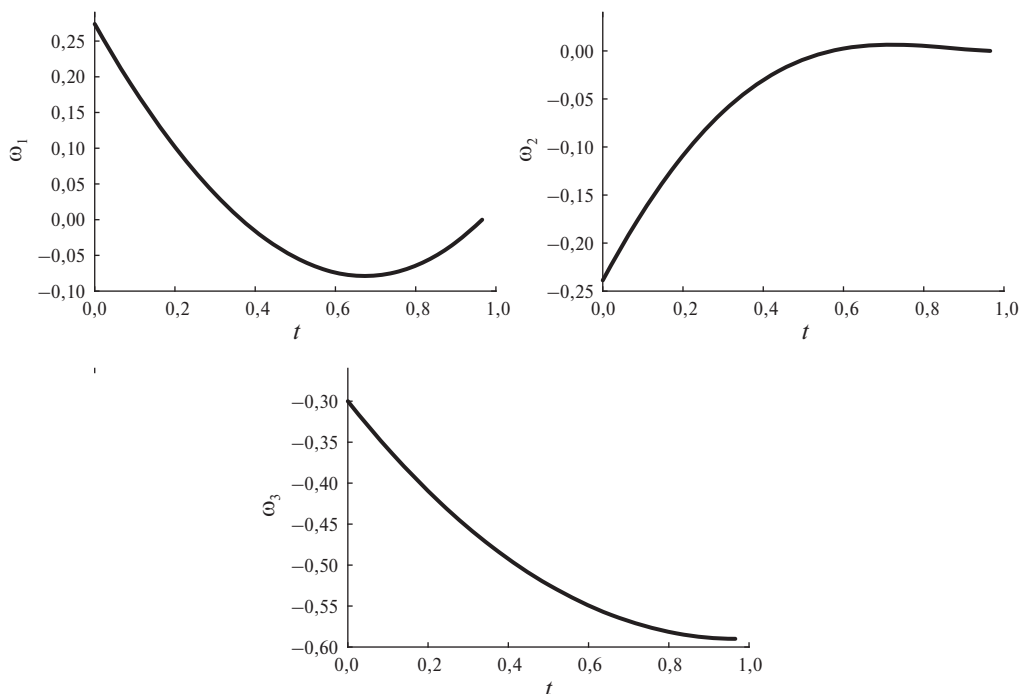


Рис. 6. Компоненты вектора угловой скорости для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

ровать параболлами. Одна из компонент есть выпуклая вниз функция, а две другие – выпуклые вверх. Каждая из компонент вектора $\mathbf{v}_x$ меняет знак два раза за время движения КА (компоненты указанного вектора меняют знак почти одновременно). Точки экстремума компонент вектора $\mathbf{r}_x$ совпадают с моментами времени, в которые соответствующая компонента вектора $\mathbf{v}_x$ равна нулю.

На рис. 6 показаны законы изменения компонент вектора угловой скорости для случая сферически-симметричного КА.

На рис. 7, 8 показаны законы изменения оптимального углового и линейного ускорений, управляющего момента и управляющей силы для случая сферически-симметричного КА. В случае сферически-симметричного КА оптимальные законы изменения компонент вектора углового ускорения полностью совпадают с законами изменения компонент вектора оптимального управляющего момента. Вторая и третья компоненты оптимального вектора углового ускорения близки к нулю в конце движения. Вторая и третья компоненты оптимального вектора линейного ускорения близки к линейным функциям времени. Точка смены знака каждой компоненты этого вектора соответствует точке экстремума соответствующей компоненты вектора линейной скорости КА. Первая компонента вектора управляющей силы является убывающей функцией, а третья – возрастающей. Вторая компонента указанного вектора меняется по гармоническому закону.

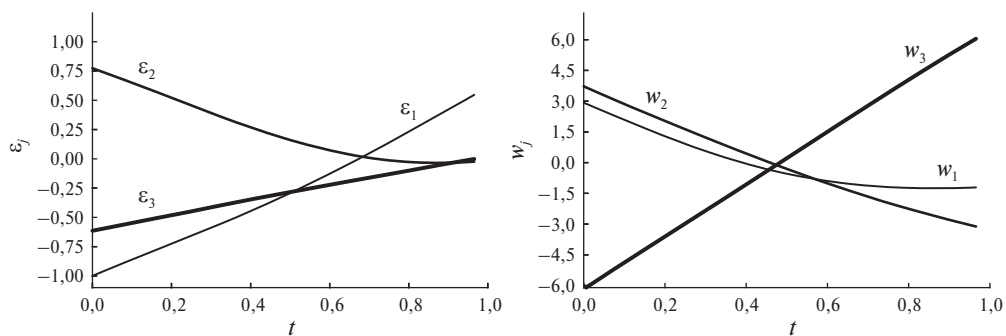


Рис. 7. Оптимальное управление для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

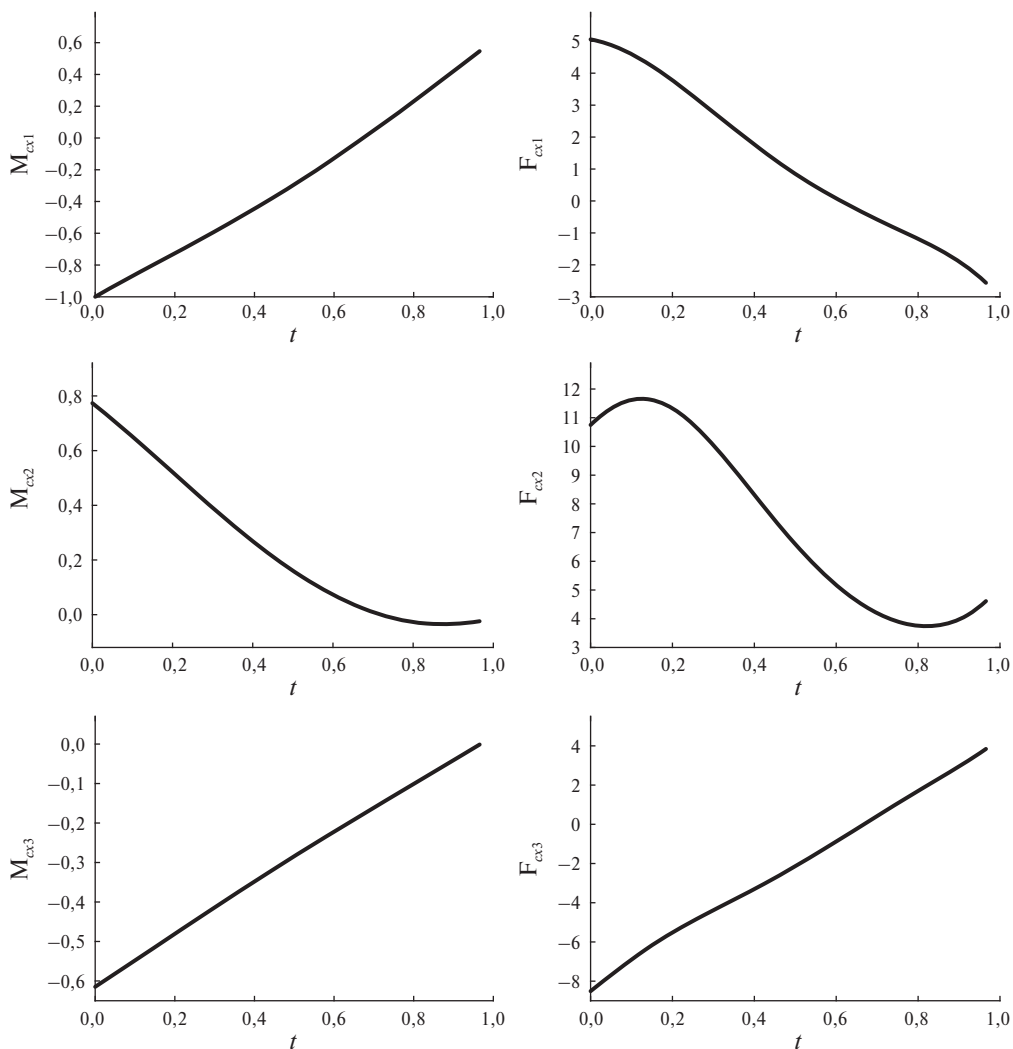


Рис. 8. Компоненты векторов управляющего момента и управляющей силы для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

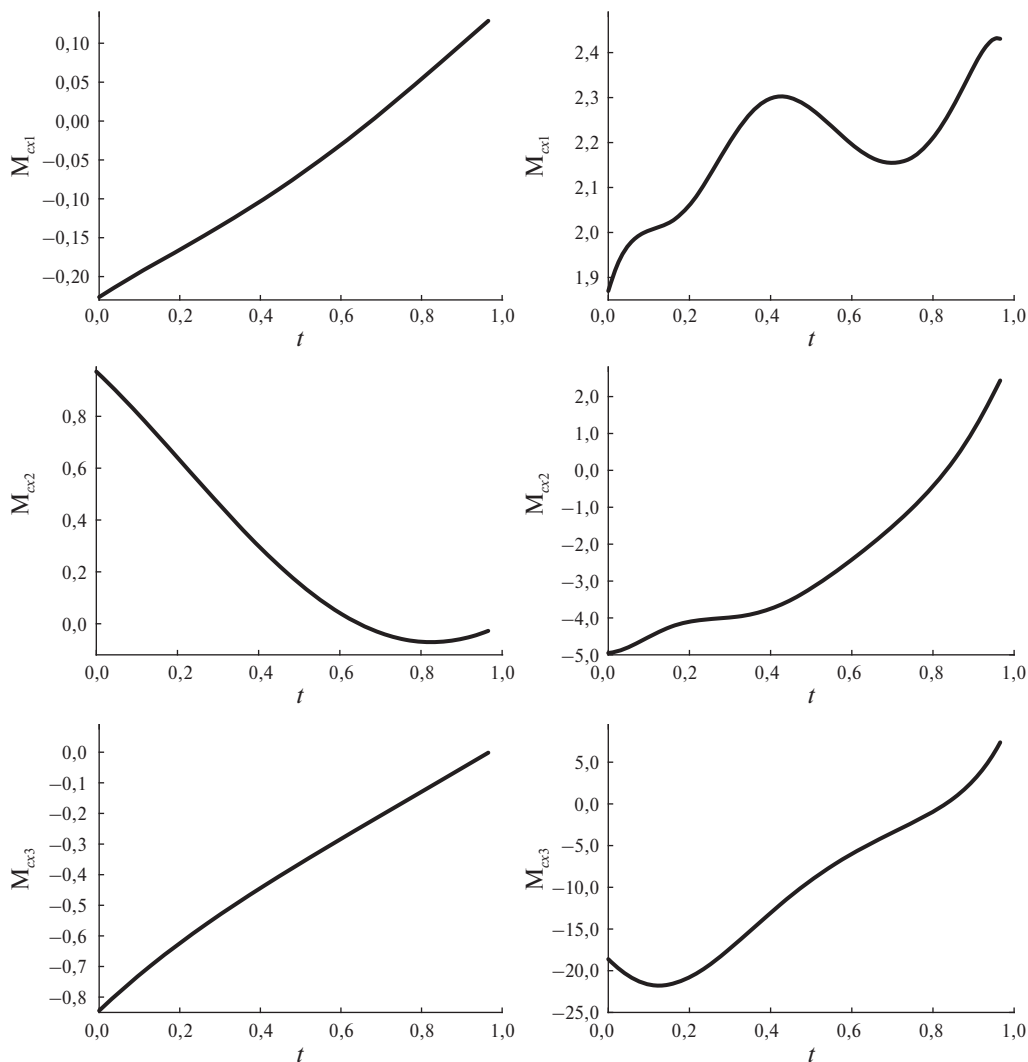


Рис. 9. Компоненты вектора управляющего момента для КА 2 при наличии поступательного перемещения.

Далее на рис. 9, 10 приведены законы изменения управляющего момента для случая, когда распределение масс КА соответствует МКС и КА «Спейс Шаттл» (в левом столбце – при отсутствии гравитационного момента, в правом столбце – при наличии). Заметим, что так как в выражения (5.1) и (5.2) для управляющей силы не входит тензор инерции $\mathbf{J}$, то законы изменения управляющей силы для МКС и КА «Спейс Шаттл» совпадают с законом, показанным во втором столбце рис. 8 для случая сферически-симметричного КА.

Отметим, что законы изменения остальных искомых величин при этом качественно остались такими же, как и в предыдущем случае.

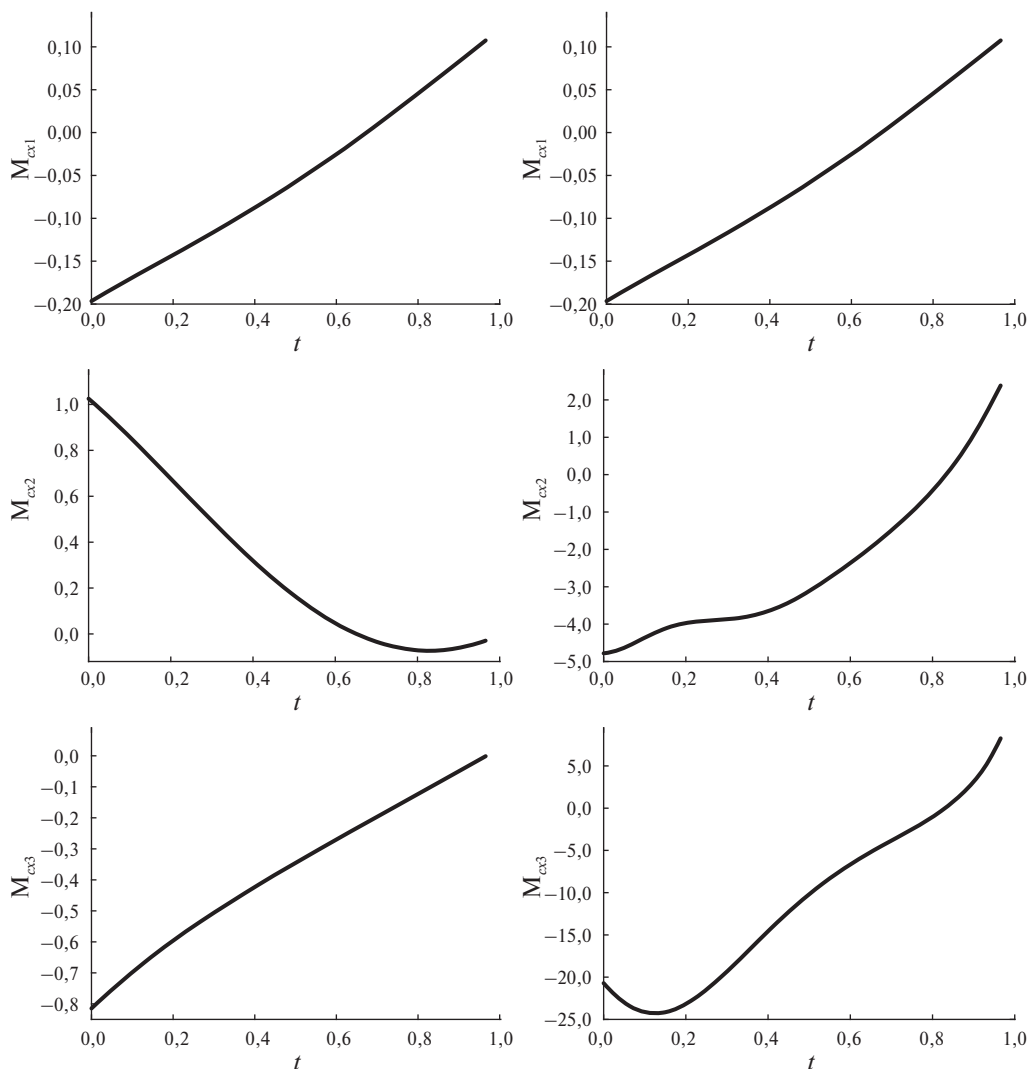


Рис. 10. Компоненты вектора управляющего момента для КА 3 при наличии поступательного перемещения.

6. Заключение

Построена дуальная кватернионная (бикватернионная) теория оптимального управления пространственным движением свободного твердого тела (КА) как взаимосвязанного управления его пространственным угловым (вращательным) и поступательным (орбитальным) движениями. В качестве оптимизируемых управлений используются вторые производные от параметров обобщенного винтового конического движения КА, эквивалентного его общему пространственному движению. Векторы программной управляющей силы и программного управляющего момента найдены в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики.

Полученный на ее основе аналитический алгоритм управления пространственным движением (маневрированием) КА как свободного твердого тела произвольной динамической конфигурации с произвольными краевыми условиями является оптимальным в классе обобщенных винтовых конических движений и применим в системах управления КА. При этом он не требует численного решения сложной высокоразмерной дифференциальной краевой задачи оптимизации или иного сложного численного решения. Это важно, в частности, для пространственного маневрирования КА при исключительно высоких темпах его перемещения, когда крайне ограничено время на расчет оптимальной пространственной траектории маневра КА и на расчет законов управления, позволяющих реализовать эту траекторию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрелкова Н.А.* Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 73–76.
2. *Маланин В.В., Стрелкова Н.А.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
3. *Челноков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.
4. *Челноков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28.
5. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006.
6. *Челноков Ю.Н.* Управление пространственным движением твердого тела с использованием бикватернионов и дуальных матриц // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 17–43.
7. *Челноков Ю.Н.* Синтез управления пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 704–733.
8. *Челноков Ю.Н.* Управление пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов // XII Всерос. съезд по фундамент. пробл. теоретич. и прикл. механ. Сб. трудов. 2019. С. 288–290.
9. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 140–154.
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитический квазиоптимальный алгоритм программного управления угловым движением космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 4. С. 125–136.
11. *Sapunkov Y.G., Molodenkov A.V.* Quasioptimal Spacecraft Attitude Control Constructed According to the Poincot Concept // Aerospace. 2023. V. 10. No. 5. P. 402–417.

12. Челноков Ю.Н., Молоденков А.В., Логинов М.Ю. Бикватернионное квазиоптимальное аналитическое решение задачи программного управления пространственным движением космического аппарата // XXX Юб. СПб междунар. конф. по интегр. навигац. сист. Сб. трудов. 2023. С. 411–414.
13. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного твердого тела при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 22–34.
14. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
15. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 167–176.
16. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
17. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
18. Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А. и др. Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации // Препринт № 57. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.
19. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984.
20. Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20. Вып. 1. С. 93–104.
21. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Издат. Дом Томск. гос. ун-та, 2016.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 08.05.2025

После доработки 28.07.2025

Принята к публикации 29.07.2025

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

- Глуценко А.И., Ласточкин К.А.** Обзор методов построения наблюдателей состояний для систем с неизвестными параметрами 3

Линейные системы

- Хлебников М.В., Шатов Д.В.** Настройка нехрупких ПИ-регуляторов: анализ .. 61

Нелинейные системы

- Агаев Р.П., Хомутов Д.К.** Оценка запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости, в задачах согласования характеристик 83
- Челноков Ю.Н., Молоденков А.В., Панкратов И.А.** Аналитическое оптимальное решение задачи минимального по времени и энергии программного управления пространственным движением космического аппарата в классе винтовых обобщенных конических движений 98

CONTENTS

Surveys

- Glushchenko A.I., Lastochkin K.A.** Overview on Observer Desing Principles for Systems with Unknown Parameters 3

Linear Systems

- Khlebnikov M.V., Shatov D.V.** Tuning of Non-fragile PI Controllers: Analysis 61

Nonlinear Systems

- Agaev R.P., Khomutov D.K.** Estimation of Time-Delay Providing Maximum Convergence Degree in Problems of Characteristic Matching 83
- Chelnokov Yu.N., Molodenkov A.V., Pankratov I.A.** Analytical Optimal Solution to the Minimum Time And Energy Problem of Programmed Control for Spacecraft Spatial Motion in the Class of Generalized Helical Conic Motions 98