



ISSN 0005-2310 (Print)
ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ДАЛЕКОМЕРИКА AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

3

МАРТ

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2026 г. Н.М. МАРКОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (nat.markovich@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

КОЛИЧЕСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ КЛАСТЕРНОГО ПРИСОЕДИНЕНИЯ¹

Модель кластерного присоединения (КП) была предложена в статье Багроу и Брокманна (2013) в качестве альтернативы моделям предпочтительного присоединения для эволюции случайных графов. В статье Вайчулис и Маркович (2024) предложена обобщенная модель кластерного присоединения (ОМКП), включающая произвольную функцию присоединения f . В настоящей статье изучается поведение математического ожидания количества треугольников при слабых ограничениях на функцию f . Доказан логарифмический рост математического ожидания количества треугольников. Более точные результаты, включая центральную предельную теорему для количества треугольников, получены при постоянной функции f . Математическое ожидание количества треугольников в ОМКП с почти всюду постоянной функцией f изучается средствами моделирования.

Ключевые слова: обобщенная модель кластерного присоединения, количество треугольников, коэффициент кластеризации, вес узла, случайный граф, эволюция.

DOI: 10.7868/S2413977726030013

1. Введение

Пусть $G_n = (V_n, E_n)$, $n = 1, 2, \dots$ обозначает последовательность случайных графов, где V_n – множество узлов, а E_n – множество ребер. Последовательность G_n , $n = 1, 2, \dots$ формируется во время эволюции, т.е. динамики графа во времени и пространстве. Модель предпочтительного присоединения (МПП) для эволюции графа была впервые предложена в [1, 2]. Большая часть моделей эволюции случайных графов относится к МПП, см. [3–8] среди прочих, ввиду применения к многочисленным реальным графам. Приведем определение линейной МПП, рассмотренное в [9].

Определение 1. Зафиксируем $t \geq 2$ и $\delta > -t$. Тогда линейная МПП – это последовательность случайных графов $G_n = (V_n, E_n)$, $n \geq 1$, определенная следующим образом:

- (i) граф G_1 состоит из единичного узла без ребер;

¹ Исследование Маркович Н.М. выполнено за счет средств Российского научного фонда (грант № 24-21-00183).

- (ii) граф G_2 состоит из двух узлов с t ребрами между ними;
- (iii) граф G_{n+1} , $n \geq 2$ генерируется рекурсивно следующим образом: имея граф G_n , прикрепим к нему новый узел $n+1$ t новыми ребрами. Новые ребра соединяют узел $n+1$ и узлы $i_1, \dots, i_m \in V_n$, которые выбираются взвешенным случайным выбором с возвращением. Все узлы графа G_n имеют веса

$$(1) \quad p_{i,n}(\delta) = \frac{D_{i,n} + \delta}{2m(n-1) + \delta n}, \quad i \in V_n,$$

которые пересчитываются после выбора каждого из узлов $i_1, \dots, i_m \in V_n$. Здесь и далее $D_{i,n}$ обозначает степень узла $i \in V_n$.

В [10] функция присоединения f включена в определение МПП, а именно, (1) заменено на

$$(2) \quad p_{i,n}(f, \delta) = \frac{f(D_{i,n}) + \delta}{\sum_{j \in V_n} (f(D_{j,n}) + \delta)}, \quad i \in V_n,$$

где функция предпочтительного присоединения f детерминированная, неубывающая и неотрицательная.

Модель кластерного присоединения (МКП) была предложена в [11] как альтернатива МПП, см. [11] для аргументации. Эта модель менее известна, хотя часто наблюдается на практике и может быть применима к локальным сетям, например к локальным социальным сетям и «системам, в которых узлы стремятся присоединиться не к крупным хамам, а к сильно связанным группам» [11].

Прежде чем дать определение так называемой обобщенной МКП (ОМКП), напомним определение коэффициента кластеризации. Коэффициент кластеризации узла $i \in V_n$ определяется как

$$c_{i,n} = \begin{cases} 0, & D_{i,n} = 0 \text{ или } D_{i,n} = 1, \\ 2\Delta_{i,n} / (D_{i,n}(D_{i,n} - 1)), & D_{i,n} \geq 2, \end{cases}$$

где $\Delta_{i,n}$ – количество треугольников, в которые входит узел i [12].

Коэффициент кластеризации $c_{i,n}$ был предложен впервые в [13] как «склонность двух соседних узлов одного и того же узла также быть соседями друг другу, образуя треугольник соединения в сети». Этот коэффициент измеряет способность i -го узла формировать треугольники из ближайших узлов в своей окрестности.

Обозначим через $\#A$ мощность произвольного конечного множества A , т.е. число его элементов. Следующее определение ОМКП представляет собой небольшую модификацию определения, предложенного в [14].

Определение 2. Зафиксируем $t \geq 2$ и $\epsilon \geq 0$. Тогда ОМКП – это последовательность случайных графов $G_n = (V_n, E_n)$, $n \geq 1$, определенных следующим образом:

- (i) G_1 – неслучайный, конечный, простой граф, состоящий по меньшей мере из m узлов, т.е.

$$(3) \quad \#V_1 \geq m.$$

- (ii) Каждый узел $i \in V_n$, $n \geq 1$ снабжен весом

$$(4) \quad p_{i,n}(f, \epsilon) = \frac{f(c_{i,n}) + \epsilon}{\sum_{j \in V_n} (f(c_{j,n}) + \epsilon)},$$

где функция присоединения f детерминированная, неубывающая, неотрицательная на $[0, 1]$ и $f(1) < \infty$.

- (iii) Для $n \geq 1$ граф G_{n+1} генерируется рекурсивно следующим образом: имея граф G_n , прикрепим к нему новый узел $\#V_1 + n$ m новыми ребрами. Новые ребра соединяют пары узлов

$$\{\#V_1 + n, i_1\}, \{\#V_1 + n, i_2\}, \dots, \{\#V_1 + n, i_m\},$$

где узлы $i_1, \dots, i_m \in V_n$ выбираются взвешенным случайным выбором с возвращением.

Легко заметить, что МКП в [11], т.е. ОМКП с функцией присоединения

$$(5) \quad f(x) = x^\alpha, \quad x \geq 0, \alpha > 0,$$

получена заменой $D_{i,n}$ на $c_{i,n}$ в соответствующей МПП. То же можно заметить, сравнивая веса (2) и (4).

Сравнивая линейную МПП и ОМКП, отметим следующее.

- 1) Мощности множеств $\#V_n$ и $\#E_n$ детерминированы для обеих моделей. В частности, из определения 2 (iii) следует, что для любого $n \geq 1$

$$(6) \quad \#V_n = \#V_1 + n - 1, \quad \#E_n = \#E_1 + m(n - 1).$$

Для линейной МПП имеем $\#V_n = n$ и $\#E_n = m(n - 1)$.

- 2) Из определения 2 (iii) следует, что для любого $n \geq 1$ G_n – простой граф. Другая ситуация для ОМПП. Из определения 1 (iii) следует, что в линейной МПП возможны несколько связей между узлами.
- 3) В линейной МПП с $m \geq 2$ и $\delta > 0$ степени узлов асимптотически распределены по степенному закону с показателем степени $3 + \delta/m$, см., например, [9], т.е. их распределения имеют тяжелые хвосты. Насколько известно, распределение степеней узлов для ОМКП еще не получено. С использованием эвристик и моделирования, в [11] показано, что распределение степеней узлов для МКП имеет легкие хвосты. Результаты моделирования в [15] подтверждают этот вывод.
- 4) Главное отличие между линейной МПП и ОМКП следующее. Рассматривая линейную МПП, можно заметить, что узел i с большим числом связей в графе G_n с большей вероятностью будет соединен с

новым узлом $n + 1$. Это означает, что $D_{i,n} < D_{i,n+1}$. Поэтому линейная МПП обладает феноменом «богатые становятся богаче» (эффект Мэтью). ОМКП не имеет такого свойства. Например, если $c_{i,n} = 1$ для некоторого узла $i \in V_n$ и этот узел соединен с новым узлом $\#V_1 + n$, то $c_{i,n} > c_{i,n+1}$. Действительно, предположим сначала, что выбранные взвешенным случайным выбором с возвращением узлы $i \in V_n$ и $j \in V_n$ не соединены ребром. Тогда $D_{i,n+1} = D_{i,n} + 1$ и $\Delta_{i,n+1} = \Delta_{i,n}$. Последние равенства вместе с равенством $2\Delta_{i,n} = D_{i,n}(D_{i,n} - 1)$ позволяют получить $c_{i,n+1} = (\Delta_{i,n} - 1)/(\Delta_{i,n} + 1) < 1$. Нетрудно убедиться, что когда узлы $i \in V_n$ и $j \in V_n$ соединены ребром, то $c_{i,n+1} = (D_{i,n}(D_{i,n} - 1) + 2)/(\Delta_{i,n}(\Delta_{i,n} + 1)) < 1$ ввиду $D_{i,n} \geq 2$.

Количество треугольников Δ_n в случайном графе G_n определено, как

$$\Delta_n = \frac{1}{3} \sum_{i \in V_n} \Delta_{i,n}.$$

Цель данной статьи – исследовать поведение последовательности $E(\Delta_n) - \Delta_1$, $n \geq 2$ для ОМКП с $m = 2$ и $\epsilon > 0$. ОМКП с $m = 2$ можно рассматривать как базовую. А именно, коэффициент кластеризации вновь добавленного узла равен 1, когда пара выбранных узлов i_1 и i_2 соединены, или 0 в противном случае.

Структура статьи следующая. Обзор существующих результатов, касающихся математического ожидания количества треугольников, описан в разделе 2. Основные результаты, включающие теоремы 1 и 2, представлены в разделе 3. Алгоритм и результаты моделирования последовательности $E\Delta_n - \Delta_1$, $n \geq 2$ рассматриваются в разделе 4. Выводы изложены в разделе 5. Доказательства содержатся в Приложении.

2. Обзор результатов для математического ожидания количества треугольников

Треугольник является наиболее изученным подграфом, и его можно рассматривать как базовое сообщество. Вероятно, впервые он был предложен для изучения в [13].

В [16] показано, что $E(\Delta_n)$ в модели Барабаши–Альберта (т.е. линейной МПП с $\delta = 0$, $m \geq 2$) имеет порядок $\ln^3(n)$. Тот же порядок получен в [17] для МПП, где все m ребер из очередной новой вершины проводятся одновременно и независимо, а вероятности проведения ребра в вершину i зависят линейным образом от степени этой вершины в G_n , но не пересчитываются после проведения очередного ребра, как в определении 1.

$E(\Delta_n)$ для линейной МПП с двумя параметрами δ, m было исследовано в [18], см. также [19]. В [18] показано, что для $\delta > 0$ и $m \geq 2$ выполнено

$$|E(\Delta_n) - C_1(\beta, m) \ln(n)| \leq C_2, \quad n \geq 2,$$

где C_1 и C_2 – некоторые положительные константы. Обобщая, скажем так: теорема 2.5 в [9] утверждает, что для параметров линейной МПП $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ и $\delta > -m$ выполнено

$$E(\Delta_n) = C_1(m, \delta)g_1(n) + g_2(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где функция g_2 такая, что $|g_2(n)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тогда как функция g_1 имеет вид

$$g_1(n) = \begin{cases} n^{-\delta/(2m+\delta)}, & -m < \delta < 0, \\ \ln^3(n), & \delta = 0, \\ \ln(n), & \delta > 0. \end{cases}$$

Точный вид константы $C_1(m, \delta)$ приведен в теореме 2.5 работы [9].

Перечислим статьи, содержащие результаты о количестве треугольников Δ_n . Асимптотическое поведение Δ_n в неоднородном случайном графе с различной вероятностью образовывать ребра получено в [20, 21], а краткий обзор можно найти в [22]. Показано, что Δ_n сходится по распределению к распределению Пуассона. Асимптотическое математическое ожидание Δ_n в равномерных случайных графах со степенным законом распределения степеней узлов изучалось в [23]. Обзор литературы по Δ_n для однородных случайных графов приведен в [21].

3. Основные результаты

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $m = 2$ и $\epsilon > 0$ – параметры ОМКП. Тогда для $n \geq 2$ выполнено

$$(7) \quad \frac{1}{\mu^2} + g_1(n) \leq \frac{E(\Delta_n) - \Delta_1}{4 \ln(n)} \leq \mu^2 + g_2(n),$$

где

$$(8) \quad \mu = \frac{\epsilon + f(1)}{\epsilon + f(0)}$$

и $g_i(n) = O(1/\ln(n))$, $n \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$.

Без ограничения общности можно считать, что $f(1) = 1$ в (4). Действительно, если $f(1) \neq 1$, то $p_{i,n}(f, \epsilon) = p_{i,n}(f/f(1), \epsilon/f(1))$.

Рассматривая частный случай функции присоединения f , получим следующий результат.

Теорема 2. Пусть $m = 2$ и $\epsilon > 0$ – параметры ОМКП и функция f постоянна, а именно,

$$(9) \quad f(x) = \lambda, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \geq 0.$$

Тогда

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\Delta_n) - \Delta_1}{4 \ln(n)} = 1$$

и

$$(11) \quad \frac{\Delta_n - 4 \ln(n)}{2 \ln^{1/2}(n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\xrightarrow{d}$ обозначает сходимость по распределению, а $\mathcal{N}(0, 1)$ – стандартное нормальное распределение.

Утверждение (11) является центральной предельной теоремой (ЦПТ). Аналог для линейной МПП автору не встречался. Обзор литературы по локальной ЦПТ в применении к Δ_n в случайных графах Эрдеша–Реньи содержится в [24].

4. Компьютерное моделирование

Классический подход к анализу количества треугольников заключается в моделировании «достаточно длинной» последовательности графов $G_1, \dots, G_n$ и создании выборки $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Однако такая процедура может потребовать длительного времени моделирования. Для преодоления проблемы приведем аппроксимацию для $E(\Delta_n) - \Delta_1$, $n \geq 2$, опирающуюся на теоретические исчисления, приведенные в Приложении, на которое ниже будет несколько ссылок.

Пусть $U_k^{(j)}$, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq n - 1$ – независимые и равномерно распределенные случайные величины (сл.в.) на $(0, 1)$, а случайное событие B_k определено в (П.4). Тогда

$$(12) \quad \overline{D_{n,N}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n-1} I \left\{ U_k^{(j)} < P(B_k) \right\}, \quad n \geq 2,$$

является аппроксимацией для $E(\Delta_n) - \Delta_1$. Действительно, используя (П.6) и (П.7), получим $E(\overline{D_{n,N}}) = E(\Delta_n) - \Delta_1$. Кроме того, для любого фиксированного n последовательность $\overline{D_{n,N}}$, $N = 1, 2, \dots$ сходится почти всюду к $E(\Delta_n) - \Delta_1$ при $N \rightarrow \infty$. Это следует из усиленного закона больших чисел (см., например, теорему 14 в [28]), поскольку слагаемые в сумме (12) по j являются независимыми и одинаково распределенными сл.в., имеющими математическое ожидание $E(\Delta_n) - \Delta_1$.

Пусть $\tilde{n} \geq 2$ обозначает некоторое натуральное число. Используя (12), можно быстро генерировать аппроксимацию для последовательности $E(\Delta_n) - \Delta_1$, $2 \leq n \leq \tilde{n}$, для чего нужно считать вероятности $P(B_k)$, $1 \leq k \leq \tilde{n} - 1$. В самом простом случае, когда f – постоянная функция

(см. (9)), имеем

$$P(B_k) = \frac{2(\#E_1 + 2(k-1))}{(\#V_1 + k - 1)(\#V_1 + k - 2)}, \quad k \geq 1,$$

см. (П.13). Подсчет вероятностей $P(B_k)$, $1 \leq k \leq \tilde{n} - 1$ значительно усложняется при замене постоянной функции на почти всюду постоянную (по мере Лебега) функцию

$$(13) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Для функции f , приведенной в (13), веса (4) имеют форму

$$(14) \quad p_{i,n}(f, \epsilon) = \frac{1}{(1 + \epsilon)V_{n,1} + \epsilon V_{n,2}} \begin{cases} \epsilon, & i \in V_{n,2}, \\ 1 + \epsilon, & i \in V_{n,1}, \end{cases}$$

где $V_{n,1} = \{i : c_{i,n} > 0\}$, $V_{n,2} = V_n \setminus V_{n,1}$. Разложим также множество ребер E_n на непересекающиеся множества. Положим $E_{n,1} = \{\{i, j\} : \{i, j\} \in E_n, i \in V_{n,1}, j \in V_{n,1}\}$, $E_{n,3} = \{\{i, j\} : \{i, j\} \in E_n, i \in V_{n,2}, j \in V_{n,2}\}$ и $E_{n,2} = E_n \setminus (E_{n,1} \cup E_{n,3})$. Например, если $G_1 = (V_1, E_1)$ с

$$(15) \quad V_1 = \{1, 2, \dots, 9\}, \quad E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\},$$

то $V_{1,1} = \{1, 2, 3\}$, $V_{1,2} = \{4, 5, \dots, 9\}$, $E_{1,1} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, $E_{1,2} = \{\{2, 5\}, \{3, 4\}\}$, $E_{1,3} = \{\{6, 7\}\}$.

С учетом введенных обозначений (П.7) можно переписать следующим образом:

$$P(B_k) = q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3}, \quad k \geq 1,$$

где

$$q_{k,\ell} = \sum_{\{i_1, i_2\} \in E_{k,\ell}} \left(\frac{p_{i_1,k}(f, \epsilon)p_{i_2,k}(f, \epsilon)}{1 - p_{i_1,k}(f, \epsilon)} + \frac{p_{i_1,k}(f, \epsilon)p_{i_2,k}(f, \epsilon)}{1 - p_{i_2,k}(f, \epsilon)} \right), \quad \ell = 1, 2, 3.$$

Здесь и далее предполагаем, что начальный граф G_1 и параметр ϵ выбраны так, чтобы выполнялось $\mu < \#V_1$. Используя (14), находим

$$\begin{aligned} q_{k,1} &= \frac{2(1 + \epsilon)^2 \#E_{k,1}}{\lambda_k (\lambda_k - 1 - \epsilon)}, \\ q_{k,2} &= \frac{\epsilon(1 + \epsilon) \#E_{k,2}}{\lambda_k (\lambda_k - 1 - \epsilon)} + \frac{\epsilon(1 + \epsilon) \#E_{k,2}}{\lambda_k (\lambda_k - \epsilon)}, \\ q_{k,3} &= \frac{2\epsilon^2 \#E_{k,3}}{\lambda_k (\lambda_k - \epsilon)}, \end{aligned}$$

где $\lambda_k = (1 + \epsilon)\#V_{k,1} + \epsilon\#V_{k,2}$. Кроме того, введем величины

$$\begin{aligned}\bar{q}_{k,1} &= \frac{2(1 + \epsilon)^2 (\#V_{k,1}(\#V_{k,1} - 1)/2 - \#E_{k,1})}{\lambda_k (\lambda_k - 1 - \epsilon)}, \\ \bar{q}_{k,2} &= \frac{\epsilon(1 + \epsilon) (\#V_{k,1}\#V_{k,2} - \#E_{k,2})}{\lambda_k (\lambda_k - 1 - \epsilon)} + \frac{\epsilon(1 + \epsilon) (\#V_{k,1}\#V_{k,2} - \#E_{k,2})}{\lambda_k (\lambda_k - \epsilon)}, \\ \bar{q}_{k,3} &= \frac{2\epsilon^2 (\#V_{k,2}(\#V_{k,2} - 1)/2 - \#E_{k,3})}{\lambda_k (\lambda_k - \epsilon)}.\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $q_{k,1}$ – вероятность выбрать неупорядоченную пару узлов, соединенную ребром из $E_{k,1}$, а $\bar{q}_{k,1}$ вероятность выбрать несвязанную неупорядоченную пару узлов такую, что оба узла принадлежат $V_{k,1}$. Аналогично могут быть интерпретированы величины $q_{k,\ell}$ и $\bar{q}_{k,\ell}$, $\ell = 2, 3$.

Напомним, что для образования графа G_{k+1} в граф G_k добавляется новый узел $\#V_1 + k$. В зависимости от связи выбранной (с помощью взвешенного случайного выбора без удаления) неупорядоченной пары узлов вновь введенный узел добавляется во множество $V_{k+1,1}$ или во множество $V_{k+1,2}$. Также добавим в одно из непересекающихся множеств $E_{k+1,1}$, $E_{k+1,2}$ или $E_{k+1,3}$ два ребра, связанные с узлом $\#V_1 + k$. В частности, мощности множеств $\#V_{k+1,\ell}$, $\ell = 1, 2$, $k \geq 1$ и $\#E_{k+1,\ell}$, $\ell = 1, 2, 3$, $k \geq 1$ контролируются следующими правилами:

1. Если случилось событие $\{U_k^{(j)} < q_{k,1}\}$ (т.е. оба выбранных узла принадлежат $V_{k,1}$ и они соединены ребром из $E_{k,1}$), то $\#V_{k+1,1} = \#V_{k,1} + 1$ и $\#E_{k+1,1} = \#E_{k,1} + 2$. Если случилось $\{q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3} \leq U_k^{(j)} < q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3} + \bar{q}_{k,1}\}$ (т.е. оба выбранных узла принадлежат $V_{k,1}$ и не соединены), то $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} + 1$ и $\#E_{k+1,2} = \#E_{k,2} + 2$.
2. Если случилось $\{q_{k,1} \leq U_k^{(j)} < q_{k,1} + q_{k,2}\}$ (т.е. один из выбранных узлов принадлежит $V_{k,1}$, другой принадлежит множеству $V_{k,2}$ и узлы соединены ребром из $E_{k,2}$), то $\#V_{k+1,1} = \#V_{k,1} + 2$, $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} - 1$, $\#E_{k+1,1} = \#E_{k,1} + 3$ и $\#E_{k+1,2} = \#E_{k,2} - 1$. Если случилось $\{q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3} + \bar{q}_{k,1} \leq U_k^{(j)} < q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3} + \bar{q}_{k,1} + \bar{q}_{k,2}\}$ (т.е. один из выбранных узлов принадлежит $V_{k,1}$, другой принадлежит множеству $V_{k,2}$ и узлы не соединены), то $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} + 1$, $\#E_{k+1,2} = \#E_{k,2} + 1$ и $\#E_{k+1,3} = \#E_{k,3} + 1$.
3. Если произошло $\{q_{k,1} + q_{k,2} \leq U_k^{(j)} < q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3}\}$ (т.е. оба выбранных узла принадлежат $V_{k,2}$ и они соединены ребром из $E_{k,3}$), то $\#V_{k+1,1} = \#V_{k,1} + 3$, $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} - 2$, $\#E_{k+1,1} = \#E_{k,1} + 3$ и $\#E_{k+1,3} = \#E_{k,3} - 1$. Если случилось $\{U_k^{(j)} \geq 1 - \bar{q}_{k,3}\}$ (т.е. оба выбранных узла принадлежат $V_{k,2}$ и не соединены), то $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} + 1$ и $\#E_{k+1,3} = \#E_{k,3} + 2$.

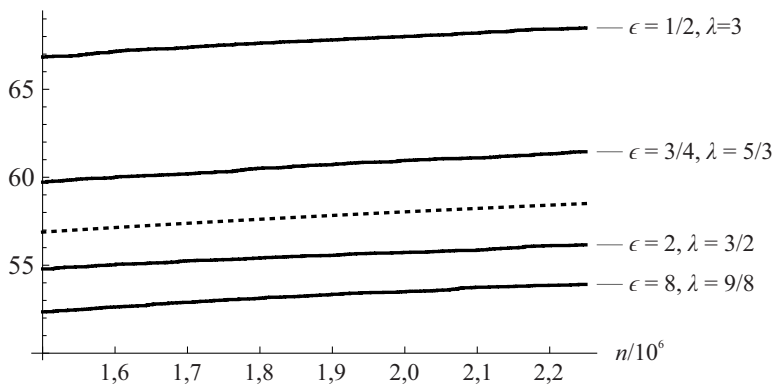


Рис. 1. График $g(n) = 4 \ln(n)$ (пунктир) и $\overline{D_{n,100}}$, $1,5 \times 10^6 \leq n \leq 2,25 \times 10^6$ при начальном графе $G_1^{(1)}$.

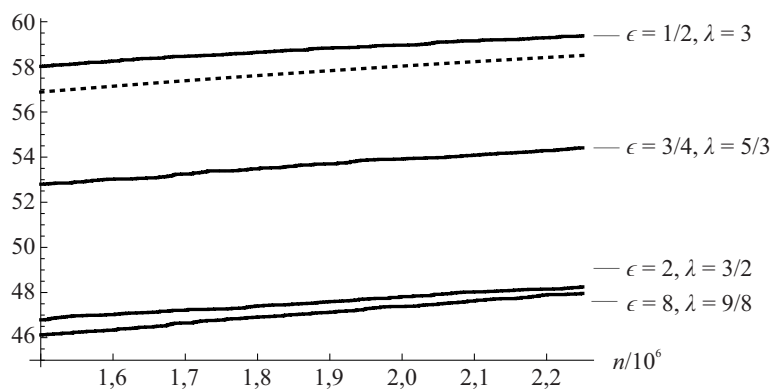


Рис. 2. График $g(n) = 4 \ln(n)$ (пунктир) и $\overline{D_{n,100}}$, $1,5 \times 10^6 \leq n \leq 2,25 \times 10^6$ при начальном графе $G_1^{(2)}$.

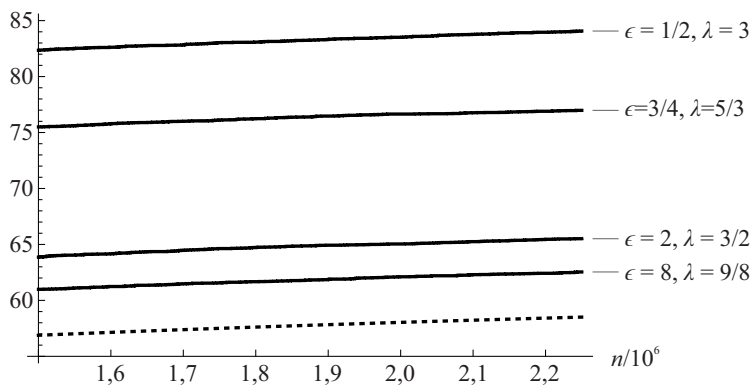


Рис. 3. График $g(n) = 4 \ln(n)$ (пунктир) и $\overline{D_{n,100}}$, $1,5 \times 10^6 \leq n \leq 2,25 \times 10^6$ при начальном графе $G_1^{(3)}$.

В моделировании использованы следующие начальные графы $G_1 = (V_1, E_1)$:

- а) полный граф $G_1^{(1)}$, в котором три узла и три ребра;
- б) граф $G_1^{(2)} = (V_1, E_1)$, где V_1 и E_1 заданы в (15);
- с) полный граф $G_1^{(3)}$, в котором 17 узлов и 136 ребер.

В моделировании разность $E(\Delta_n) - \Delta_1$ аппроксимируется эмпирическим средним $\overline{D_{N,n}}$. Значения $\overline{D_{n,N}}$ рассчитаны по (12) с использованием $N = 100$ независимых последовательностей количеств треугольников. Значения аппроксимации $\overline{D_{n,100}}$, $2 \leq n \leq 2,25 \times 10^6$ рассчитаны для $\epsilon = 1/2, 3/4, 2, 8$ и для каждого начального графа. Результаты моделирования представлены на рис. 1–3, гладкость кривых которых указывает, что выбранное значение N достаточно большое. Чтобы показать, что $\overline{D_{n,100}}$, как функция от n , медленно меняется при больших n , результаты моделирования приведены на интервале натуральных чисел $[1,5 \times 10^6, 2,25 \times 10^6]$.

В соотношении (10) утверждается, что для $\lambda = 1$ математическое ожидание количества треугольников $E(\Delta_n) - \Delta_1$ асимптотически равно $g(n) = 4 \ln(n)$ при $n \rightarrow \infty$. График функции g также приведен на рис. 1–3.

Видим, что графики $\overline{D_{n,100}}$ на рис. 1–3 примерно параллельны $g(n) = 4 \ln(n)$. Поэтому можно предположить, что для каждого начального графа G_1 и $\epsilon > 0$ существует положительный параметр ν , вероятно зависящий от G_1 и ϵ , такой что математическое ожидание $E(\Delta_n) - \Delta_1$ асимптотически равно $\nu \ln(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Результаты моделирования следующие:

1. графики $\overline{D_{n,100}}$ на рис. 1–3 позволяют заключить, что ν зависит от параметра ϵ , что также подтверждается оценками параметра $\hat{\nu}$, полученными методом наименьших квадратов и приведенными в таблице;
2. таблица показывает, что $\bar{D} = \overline{D_{2,5 \times 10^6, 100}}$ и ν зависят от задания начального графа;
3. для всех аппроксимаций $\overline{D_{2,5 \times 10^6, 100}}$ верно

$$\lambda^{-2} \leq \frac{\overline{D_{2,5 \times 10^6, 100}}}{4 \ln(2,5 \times 10^6)} \leq \lambda^2, \quad \lambda = \frac{1 + \epsilon}{\epsilon},$$

что не противоречит теоретическому результату (7);

Эмпирические характеристики $\bar{D} = \overline{D_{2,5 \times 10^6, 100}}$ и $\hat{\nu}$

Начальный граф												
	$G_1^{(1)}$				$G_1^{(2)}$				$G_1^{(3)}$			
ϵ	1/2	3/4	2	8	1/2	3/4	2	8	1/2	3/4	2	8
$\bar{D}$	68	61	56	54	59	54	48	48	84	77	66	62
$\hat{\nu}$	4,69	4,20	3,85	3,69	4,07	3,71	3,29	3,26	5,77	5,29	4,49	4,28

4. аппроксимацию (12) можно применить и для следующей функции присоединения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Составляя алгоритм для вычисления $P(B_k)$, $1 \leq k \leq n - 1$, в данном случае важно иметь в виду, что $c_{i,n} = 1$ тогда и только тогда, когда i – вершина полного графа.

5. Заключение

В статье исследуется математическое ожидание количества треугольников для ОМКП с $m = 2$, любым $\epsilon > 0$ и произвольной функции присоединения f , удовлетворяющей определению 2.

Функция f не обязательно непрерывна в определении 2 (ii) и, следовательно, в теореме 1. Эта функция может быть разрывной с одним или несколькими устранимыми разрывами.

Для начального графа $G_1 = (V_1, E_1)$, с которого начинается эволюция, теорема 1 справедлива для любого множества E_1 , включая пустое. Техническое предположение (3) при $m = 2$ гарантирует, что каждый граф G_n , $n \geq 1$ содержит не менее двух вершин, которые можно выбрать, применив взвешенный случайный выбор без удаления. Доказано, что математическое ожидание числа треугольников имеет порядок $\ln(n)$. В разделе 2 отмечено, что количество треугольников в линейной МПП с $m \geq 2$ и $\delta > 0$ имеет такой же порядок $\ln(n)$, см. [9, 18].

Предложен быстрый алгоритм для генерирования последовательности $E\Delta_n - \Delta_1$, $n \geq 2$ большой длины для ОМКП с функцией присоединения (13). Результаты моделирования подтверждают утверждение теоремы 1.

Веса $p_{i,n}(f, \epsilon)$, $i \in V_n$ в (4) равномерно распределены на V_n , если функция присоединения постоянна. В данном случае найдена асимптотика для $E\Delta_n - \Delta_1$ и доказана асимптотическая нормальность, см. (10) и (11), соответственно, в теореме 2.

Случай $m > 2$ требует дополнительных вычислений из-за сложной комбинаторики. Как отмечено в [11], исследовать рост количества треугольников с помощью моделирования уже непростая задача. Можно полагать, что математическое ожидание количества треугольников имеет порядок $\ln(n)$ и в случае $m > 2$.

Имея информацию о поведении последовательности $E\Delta_n$, $n \geq 2$, можно исследовать поведение усредненного коэффициента кластеризации

$$\bar{C}_n = \frac{3\Delta_n}{\text{количество пар соединенных ребер в графе } G_n}.$$

Это предмет дальнейшего исследования.

Приведем здесь доказательства утверждений.
Дигамма-функция ψ определяется, как

$$(П.1) \quad \psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x)), \quad x > 0,$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$ — гамма-функция Эйлера, см., например, [25]. Определим функцию

$$\Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) = 4\mu^2 \psi(n + \#V_1 - 1 - \mu) + 2\mu(2\#V_1 - \#E_1) (\psi(n + \#V_1 - 1) - \psi(n + \#V_1 - 1 - \mu)),$$

где μ определена в (8), начальный граф $G_1 = (V_1, E_1)$ удовлетворяет определению 2 (i), а натуральное число n такое, что $n \geq n_0$, где натуральное n_0 удовлетворяет условию $n_0 + \#V_1 - 1 - \mu > 0$.

Лемма 1. Пусть последовательности $\#V_k$, $k \geq 1$ и $\#E_k$, $k \geq 1$ определены в (6) и β вещественное положительное число, а натуральные числа $1 \leq n' < n'' < \infty$ такие, что $n' + \#V_1 - 1 - \beta > 0$. Тогда

$$(П.2) \quad 2\beta^2 \sum_{k=n'}^{n''-1} \frac{\#E_k}{\#V_k(\#V_k - \beta)} = \Upsilon_{n''}(\beta, \#V_1, \#E_1) - \Upsilon_{n'}(\beta, \#V_1, \#E_1).$$

Доказательство леммы 1. Левая часть (П.2) равна сумме

$$2\beta(\#E_1 - 2\#V_1) \sum_{k=n'}^{n''-1} \frac{1}{k + \#V_1 - 1} + \\ + 2\beta(2\beta - (\#E_1 - 2\#V_1)) \sum_{k=n'}^{n''-1} \frac{1}{k + \#V_1 - 1 - \beta}.$$

Равенство (П.2) следует из тождества

$$(П.3) \quad \sum_{k=n'}^{n''-1} \frac{1}{k + \gamma} = \psi(n'' + \gamma) - \psi(n' + \gamma), \quad n' + \gamma > 0.$$

Чтобы доказать (П.3), разложим левую часть (П.3) следующим образом:

$$\sum_{k=n'}^{\infty} \frac{1}{k + \gamma} - \sum_{k=n''}^{\infty} \frac{1}{k + \gamma} = - \left\{ -\gamma_E + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+n'+\gamma} \right\} \\ + \left\{ -\gamma_E + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+n''+\gamma} \right\},$$

где $\gamma_E \approx 0,5772$ – постоянная Эйлера–Маскерони. Теперь остается использовать разложение

$$\psi(x) = -\gamma_E + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+x}, \quad x > 0,$$

(см., например, [25]).

Лемма 2. Пусть β – вещественное положительное число, а натуральные числа $1 \leq n' < n < \infty$ такие, что $n' + \#V_1 - 1 - \beta > 0$. Тогда

$$\Upsilon_n(\beta, \#V_1, \#E_1) - 4\beta^2 \ln(n) = g(n),$$

где $g(n) = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 2. Можно записать $\Upsilon_n(\beta, \#V_1, \#E_1) - 4\beta^2 \ln(n) = g(n)$, где

$$\begin{aligned} g(n) = & 2\beta(2\beta - (2\#V_1 - \#E_1))(\psi(n + \#V_1 - 1 - \beta) - \ln(n + \#V_1 - 1 - \beta)) + \\ & + 2\beta(2\#V_1 - \#E_1)(\psi(n + \#V_1 - 1) - \ln(n + \#V_1 - 1)) + \\ & + 4\beta^2 \ln\left(1 + \frac{\#V_1 - 1 - \beta}{n}\right) + 2\beta(2\#V_1 - \#E_1) \ln\left(1 + \frac{\beta}{n + \#V_1 - 1 - \beta}\right). \end{aligned}$$

Используя неравенства $x/(1+x) \leq \ln(1+x) \leq x$, $x > -1$ и $|\psi(x) - \ln(x)| < 1/x$, $x > 0$ (см., например, [26]), получаем $|g(n)| \leq C/n$, где $0 < C < \infty$ – некоторая константа.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что случайные события $\{\Delta_{n+1} = \Delta_n + 1\}$ и

$$(П.4) \quad B_n = \{\text{неупорядоченная пара узлов, выбираемая из } V_n \\ \text{методом взвешенного выбора без удаления,} \\ \text{соединена ребром из } E_n\}$$

эквивалентны. Тогда имеем

$$(П.5) \quad \Delta_n - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{n-1} I(B_k), \quad n \geq 2,$$

где $I(B_k)$ обозначает индикатор события B_k . Отсюда, учитывая, что граф G_1 неслучайный, получим

$$(П.6) \quad E(\Delta_n) - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{n-1} P(B_k), \quad n \geq 2.$$

Применяя взвешенный выбор без удаления, первый узел множества V_k выбирается случайным образом с учетом весов $p_{i,k}(f, \epsilon)$, $i \in V_k$, $k \geq 1$. Тот же узел,

скажем узел i' , не может быть выбран снова. Вторым узел выбирается с использованием перенормированных весов $p_{i,k}(f, \epsilon) / (1 - p_{i',k}(f, \epsilon))$, $i \in V_k \setminus \{i'\}$. Если $\#E_k = 0$, то немедленно следует, что $P(B_k) = 0$. Для случая $\#E_k \neq 0$ имеем

$$(П.7) \quad P(B_k) = \sum_{\{i_1, i_2\} \in E_k} \left(\frac{p_{i_1,k}(f, \epsilon)p_{i_2,k}(f, \epsilon)}{1 - p_{i_1,k}(f, \epsilon)} + \frac{p_{i_1,k}(f, \epsilon)p_{i_2,k}(f, \epsilon)}{1 - p_{i_2,k}(f, \epsilon)} \right), \quad k \geq 1.$$

Здесь сумма берется по всем неупорядоченным парам узлов $\{i_1, i_2\}$, принадлежащих множеству ребер E_k . Из предположения $\epsilon > 0$ следует $0 < p_{i,k}(f, \epsilon) < 1$ для любых $i \in V_k$, $k \geq 1$. Таким образом, все слагаемые в правой части (П.7) положительные.

В принятых предположениях (см., определение 2 (ii)) функция f не убывает на $[0, 1]$, т.е., $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ для всех $0 \leq x \leq 1$. Ввиду грубого неравенства $0 \leq c_{i,k} \leq 1$, $i \in V_k$, $k \geq 1$, это приводит к $f(0) \leq f(c_{i,k}) \leq f(1)$, $i \in V_k$, $k \geq 1$. Отсюда следуют неравенства для весов (4):

$$(П.8) \quad \frac{1}{\mu \#V_k} \leq p_{i,k}(f, \epsilon) \leq \frac{\mu}{\#V_k}, \quad i \in V_k, \quad k \geq 1.$$

Рассмотрим верхнюю оценку для $E(\Delta_n) - \Delta_1$. Предположим сначала, что $\#V_1 - \mu > 0$. Используя (6), (П.7) и (П.8), получим

$$(П.9) \quad P(B_k) \leq 2\mu^2 \frac{\#E_k}{\#V_k(\#V_k - \mu)}$$

для $k \geq 1$. Вместе с (П.6) это дает

$$E(\Delta_n) - \Delta_1 \leq 2\mu^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\#E_k}{\#V_k(\#V_k - \mu)}.$$

Применяя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} E(\Delta_n) - \Delta_1 &\leq \Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) - \Upsilon_1(\mu, \#V_1, \#E_1) \leq \\ &\leq 4\mu^2 \ln(n) + |\Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) - 4\mu^2 \ln(n)| + |\Upsilon_1(\mu, \#V_1, \#E_1)|. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{E(\Delta_n) - \Delta_1}{4 \ln(n)} \leq \mu^2 + \frac{|\Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) - 4\mu^2 \ln(n)|}{4 \ln(n)} + \frac{|\Upsilon_1(\mu, \#V_1, \#E_1)|}{4 \ln(n)}.$$

Теперь из леммы 2 следует

$$(П.10) \quad \frac{E(\Delta_n) - \Delta_1}{4 \ln(n)} \leq \mu^2 + g_2(n),$$

где $g_2(n) = O(1/\ln(n))$, $n \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что $\#V_1 - \mu \leq 0$. Тогда существует натуральное число k_0 такое, что $\#V_k - \mu \leq 0$ для $1 \leq k \leq k_0$ и $\#V_k - \mu > 0$ для $k > k_0$. Разложим сумму в правой части (П.6) следующим образом:

$$(П.11) \quad \mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{k_0} P(B_k) + \sum_{k=k_0+1}^{n-1} P(B_k).$$

Используя грубую оценку $P(B_k) \leq 1$, получаем, что первая сумма в правой части (П.11) не превосходит k_0 . Чтобы найти оценку сверху второй суммы, применим неравенства (П.9), которые выполнены для $k > k_0$. Тогда имеем

$$\mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 \leq k_0 + \Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) - \Upsilon_{k_0+1}(\mu, \#V_1, \#E_1).$$

Остается применить лемму 2 еще раз, чтобы убедиться, что (П.10) выполнено.

Аналогичные рассуждения можно применить и для получения оценки снизу для $(\mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1) / (4 \ln(n))$.

Доказательство теоремы 2. Подставляя (9) в (4), получим, что для любого $\epsilon > 0$

$$(П.12) \quad p_{i,k}(f, \epsilon) = 1/\#V_k, \quad i \in V_k, \quad k \geq 1.$$

Объединяя (П.6), (П.7) и (П.12), имеем

$$(П.13) \quad \mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\#E_k}{\#V_k(\#V_k - 1)}, \quad n \geq 2,$$

и, следовательно,

$$(П.14) \quad \mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 = \Upsilon_n(1, \#V_1, \#E_1) - \Upsilon_1(1, \#V_1, \#E_1), \quad n \geq 2.$$

Теперь (10) следует, если применить лемму 2 с $\beta = 1$.

Докажем (11). Имеем

$$(П.15) \quad \frac{\Delta_n - 4 \ln(n)}{2 \ln^{1/2}(n)} = \frac{\mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 - 4 \ln(n)}{2 \ln^{1/2}(n)} + \frac{\Delta_1}{2 \ln^{1/2}(n)} + \frac{\Delta_n - \mathbb{E}(\Delta_n)}{2 \ln^{1/2}(n)}.$$

Используя (П.14), нетрудно убедиться, что первое слагаемое в правой части (П.15) равно соотношению

$$\frac{\{\Upsilon_n(1, \#V_1, \#E_1) - 4 \ln(n)\} - \Upsilon_1(1, \#V_1, \#E_1)}{2 \ln^{1/2}(n)},$$

которое по лемме 2 стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, что второе слагаемое в правой части (П.15) тоже стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Поэтому остается доказать, что

$$(П.16) \quad \frac{\Delta_n - \mathbb{E}(\Delta_n)}{2 \ln^{1/2}(n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя (П.5) и (П.6), получим

$$\Delta_n - E(\Delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (I(B_k) - P(B_k)).$$

Слагаемые в сумме по k независимы, поскольку появление событий $B_1, \dots, B_{k-1}$ не влияет на вероятность $P(B_k)$. Кроме того, $(I(B_k) - P(B_k))$, $k \geq 1$ являются неодинаково распределенными сл.в. с нулевым средним значением.

Определим

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} E(I(B_k) - P(B_k))^2.$$

По теореме Ляпунова (см., например, теорему 27.3 в [27]) соотношение (П.16) будет доказано, если покажем, что выполнено

$$(П.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^2}{4 \ln(n)} = 1$$

и

$$(П.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n^{2+\eta}} \sum_{k=1}^{n-1} E|I(B_k) - P(B_k)|^{2+\eta} = 0$$

для некоторого положительного η .

Сначала докажем (П.17). Нетрудно убедиться, что

$$(П.19) \quad \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} P(B_k) - \sum_{k=1}^{n-1} P^2(B_k).$$

Из (П.13) следует, что $P(B_k) \leq C_1/(k + \#V_1 - 2)$, $k \geq 1$, где $C_1 = 4 + + 2|\#E_1 - 2\#V_1 + 2|$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1} P^2(B_k) \leq C_1^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k + \#V_1 - 2)^2} \leq C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{C_1^2 \pi^2}{6}.$$

Отсюда следует, что $\ln^{-1}(n) \sum_{k=1}^{n-1} P^2(B_k) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Последнее соотношение с (10), (П.6) и (П.19) влечет (П.17).

Условие Ляпунова (П.18) выполняется при $\eta = 1$. Чтобы это проверить, запишем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} E|I(B_k) - P(B_k)|^3 = \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} \{P(B_k) - P^2(B_k)\} \{(1 - P(B_k))^2 + P^2(B_k)\} \leq 2\sigma_n^2. \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что левая часть (П.18) (с $\eta = 1$) не превышает $\lim_{n \rightarrow \infty} 2/\sigma_n = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barabási A.-L., Albert R.* Statistical mechanics of complex networks // *Rev. Modern Phys.* 1999. No. 74. P. 47–97.
2. *Albert R., Barabási A.-L.* Emergence of scaling in random networks // *Science*. 2002. No. 286. P. 509–512.
3. *Bollobás B., Borgs C., Chayes J., Riordan O.* Directed Scale-Free Graphs. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, SODA '03. 132–139 (2003).
4. *Ghoshal G., Chi L., Barabasi A.L.* Uncovering the role of elementary processes in network evolution // *Scientific Reports*. 2013. V. 3. No. 6. P. 2920.
5. *Markovich N.M., Vaičiulis M.* Extreme Value Statistics for Evolving Random Networks // *Mathematics*. 2023. V. 11. No. 9. P. 2171.
<https://doi.org/10.3390/math11092171>
6. *Norros I., Reittu H.* On a conditionally poissonian graph process // *Advances in Applied Probability*. 2006. V. 38. No. 1. P. 59–75.
7. *Wan P., Wang T., Davis R.A., Resnick S.I.* Are extreme value estimation methods useful for network data? // *Extremes*. 2020. No. 23. P. 171–195.
<https://doi.org/10.1007/s10687-019-00359-x>
8. *Wang T., Resnick S.I.* Poisson Edge Growth and Preferential Attachment Networks // *Methodol. Comput. Appl. Probab.* 2023. V. 25. No. 8.
<https://doi.org/10.1007/s11009-023-09997-y>
9. *Garavaglia A., Stegehuis C.* Subgraphs in preferential attachment models // *Advances in Applied Probability*. 2019. No. 51. P. 898–926.
10. *Wang T., Resnick S.I.* Consistency of Hill estimators in a linear preferential attachment model // *Extremes*. 2019. No. 22. P. 1–28.
11. *Bagrow J.P., Brockmann D.* Natural Emergence of Clusters and Bursts in Network Evolution // *Phys. Rev. X*. 2013. No. 3. P. 021016.
12. *Newman M.E.J.* Networks: an introduction. New York, Oxford. 2010.
13. *Newman M.E.J.* Random Graphs with Clustering // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 103. No. 5. P. 058701.
14. *Markovich N.M., Vaičiulis M.* Investigation of triangle counts in graphs evolved by clustering attachment // *Autom. Remote Control*. 2024. No. 85. P. 978–989.
15. *Маркович Н.М., Рыжов М.С., Кулик М.Р.* Исследование зависимостей и распределений в случайных сетях для смешанных моделей эволюции и при удалении узлов // *УБС*. 2024. № 109. С. 89–121.
16. *Bollobás B., Riordan O.M.* Mathematical Results on Scale-Free Random Graphs. Weinheim: Wiley-WCH, 2002.
17. *Рябченко А.А., Самосват Е.А.* О числе подграфов в случайном графе Барабаш–Альберт // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2012. № 76:3. С. 183–202.
18. *Eggemann N., Noble S.D.* The clustering coefficient of a scale-free random graph // *Discrete Appl. Math.* 2011. No. 159. P. 953–965.
19. *Móri T.F.* On random trees // *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*. 2002. V. 39. No. 1–2. P. 143–155.
20. *Bobkov S.G., Danshina M.A., Ulyanov V.V.* Rate of Convergence to the Poisson Law of the Numbers of Cycles in the Generalized Random Graphs // *Operator Theory and Harmonic Analysis*. Springer: Cham, 2021. P. 109–133.

21. *Liu Q., Dong Z.* Limit laws for the number of triangles in the generalized random graphs with random node weights // Statistics and Probability Letters. 2020. V. 161. No. 6. P. 108733.
22. *Michielan R., Litvak N., Stegehuis C.* Detecting hyperbolic geometry in networks: why triangles are not enough // Phys. Rev. E. 2022. V. 106. No. 5. P. 054303.
23. *Gao P., van der Hofstad R., Southwell A., Stegehuis C.* Counting triangles in power-law uniform random graphs // Electron.J.Combinat. 2020. V. 27. No. 3. P. 1–28.
24. *Araujo P., Mattos L.* Local central limit theorem for triangle counts in sparse random graphs // arXiv:2307.09446v3[math.CO] 28 Apr 2025.
25. *Batir N.* On some properties of digamma and polygamma functions // J. Math. Anal. Appl. 2007. No. 328. P. 452–465.
26. *Alzer H.* On some inequalities for the gamma and psi functions // Math. Comp. 1997. V. 66. No. 217. P. 373–389.
27. *Bilingsley P.* Probability and Measures, 3rd Edition. New York: John Wiley and Sons, 1995.
28. *Fristedt B., Gray L.* A Modern Approach to Probability Theory. Boston: Birkhäuser, 1997.

Статья представлена к публикации членом редколлегии И.В. Родионовым.

Поступила в редакцию 05.02.2025

После доработки 12.09.2025

Принята к публикации 31.10.2025

Стохастические системы

© 2026 г. Г.Ш. ЦИЦИАШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук (guram@iam.dvo.ru)
(Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток),
М.А. ОСИПОВА, канд. физ.-мат. наук (mao1975@list.ru)
(Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток;
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ С ЗАПРЕТАМИ¹

Рассматриваются сети массового обслуживания с запретами на переходы между узлами сети, определяющими протокол их работы. В графе переходных интенсивностей сети выделяется множество базовых вершин (пропорциональное числу ребер) и ставится вопрос об удалении некоторого его подмножества так, чтобы стационарное распределение марковского процесса, описывающего функционирование сети, сохранялось. Чтобы это условие выполнялось, достаточно, чтобы множество вершин графа переходных интенсивностей после удаления подмножества базовых вершин совпадало с множеством состояний марковского процесса и этот граф был связным. Доказано, что отношения числа оставшихся базовых вершин к общему их числу n сходится к $1/2$ при $n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, граф переходных интенсивностей, базовые вершины.

DOI: 10.7868/S2413977726030023

1. Введение

Граф переходных интенсивностей сети массового обслуживания определяет протокол ее работы, и удаление его элементов приводит к уменьшению возможных переходов между состояниями сети. Такое изменение графа переходных интенсивностей означает изменение протокола работы сети массового обслуживания и связано, например, с решением задач о конструировании транспортной или компьютерной сети (см. [1–6]). Одним из способов изменения протокола работы сети является введение блокирующих вероятностей переходов между состояниями сети [7–9]. Но этот способ не подразумевает введения запретов на переходы, что является актуальной прикладной задачей и требует связности графа переходных интенсивностей.

Авторы имеют свои наработки в этом направлении [10, 11], и настоящая работа есть их продолжение. В этих работах исследованы экспоненциальные

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00460-26-00.

сети с различными протоколами их работы, в том числе со случайно меняющимися, при моделировании которых строится граф переходных интенсивностей. Вычисляются стационарные распределения рассматриваемых сетей при условиях связности графа переходных интенсивностей.

В настоящей работе определяются условия, при которых удаление некоторых ребер графа переходных интенсивностей, определяющих функционирование сети массового обслуживания, не меняет стационарного распределения в ней. Речь идет об открытой сети Джексона, в том числе и с суммарным ограниченным числом заявок, и о замкнутой сети Гордона–Ньюелла [12, 13]. Поиск требуемых условий основан на представлении графа переходных интенсивностей как объединения базовых графов. Каждый базовый граф состоит из базовой вершины и является полным, пересечение множества ребер любых двух базовых графов пусто. Такое представление (декомпозиция) позволяет определить набор базовых вершин и соответствующих им графов, удаление которых сохраняет общее множество вершин графа и связность графа переходных интенсивностей. Декомпозиция графа приводит к декомпозиции в мультипликативной теореме.

Основным результатом работы является конструктивное удаление некоторого подмножества базовых вершин, при котором сохраняется стационарное распределение марковского процесса, описывающего функционирование сети. Удаление любой вершины из множества оставшихся базовых вершин приводит к нарушению условия сохранения этого распределения, что приводит к оптимальному в определенном смысле решению. Множество вершин графа переходных интенсивностей после удаления подмножества базовых вершин совпадает с множеством состояний марковского процесса, и этот граф связный. Доказано, что отношение числа оставшихся базовых вершин к общему числу вершин n сходится к $1/2$ при $n \rightarrow \infty$.

2. Декомпозиция в открытой сети

Рассмотрим открытую сеть Джексона G с пуассоновским входным потоком интенсивности λ , состоящую из m одноканальных систем массового обслуживания с экспоненциальными временами обслуживания интенсивности μ_i , $i = 1, \dots, m$. Динамика перемещения заявки в сети задается маршрутной матрицей $\Theta = \|\theta_{ij}\|_{i,j=0}^m$, где θ_{ij} – вероятность перехода после обслуживания из i -го узла в j -й, $\theta_{00} = 0$, узел с номером 0 – внешний источник. Предполагается, что маршрутная матрица неразложимая:

$$\forall i, j \in \{0, 1, \dots, m\} \exists i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\} : \theta_{ii_1} > 0, \theta_{i_1 i_2} > 0, \dots, \theta_{i_r j} > 0.$$

Тогда вектор $\Lambda = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ является единственным решением системы балансовых соотношений

$$(1) \quad \Lambda = \Lambda \Theta.$$

Функционирование сети (число заявок в узлах) описывается дискретным марковским процессом $y(t)$ с множеством состояний $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) : n_1, \dots, n_m \geq 0\}$ и переходными интенсивностями:

$$(2) \quad \begin{aligned} L(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k) &= \lambda \theta_{0k}, \quad L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n}) = \mu_k \theta_{k0}, \\ L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i) &= \mu_k \theta_{ki}, \quad 1 \leq k \neq i \leq m, \quad \mathbf{n} \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Здесь элемент $\mathbf{e}_k \in \mathbf{N}$, у которого k -я координата равна 1, остальные – 0.

Рассмотрим граф $\Gamma(\mathbf{n})$ с множеством вершин $V(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k, k = \overline{1, m}\}$ и множеством ребер $\{(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k), (\mathbf{n} + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} + \mathbf{e}_j), i \neq j, 1 \leq k, i, j \leq m\}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}$, их соединяющих ($\Gamma(\mathbf{n}_1), \Gamma(\mathbf{n}_2), \mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$, не имеют общих ребер). Назовем вершину $\mathbf{n}$, определяющую граф $\Gamma(\mathbf{n})$, базовой, соответствующий ей граф $\Gamma(\mathbf{n})$ базовым, а множество всех таких вершин $\mathbf{N}_0$ – базовым множеством. Заметим, что $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$ в случае открытой сети G .

Для некоторого $\mathbf{N}_* \subseteq \mathbf{N}_0$ положим

$$\Gamma(\mathbf{N}_*) = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}_*} \Gamma(\mathbf{n}), \quad V(\mathbf{N}_*) = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}_*} V(\mathbf{n}).$$

Опишем сеть G с запретами, сопоставив ей граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (обозначим ее через G_*). Отсутствие ребра $(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k)$ в графе $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ означает, что в узел k извне заявки не поступают и после обслуживания в нем вовсе не уходят. Отсутствие ребра $(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i)$ в графе $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ означает, что после обслуживания в узле k заявки не поступают в узел $i, k \neq i$. Такие разрешения и запреты на переходы между узлами сети определяют протокол ее работы.

Теорема 1. Если $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1, i = 1, \dots, m, V(\mathbf{N}_) = \mathbf{N}$, а граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ связный, то марковский процесс $y(t)$, описывающий функционирование сети G_* , эргодический и его стационарное распределение $\pi(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbf{N}$, вычисляется по формуле*

$$(3) \quad \pi(\mathbf{n}) = C^{-1} \prod_{i=1}^m \rho_i^{n_i}, \quad C = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}} \prod_{i=1}^m \rho_i^{n_i}, \quad \mathbf{n} \in \mathbf{N}.$$

Под связностью неориентированного графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ понимается существование пути между любыми двумя его вершинами.

Замечание 1. Стационарное распределение (3) марковского процесса $y(t)$, описывающего функционирование сети G , осталось неизменным и для сети G_* .

Замечание 2. Аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для случая многоканальных узлов.

Замечание 3. Теорему 1 можно распространить на случай конечного множества состояний $\mathbf{N}$ марковского процесса $y(t)$ без ограничений $\rho_i < 1, i = 1, \dots, m$, где $\mathbf{N}_* \subseteq \mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$ – множество базовых вершин, также удовлетворяющее условиям $V(\mathbf{N}_0) = \mathbf{N}$, граф $\Gamma(\mathbf{N}_0)$ связный.

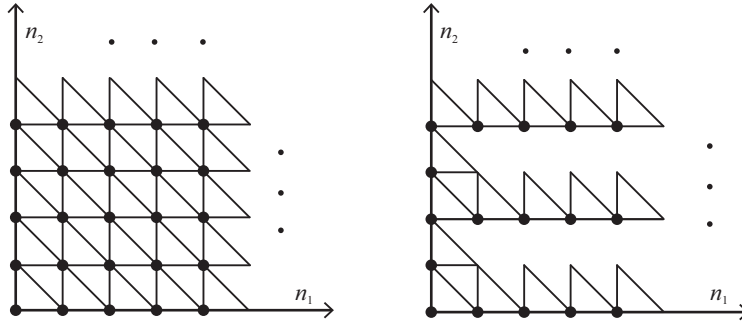


Рис. 1. Граф $\Gamma(\mathbf{N})$ (слева) и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (справа), множества $\mathbf{N}_0$ (слева) и $\mathbf{N}_*$ (справа) выделены жирными точками.

Задачей данной работы является построение подмножества $\mathbf{N}_*$ множества базовых вершин $\mathbf{N}_0$ так, чтобы, с одной стороны, стационарное распределение марковского процесса сохранялось, а с другой стороны, отношения числа вершин множества $\mathbf{N}_*$ к числу вершин множества $\mathbf{N}_0$ стремилось к $1/2$ при увеличении числа заявок в сети. Для сохранения стационарного распределения в открытой сети достаточно потребовать выполнение равенства $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ и связности графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Неограниченное число заявок. Рассмотрим открытую сеть, функционирование которой описывается дискретным марковским процессом $y(t)$ с множеством состояний $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) : n_1, \dots, n_m \geq 0\}$ и переходными интенсивностями (2). Построим сеть с запретами. Введем подмножество множества базовых вершин $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$:

$$(4) \quad \mathbf{N}_* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{N}_*(2k) \bigcup (2k+1)\mathbf{e}_m \right) \subset \mathbf{N}_0,$$

$$\mathbf{N}_*(k) = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} : n_1, \dots, n_{m-1} \geq 0, n_m = k\}.$$

В качестве примера (для случая $m = 2$) на рис. 1 построены графы $\Gamma(\mathbf{N})$ и $\Gamma(\mathbf{N}_*)$, жирными точками выделено множество базовых вершин $\mathbf{N}_0$, а также его подмножество $\mathbf{N}_*$.

Теорема 2. Для построенной открытой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (4)) равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ выполняется и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ является связным. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$, или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$. Определим множество $\Pi(2k) = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} : 0 \leq n_1, \dots, n_m \leq 2k\}$ и обозначим через $|D|$ число элементов множества D .

Теорема 3. Для построенной открытой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (4)) справедливо соотношение

$$(5) \quad \frac{|\mathbf{N}_* \cap \Pi(2k)|}{|\mathbf{N}_0 \cap \Pi(2k)|} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty,$$

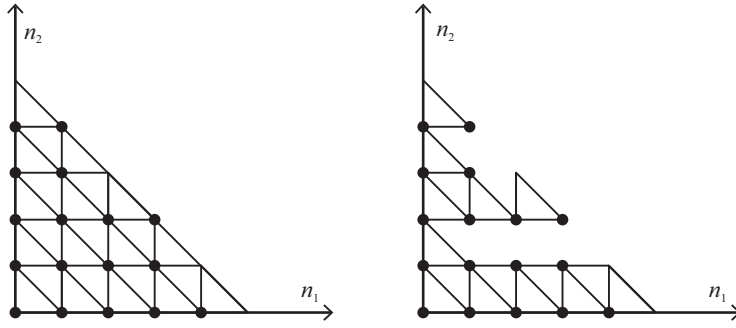


Рис. 2. Граф $\Gamma(\mathbf{N})$ (слева) и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (справа), множества $\mathbf{N}_0$ (слева) и $\mathbf{N}_*$ (справа) выделены жирными точками.

при этом

$$(6) \quad \frac{|\mathbf{N}_* \cap \Pi(2k)|}{|\mathbf{N}_0 \cap \Pi(2k)|} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2k+1)} + \frac{k}{(2k+1)^m} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

В таблице приведены результаты вычислений $\frac{|\mathbf{N}_* \cap \Pi(2k)|}{|\mathbf{N}_0 \cap \Pi(2k)|} - \frac{1}{2}$ при различных значениях m и k .

Оценка скорости сходимости

k	$m = 2$	$m = 3$
5	0,08677686	0,049211119
10	0,046485261	0,024889321
20	0,024092802	0,012485309
50	0,009851975	0,004999025

Ограниченное суммарное число заявок. Рассмотрим открытую сеть, функционирование которой описывается дискретным марковским процессом $y(t)$ с конечным множеством состояний $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) : n_1, \dots, n_m \geq 0, \sum_{k=1}^m n_k \leq 2K + 1\}$ и переходными интенсивностями (2). Построим сеть с запретами, определив множество базовых вершин $\mathbf{N}_0 = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} : \sum_{k=1}^m n_k \leq 2K\}$. Множество $\mathbf{N}_0$ максимально в том смысле, что добавление к нему вершины $\mathbf{n} \notin \mathbf{N}_0$ приводит к соотношению $V(\mathbf{N}_0 \cup \mathbf{n}) \neq \mathbf{N}$. Введем подмножество множества базовых вершин

$$(7) \quad \mathbf{N}_* = \bigcup_{k=0}^K \mathbf{N}_*(2k) \bigcup \{(2k+1)\mathbf{e}_m, k = 0, \dots, K-1\} \in \mathbf{N}_0,$$

$$\mathbf{N}_*(k) = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{N} : \sum_{k=1}^m n_k \leq 2K - k, n_m = k \right\}.$$

В качестве примера (для случая $m = 2$) на рис. 2 построены графы $\Gamma(\mathbf{N})$ и $\Gamma(\mathbf{N}_*)$, жирными точками выделено множество базовых вершин $\mathbf{N}_0$, а также его подмножество $\mathbf{N}_*$.

Теорема 4. Для построенной открытой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (7)) равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ выполняется и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ является связным. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Теорема 5. Для построенной открытой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (7)) справедливо соотношение

$$(8) \quad \frac{|\mathbf{N}_*|}{|\mathbf{N}_0|} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad K \rightarrow \infty.$$

3. Декомпозиция в замкнутой сети

Рассмотрим замкнутую сеть (сеть Гордона–Ньюелла) G , в которой циркулирует постоянное число заявок $2K + 1$ и число обслуживающих узлов $m > 2$. Перемещения заявок в сети описываются маршрутной матрицей $\Theta = \|\theta_{ij}\|_{i,j=1}^m$, которая предполагается неразложимой. Тогда для любого $B > 0$ решение $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ системы балансовых соотношений $\Lambda = \Lambda\Theta$ при условии $B = \sum_{i=1}^m \lambda_i > 0$ существует и единственно.

Функционирование сети (число заявок в узлах) описывается дискретным марковским процессом $y(t)$ с конечным множеством состояний

$$\mathbf{N} = \left\{ \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) : n_1, \dots, n_m \geq 0, \sum_{k=1}^m n_k = 2K + 1 \right\}$$

и переходными интенсивностями:

$$(9) \quad L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k) = \mu_i \theta_{ik}, \quad 1 \leq i \neq k \leq m, \quad \mathbf{n} + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \in \mathbf{N}.$$

Определим множество всех базовых вершин $\mathbf{N}_0$ равенством

$$\mathbf{N}_0 = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} : n_m > 0\}.$$

Равенства (9) перепишем для $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0$:

$$(10) \quad \begin{aligned} L(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_i) &= \mu_m \theta_{mi}, \\ L(\mathbf{n} - \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} - \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_k) &= \mu_i \theta_{ik}, \quad 1 \leq i \neq k < m. \end{aligned}$$

С помощью равенств (10) определим для $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0$ множество

$$V(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_i, \quad 1 \leq i < m\}.$$

Рассмотрим граф $\Gamma(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0$, с множеством вершин $V(\mathbf{n})$ и множеством ребер, их соединяющих ($\Gamma(\mathbf{n}_1)$, $\Gamma(\mathbf{n}_2)$, $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$, не имеют общих ребер). Очевидно, что $V(\mathbf{N}_0) = \mathbf{N}$.

Пусть $\mathbf{N}_* \subset \mathbf{N}_0$. Аналогично случаю открытой сети можно описать замкнутую сеть G с запретами, сопоставив ей граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$, обозначим ее через G_* .

Теорема 6. Если $V(\mathbf{N}_) = \mathbf{N}$, а граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ связный, то марковский процесс $y(t)$, описывающий функционирование сети G_* , эргодический и его стационарное распределение $\pi(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, вычисляется по формуле*

$$\pi(\mathbf{n}) = C^{-1} \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i}, \quad C = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}} \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Построим $\mathbf{N}_* \subset \mathbf{N}_0$ так, чтобы стационарное распределение марковского процесса сохранялось и отношение $\frac{|\mathbf{N}_*|}{|\mathbf{N}_0|} \rightarrow \frac{1}{2}$ при $K \rightarrow \infty$. Вследствие теоремы 6 для сохранения стационарного распределения в замкнутой сети достаточно потребовать выполнение равенства $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ и связности графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Для построения множества базовых вершин $\mathbf{N}_*$ сопоставим каждой точке множества $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbf{N}$ точку $\mathbf{n}' = (n_1, \dots, n_{m-1}, 0)$ и множество таких точек обозначим через $\mathbf{N}' = \left\{ \mathbf{n}' : \sum_{k=1}^{m-1} n_k \leq 2K + 1 \right\}$. Тогда множеству $\mathbf{N}_0$ будет соответствовать множество $\mathbf{N}'_0 = \left\{ \mathbf{n}' \in \mathbf{N}' : \sum_{k=1}^{m-1} n_k \leq 2K \right\}$. Определим теперь

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_* &= \bigcup_{k=0}^K \mathbf{N}'_*(2k) \bigcup \{(2k+1)\mathbf{e}_{m-1}, k = 0, \dots, K-1\}, \\ \mathbf{N}'_*(k) &= \left\{ \mathbf{n}' \in \mathbf{N}' : \sum_{k=1}^{m-1} n_k \leq 2K - k, n_{m-1} = k \right\}. \end{aligned}$$

Тогда построим множество

$$(11) \quad \mathbf{N}_* = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0 : \mathbf{n}' \in \mathbf{N}'_*\}.$$

Теорема 7. Для построенной замкнутой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (11)) равенство $V(\mathbf{N}_) = \mathbf{N}$ выполняется и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ является связным. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.*

Теорема 8. Для построенной замкнутой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (11)) справедливо соотношение

$$(12) \quad \frac{|\mathbf{N}_*|}{|\mathbf{N}_0|} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad K \rightarrow \infty.$$

4. Заключение

Во всех рассмотренных моделях массового обслуживания множество базовых вершин $\mathbf{N}_0$ по числу вершин и, значит, по числу ребер в графе переходных интенсивностей примерно вдвое меньше подмножества базовых вершин

$\mathbf{N}_* \subset \mathbf{N}_0$. Построить экспоненциальные системы массового обслуживания с запретами, сохраняя стационарное распределение, удалось за счет перехода к графу переходных интенсивностей специального вида. Начиналась эта работа с частного случая: со случая $m = 2$ для открытой сети и $m = 3$ для замкнутой. Предложенные в работе варианты множества $\mathbf{N}_*$ не единственны. Планируется продолжить работу в этом направлении, обобщив полученные результаты и распространив их на системы массового обслуживания, функционирование которых описывается марковскими процессами.

В настоящее время авторы сотрудничают со специалистами по логистике морского транспорта и планируют совместно с ними применить полученные результаты к проектированию логистической сети контейнерных перевозок с одного вида транспорта на другой (автомобильный, железнодорожный и морской) для обеспечения бесперебойной доставки товаров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Доказательство формулы (3) основано на теореме эргодичности, сформулированной в [14] для дискретного марковского процесса. Проверим ее достаточные условия. 1) Чтобы убедиться, что распределение (3) удовлетворяет уравнениям Колмогорова–Чепмена

$$(П.1) \quad \sum_{\mathbf{n}' \in V(\mathbf{N}_0)} \pi(\mathbf{n})L(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \sum_{\mathbf{n}' \in V(\mathbf{N}_0)} \pi(\mathbf{n}')L(\mathbf{n}', \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in \mathbf{N},$$

достаточно убедиться, что оно удовлетворяет для $\mathbf{n}_0 \in \mathbf{N}_0$ равенствам

$$(П.2) \quad \sum_{\mathbf{n}' \in V(\mathbf{n}_0)} \pi(\mathbf{n})L(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \sum_{\mathbf{n}' \in V(\mathbf{n}_0)} \pi(\mathbf{n}')L(\mathbf{n}', \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in V(\mathbf{n}_0).$$

Подстановка распределения (3) в формулу (П.2) приводит к балансовым соотношениям (1), при этом $C < \infty$. 2) Состояния процесса $y(t)$ сообщающиеся, что следует из предположения связности графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$. 3) Условие регулярности тоже выполняется, так как для любого $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $\sum_{\mathbf{n}' \in \mathbf{N}} L(\mathbf{n}, \mathbf{n}') < \text{const}$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что

$$V(\mathbf{N}_*) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathbf{N}_*(2k) \cup \mathbf{N}_*(2k+1)) = \mathbf{N}.$$

Так как граф $\Gamma(\mathbf{N}_*(2k))$ является связным и ребро $((2k+1)\mathbf{e}_m, (2k+2)\mathbf{e}_m)$ соединяет графы $\Gamma(\mathbf{N}_*(2k))$, $\Gamma(\mathbf{N}_*(2k+2))$, $k = 0, 1, \dots$, то граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ также является связным.

Проверим выполнение второго утверждения теоремы. Сначала рассмотрим случай $m = 2$, возможны следующие варианты.

1. Если $\mathbf{n} = (0, 2k)$ и $k > 0$, то граф $\Gamma(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$ не содержит пути между вершинами $\mathbf{n} = (0, 2k)$, $(0, 2k + 1)$ и, следовательно, является несвязным. Если же $k = 0$, то $\mathbf{n} \notin V(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$ и, значит, $V(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n}) \neq V(\mathbf{N}_*)$.

2. Если $\mathbf{n} = (0, 2k + 1)$, $k \geq 0$, тогда в графе $\Gamma(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$ нет пути между вершинами $(0, 2k + 1)$, $(0, 2k + 2)$ и, значит, граф $\Gamma(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$ несвязный.

3. Если $\mathbf{n} = (n_1, 2k)$, $k \geq 0$, и $n_1 > 1$, то $(n_1, 2k + 1) \notin V(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$ и, следовательно, $V(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n}) \neq V(\mathbf{N}_*)$. Если же $n_1 = 1$, то вершина $\mathbf{n} = (1, 2k)$ не связана с вершиной $(2, 2k)$ в графе $\Gamma(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$ и, значит, граф $\Gamma(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$ является несвязным.

Перейдем теперь к случаю $m > 2$. Проверка условий **1**, **2** при замене $(0, 2k)$ на $(0, \dots, 0, 2k)$, а $(0, 2k + 1)$ на $(0, \dots, 0, 2k + 1)$ аналогична. При проверке условия **3** полагаем $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_{m-1}, 2k)$. Если $n_1 + \dots + n_{m-1} > 1$, то нетрудно установить, что $(n_1, \dots, n_{m-1}, 2k + 1) \notin V(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$. Если же $n_1 + \dots + n_{m-1} = 1$, то в графе $\Gamma(\mathbf{N}_* \setminus \mathbf{n})$ отсутствует связь между вершинами $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i + 2k\mathbf{e}_m$ и $2\mathbf{e}_i + 2k\mathbf{e}_m$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Число вершин $|\mathbf{N}_0 \cap \Pi_m(2k)| = (2k + 1)^m$. В свою очередь число вершин $|\mathbf{N}_* \cap \Pi_m(2k)| = (2k + 1)^{m-1}(k + 1) + k$. Отсюда следуют формулы (5), (6). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 5. Из [15] следует, что число решений Диафантова уравнения $n_1 + \dots + n_m = n$ в неотрицательных целых числах равно C_{n+m-1}^n . Тогда

$$(П.3) \quad |\mathbf{N}_*(k)| = \sum_{i=0}^{2K-k} C_{i+m-2}^{m-2} = C_{2K-k+m-1}^{m-1}, \quad |\mathbf{N}_*| = \sum_{k=0}^K |\mathbf{N}_*(2k)| + K.$$

Из (П.3) получаем соотношения $1 = \mathbf{N}_*(2K) < \mathbf{N}_*(2K - 1) < \dots < \mathbf{N}_*(0)$. Следовательно, имеют место неравенства

$$(П.4) \quad \sum_{k=0}^K |\mathbf{N}_*(2k)| > \sum_{k=1}^K |\mathbf{N}_*(2k - 1)| > \sum_{k=0}^K |\mathbf{N}_*(2k)| - |\mathbf{N}_*(0)|.$$

Из (П.4) имеем

$$(П.5) \quad \begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^K |\mathbf{N}_*(2k)| - |\mathbf{N}_*(0)| &< |\mathbf{N}_0| = \sum_{k=0}^K |\mathbf{N}_*(2k)| + \sum_{k=1}^K |\mathbf{N}_*(2k - 1)| < 2 \sum_{k=0}^K |\mathbf{N}_*(2k)|, \\ \frac{|\mathbf{N}_0|}{2} &< \sum_{k=0}^K |\mathbf{N}_*(2k)| < \frac{|\mathbf{N}_0| + |\mathbf{N}_*(0)|}{2}, \\ \frac{|\mathbf{N}_0|}{2} + K &< |\mathbf{N}_*| < \frac{|\mathbf{N}_0| + |\mathbf{N}_*(0)|}{2} + K. \end{aligned}$$

В свою очередь при $K \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические оценки

$$|\mathbf{N}_0| = \sum_{i=0}^{2K} C_{i+m-1}^{m-1} = C_{2K+m}^m \sim \frac{(2K)^m}{m!}, \quad |\mathbf{N}_*(0)| = C_{2K+m-1}^{m-1} \sim \frac{(2K)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$\frac{K}{|\mathbf{N}_0|} \rightarrow 0, \quad \frac{|\mathbf{N}_*(0)|}{|\mathbf{N}_0|} \rightarrow 0.$$

Таким образом, соотношение (8) выполняется из неравенства (П.5). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 7. По построению существует взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbf{N}'_*$ и $\mathbf{N}_*$, а также между множествами $\mathbf{N}'$ и $\mathbf{N}$, поэтому графы $\Gamma(\mathbf{N}'_*)$ и $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ изоморфны. В свою очередь из теоремы 4 следует, что $V(\mathbf{N}'_*) = \mathbf{N}'$ и граф $\Gamma(\mathbf{N}'_*)$ связный, а удаление из множества $\mathbf{N}'_*$ вершины нарушает хотя бы одно из этих утверждений. Утверждение теоремы есть следствие перечисленных фактов. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Так как

$$|\mathbf{N}'_*| = |\mathbf{N}_*|, \quad |\mathbf{N}'_0| = |\mathbf{N}_0|,$$

то из утверждения теоремы 5 следует утверждение теоремы 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Квитко К.Б.* Сравнительный анализ международных транспортных систем: инфраструктура, рейтинги, транспортные коридоры // Транспортные системы и технологии. 2020. Т. 6. № 1. С. 15–29.
2. *Комов М.С.* Современные тенденции развития и значение международных транспортных коридоров на рынке транспортных услуг // Экономика и предпринимательство. 2022. № 6(143). С. 243–246.
3. *O'Hara J.* Toward a Commodity Enterprise Middleware: Can AMQP enable a new era in messaging middleware? A look inside standards-based messaging with AMQP // Queue. 2007. V. 5. No. 4. P. 48–55.
4. *Gudehus T., Kotzab H.* Comprehensive Logistics. Heidelberg: Springer Science+Business Media, 2012.
5. *Konfino K.V.* Topical issues of development of international transport corridors and realization of transport potential of Russia // Labour and Social Relations Journal. 2019. V. 30. No. 5. P. 101–108.
6. *Vinoski S.* Advanced Message Queuing Protocol // IEEE Internet Computing. 2006. V. 10. No. 6. P. 87–89.
7. *Balsamo S., De Nitto V.* A survey of Product-form Queueing Networks with Blocking and their Equivalences // Annals of Operations Research. 1994. V. 48. P. 31–61.
8. *Balsamo S., Clo M.C.* A Convolution Algorithm for Product-form Queueing Networks with Blocking // Annals of Operations Research. 1998. V. 79. P. 97–117.

9. *Boucherie R.J., van Dijk N.M.* On the arrival theorem for product form queueing networks with blocking // *Performance Evaluation*. 1997. V. 29. P. 155–176.
10. *Цицашвили Г.Ш., Осипова М.А.* Новые мультипликативные теоремы для сетей массового обслуживания // *Проблемы передачи информации*. 2005. Т. 41. № 2. С. 111–122.
11. *Цицашвили Г.Ш., Осипова М.А.* Вероятностное распределение в сетях массового обслуживания с переменной структурой // *Проблемы передачи информации*. 2006. Т. 42. № 2. С. 101–108.
12. *Башарин Г.П., Толмачев А.Л.* Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем. Итоги науки и техники, сер. “Теория вероятностей”. М.: ВИНТИ, 1983.
13. *Balbo G., Marin A., Olhario D., Sereno M.* Computational Algorithms for the Product Form Solution of Closed Queueing Networks with Finite Buffers and Skip-Over Policy // *arXiv:2409.08075v1 [cs.PF]*. 2024.
14. *Ивченко Г.И., Кашианов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.
15. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 25.02.2025

После доработки 11.12.2025

Принята к публикации 24.12.2025

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2026 г. Д.В. СПЕРАНСКИЙ, д-р техн. наук (Speranskiy.dv@gmail.com)
(Российский университет транспорта, Москва)

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОКРЫВАЮЩИЕ ДЕРЕВЬЯ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ И СИНТЕЗА НЕЧЕТКИХ УСТРОЙСТВ

Введено понятие реализуемости нечеткого графа и сформулированы две оптимизационные задачи, сводящиеся к построению оптимальных покрывающих деревьев для нечетких графов. Критериями оптимальности являются реализуемость графа и минимальность длины дерева с учетом реализуемости. Эти задачи являются многокритериальными, чем принципиально отличаются от аналогичной задачи для четких графов. Описан точный метод решения упомянутых задач, имеющий достаточно высокую вычислительную сложность. Для построения минимального покрывающего дерева нечеткого графа предложен простой эвристический алгоритм с невысокой вычислительной сложностью, но не гарантирующий абсолютной его минимальности. Метод проиллюстрирован на примере.

Ключевые слова: нечеткий граф, покрывающие деревья, реализуемость и минимальность дерева, точные методы построения, эвристический метод.

DOI: 10.7868/S2413977726030033

1. Введение

При разработке электронных устройств часто необходимо электрически соединить несколько контактов. Желательно получить схему с минимальным количеством проводников. Решение этой задачи можно получить с использованием модели связного неориентированного графа $G(V, E)$, где V – множество вершин, E – множество возможных соединений между парами вершин. Для каждого ребра $(u, v) \in E$ можно задать вес $w(u, v)$, определяющий стоимость соединения u и v . Для минимизации затрат на соединение вершин необходимо найти ациклическое подмножество $T \subseteq E$, соединяющее все вершины, чей общий вес $w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u, v)$ минимален. Поскольку множество T ациклическое и связывает все вершины, оно должно образовывать дерево, называемое минимальным покрывающим (остовом).

Рассмотрим еще один случай, когда исходное устройство представляет собой совокупность подсхем и задано множество пар подсхем, которые могут взаимно диагностировать друг друга. Предположим, что эти пары имеют многоканальные связи для взаимной диагностики. Каждая многоканальная

связь пары подсхем имеет вес, равный ее стоимости. По аналогии с предыдущей задачей требуется построить ациклическое подмножество подсхем, соединяющих все взаимно диагностируемые пары и имеющих минимальный вес. Понятно, что решение этой задачи также сводится к построению минимального покрывающего дерева.

Приведенные задачи относятся к теории графов, имеющих многие практические приложения, которые связаны с решением разнообразных оптимизационных задач в различных областях. Обширная литература, посвященная их решению, в значительной части относится к классической теории графов. В ней граф является детерминированным и его описание не содержит никаких неопределенностей. Такие графы принято называть четкими. Полученные для них многочисленные результаты, а также основные понятия и конструкции теории графов представлены в монографиях [1, 2]. Поэтому в тексте статьи, как правило, ссылки на них не даются, предполагая знакомство с ними читателя.

Задача построения покрывающих деревьев для классических графов активно исследовалась с 20-х гг. прошлого века. Так, в 1926 г. был опубликован алгоритм ее решения, предложенный Борувкой, который позже неоднократно переоткрывался (Флорек, Перкалели, Соллини). Для решения задачи использовались различные подходы. Так, на основе алгоритма Боровки был реализован рандомизированный алгоритм, работающий в среднем за линейное время. Автором монографии [3] Майникой Э. был предложен его собственный алгоритм; в этой монографии, 2-я глава которой полностью посвящена упомянутой задаче, излагаются также ныне широко используемые алгоритмы Прима [4] и Крускала [5]. Упомянутые выше алгоритмы основывались на использовании идеи упорядочения ребер графа по весу и их инцидентности.

В связи с распространением ныне компьютерных сетей и разработками нового математического аппарата (например, генетических алгоритмов) в последнее время появились публикации, к примеру [6, 7], в которых для построения покрывающих деревьев возникли новые подходы, относящиеся к эволюционным вычислениям.

К сожалению, модель четкого графа не применима во многих реальных ситуациях, когда точное описание объекта исследования и его функционирования отсутствует и получить его принципиально невозможно. В этом случае нужны новые средства, отражающие возникающие неопределенности. В статье Л. Заде [8] такие средства были предложены: им введено понятие нечеткого множества, ставшего основой для создания ныне широко используемой в приложениях теории нечетких множеств.

Сейчас к одному из активно развивающихся направлений относится теория нечетких графов. Интерес к ней в последнее десятилетие связан с использованием ее результатов в важных практических приложениях. В качестве примеров, кроме упомянутых выше, приведем проблему живучести систем, оценки информационной надежности сложных систем, моделирова-

ния гетерогенных систем. Феномен нечеткости присутствует и при решении многих оптимизационных проблем экономического характера. Так, укажем на известную проблему проектирования сети дорог для некоторого региона с минимальными затратами на ее строительство. Если перечень дорог и их параметров между городами региона точно известен, то с использованием модели четкого графа проблема имеет точное решение. Для его получения разработано несколько эффективных алгоритмов [3].

Если вопрос о целесообразности прокладки отдельных дорог между некоторыми парами городов не имеет однозначного ответа, то возникающая неопределенность требует для решения упомянутой выше проблемы иной модели.

Для иллюстрации метода решения задачи построения покрывающего дерева для нечеткого графа далее используем задачу проектирования сети дорог региона. Это связано с ее популярностью, легко понимаемой постановкой и интерпретацией.

В теории четких графов проблема проектирования сети дорог сводится к построению для графа покрывающего дерева. При возникающей неопределенности эта проблема может быть решена с привлечением модели нечеткого графа и сводится она тоже к построению покрывающего дерева. Предлагаемая статья посвящена построению покрывающих деревьев для нечетких графов, оптимальных по критериям, которые отличны от критерия, принятого в четких графах.

2. Некоторые понятия и определения

Вначале напомним необходимые понятия, используемые далее. Все они трактуются так, как это изложено в монографии А. Кофмана [9]. Начнем с понятия нечеткого множества. Пусть множество A есть подмножество множества E ($A \subset E$). Принадлежность элемента $x \in A$ записывается с помощью функции $\mu_A(x)$, принимающей любое неотрицательное значение в упорядоченном множестве M , в частности из отрезка $[0,1]$. Математический объект, представленный в виде

$$A = \{(x_1 | \mu_A(x_1)), (x_2 | \mu_A(x_2)), \dots, (x_n | \mu_A(x_n))\},$$

где $\mu_A(x_i)$ определяет степень принадлежности элемента x_i множеству A , называется нечетким подмножеством множества E . Теперь напомним определение нечеткого графа [9]. Пусть E_1, E_2 – два множества и пусть $x \in E_1$, а $y \in E_2$. Множество пар (x, y) определяет прямое произведение $E_1 \times E_2$. Нечеткое подмножество G такое, что

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2 \mu_G(x, y) \in M,$$

где M – множество степеней принадлежности $E_1 \times E_2$, называется нечетким графом. Если пары (x, y) рассматривать как упорядоченные, то соответст-

вующий граф обычно называют нечетким ориентированным графом. Нечеткие графы, как и четкие, изображаются в виде вершин и ребер (дуг), связывающих их.

Встречающиеся в тексте статьи термины обычно имеют тот же смысл, что и в теории четких графов. Если же некоторые понятия для нечетких графов не совпадают с аналогичными понятиями для четких графов, то это будет оговариваться особо. Условимся для нечетких неориентированных графов длину ребра (x, y) обозначать как $a(x, y)$. Напомним теперь понятие покрывающего (остовного) дерева графа: это ациклический связный подграф данного связного графа, в который входят все его вершины.

3. Содержательная формулировка задач

Вначале приведем некоторые комментарии к задаче о построении покрывающего дерева для нечеткого графа. В регионе, содержащем несколько городов, рассматривается проект строительства дорог, связывающих каждую пару его городов (не обязательно непосредственно, возможна связь транзитом). Задано множество пар городов, для которых строительство связывающей их непосредственно дороги возможно (разрешено). Длины дорог между парами городов из заданного множества известны. Для каждой такой дороги имеется также оценка целесообразности включения ее в проект (например, исходя из приносимого ею экономического эффекта и затрат на строительство). Такая оценка задается в виде числа из некоторого упорядоченного множества M (в частности, из отрезка $[0, 1]$), понимаемого как степень принадлежности дороги создаваемому проекту сети.

В качестве математической модели сети дорог далее используется нечеткий граф, где множество городов региона – это множество вершин, а множество дорог проекта – множество его ребер. В отличие от четкого графа, где весом каждого ребра (x, y) обычно является одно число, интерпретируемое как его длина, для нечеткого графа весом является упорядоченная пара чисел $(a(x, y), \mu_G(x, y))$. Первое число – длина ребра, второе – степень его принадлежности. Понятно, что теперь оптимальность проекта может оцениваться по двум критериям, ассоциируемым с компонентами пары. Поэтому в статье рассматриваются две задачи оптимизации, содержательные формулировки которых приводятся ниже. Требуется разработать проект сети дорог (построить покрывающее дерево), связывающий все города региона, который:

1) обеспечивает максимальную вероятность его построения (максимальную сумму степеней принадлежности ребер) при минимально возможной сумме длин всех дорог, входящих в проект, с использованием параметров заданного нечеткого графа, являющегося моделью проекта сети;

2) обеспечивает минимальную сумму длин всех дорог сети при максимальной сумме степеней их принадлежности, используя параметры заданного нечеткого графа, являющегося моделью проекта сети. Далее в основном используется терминология, в которой проект сети дорог и ее мате-

математическая модель (покрывающее дерево нечеткого графа) являются синонимами.

Известно [3], что при решении аналога этой задачи для четкого графа в качестве критерия оптимальности используется минимальность суммарной длины дорог проекта сети. В этом случае задача сводится к построению минимального покрывающего дерева для графа, в котором вершинами являются города, а длины ребер (дорог), связывающих пары городов, известны. Решение сформулированных задач для нечеткого графа также сводится очевидным образом к построению для него некоторых оптимальных покрывающих деревьев, но в ином толковании (понимании) различного вида его оптимальностей. Поиск публикаций в приведенной здесь или близкой к ней постановкам задач для нечеткого графа общего вида показал их отсутствие.

4. Реализуемость и минимальность покрывающего дерева

Чтобы пояснить вводимые ниже понятия, выскажем соображения и мотивацию их введения для нечетких графов. Если нечеткий граф $G(X, E)$ есть математическая модель сети для решения рассматриваемой задачи, то множество E в ней состоит только из «разрешенных» ребер, для которых $\mu_G(x, y) > 0$. Как было сказано выше, вес каждого ребра (x, y) есть упорядоченная пара чисел $a(x, y), \mu_G(x, y)$, где второе число в паре – степень принадлежности ребра (x, y) множеству E . Эту величину всегда можно трансформировать в вероятность $P(x, y)$ принадлежности ребра (x, y) множеству E . Легко видеть, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает плотность распределения вероятностей. Отличие состоит только в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности всех дуг в нечетком графе может быть любым неотрицательным числом. В связи с этим и возникает возможность преобразования функции принадлежности ребра графа в функцию распределения вероятностей. Такое сведение осуществляется просто нормированием функции принадлежности делением ее значения для каждого ребра нечеткого графа на величину S (при $S \neq 0$). Этот способ использовался и ранее в ряде публикаций.

В теории нечетких множеств ненулевая степень принадлежности ребра трактуется только как потенциальная возможность его включения в граф. Естественно, что эта возможность тем выше, чем больше эта степень. Однако понятно, что реальное включение ребра (с ненулевой оценкой вероятности) в граф не обязательно осуществится. Это сопоставимо с аналогичной ситуацией в теории вероятностей, когда некоторое событие имеет ненулевую вероятность появления, но это не означает, что оно обязательно произойдет.

Заданный нечеткий граф предполагается связным, поскольку иначе у него не будет существовать покрывающего дерева. Однако реально в графе могут отсутствовать некоторые ребра, имеющие ненулевое значение принадлежности, из-за чего он может утратить свойство связности. Чтобы по возможности

избежать этого, требуется обеспечить для каждого ребра (дороги), включаемого в покрывающее дерево, максимальное значение принадлежности и тем самым максимальную вероятность реального существования покрывающего дерева.

Для дальнейшего изложения предварительно введем следующие обозначения: $E = \{(a_1, b_1), \dots, (a_z, b_z)\}$ – множество ребер нечеткого графа $G(X, E)$, $Rect(G(X, E))$ – реализуемость графа $G(X, E)$, $Lect(G(X, E))$ – суммарная длина всех ребер графа $G(X, E)$, $Pbe(x, y)$ – вероятность принадлежности ребра (x, y) множеству $E = \{(a_1, b_1), \dots, (a_z, b_z)\}$, $Mct(G(X, E))$ – минимальное покрывающее дерево графа $G(X, E)$, $Lct(G(X, E))$ – длина покрывающего дерева графа $G(X, E)$. Используя эти обозначения, приведем некоторые определения.

Реализуемостью покрывающего дерева нечеткого графа $G(X, E)$ назовем число, являющееся суммой вероятностей принадлежности всех ребер, входящих в это дерево, т.е. $Rect(G(X, E)) = \sum_{i=1}^z Pbe_G(a_i, b_i)$. Таким образом, реализуемость проекта сети дорог – это оценка (в виде вероятности) возможности реального существования покрывающего дерева для заданного нечеткого графа при заданных вероятностях принадлежности его ребер. Заметим, что понятие реализуемости хорошо согласуется со здравым смыслом: чем больше значение реализуемости, тем больше шансов реально построить для него покрывающее дерево.

Длиной покрывающего дерева нечеткого графа назовем число, равное сумме длин всех входящих в него ребер, т.е. $Lect(G(X, E)) = \sum_{i=1}^z a(a_i, b_i)$. Покрывающее дерево минимальной длины нечеткого графа $Mct(G(X, E))$ будем называть *минимальным покрывающим деревом*.

Покрывающее дерево, имеющее максимальную реализуемость и при этом минимально возможную длину (*оптимальность по длине дерева*) при заданных оценках вероятности принадлежности его ребер, назовем *оптимальным по реализуемости*.

Теперь дадим строгую формулировку сформулированной в предыдущем разделе статьи первой задачи: для заданного нечеткого неориентированного графа требуется построить *оптимальное по реализуемости* покрывающее дерево. Вторая задача теперь формулируется так: для заданного нечеткого неориентированного графа требуется построить *минимальное покрывающее дерево*.

5. Метод поиска оптимальных покрывающих деревьев

Поскольку в задании нечеткого графа присутствует функция принадлежности, то возникает проблема ее получения. Ее исследование началось с введения понятия нечеткого графа, но продолжается и поныне. По этой тематике имеется много публикаций, например, [10–12]. Заметим, что для вычисления значения вероятности некоторого события с заданной точностью требуется проведение значительного количества экспериментов (в принципе

стремящегося к бесконечности). Поскольку это не всегда целесообразно из-за большой трудоемкости, часто ограничиваются некоторым приближенным значением. Отметим, что методы определения значений необходимых параметров для получения значения результатов с заданной точностью ныне хорошо разработаны в теории выборочных исследований. Укажем, например, на монографию [13], в которой эти вопросы освещены подробно. Проблема построения функции принадлежности лежит вне рамок данной статьи, поэтому далее предполагается, что при задании нечеткого графа эта функция уже построена.

Для построения оптимального по реализуемости покрывающего дерева нечеткого графа ниже предлагается метод, который использует результаты, полученные для решения аналогичной задачи поиска минимального покрывающего дерева в классической теории графов. Так, в [1, гл. 7, п. 2] представлена с доказательством корректности процедура построения всех покрывающих деревьев четкого графа. Если в заданном нечетком графе удалить из веса каждого его ребра вторую компоненту (значение принадлежности) соответствующей пары, то в результате получим соответствующий ему четкий граф $\hat{G}(X, E)$. Этот граф является частным случаем исходного нечеткого графа, у которого все ребра заданного графа присутствуют независимо от значений их принадлежности. Воспользовавшись упомянутой процедурой, построим для $\hat{G}(X, E)$ множество всех его покрывающих деревьев, которое обозначим через $Ct(\hat{G}(X, E)) = \{G_1, \dots, G_k\}$. Далее для каждого из ребер покрывающих деревьев множества вернем в его вес вторую компоненту (значение принадлежности), тем самым превратив эти деревья в нечеткие. Очевидно, что после этого преобразования четкие покрывающие деревья множества $Ct(\hat{G}(X, E))$ по-прежнему остались покрывающими деревьями и трансформировались во множество $Ct(G(X, E)) = \{\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_k\}$ всех покрывающих деревьев заданного нечеткого графа $G(X, E)$.

Для каждого нечеткого покрывающего дерева из множества $Ct(G(X, E))$ вычислим его реализуемость $Rect(\bar{G}_i)$, $i = 1, \dots, k$ и найдем среди них дерево (их может быть несколько) с максимальной реализуемостью. Далее для каждого нечеткого покрывающего дерева из множества $Ct(G(X, E))$ вычислим $Lect(\bar{G}_i)$, $i = 1, \dots, k$, – его длину. Оптимальное покрывающее дерево по реализуемости для заданного графа можно найти, используя полученные данные.

Условимся, что все покрывающие деревья множества $Ct(G(X, E))$ пронумерованы. Пусть $MaxR$ – это множество номеров деревьев с максимальной реализуемостью, а ML – это множество номеров деревьев из множества $Ct(G(X, E))$, длины которых были подсчитаны.

Пусть $MaxR = \{v_1, \dots, v_z\}$. образуем множество всех пар $(v_i, \text{длина дерева } v_i)$, где $i = 1, \dots, z$. Среди всех этих пар найдем такую, у которой длина дерева минимальна, пусть у нее соответствующее дерево имеет номер i_0 . Понятно, что покрывающее дерево с номером i_0 является оптимальным по

реализуемости. Если множество $MaxR$ содержит только один элемент, то оптимальное дерево имеет именно этот номер. Если таких деревьев окажется несколько, то среди элементов $(v_i, \text{длина дерева } v_i)$ упомянутого выше множества выберем дерево j_0 с минимальной длиной. Понятно, что тогда оптимальным по реализуемости является дерево с номером j_0 .

Вторая задача оптимизации (по минимизации покрывающего дерева) решается аналогичным образом. Сначала во множестве пар $(v_i, \text{длина дерева } v_i)$ выберем минимальное покрывающее дерево. Если это только одно дерево с номером i_0 , то это дерево со значением реализуемости $Rect(G_{i_0})$ является оптимальным по минимальности. Если таких деревьев несколько (с номерами $i_0^1, i_0^2, \dots, i_0^r$), то найдем среди них дерево j_0 с максимальным значением реализуемости. Очевидно, что именно это дерево является оптимальным по минимальности покрывающего дерева.

Предложенный метод базировался на возможности построения множества всех покрывающих деревьев графа. Такая необходимость возникает иногда при потребности отбора «лучшего» покрывающего дерева, но сам критерий отбора очень трудоемок. В этой ситуации решение задачи оптимизации может оказаться практически невыполнимым. В [1] указано, что еще в XIX в. была получена формула для вычисления числа всех покрывающих деревьев полного связного неориентированного графа с n вершинами. Это число равно n^{n-2} . Из формулы очевидно, что число покрывающих деревьев растет очень быстро с ростом n . Этот факт роста справедлив не только для полных, но и для всех других видов графов. В связи с этим нужен эффективный метод порождения исчерпывающего, но без повторений, множества всех упомянутых деревьев. Такие методы были предложены, но, к сожалению, практически они тоже не всегда решают задачу из-за достаточно высокой трудоемкости.

6. Эвристический алгоритм построения минимального по длине покрывающего дерева

По высказанным выше причинам желательно располагать методами приближенного решения рассматриваемой задачи вместо точного, но более приемлемыми при практической реализации.

Отметим, что принципиальное отличие рассматриваемых здесь задач для нечеткого графа от аналогичной задачи для четкого графа заключается в том, что в данном случае она превращается в задачу многокритериальной оптимизации [14]. В большинстве реальных практических задач приходится выполнять оптимизацию по многим критериям и в общем случае их можно сформулировать следующим образом:

$$\max\{z_1 = f_1(x), \dots, z_q = f_q(x)\}, \quad g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \geq 0.$$

Здесь пространство поиска решений таково:

$$S = \{x \in R^n | g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \geq 0\}.$$

При решении многокритериальных задач ищется решение, которое лучше всех остальных. Однако не обязательно существует такое решение, которое является лучшим относительно всех критериев. Это происходит вследствие наличия всевозможных конфликтов. Очевидно, что решение может быть лучшим относительно одного критерия и в то же время худшим относительно других критериев. Поэтому при многокритериальной оптимизации выполняется поиск решений, которые являются оптимальными по концепции Парето [15, 16].

В рассматриваемых задачах имеется фактически два критерия: первый – значение реализации покрывающего дерева, которое надо максимизировать, а второй – длина покрывающего дерева, которую надо минимизировать. Многокритериальная оптимизация является естественным развитием обычной численной или комбинаторной оптимизации. Поэтому многие разработанные методы были распространены на этот общий случай. Отметим, что для многокритериальной оптимизации центральным вопросом является построение целевой функции. За последние десятилетия разработано несколько подходов к этой проблеме, в том числе векторная оценка, ранжирование по Парето, использование взвешенных сумм.

Надо отметить, что подход со взвешенными суммами в последние годы один из популярных, где новая общая целевая функция строится из отдельных целевых функций в виде взвешенной суммы

$$F(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x), w_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k w_i = 1.$$

Здесь каждой целевой функции $f_i(x)$ присваивается свой вес, и задача сводится к скалярному случаю. При этом различные веса w_i дают разные решения в смысле Парето. Понятно, что с учетом разнообразия природы отдельных целевых функций задача выбора весовых коэффициентов является достаточно сложной.

Предлагаемый ниже подход также будет сводить задачу к скалярному случаю, но метод сведения отличен от метода взвешенных сумм.

Известно [2, гл. 23], что для решения задачи о поиске минимального покрывающего дерева для четкого графа разработано несколько алгоритмов. К числу наиболее популярных относятся алгоритмы Прима и Краскала. Они оба являются жадными алгоритмами, т.е. используют стратегию выбора варианта, наилучшего в данный момент. Эта стратегия в общем случае не гарантирует получения абсолютного оптимума. Однако было доказано, что названные алгоритмы действительно строят минимальные покрывающие деревья. Важным также является то, что оба алгоритма реализуются для четкого графа $G(X, E)$ за время работы $O(X \lg E)$ [2], что является хорошим показателем. Исходя из сказанного можно сделать вывод, что если свести рассматриваемую задачу для нечеткого графа к той же задаче для четкого, чтобы

можно было воспользоваться алгоритмами Прима или Краскала, то это было бы приемлемым решением.

Возможной реализацией высказанной идеи является предложение подходящего способа преобразования заданного нечеткого графа в четкий. Представляется, что такое преобразование должно сохранить структуру исходного графа (множества вершин и ребер, а также связей между ними), но произвести подходящим способом замену веса каждого ребра (упорядоченной пары значений) одним скалярным значением. Фактически это означает, что значение скаляра должно каким-то образом отражать в себе информацию о вероятности принадлежности ребра и его длине.

Понятно, что такое сведение не должно быть трудоемким и должно ограничиваться выполнением достаточно простых действий с компонентами веса. С точки зрения простоты подходящими являются, например, арифметические операции с ними. Понятно, что поскольку эти компоненты имеют различную и при том иногда несовместимую природу, то операции сложения, вычитания и деления с ними часто не имеют какого-либо содержательного смысла, и поэтому наиболее подходящей является операция умножения.

Далее будет предложен эвристический алгоритм для решения задачи построения минимального покрывающего дерева для нечеткого графа, базирующийся на высказанной идее. В нечетком графе $G(X, E)$ каждое ребро (x, y) принадлежит графу с заданной вероятностью $P(x, y)$. Этот факт может трактоваться следующим образом: при достаточно большом числе N испытаний (моделирования транспортных потоков в сети) вся дорога (x, y) будет востребована для проезда не N раз, а только $P(x, y)N$ раз. Аналогично, при каждом отдельном испытании (моделировании конкретного маршрута движения транспорта) можно условно считать, что дорога (x, y) длиной $a(x, y)$ используется не полностью, а только ее часть, длина которой равна $P(x, y) a(x, y)$. При проведении N испытаний общая длина пути, пройденного по дороге (x, y) , равна $N(P(x, y) a(x, y))$. Тогда за одно испытание в среднем будет пройден путь $P(x, y) a(x, y)$. В этом случае упомянутую часть можно трактовать как «длину ребра» (x, y) , но теперь уже «взвешенную» с учетом абсолютной его длины и вероятности принадлежности. Таким образом, вес ребра в заданном исходном нечетком графе $G(X, E)$, представляющий собой упорядоченную пару, будет заменен одним числом, и теперь граф превращается в четкий. Заметим, что предложенный вариант замещения длины $a(x, y)$ ребра на $P(x, y) a(x, y)$, конечно, не может претендовать на строго обоснованную замену. Это попытка только указать мотив, который привел к предлагаемой эвристической замене.

После получения эвристическим алгоритмом четкого графа к нему возможно теперь применить алгоритмы Прима и Краскала для построения минимального покрывающего дерева. После построения в полученном покрывающем дереве на каждом его ребре в качестве его веса восстановим ту упорядоченную пару, которая этому ребру соответствовала в исходном нечетком

графе. В результате будет получено минимальное покрывающее дерево для заданного нечеткого графа, которое и будет играть роль некоторого приближения к минимальному.

Понятно, что предложенный эвристический алгоритм не гарантирует построения оптимального покрывающего дерева в соответствии с принятым критерием минимальности. В общем случае по этому алгоритму будет получено минимальное (по длине) покрывающее дерево, но значение реализуемости которого может и не оказаться максимальным. В качестве достоинств предложенного алгоритма отметим его простоту и невысокую сложность вычислений.

Для оценки эффективности алгоритма, конечно, необходимо располагать достаточными статистическими данными результатов его применения, которые сейчас отсутствуют. Небольшой опыт его апробации показал, что при гарантированном им построении минимального по длине покрывающего дерева отклонения значений его реализуемости от максимальных значений были сравнительно незначительны. Проиллюстрируем работу предложенного алгоритма на небольшом примере. Рассмотрим нечеткий граф, представленный на рис. 1. Параметры этого графа представлены в таблице.

Параметры примера нечеткого графа

№	Ребро (x, y)	Вероятность принадлежности ребра $Pbe(x, y)$	Длина ребра $a(x, y)$	Замещающая длина $Pbe(x, y) \times a(x, y)$
1	(1,2)	0,099	70	6,93
2	(1,4)	0,099	60	5,94
3	(1,6)	0,099	50	4,95
4	(2,3)	0,096	30	2,88
5	(2,4)	0,089	30	2,67
6	(3,7)	0,092	50	4,60
7	(4,5)	0,089	20	1,78
8	(4,6)	0,080	40	3,20
9	(5,6)	0,094	40	3,76
10	(5,7)	0,091	60	5,46
11	(6,7)	0,072	90	6,48

В отдельном столбце таблицы представлены значения $P(x, y) a(x, y)$, которые замещают веса ребер (упорядоченные пары) нечеткого графа одним числом. По этим данным при помощи алгоритма Прима было построено два различных покрывающих дерева. На рис. 2 приведено дерево, если построение начиналось с вершины 1; на рис. 3 – начальной была выбрана вершина 7. Легко проверить, что оба дерева имеют одну и ту же длину, равную 220, и являются минимальными для соответствующего четкого графа. Каждому из этих деревьев соответствует нечеткое покрывающее дерево. Если по таблице

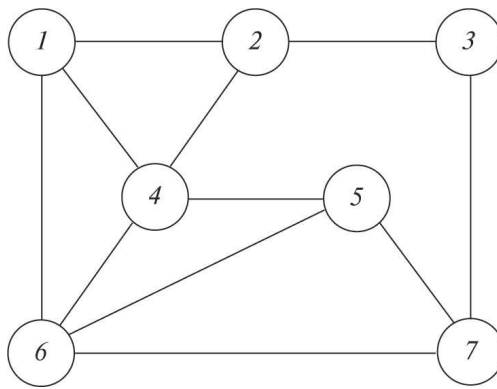


Рис. 1. Пример заданного нечеткого графа.

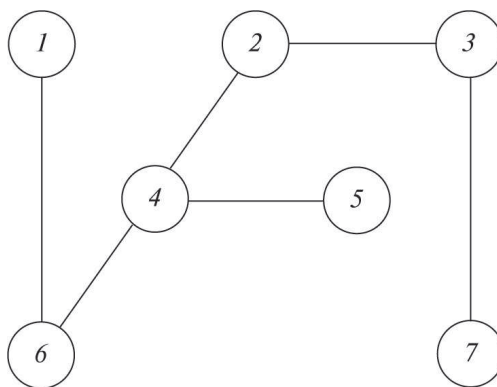


Рис. 2. Первый вариант дерева.

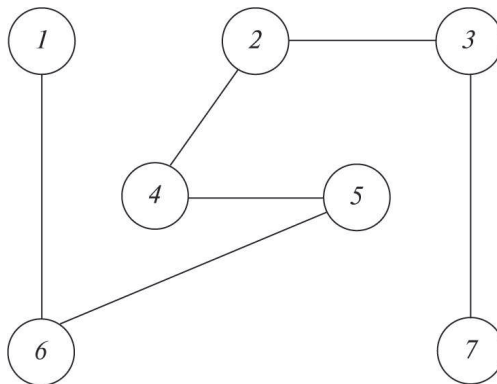


Рис. 3. Второй вариант дерева.

всем ребрам этих графов приписать вероятности принадлежности входящих в них ребер, тогда можно вычислить соответствующие им значения реализуемости. Для графа на рис. 2 значение реализуемости равно числу 0,545, для графа на рис. 3 – числу 0,559.

Из этих данных следует, что эвристическим алгоритмом может быть получено покрывающее дерево, не имеющее максимальной реализуемости. Заметим, что если по данным из таблицы построить минимальное покрывающее дерево для четкого графа алгоритмом Прима, то оно по структуре совпадает с графом на рис. 2 и имеет ту же длину 220.

7. Заключение

В статье введено понятие реализуемости покрывающего дерева нечеткого графа и с его использованием сформулированы две оптимизационные задачи построения оптимальных покрывающих деревьев. Ранее в такой постановке аналогичные задачи не рассматривались. В качестве критериев оптимальности используются максимум значения реализуемости дерева и минимальность длины покрывающего дерева. Предложен метод получения точных решений упомянутых задач, недостатком которого является его трудоемкость. В связи с этим в статье описан эвристический алгоритм построения минимального по длине покрывающего дерева с учетом его реализуемости. Этот алгоритм достаточно прост и имеет невысокую вычислительную сложность, но не гарантирует получения максимума реализуемости. Алгоритм основан на сведении исходной многокритериальной задачи к задаче с одним критерием (минимальности по длине покрывающего дерева), что эффективно решается, например, алгоритмами Прима и Краскала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
2. *Кармен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: Изд-во «Вильямс», 2011.
3. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. М.: Мир, 1981.
4. *Prim R.C.* Shortest connection network and some general realization // Bell System Technical Journal. 1957. V. 36. P. 1389–1401.
5. *Kruskal J.B.* On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and Traveling Salesman Problem // Proc. AMS. 1956. V. 7. P. 48–50.
6. *Кузьмин Р.А., Молчанов В.А.* Алгоритм построения минимальных остовных деревьев в компьютерных сетях // Математика. Механика. 2023. № 25. С. 46–50.
7. *Мешков А.Н.* Построение покрывающего дерева генетическим алгоритмом Штайнера / Актуальные вопросы современных исследований. Сб. статей V Международной научно-практической конференции. Пенза: Наука и просвещение (ИП Гуляев Г.Ю.). 05 июля 2023. С. 74–76.
8. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control. 1965. V. 8. I. 3. P. 338–353.
9. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
10. *Норвич А.М., Турксен И.Б.* Построение функций принадлежности. М.: Радио и связь, 1982.
11. *Каид В.А.А.* Метод построения функций принадлежности нечетких множеств // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 2(139). С. 144–153.

12. Федорова Е.В., Грязнов С.М. Особенности формирования функций принадлежности при построении нечетких систем управления / Сб. «Интеллектуальные системы управления и мехатроника. 2017». Материалы III Всероссийской научно-технической конференции аспирантов и студентов. 2017. С. 170–174.
13. Кокрен У. Методы выборочного исследования. М.: Статистика, 1976.
14. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
15. Pareto V. Manual di Economica Politica, Societa Editrice Libraiia. Milan, Italia, 1906; translated into English by A.S. Schwier, as Manual of Political Economy. New York: Macmillan, 1971.
16. Gen Mitsuo, Cheng Runwei, Lin Lin. Network models and optimization. Springer-Verlag London Limited, 2008.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.

Поступила в редакцию 16.09.2023

После доработки 28.11.2025

Принята к публикации 30.12.2025

Управление в технических системах

© 2026 г. М.В. МАКСИМЕНКО, канд. техн. наук (m.v.maksimenko@spbu.ru),
А.А. ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук (a.tikhonov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

МОДИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО МЕТОДА ТРЕХОСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ В ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ¹

Решается задача трехосной стабилизации искусственного спутника Земли (ИСЗ) в произвольном (непрямом) положении в орбитальной системе координат с помощью электродинамической системы управления, генерирующей лоренцев момент и момент магнитного взаимодействия. Управляющие моменты содержат восстанавливающие, диссипативные и компенсирующие составляющие. Предложен новый способ формирования диссипативных моментов, реализуемый с помощью имеющихся органов управления. Методом функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости программного движения ИСЗ без использования ограничений на модель геомагнитного поля и наклонение орбиты ИСЗ. Представлено комбинированное электродинамическое управление, позволяющее сократить время стабилизации и снизить амплитуду колебаний переходных процессов. Приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующих работоспособность предложенного модифицированного метода стабилизации ИСЗ, а также его эффективность.

Ключевые слова: спутник, электродинамическое управление, трехосная стабилизация, модифицированное управление, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

DOI: 10.7868/S2413977726030043

1. Введение

Взаимодействие искусственного спутника Земли (ИСЗ) с геомагнитным полем является источником возникновения крутящих моментов, которые успешно используются для решения широкого круга задач динамики управляемого движения ИСЗ относительно его центра масс [1, 2]. К их числу относится рассматриваемая в данной работе задача трехосной стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат. Взаимодействие геомагнитного поля с магнитными катушками, установленными на ИСЗ, рассматривается как простой, надежный и эффективный способ решения этой задачи [2–7], а также более сложных задач, в которых требуется обеспечивать иные программные

¹ Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (проект № 24-41-02031, <https://rscf.ru/project/24-41-02031/>).

режимы углового движения ИСЗ [8]. При этом, несмотря на наличие глобальной управляемости и наблюдаемости в магнитных системах управления [9], приходится учитывать такой недостаток этих систем, как невозможность создания управляющего момента в направлении вектора магнитной индукции геомагнитного поля [4]. Аналогичным недостатком обладает другая известная система управления, основанная на использовании взаимодействия электрического заряда с геомагнитным полем [10–14]. Однако объединение возможностей этих двух принципов создания систем управления в единую электродинамическую систему управления (ЭДСУ) позволяет достигать лучших результатов по сравнению с теми, которые дают каждая из двух систем в отдельности [15].

С использованием ЭДСУ решены такие актуальные задачи динамики ИСЗ, как одноосная и трехосная стабилизация ИСЗ в орбитальной и в кениговой системах координат, стабилизация двухосной закрутки ИСЗ и др. [16]. Вместе с тем многие упомянутые задачи решались с использованием частных предположений, например касающихся выбора модели геомагнитного поля, формы и наклонения орбиты ИСЗ.

В задачах трехосной стабилизации обычно программным режимом является прямое положение равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат, т.е. такое положение, в котором главные центральные оси инерции ИСЗ совпадают с осями орбитальной системы координат. Вместе с тем, бывает актуальна стабилизация ИСЗ в непрямых положениях равновесия – задача принципиально более сложная ввиду того, что значительный по величине гравитационный момент является возмущающим моментом именно в непрямых положениях равновесия. Задача стабилизации ИСЗ землеобзора при косом расположении в орбитальной системе координат в служебном аварийном режиме решена в [17], где подробно изучены вопросы цифрового управления магнитным приводом на всех этапах перехода системы управления ориентацией ИСЗ в аварийный режим и последующего длительного поддержания этого режима.

Кроме того, известны различные способы реализации пассивных или комбинированных систем угловой стабилизации ИСЗ, не требующих расхода рабочего тела и энергии или требующих их в незначительном объеме и опирающихся на одновременное использование гравитационного и аэродинамического моментов [18–20].

Такой подход к проблеме угловой стабилизации ИСЗ естественно приводит к реализации непрямых положений равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат в качестве рабочих режимов. При этом решаются задачи выбора наиболее подходящих штатных режимов ориентации, избежания нежелательных резонансных эффектов [21], а также и задачи стабилизации выбранных штатных режимов с использованием дополнительных средств, таких как маховики и активные магнитные системы [22, 23]. Следовательно, могут быть полезны и другие способы, опирающиеся на использование магнитного поля Земли. Решению задачи стабилизации ИСЗ в непрямых положениях равнове-

сия с использованием ЭДСУ посвящена работа [24]. Управления в ней строятся в соответствии с классическим подходом, предполагающим создание в системе управления восстанавливающих, диссипативных и компенсирующих моментов [25]. При этом в рамках такого подхода диссипативный момент создается в виде линейной функции относительной угловой скорости ИСЗ.

В данной работе предложены две модификации диссипативного момента, а также их адаптивная комбинация. Продемонстрирована высокая эффективность комбинированного метода формирования диссипативного момента. В данной работе отсутствуют ограничения, связанные с выбором той или иной модели геомагнитного поля и с наклоном орбиты ИСЗ. Исследование проводится на базе нелинейной математической модели с использованием метода функций Ляпунова для обоснования асимптотической устойчивости программного движения.

2. Электродинамическое управление угловым движением ИСЗ

2.1. Программное движение ИСЗ

Рассматривается движение ИСЗ как твердого тела вокруг центра масс, который движется по кеплеровой круговой орбите произвольного наклона i и радиуса R в магнитном поле Земли (МПЗ). Предполагается, что ИСЗ оснащен контролируемым электростатическим зарядом Q , распределенным по определенному объему V с плотностью σ , и контролируемым собственным магнитным моментом $\vec{I}$.

Для описания угловой ориентации ИСЗ в статье будут использоваться следующие правые ортогональные декартовы системы координат (рис. 1).

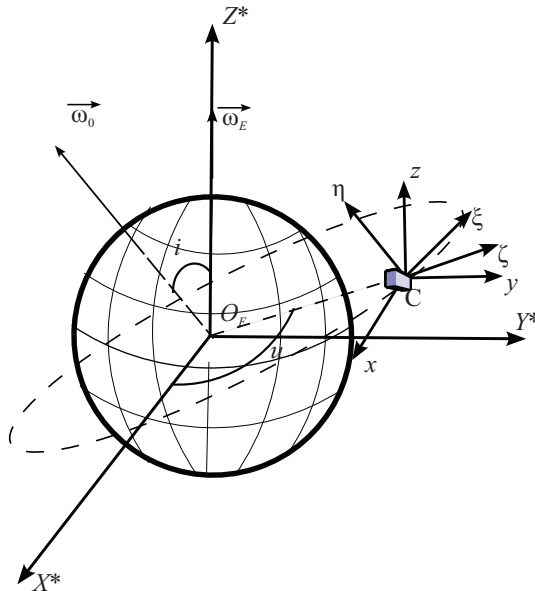


Рис. 1. Системы координат.

1) $O_E X^* Y^* Z^*$ – система координат, принимаемая за инерциальную, ось $O_E X^*$ направлена в восходящий узел орбиты, ось $O_E Z^*$ – по оси суточного вращения Земли.

2) $C\xi\eta\zeta$ – орбитальная система координат с началом в центре масс ИСЗ, ось $C\xi$ (орт $\vec{\xi}_0$) направлена по касательной к орбите в направлении движения, ось $C\eta$ (орт $\vec{\eta}_0$) – по нормали к орбите, ось $C\zeta$ (орт $\vec{\zeta}_0$) – по местной вертикали.

3) $Cxyz$ – подвижная система координат, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции ИСЗ.

Относительное положение систем $Cxyz$ и $C\xi\eta\zeta$ определяется матрицей направляющих косинусов $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^3$, элементы которой можно выразить через «самолетные» углы ψ , θ , φ в соответствии со следующими представлениями ортов $\vec{\xi}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{\zeta}_0$ орбитальной системы координат в системе координат $Cxyz$:

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_0 &= (\cos \psi \cos \theta, \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi, \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi)^\top, \\ \vec{\eta}_0 &= (\sin \psi \cos \theta, \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi)^\top, \\ \vec{\zeta}_0 &= (-\sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta)^\top.\end{aligned}$$

Исследование проводится с учетом вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{\eta}_0$ и вращения Земли с угловой скоростью $\vec{\omega}_E$ (рис. 1). Поэтому абсолютная угловая скорость ИСЗ $\vec{\omega}$ может быть представлена в виде

$$(1) \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0,$$

где $\vec{\omega}'$ – угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат. Вектор $\vec{v}_C$ скорости центра масс ИСЗ относительно вращающейся Земли имеет следующее разложение по ортам $\vec{\xi}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{\zeta}_0$:

$$\vec{v}_C = (R(\omega_0 - \omega_E \cos i), R\omega_E \sin i \cos u, 0)^\top,$$

где $u = \omega_0 t$ – аргумент широты, используемый далее в качестве безразмерной независимой переменной.

Распределение масс ИСЗ характеризуется тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ в главных центральных осях инерции $Cxyz$.

Программная ориентация ИСЗ в орбитальной системе координат определяется матрицей $\mathbf{A}_0 = \{a_{ij}(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)\}_{i,j=1}^3$. В соответствии с этим требуется построить управляющие моменты, обеспечивающие существование и асимптотическую устойчивость такого программного движения ИСЗ относительно центра масс, при котором

$$(2) \quad \varphi = \varphi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \vec{\omega}' = \vec{0}.$$

2.2. Управляющие моменты и управляемые векторы

При движении ИСЗ относительно МПЗ с магнитной индукцией $\vec{B}$ возбуждаются лоренцев момент $\vec{M}_L$ [26] и момент магнитного взаимодействия $\vec{M}_M$. Они имеют вид

$$(3) \quad \vec{M}_L = \vec{P} \times \vec{T}, \quad \vec{M}_M = \vec{I} \times \mathbf{A}^\top \vec{B},$$

где $\vec{P} = Q\vec{\rho}_0$, $\vec{\rho}_0$ – радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно его центра масс, $\vec{T} = \mathbf{A}^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$. Здесь и далее управляемые векторы $\vec{P}$ и $\vec{I}$ считаются заданными в системе координат *Cxyz*. Моменты (3) являются управляющими в электродинамической системе управления угловым движением ИСЗ.

Отметим, что при заданной орбите ИСЗ магнитная индукция $\vec{B}$ в (3) является известной функцией координат точки околоземного пространства. В дальнейшем считаем, что МПЗ однородно в части пространства, занимаемой ИСЗ, а вектор $\vec{B} = B_\xi \vec{\xi}_0 + B_\eta \vec{\eta}_0 + B_\zeta \vec{\zeta}_0$ принимает в точках этого пространства то же значение, что и в центре масс ИСЗ (точка *C*).

В программном режиме (2) вращательного движения ИСЗ векторы $\vec{T}$ и $\vec{B}$ соответственно принимают вид

$$\vec{T}_0 = \mathbf{A}_0^\top (\vec{v}_C \times \vec{B}), \quad \vec{B}_0 = \mathbf{A}_0^\top \vec{B}.$$

Электродинамическая система управления предполагает, что для реализации программного режима вращательного движения ИСЗ должны быть выбраны законы изменения управляемых векторов $\vec{P}$ и $\vec{I}$. Построим каждый из них как сумму восстанавливающей (индекс «*rest*»), диссипативной (индекс «*diss*») и компенсирующей (индекс «*comp*») составляющих:

$$(4) \quad \vec{P} = \vec{P}_{rest} + \vec{P}_{diss} + \vec{P}_{comp}, \quad \vec{I} = \vec{I}_{rest} + \vec{I}_{diss} + \vec{I}_{comp}.$$

С учетом (4) управляющие моменты (3) примут вид

$$(5) \quad \begin{aligned} \vec{M}_L &= (\vec{P}_{rest} + \vec{P}_{diss} + \vec{P}_{comp}) \times \vec{T}, \\ \vec{M}_M &= (\vec{I}_{rest} + \vec{I}_{diss} + \vec{I}_{comp}) \times \mathbf{A}^\top \vec{B}. \end{aligned}$$

3. Математическая модель

3.1. Система уравнений, описывающих движение ИСЗ

Движение ИСЗ относительно центра масс как твердого тела с учетом воздействия гравитационного (возмущающего) и управляющих моментов (3) описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$(6) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{J}\vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\mathbf{J}\vec{\omega}) = \vec{M}_{GR} + \vec{M}_L + \vec{M}_M,$$

где $\vec{M}_{GR} = 3\omega_0^2 (\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J}\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0)$ – гравитационный момент [1].

Подставляя выражение для абсолютной угловой скорости (1), гравитационный и управляющие моменты в (6), получим:

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\mathbf{J} \left(\vec{\omega}_0 \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0 + \vec{\omega}' \right) \right] + \left[\vec{\omega}_0 \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0 + \vec{\omega}' \right] \times \left[\mathbf{J} \left(\vec{\omega}_0 \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0 + \vec{\omega}' \right) \right] = \\ = 3\omega_0^2 (\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) + (\vec{P}_{rest} + \vec{P}_{diss} + \vec{P}_{comp}) \times \vec{T} + \\ + (\vec{I}_{rest} + \vec{I}_{diss} + \vec{I}_{comp}) \times \mathbf{A}^\top \vec{B}. \end{aligned}$$

Для замыкания системы дифференциальных уравнений (7) будем их рассматривать совместно с кинематическими уравнениями Пуассона:

$$(8) \quad \frac{d\vec{\xi}_0}{dt} = \vec{\xi}_0 \times \vec{\omega} - \omega_0 \vec{\xi}_0, \quad \frac{d\vec{\eta}_0}{dt} = \vec{\eta}_0 \times \vec{\omega}, \quad \frac{d\vec{\zeta}_0}{dt} = \vec{\zeta}_0 \times \vec{\omega} + \omega_0 \vec{\xi}_0.$$

3.2. Компенсация возмущающего момента

Программный режим (2) углового движения ИСЗ в общем случае не является прямым положением равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат. Поэтому гравитационный момент и выражение $\omega_0^2 (\mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0)$ из уравнений (7) не обращаются в ноль в программном движении ИСЗ. Для компенсации суммарного возмущающего момента $\vec{M}_d$, вычисляемого по формуле

$$\vec{M}_d = \omega_0^2 \left(3(\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) - (\mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0) \right),$$

будет использован подход, основанный на создании соответствующих компенсирующих компонент электродинамических параметров [27] и обеспечивающий выполнение равенства $\vec{M}_d + \vec{P}_{comp} \times \vec{T} + \vec{I}_{comp} \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}) = \vec{0}$. Формулы, используемые для вычисления восстанавливающих и компенсирующих компонент управляемых векторов $\vec{P}$ и $\vec{I}$ для реализации электродинамического управления, направленного на стабилизацию программного движения ИСЗ, имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{rest} = Qk_L \vec{T}_0, \quad \vec{P}_{comp} = \frac{\vec{M}_d \cdot (\mathbf{A}^\top \vec{B})}{|\vec{B}| |\vec{T}|} \left(\mathbf{V}^\top (0, 0, 1)^\top \right), \\ \vec{I}_{rest} = k_M \vec{B}_0, \quad \vec{I}_{comp} = \mathbf{V}^\top \left(0, \frac{\vec{M}_d \cdot \left((\mathbf{A}^\top \vec{B}) \times \vec{T} \right)}{|\vec{B}|^2 |\vec{T}|}, -\frac{\vec{M}_d \cdot \vec{T}}{|\vec{B}| |\vec{T}|} \right)^\top. \end{aligned}$$

Здесь k_L и k_M – подбираемые параметры управления, которые могут являться постоянными или функциями времени, $\mathbf{V} = \{v_{ij}\}_{i,j=1}^3$ – известная матрица с элементами

$$\begin{aligned} v_{11} = B_x/|\vec{B}|, \quad v_{12} = B_y/|\vec{B}|, \quad v_{13} = B_z/|\vec{B}|, \\ v_{21} = T_x/|\vec{T}|, \quad v_{22} = T_y/|\vec{T}|, \quad v_{23} = T_z/|\vec{T}|, \\ v_{31} = \frac{B_y T_z - B_z T_y}{|\vec{B}| |\vec{T}|}, \quad v_{32} = \frac{B_z T_x - B_x T_z}{|\vec{B}| |\vec{T}|}, \quad v_{33} = \frac{B_x T_y - B_y T_x}{|\vec{B}| |\vec{T}|}. \end{aligned}$$

Выбор диссипативных компонент $\vec{P}_{diss}$ и $\vec{I}_{diss}$ управляемых векторов будет обоснован далее.

3.3. Уменьшение относительной угловой скорости ИСЗ

Задача угловой стабилизации ИСЗ подразумевает не только достижение заданной ориентации, но и обеспечение ее асимптотической устойчивости. Для этого в управляемых векторах (4) предусмотрены диссипативные компоненты, которые могут выбираться различными способами. Например, многочисленными пассивными устройства для создания диссипативных моментов, включающие хорошо зарекомендовавшие себя составные схемы в спутниках типа Vertistat, сферические магнитные демпферы (как жидкостные, так и на вихревых токах), гистерезисные стержни обеспечивают создание диссипативных моментов, пропорциональных угловой скорости ИСЗ (см. [28] и работы, цитируемые в ней).

В электродинамических системах управления обычно используются полупассивные способы создания диссипативных моментов. При этом наряду с линейными вариантами управления [15, 29] во многих случаях также оказываются эффективными управления, нелинейные относительно угловой скорости [30].

Кроме того, в теории управления механическими системами, а также угловым движением ИСЗ широко используется управление по кинетическому моменту [31–34]. В частности, известен вариант стабилизации ИСЗ, использующий демпфирование, пропорциональное кинетическому моменту ИСЗ [6].

Ранее в работах авторов использовались диссипативные компоненты с параметрами управления h_L и h_M вида

$$(9) \quad \vec{P}_{diss} = Q h_L \vec{\omega}' \times \vec{T}, \quad \vec{I}_{diss} = h_M \vec{\omega}' \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}).$$

В данном исследовании предлагается наряду с формулами (9) рассмотреть три новых варианта формирования диссипативных компонент. В первом из них вместо относительной угловой скорости присутствует $\vec{K} = \mathbf{J}\vec{\omega}'$ – кинетический момент ИСЗ в относительном движении:

$$(10) \quad \vec{P}_{diss} = Q h_L (A^{-1} \mathbf{J} \vec{\omega}') \times \vec{T}; \quad \vec{I}_{diss} = h_M (A^{-1} \mathbf{J} \vec{\omega}') \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}).$$

Во втором варианте формирования диссипативной компоненты управляемых векторов используется закон, в котором вместо $\vec{K}$ присутствует орт вектора $\vec{K}$:

$$(11) \quad \vec{P}_{diss} = \frac{Q h_L}{|\vec{K}|} (A^{-1} \mathbf{J} \vec{\omega}') \times \vec{T}; \quad \vec{I}_{diss} = \frac{h_M}{|\vec{K}|} (A^{-1} \mathbf{J} \vec{\omega}') \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}).$$

В этом варианте управления стабилизация будет достигаться формально за бесконечно большое время. Поэтому при реализации соответствующего алгоритма управления норма вектора $\vec{K}$ при стремлении ее к нулю принимается равной некоторой выбранной постоянной малой величине Δ , как только $|\vec{K}|$ уменьшится до этой величины. Другими словами, вводится в рассмотрение

модифицированная норма $|\vec{K}|_{mod}$ согласно формуле:

$$(12) \quad |\vec{K}|_{mod} = \frac{|\Delta - |\vec{K}|| + \Delta + |\vec{K}|}{2}.$$

Третий вариант представляет собой комбинацию вариантов (10) и (11). Обоснование третьего варианта управления будет дано далее в разделе 5.

Заметим, что новые варианты формирования диссипативных компонент в виде (10), (11) и их комбинации не требуют введения в систему управления дополнительных измерительных устройств по сравнению с (9).

Подставляя (5) в (7), получим следующую систему дифференциальных уравнений, которую рассмотрим вместе с (8):

$$(13) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\mathbf{J} (\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{\eta}_0)] + (\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J} \vec{\omega}') + \omega_0 \vec{\omega}' \times (\mathbf{J} \vec{\eta}_0) = \\ & = Q k_L \vec{T}_0 \times \vec{T} + \vec{P}_{diss} \times \vec{T} + k_M \vec{B}_0 \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}) + \vec{I}_{diss} \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}). \end{aligned}$$

Таким образом, поставлена задача об определении условий для параметров k_L , k_M , h_L , h_M , при выполнении которых может быть гарантирована асимптотическая устойчивость программного движения (2).

4. Анализ устойчивости движения

Выведем условия асимптотической устойчивости для программного движения (2) с использованием варианта (10) как более общего по сравнению с (9). Предполагая, что углы $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0$, $\theta_1 = \theta - \theta_0$, $\psi_1 = \psi - \psi_0$ малы и их производные по времени также малы, разложим управляющие моменты, присутствующие в правой части уравнения (13), в степенные ряды по этим малым величинам и опустим все степени выше первой аналогично подходу, который был использован в [24, 35]:

$$\begin{aligned} M_{L\nu_m}^{(1)} &= l_{m1}(t)(k_L \varphi_1 + h_L \dot{\varphi}_1) + l_{m2}(t)(k_L \theta_1 + \delta h_L \dot{\theta}_1) + l_{m3}(t)(k_L \psi_1 + \varepsilon h_L \dot{\psi}_1), \\ M_{M\nu_m}^{(1)} &= b_{m1}(t)(k_M \varphi_1 + h_M \dot{\varphi}_1) + b_{m2}(t)(k_M \theta_1 + \delta h_M \dot{\theta}_1) + \\ &+ b_{m3}(t)(k_M \psi_1 + \varepsilon h_M \dot{\psi}_1). \end{aligned}$$

Здесь $m = 1, 2, 3$, $\nu_1 = x$, $\nu_2 = y$, $\nu_3 = z$, $\delta = B/A$, $\varepsilon = C/A$. Обозначим симметричные матрицы: $\mathbf{S}_L(t) = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\mathbf{S}_M(t) = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^3$ с элементами l_{ij} и b_{ij} (см. Приложение). Тогда уравнения (13) примут вид дифференциальных уравнений возмущенного движения в решаемой задаче трехосной угловой стабилизации ИСЗ:

$$(14) \quad \mathbf{J} \ddot{\vec{y}} + \mathbf{D}(t) \dot{\vec{y}} + \mathbf{G} \dot{\vec{y}} + \mathbf{H}(t) \vec{y} + \vec{F}(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}) = \vec{0},$$

где $\vec{y} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G} = \omega_0 (A - B + C) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – постоянная матрица, $\mathbf{D}(t) = -A^{-1}\mathbf{J}(h_L\mathbf{S}_L(t) + h_M\mathbf{S}_M(t))$, $\mathbf{H}(t) = -(k_L\mathbf{S}_L(t) + k_M\mathbf{S}_M(t))$ – матрицы с переменными коэффициентами, вектор $\vec{F}$ нелинейно зависит от $\vec{y}, \dot{\vec{y}}$.

Введем параметры управления $k_{L0}, k_{M0}, h_{L0}, h_{M0}$, которые являются положительными постоянными и вычисляются по формулам:

$$k_{L0} = k_L Q |\vec{T}(t)|^2, \quad k_{M0} = k_M |\vec{B}(t)|^2, \quad h_{L0} = h_L Q |\vec{T}(t)|^2, \quad h_{M0} = h_M |\vec{B}(t)|^2.$$

Обозначая их соотношения через $\varepsilon_1 = k_{L0}/k_{M0}$, $\varepsilon_2 = h_{L0}/h_{M0}$, $\mu = h_{M0}/k_{M0}$, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= -\mu k_{M0} (A^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}_M(t) + \varepsilon_2 A^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}_L(t)), \\ \mathbf{H}(t) &= -k_{M0} (\mathbf{U}_M(t) + \varepsilon_1 \mathbf{U}_L(t)), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{U}_M(t) = \frac{\mathbf{S}_M(t)}{|\vec{B}(t)|^2}; \quad \mathbf{U}_L(t) = \frac{\mathbf{S}_L(t)}{Q|\vec{T}(t)|^2}.$$

Функция Ляпунова может быть выбрана в виде квадратичной формы с постоянной $\chi > 0$:

$$(15) \quad V(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{D}(t) \dot{\vec{y}} + \frac{\chi}{2} \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{J} \dot{\vec{y}} + \vec{y}^\top \mathbf{J} \dot{\vec{y}} + \frac{\chi}{2} \vec{y}^\top \mathbf{H}(t) \vec{y}.$$

Производная по времени функции (15) в силу системы (14) имеет вид:

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{V}(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}})|_{(14)} &= -\chi \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{D}(t) \dot{\vec{y}} - \vec{y}^\top \mathbf{G} \dot{\vec{y}} - \vec{y}^\top \mathbf{H}(t) \vec{y} - \chi \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{G} \dot{\vec{y}} + \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^\top \dot{\mathbf{D}}(t) \dot{\vec{y}} + \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{J} \dot{\vec{y}} + \frac{\chi}{2} \vec{y}^\top \dot{\mathbf{H}}(t) \vec{y} - \left(\chi \dot{\vec{y}} + \vec{y} \right)^\top \vec{F}(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}). \end{aligned}$$

Для квадратичных форм, входящих в выражения (15) и (16), верны следующие оценки для любых векторов $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ [36, 37]:

$$(17) \quad \begin{aligned} \vec{x}^\top \mathbf{D}(t) \vec{x} &\geq \mu k_{M0} \inf \lambda_{\min} (-A^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}_M(t) - \varepsilon_2 A^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}_L(t)) \|\vec{x}\|^2, \\ \vec{x}^\top \mathbf{H}(t) \vec{x} &\geq k_{M0} \inf \lambda_{\min} (-\mathbf{U}_M(t) - \varepsilon_1 \mathbf{U}_L(t)) \|\vec{x}\|^2, \\ \min\{A, B, C\} \|\vec{x}\|^2 &\leq \vec{x}^\top \mathbf{J} \vec{x} \leq \max\{A, B, C\} \|\vec{x}\|^2, \\ |\vec{x}^\top \mathbf{J} \vec{z}| &\leq \max\{A, B, C\} \|\vec{x}\| \|\vec{z}\|, \\ \vec{x}^\top \dot{\mathbf{D}}(t) \vec{x} &\leq \mu k_{M0} \sup \lambda_{\max} (-A^{-1}\mathbf{J}\dot{\mathbf{U}}_M(t) - \varepsilon_2 A^{-1}\mathbf{J}\dot{\mathbf{U}}_L(t)) \|\vec{x}\|^2, \\ \vec{x}^\top \dot{\mathbf{H}}(t) \vec{x} &\leq k_{M0} \sup \lambda_{\max} (-\dot{\mathbf{U}}_M(t) - \varepsilon_1 \dot{\mathbf{U}}_L(t)) \|\vec{x}\|^2, \\ |\vec{x}^\top \mathbf{G} \vec{z}| &\leq \omega_0 (A - B + C) \|\vec{x}\| \|\vec{z}\|, \quad \vec{x}^\top \mathbf{G} \vec{x} \leq \omega_0 (A - B + C) \|\vec{x}\|^2, \end{aligned}$$

где наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы $\mathbf{M}$ обозначены через $\lambda_{\min}(\mathbf{M})$ и $\lambda_{\max}(\mathbf{M})$ и операции $\sup$ и $\inf$ выполняются для всех $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим:

$$(18) \quad d_1 = \min\{A, B, C\}, \quad d_2 = \max\{A, B, C\}, \quad d_3 = A - B + C, \\ d_{41} = \inf \lambda_{\min} [-A^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{U}_M(t) + \varepsilon_2 \mathbf{U}_L(t))], \quad d_{42} = \inf \lambda_{\min} (-\mathbf{U}_M(t) - \varepsilon_1 \mathbf{U}_L(t)), \\ d_{51} = \sup \lambda_{\max} [-A^{-1} \mathbf{J} (\dot{\mathbf{U}}_M(t) + \varepsilon_2 \dot{\mathbf{U}}_L(t))], \quad d_{52} = \sup \lambda_{\max} (-\dot{\mathbf{U}}_M(t) - \varepsilon_1 \dot{\mathbf{U}}_L(t)).$$

В соответствии с (17), (18) функция Ляпунова может быть оценена снизу:

$$V(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}) \geq \frac{1}{2} \|\vec{y}\|^2 (\mu k_{M0} d_{41} + \chi k_{M0} d_{42} - d_2 a_1 \omega_0^2) + \frac{1}{2} \|\dot{\vec{y}}\|^2 \left(d_1 \chi - \frac{d_2}{a_1 \omega_0^2} \right),$$

где $a_1 > 0$ — некоторая постоянная величина.

Соответственно, если выполняются приведенные ниже неравенства

$$(19) \quad \chi > \frac{d_2}{d_1 a_1 \omega_0^2}, \quad \chi > \frac{d_2 a_1 \omega_0^2 - \mu k_{M0} d_{41}}{k_{M0} d_{42}},$$

то функция Ляпунова (15) будет положительно определенной.

Кроме того, числа $c > 0$ и $\delta_0 > 0$ могут быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось неравенство:

$$\dot{V}(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}})|_{(14)} \leq \frac{1}{2} \|\vec{y}\|^2 (a_2 \omega_0^2 d_3 + \mu k_{M0} d_{51} + \chi k_{M0} d_{52} - 2k_{M0} d_{42}) + \\ + \|\dot{\vec{y}}\|^2 \left(d_2 + \frac{d_3}{2a_2} - \chi \mu k_{M0} d_{41} \right) + c \left(\chi \|\dot{\vec{y}}\| + \|\vec{y}\| \right) \left(\|\dot{\vec{y}}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \right)$$

для $t \geq 0$, $\|\vec{y}\| < \delta_0$, $\|\dot{\vec{y}}\| < \delta_0$, где $a_2 > 0$ — некоторая постоянная величина.

Таким образом, при выполнении условий

$$(20) \quad k_{M0} > \frac{a_2 \omega_0^2 d_3}{2d_{42} - \mu d_{51} - \chi d_{52}}, \quad \chi > \frac{d_2 + d_3/(2a_2)}{\mu k_{M0} d_{41}}, \quad \chi < \frac{2d_{42} - \mu d_{51}}{d_{52}}$$

производная функции (16) в силу системы (14) отрицательно определена.

Теорема 1. Если для заданных параметров ИСЗ A, B, C, Q , параметров орбиты R, i и параметров управления $k_{L0}, k_{M0}, h_{L0}, h_{M0}$ имеются положительные числа a_1, a_2 и χ , для которых неравенства (19), (20) выполнены, тогда программное движение (2) для системы (7), (8) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы дано в Приложении.

5. Численные эксперименты

Для оценки влияния предложенных модификаций диссипативного момента на процесс стабилизации углового движения ИСЗ проведем серию численных экспериментов для следующих параметров ИСЗ: $A = 1000 \text{ кг} \times \text{м}^2$,

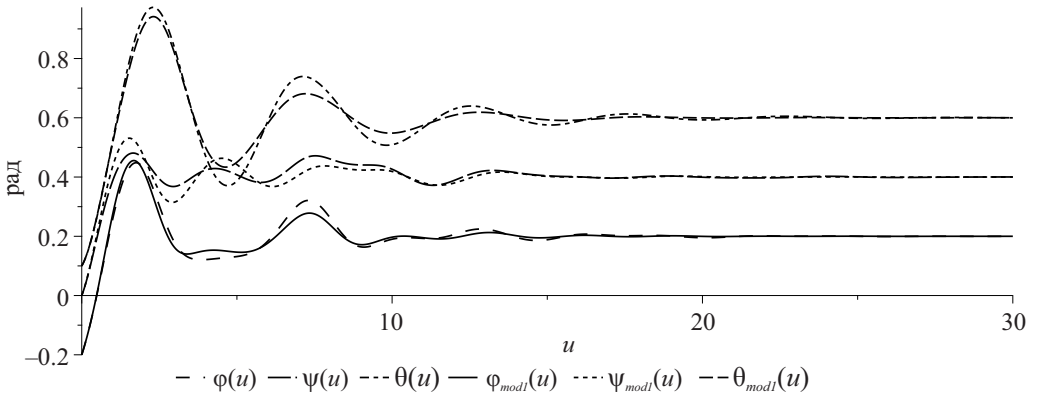


Рис. 2. Изменение «самолетных» углов $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\theta(u)$ ориентации ИСЗ при управлении (9) и $\varphi_{\text{mod1}}(u)$, $\psi_{\text{mod1}}(u)$, $\theta_{\text{mod1}}(u)$ при управлении (10).

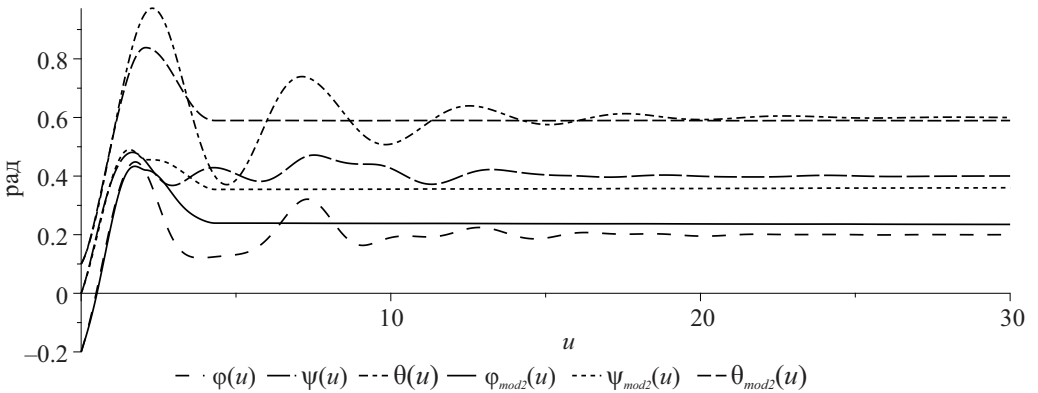


Рис. 3. Изменение «самолетных» углов $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\theta(u)$ ориентации ИСЗ при управлении (9) и $\varphi_{\text{mod2}}(u)$, $\psi_{\text{mod2}}(u)$, $\theta_{\text{mod2}}(u)$ при управлении (11).

$B = 1300 \text{ кг} \times \text{м}^2$, $C = 700 \text{ кг} \times \text{м}^2$, $Q = 15 \times 10^{-3} \text{ Кл}$, орбиты: $R = 7 \times 10^6 \text{ м}$, $i = 30^\circ$ и управления: $k_{L0} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ Н} \times \text{м}$, $k_{M0} = 2 \times 10^{-3} \text{ Н} \times \text{м}$, $h_{L0} = 0,2 \text{ Н} \times \text{м} \times \text{с}$, $h_{M0} = 1,0 \text{ Н} \times \text{м} \times \text{с}$.

Желаемая ориентация ИСЗ определяется следующими значениями «самолетных» углов: $\varphi_0 = 0,2 \text{ рад}$, $\psi_0 = 0,4 \text{ рад}$, $\theta_0 = 0,6 \text{ рад}$.

При компьютерном моделировании геомагнитное поле моделируется с использованием октупольного приближения, гауссовы коэффициенты определяются согласно модели МПЗ (IGRF) 13-го поколения [38]. Следует отметить, что порядок аппроксимации модели МПЗ не ограничен для предлагаемого электродинамического метода управления, а именно, построенный метод управления позволяет использовать мультипольную модель МПЗ любого порядка.

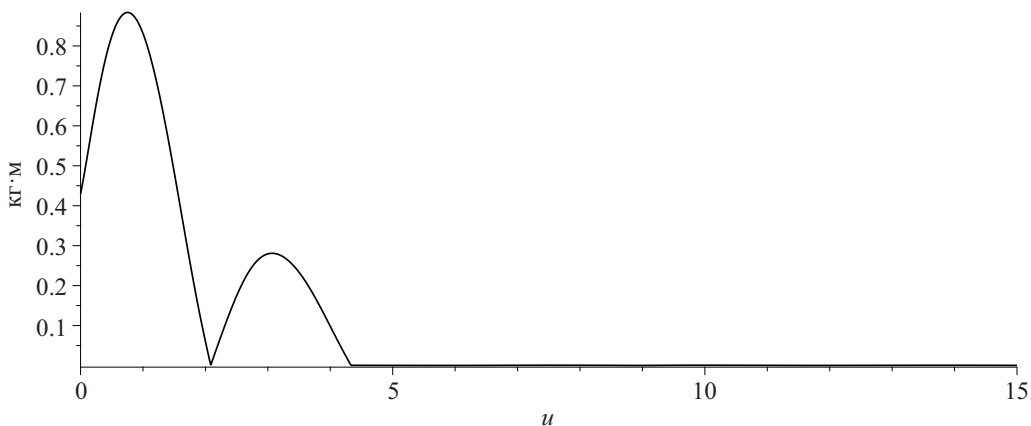


Рис. 4. Модуль вектора $\vec{K}$ в случае закона формирования диссипативных компонент в виде (11).

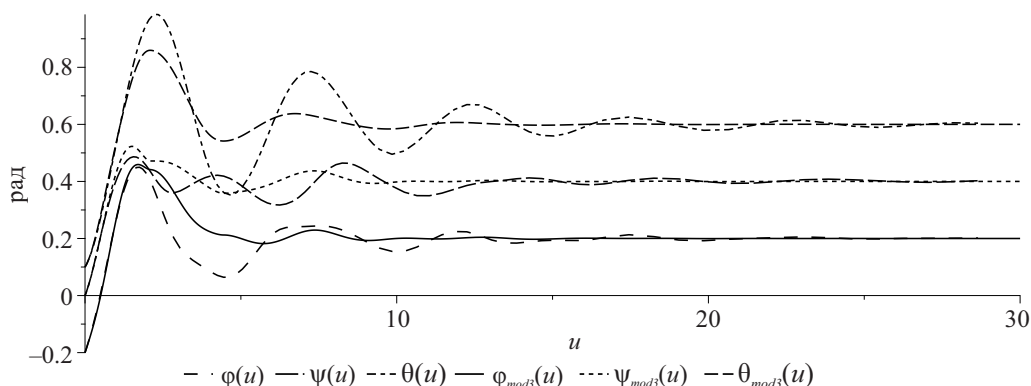


Рис. 5. Изменение «самолетных» углов $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\theta(u)$ ориентации ИСЗ при управлении (9) и $\varphi_{\text{mod3}}(u)$, $\psi_{\text{mod3}}(u)$, $\theta_{\text{mod3}}(u)$ при комбинации вариантов (10) и (11).

Для выбранных параметров ИСЗ, орбиты и управления, удовлетворяющих достаточным условиям асимптотической устойчивости, проведено численное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений (7), (8).

Процесс стабилизации ИСЗ показан на рис. 2–5 для следующих начальных условий: $\varphi(0) = -0,2$ рад, $\psi(0) = 0,0$ рад, $\theta(0) = 0,1$ рад, $\Omega_x(0) = \omega_x(0)/\omega_0 = 0,3$, $\Omega_y(0) = \omega_y(0)/\omega_0 = 1,1$, $\Omega_z(0) = \omega_z(0)/\omega_0 = 0,5$. Здесь и далее на рисунках по горизонтальным осям откладывается безразмерная переменная u , для которой $u = 5$ соответствует $t = 4638,22$ с или примерно 1 ч 17 мин. На рис. 2 показан процесс стабилизации при модифицированных диссипативных составляющих управляемых векторов (10) и при использовании диссипативных компонент управляемых векторов в виде (9).

На рис. 3 показан процесс стабилизации при модифицированных диссипативных составляющих управляемых векторов (11) и при использовании

диссипативных компонент управляемых векторов в виде (9). При численном интегрировании дифференциальных уравнений в (12) было принято значение $\Delta = 0,001$.

Заметим, что переходный процесс стабилизации ИСЗ стал более гладким. Однако, заданная ориентация будет достигнута за достаточно продолжительное время. Это связано с тем, что $|\vec{K}|$ с некоторого момента времени становится малой величиной (рис. 4), что приводит к появлению малого знаменателя в формуле (11) и последующему снижению качества управления.

Для преодоления этого недостатка предлагается объединить подходы (10) и (11). На рис. 5 показан процесс стабилизации ИСЗ при использовании комбинации модифицированных диссипативных составляющих управляемых векторов (10) и (11).

Таким образом, при комбинированном подходе к формированию закона изменения диссипативных компонент управляемых векторов (4) удастся достичь не только стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат в непрямом положении равновесия (2) (в общем случае), но и получить сравнительно более гладкий и быстрее сходящийся переходный процесс стабилизации ИСЗ с использованием уже имеющихся органов управления.

Следует заметить, что в процессе численных экспериментов анализировался вопрос о реализуемости управления с точки зрения ограниченности величин управляемых векторов (4). Установлено, что при таком выборе параметров управления управляющие моменты (3) не превосходят гравитационного момента по порядку величины.

6. Заключение

В статье рассмотрена задача электродинамического управления угловым движением заряженного ИСЗ, обладающего собственным магнитным моментом, и его стабилизации в орбитальной системе координат в произвольном положении. Предложены три варианта формирования диссипативного момента, которые могут быть реализованы с помощью имеющихся органов управления. Первые два, рассмотренные в отдельности, обладают недостатками, которые можно устранить, если объединить их в одну комбинированную систему формирования диссипативного момента (третий вариант). Такое комбинированное электродинамическое управление обладает преимуществами первого и второго вариантов, а именно позволяет как сократить время стабилизации, так и снизить амплитуду колебаний переходных процессов. Эти качества имеют первостепенное значение, когда на борту ИСЗ находится аппаратура или устройства, чувствительные к колебаниям. Приведенные результаты численных экспериментов демонстрируют работоспособность предложенного модифицированного метода управления угловым движением ИСЗ, а также его эффективность.

С помощью метода функций Ляпунова получены достаточные условия устойчивости программного движения, выраженные явным образом через параметры ИСЗ, орбиты и параметры управления.

Симметричные матрицы $\mathbf{S}_L(t) = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\mathbf{S}_M(t) = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^3$ с элементами l_{ij} и b_{ij} (см.раздел 4) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 l_{11}(t) &= Q(-B_\zeta(\sin \psi_0 v_{C\xi} - \cos \psi_0 v_{C\eta})(-B_\eta v_{C\xi} + B_\xi v_{C\eta}) \sin \theta_0 - \\
 &\quad - B_\zeta^2 v_{C\xi}^2 \cos \psi_0 - B_\zeta^2 v_{C\xi} v_{C\eta} \sin \psi_0 - \cos \theta_0 (-B_\eta v_{C\xi} + B_\xi v_{C\eta})^2) \cos \varphi_0 - \\
 &\quad - B_\zeta(B_\xi v_{C\xi}(\sin \psi_0 v_{C\xi} - \cos \psi_0 v_{C\eta}) \sin \theta_0 + \\
 &\quad + (B_\xi v_{C\eta} - B_\eta v_{C\xi})(\cos \theta_0 v_{C\xi} - \cos \psi_0 v_{C\xi} - \sin \psi_0 v_{C\eta})) \sin \varphi_0; \\
 l_{12}(t) &= l_{21}(t) = Qv_{C\eta}(((B_\eta v_{C\xi} - B_\xi v_{C\eta}) \cos \theta_0 + B_\zeta \sin \theta_0(\cos \psi_0 v_{C\eta} - \\
 &\quad - \sin \psi_0 v_{C\xi})) \sin \varphi_0 - B_\zeta \cos \varphi_0(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta})) B_\zeta; \\
 l_{13}(t) &= l_{31}(t) = Qv_{C\eta}(((B_\eta v_{C\xi} - B_\xi v_{C\eta}) \cos \theta_0 + B_\zeta \sin \theta_0(\cos \psi_0 v_{C\eta} - \\
 &\quad - \sin \psi_0 v_{C\xi})) \cos \varphi_0 + B_\zeta \sin \varphi_0(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta})) B_\zeta; \\
 l_{22}(t) &= -Q(-(B_\xi v_{C\eta} - B_\eta v_{C\xi})(B_\zeta \sin \theta_0(-\sin \psi_0 v_{C\xi} + \cos \psi_0 v_{C\eta}) - \\
 &\quad - \cos \theta_0(B_\xi v_{C\eta} - B_\eta v_{C\xi})) \cos \varphi_0 + ((B_\xi v_{C\eta}^2 - B_\eta v_{C\eta} v_{C\xi}) \sin \theta_0 + \\
 &\quad + B_\zeta v_{C\eta}(\cos \psi_0 v_{C\eta} - \sin \psi_0 v_{C\xi}) \cos \theta_0 - \\
 &\quad - \sin \varphi_0(-B_\eta v_{C\xi} + B_\xi v_{C\eta})(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta})) B_\zeta); \\
 l_{23}(t) &= l_{32}(t) = -Qv_{C\xi}(((B_\eta v_{C\xi} - B_\xi v_{C\eta}) \cos \theta_0 + \\
 &\quad + B_\zeta \sin \theta_0(\cos \psi_0 v_{C\eta} - \sin \psi_0 v_{C\xi})) \cos \varphi_0 + \\
 &\quad + B_\zeta \sin \varphi_0(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta})) B_\zeta; \\
 l_{33}(t) &= -Q(-v_{C\xi}((B_\eta v_{C\xi} - B_\xi v_{C\eta}) \cos \theta_0 + \\
 &\quad + B_\zeta \sin \theta_0(-\sin \psi_0 v_{C\xi} + \cos \psi_0 v_{C\eta})) \sin \varphi_0 + \\
 &\quad + B_\zeta v_{C\eta}(-\sin \psi_0 v_{C\xi} + \cos \psi_0 v_{C\eta}) \cos \theta_0 + (-B_\eta v_{C\eta} v_{C\xi} + B_\xi v_{C\eta}^2) \sin \theta_0 + \\
 &\quad + B_\zeta \cos \varphi_0 v_{C\xi}(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta})) B_\zeta; \\
 b_{11}(t) &= (-B_\zeta(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0) \sin \theta_0 + B_\xi B_\eta \sin \psi_0 - \\
 &\quad - B_\eta^2 \cos \psi_0 - B_\zeta^2 \cos \theta_0) \cos \varphi_0 - ((B_\xi B_\eta \cos \psi_0 + B_\eta^2 \sin \psi_0) \sin \theta_0 + \\
 &\quad + B_\zeta(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta + B_\eta \cos \theta_0)) \sin \varphi_0; \\
 b_{12}(t) &= b_{21}(t) = ((B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \sin \varphi_0 - \\
 &\quad - \cos \varphi_0(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta)) B_\xi; \\
 b_{13}(t) &= b_{31}(t) = B_\xi((B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \cos \varphi_0 + \\
 &\quad + \sin \varphi_0(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta)); \\
 b_{22}(t) &= -B_\zeta(B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \cos \varphi_0 - (B_\xi^2 \cos \psi_0 + \\
 &\quad + B_\xi B_\eta \sin \psi_0) \cos \theta_0 + B_\zeta(\sin \theta_0 B_\xi - \sin \varphi_0(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta)); \\
 b_{23}(t) &= b_{32}(t) = B_\eta((B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \cos \varphi_0 + \\
 &\quad + \sin \varphi_0(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta)); \\
 b_{33}(t) &= -B_\eta(B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \sin \varphi_0 - (B_\xi^2 \cos \psi_0 + \\
 &\quad + B_\xi B_\eta \sin \psi_0) \cos \theta_0 + \sin \theta_0 B_\xi B_\zeta + \cos \varphi_0 B_\eta(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta).
 \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Разрешим неравенства (19), (20) относительно χ и перепишем их в виде:

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad \chi > \frac{d_2}{d_1 a_1 \omega_0^2}, \\
 & 2) \quad \chi > \frac{d_2 a_1 \omega_0^2 - \mu k_{M0} d_{41}}{k_{M0} d_{42}}, \\
 (П.1) \quad & 3) \quad \chi < \frac{2k_{M0} d_{42} - \mu k_{M0} d_{51} - a_2 \omega_0^2 d_3}{k_{M0} d_{52}} = \frac{2d_{42} - \mu d_{51}}{d_{52}} - \frac{a_2 \omega_0^2 d_3}{k_{M0} d_{52}}, \\
 & 4) \quad \chi > \frac{d_2 + d_3/(2a_2)}{\mu k_{M0} d_{41}}, \\
 & 5) \quad \chi < \frac{2d_{42} - \mu d_{51}}{d_{52}}.
 \end{aligned}$$

Неравенства 1), 2) и 4) системы (П.1) определяют нижнюю границу для числа χ .

Обозначим: $\chi_1 = \frac{d_2}{d_1 a_1 \omega_0^2}$; $\chi_2 = \frac{d_2 a_1 \omega_0^2 - \mu k_{M0} d_{41}}{k_{M0} d_{42}}$; $\chi_4 = \frac{d_2 + d_3/(2a_2)}{\mu k_{M0} d_{41}}$. Заметим, что χ_1 , и χ_2 зависят от параметра a_1 , причем с ростом параметра a_1 значение $\chi_1(a_1)$ убывает по гиперболическому закону, а $\chi_2(a_1)$ растет линейно. Таким образом, чтобы минимизировать $\max\{\chi_1, \chi_2\}$, параметр a_1^* выбирается так, чтобы $\chi_1(a_1^*) = \chi_2(a_1^*)$.

Неравенства 3) и 5) системы (П.1) определяют верхнюю границу допустимых значений параметра χ . Если $\frac{a_2 \omega_0^2 d_3}{k_{M0} d_{52}} > 0$, то неравенство 5) является следствием неравенства 3). Обозначим искомую границу: $\chi_3 = \frac{2k_{M0} d_{42} - \mu k_{M0} d_{51} - a_2 \omega_0^2 d_3}{k_{M0} d_{52}}$. Следовательно, система неравенств (П.1) упрощается до следующего неравенства:

$$\max\{\chi_1(a_1^*), \chi_4\} < \chi_3.$$

Аналогично заметим, что χ_3 и χ_4 зависят от параметра a_2 . При этом χ_3 убывает линейно, в то время как χ_4 убывает гиперболически. Чтобы определить значение χ , требуется определить непустой интервал $[a_2^{(1)}, a_2^{(2)}]$, где неравенство $\chi_4 < \chi_3$ выполняется для каждой точки внутри этого отрезка. Из уравнения $\chi_3(a_2) = \chi_4(a_2)$ найдем корни $a_2^{(1)}$ и $a_2^{(2)}$.

Если длина искомого отрезка $[a_2^{(1)}, a_2^{(2)}]$ стремится к нулю, то она уменьшается до точки a_2^* , где значение a_2^* можно найти из равенства угловых коэффициентов прямой $\chi_3(a_2)$ и касательной к кривой $\chi_4(a_2)$. Следовательно, $a_2^* = \sqrt{d_{52}/(2\mu\omega_0^2 d_{41})}$. Такой выбор константы a_2 может быть рекомендован для численного анализа достаточных условий асимптотической устойчивости. Окончательно, система неравенств (П.1) сводится к неравенству

$$(П.2) \quad \max\{\chi_1(a_1^*), \chi_4(a_2^*)\} < \chi_3(a_2^*).$$

Если неравенство (П.2) не выполняется, потому что $\chi_1(a_1^*) > \chi_3(a_2^*)$, то можно выбрать соответствующее значение a_2 , уменьшив его до $a_2^{(1)}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Сарычев В.А., Овчинников М.Ю.* Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. Т. 23. 104 с.
3. *Rodriguez-Vazquez A., Prats M.M.* Spacecraft Magnetic Attitude Control Using Approximating Sequence of Riccati Equations // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2014. V. 51. <https://doi.org/10.1109/TAES.2015.130478>
4. *Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // Acta Astronautica. 2015. V. 110. P. 279–286. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.030>
5. *Giri D., Mukherjee B., T N B., Sinha M.* Three-Axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-Axis Global Magnetic Attitude Control // Asian Journal of Control. 2017. V. 19(3). <https://doi.org/10.1002/asjc.1506>
6. *Пеньков В.И., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С.* Трехосная ориентация спутника в орбитальных осях посредством магнитного момента. Управление по вектору конечного поворота // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 7. 21 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-7>
7. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Управление с помощью магнитных моментов ориентацией спутника, движущегося по полярной орбите // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 9(81). С. 8–23. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-9-1798>
8. *Ovchinnikov M., Roldugin D.* Magnetic attitude control and periodic motion for the in-orbit rotation of a dual-spin satellite // Acta Astronautica. 2021. V. 186. P. 203–210. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.05.035>
9. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космические исследования. 2020. Т. 58. № 3. С. 199–207.
10. *Тихонов А.А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.
11. *Giri D.K., Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of earth-pointing satellites // J. Guid. Control. Dyn. 2014. No. 37(6). P. 1946–1960. <https://doi.org/10.2514/1.G000030>
12. *Giri D.K., Sinha M.* Three-axis attitude control of earth-pointing isoinertial magneto-Coulombic satellites // Int. J. Dyn. Control. 2017. No. 5(3). P. 644–652. <https://doi.org/10.1007/s40435-015-0206-x>
13. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // Aerospace Science and Technology. 2020. V. 104. P. 105963. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105963>

14. *Prabhat H., Mukherjee B.K., Giri D.K., Sinha M.* Fault-tolerant sliding mode satellite attitude stabilization using magneto-Coulombic torquers // *Aerosp. Sci. Technol.* 2022. V. 121. DOI: 107316, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107316>
15. *Антипов К.А., Тихонов А.А.* Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // *АиТ.* 2007. № 8. С. 44–56.
Antipov K.A., Tikhonov A.A. Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 8. P. 1333–1344.
16. *Tikhonov A.A., Antipov K.A., Korytnikov D.G., Nikitin D.Yu.* Electrodynamical compensation of disturbing torque and attitude stabilization of a satellite in J2 perturbed orbit // *Acta Astronautica.* 2017. V. 141. P. 219–227.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.10.009>
17. *Сомов Е.И., Бутырин С.А.* Энергосберегающее цифровое управление магнитным приводом в аварийном режиме ориентации спутника // *Известия Самарского научного центра РАН.* 2018. Т. 20. № 1. С. 37–44.
18. *Белецкий В.В., Янишин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова думка, 1984. 188 с.
19. *Белоконов И.В., Тимбай И.А., Баринова Е.В.* Выбор проектных параметров наноспутника формата CUBESAT с пассивной системой стабилизации // *Гироскопия и навигация.* 2020. Т. 28. № 1 (108). С. 81–100.
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.0025>
20. *Баринова Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А.* Технология проектирования углового движения малоразмерного космического аппарата стандарта CUBESAT с пассивной системой стабилизации // *Гироскопия и навигация.* 2024. Т. 32. № 4. С. 74–87.
21. *Баринова Е.В., Белоконов И.В., Елисов Н.А. и др.* Особенности динамики и некоторые вопросы управления угловым движением малоразмерных космических аппаратов нанокласса на низких орбитах // *Гироскопия и навигация.* 2023. Т. 31. № 3. С. 3–35.
22. *Lovera M., Astolfi A.* Global magnetic attitude control of spacecraft in the presence of gravity gradient // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.* 2006. V. 42. No. 3. P. 796–805.11
23. *Chesi S., Gong Q., Romano M.* Aerodynamic Three-Axis Attitude Stabilization of a Spacecraft by Center-of-Mass Shifting // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2017. V. 40. No. 7. P. 1613–1626.
24. *Maksimenko M.V., Tikhonov A.A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in an indirect position // *Acta Astronautica.* 2025. V. 232. P. 516–524.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2025.03.018>
25. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
26. *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2: Вычисление момента и оценки его составляющих // *Вест. СПб.-го ун-та.* 1999. Вып. 3 (№ 15). С. 81–91.
27. *Tikhonov A.A.* On electrodynamical compensation of a torque disturbing satellite orientation // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP), October 5–9, Saint Petersburg. 2015. P. 132–134.
<https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342069>

28. *Сарычев В.А. Д.Е. Охоцимский и его роль в создании систем пассивной ориентации спутников // Прикладная небесная механика и управление движением. Сб. статей, посвящ. 90-летию со дня рождения Д.Е. Охоцимского / сост.: Т.М. Эннеев и др.; редкол.: Э.Л. Аким (гл. ред.) и др. М.: ИПМ, 2010. 367 с.*
29. *Тихонов А.А., Спасич Д.Т., Антипов К.А., Саблина М.В. Оптимизация электродинамического метода стабилизации искусственного спутника Земли // АиТ. 2011. № 9. С. 112–120.*
Tikhonov A.A., Antipov K.A., Sablina M.V., Spasic D.T. Optimizing the electro-dynamical stabilization method for a man-made Earth satellite // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 9. P. 1898–1905.
30. *Dosaev M., Samsonov V., Hwang S.-S. Construction of control algorithm in the problem of the planar motion of a friction-powered robot with a flywheel and an eccentric weight // Applied Mathematical Modelling. 2021. V. 89. P. 1517–1527. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.022>*
31. *Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.*
32. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н. Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2014. № 5. С. 3–21.*
33. *Левский М.В. Оптимальное управление кинетическим моментом во время пространственного разворота твердого тела (космического аппарата) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. № 1. С. 115–140.*
<https://doi.org/10.1134/S0572329919010069>
34. *Смирнов А.С., Смольников Б.А. Построение и анализ рациональных режимов управления движением твердого тела // Труды МАИ. 2022. № 124.*
<https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-03>
35. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame // Acta Astronautica. 2017. V. 139. P. 122–129. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.06.033>*
36. *Kosov A. The exponential stability and stabilization of non-autonomous mechanical systems with non-conservative forces // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2007. V. 71. P. 371–384.*
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.07.011>
37. *Aleksandrov A.Y., Kosov A.A. Asymptotic stability of equilibrium positions of mechanical systems with a nonstationary leading parameter // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2008. V. 47. No. 3. P. 332–345. <https://doi.org/10.1134/S1064230708030027>*
38. *Alken P., Thebault E., Beggan C.D., et al. International Geomagnetic Reference Field: the 13th generation // International Geomagnetic Reference Field: the thirteenth generation. Earth Planets Space. 2021. V. 73(49).*
<https://doi.org/10.1186/s40623-020-01288-x>

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.

Поступила в редакцию 05.05.2025

После доработки 05.11.2025

Принята к публикации 01.12.2025

Управление в социально-экономических системах

© 2026 г. Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru),
Д.Г. АЛГАЗИНА, канд. техн. наук (darya.algazina@mail.ru)
(Алтайский государственный университет, Барнаул)

АГРЕГИРОВАННЫЕ ИНДИКАТОРЫ ДИНАМИКИ ИГРЫ ОЛИГОПОЛИИ

Рассматривается проблема разработки агрегированных индикаторов динамики рефлексивного коллективного принятия решений в моделях олигополии. Рассматриваются конкурентные рынки с произвольным числом агентов, которые рефлексируют по Курно. Предложенные индикаторы используются для аналитического оценивания динамики, выявления условий ее сходимости к равновесию и моментов разворота динамики к сходимости. Сравнительный анализ показывает согласованность результатов, полученных на основе численного моделирования и полученных с использованием агрегированных индикаторов. Для стабилизирующихся последовательностей индикаторов доказана идеальная согласованность результатов.

Ключевые слова: олигополия Курно, рефлексивное коллективное поведение, агрегированное описание, равновесие, стабилизирующиеся последовательности, агрегированные индикаторы.

DOI: 10.7868/S2413977726030053

1. Введение

Настоящая работа посвящена решению игры агентов на рынке олигополии. Обзор современного состояния решения этой проблемы, как одной из важнейших в теории игр, приведен в [1–3].

В условиях неполной информированности, взаимообусловленности поведения и конкурентной среды динамика принятия агентом решений на конкурентном рынке строится на основе рефлексивных размышлений о наилучшем собственном выборе с учетом откликов конкурентов [4–16]. В настоящей работе развивается подход к описанию рефлексивного коллективного поведения и решению проблемы достижения равновесия [17].

В отличие от традиционных подходов, когда акцент делается на действия каждого агента в каждом периоде (такте) принятия решения, в рамках данного подхода условия сходимости формулируются для агрегированного описания поведения агентов. Используется агрегация по действиям агентов и агрегация по времени. Агрегация по действиям осуществляется по каждому периоду путем суммирования невязок действий агентов. Агрегация по

времени осуществляется по совокупности последовательных периодов путем суммирования значений элементов динамики [17].

Рассматривается проблема разработки агрегированных индикаторов, которые могут быть использованы в задачах мониторинга динамики рынка в целом и аналитического оценивания движения динамики каждого агента к положению равновесия. В качестве базовой рассматривается модель олигополии, когда в условиях неполного знания рефлексорирующие по Курно агенты следуют процедуре коллективного поведения.

Структура изложения материалов работы следующая. Второй и третий разделы посвящены изложению теоретического материала проводимого исследования при традиционных для моделей индикаторного коллективного поведения предположениях относительно информированности агентов, а также обоснованию предложенных индикаторов. Для ряда частных случаев приводится сравнительный анализ результатов по оценке асимптотической сходимости рефлексивных динамик, полученных на основе численного моделирования и полученных путем аналитического оценивания с использованием предложенных новых агрегированных индикаторов. Четвертый раздел посвящен рассмотрению возможности применения предложенных индикаторов самими агентами. Вводятся дополнительные предположения об информированности агентов, позволяющие им независимо и наравне с конкурентами получать по индикаторам единые для всех оценки динамики рынка.

2. Отправные результаты для проводимого исследования

В разделе приводятся ранее полученные и новые результаты, которые положены в основу построения агрегированных индикаторов сходимости динамик агентов.

Модель олигополии Курно рассматривается как некооперативная игра с n игроками (рациональными агентами), которые конкурируют объемами выпуска однородной продукции. Предполагаются классические для этой модели линейная обратная функция спроса $p\left(\sum_{j \in N} q_j\right) = a - b \sum_{j \in N} q_j$ и линейные функции затрат агентов вида $\varphi_i(q_i) = c_i q_i + d_i$. Здесь: q_i – выпуск i -го агента ($i \in N = \{1, \dots, n\}$); c_i, d_i – предельные и постоянные издержки i -го агента соответственно; $p\left(\sum_{j \in N} q_j\right)$ – единая рыночная цена; a, b – параметры спроса, характеризующие максимально возможную цену товара, при которой объем спроса будет стремиться к нулю, и наклон кривой спроса соответственно. Функция выигрыша (целевая функция) i -го агента зависит от собственной стратегии q_i , совокупности стратегий всех игроков и имеет вид [18, 19]:

$$(1) \quad \Pi_i \left(q_i, \sum_{j \in N} q_j \right) = \left(a - b \sum_{j \in N} q_j \right) q_i - c_i q_i - d_i \rightarrow \max_{q_i}, \quad i \in N.$$

Условия, когда решение $q^* = (q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ игры на рынке олигополии в случае линейных функций спроса и издержек, понимаемое как статическое

равновесие Нэша в игре в нормальной форме [20], существует, единственно и $q_i^* > 0 \forall i \in N$, можно найти, например, в [17].

В условиях игровой неопределенности (о действиях, выбираемых конкурентным окружением) и неполного знания (о затратах, целевых функциях и пр. конкурентов) решение игры ищется в виде исхода динамики рефлексивного коллективного поведения [3, 4, 9, 17, 19, 21]:

$$(2) \quad q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t - q_i^t), \quad i \in N.$$

Здесь:

t ($t = 0, 1, 2, \dots$) – номер такта (периода времени);

$x_i^t = x_i \left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j^t \right)$ – текущее положение цели i -го агента – это действие, которое обеспечивает i -му агенту максимальное значение его целевой функции в t -м такте, для определения которого не требуется знание агентом целевых функций конкурентов, поскольку наблюдаемые им действия всех агентов в t -м такте полагаются такими же и в текущем такте;

$\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ – параметр, независимо выбираемый каждым агентом в $(t+1)$ -м такте, определяет величину его «шага» от текущей стратегии к текущему положению своей цели;

$q^0 = (q_1^0, \dots, q_i^0, \dots, q_n^0)$ – вектор начальных стратегий агентов. Для линейной модели Курно [15, 17, 19]

$$(3) \quad x_i^t = \frac{(a - c_i)/b - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j^t}{2}.$$

Замена переменных

$$(4) \quad \varepsilon_i^t = q_i^* - q_i^t \quad (i \in N; t = 0, 1, 2, \dots)$$

позволяет преобразовать модель прибыли (1) к виду в t -м такте

$$(5) \quad \Pi_i^t = - \left(\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \right) \varepsilon_i^t \rightarrow \max_{\varepsilon_i^t} \quad (i \in N),$$

а (2) к виду

$$(6) \quad \varepsilon_i^{t+1} = \varepsilon_i^t + \gamma_i^{t+1} \left(- \frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j^t}{2} - \varepsilon_i^t \right).$$

В общем случае задача (5) в статической постановке может иметь множество решений. Так при $n = 2$ любой вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ формально будет решением, если $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, или, в общем случае, если $\sum_{j \in N} \varepsilon_j = 0$. Однако возможные ненулевые решения (например, при $n = 2$ таким будет ненулевой вектор $\varepsilon = (5, -5)$) не являются равновесными по Нэшу. Представляют интерес только равновесные решения.

Отправные результаты для проводимого исследования, объясняющие переход к модели с невязками, представлены в следующих трех утверждениях.

Утверждение 1. В модели (5) статическое равновесие Нэша $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_i^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ существует, единственно и $\varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$, а сходимость процесса (6) означает, что $\varepsilon_i^t \rightarrow \varepsilon_i^* = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении впервые.

В [17] доказаны следующие два утверждения.

Утверждение 2. Процесс (6) сходится тогда и только тогда, когда сходится процесс (2)–(3) для модели (1).

Утверждение 3. Если $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $\varepsilon_i^t \rightarrow \varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$.

Также для последующего изложения важны следующие соотношения (с учетом переобозначения выражения $\frac{\tilde{\gamma}^t(1+n)}{4}$, которое использовалось в [17], на $\tilde{\gamma}^t$ здесь):

$$(7) \quad \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} = (1 - 2\tilde{\gamma}^{t+1}) \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t,$$

$$(8) \quad \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} \right| \leq (1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau)^{t_+} |1 - 2\tilde{\gamma}_-^\tau|^{t_-} \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0} \right| \quad (\tau = t_+ + t_-).$$

В (8) и Приложении верхние индексы t_+ и t_- являются показателями степени, а верхние индексы $(t_0 + \tau)$ и t_0 не являются степенями.

В (8) используются обозначения: t_0 – некоторый произвольный такт и $\tau > 0$; $t_+(t_-)$ – число тактов в множестве $T_+(T_-)$ и $T_+ = \{t \in T | 1 - 2\tilde{\gamma}^t > 0\}$, $T_- = \{t \in T | 1 - 2\tilde{\gamma}^t < 0\}$, $T = \{t_0 + 1, \dots, t_0 + \tau\}$, $\tilde{\gamma}_+^\tau = \frac{1}{t_+} \sum_{t \in T_+} \tilde{\gamma}^t$, $\tilde{\gamma}_-^\tau = \frac{1}{t_-} \sum_{t \in T_-} \tilde{\gamma}^t$ – средние значения параметра

$$(9) \quad \tilde{\gamma}^t = \left(\sum_{j \in N} \gamma_j^t + \sum_{j \in N} \gamma_j^t \varepsilon_j^{t-1} / \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t-1} \right) / 4$$

за τ тактов по множествам T_+ и T_- соответственно.

В особом случае, когда $\tilde{\gamma}^t = \frac{1}{2}$ и поэтому $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t = 0$, динамика рынка улучшается в том смысле, что невязки каждого агента в $(t + 1)$ -м такте меньше его невязок в t -м такте по абсолютной величине [17].

В рядах динамики отношение двух последовательных уровней ряда носит название цепного коэффициента роста. В данном случае для ряда совокупных невязок выражение этого коэффициента через агрегированный по действиям агентов показатель $\tilde{\gamma}^t$ имеет по (7) вид $\frac{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t}{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t-1}} = 1 - 2\tilde{\gamma}^t$.

3. Агрегированные индикаторы в новых исследованиях сходимости динамики

Вначале остановимся на важном частном случае последовательности $\{\tilde{\gamma}^t\}$, который имеет вполне естественное объяснение с точки зрения выбора каждым i -м агентом своих шагов γ_i^t и допускает простую экспериментальную

верификацию (см., например, [4, 15, 19]). Например, если в рассматриваемом случае агент со временем не меняет своих шагов или повторяет их известным способом.

Будем полагать, что последовательность $\{\tilde{\gamma}^t\}$ стабилизируется к $\tilde{\gamma}^{t_s}$ начиная с такта t_s , если t_s – наименьшее натуральное число такое, что $\tilde{\gamma}^t = \tilde{\gamma}^{t_s} \forall t \geq t_s$ [22].

Утверждение 4. Если последовательность $\{\tilde{\gamma}^t\}$ стабилизируется к $\tilde{\gamma}^{t_s}$, то динамика (6) сходится тогда и только тогда, когда $0 < \tilde{\gamma}^{t_s} < 1$.

Доказательство этого утверждения дано в Приложении.

Пример 1. Пусть число агентов на рынке $n = 4$. Обозначим вектор параметров шагов агентов как $\gamma^t = (\gamma_1^t, \gamma_2^t, \gamma_3^t, \gamma_4^t)$. Вначале рассмотрим случай, когда $\gamma^t = (0, 2; 1; 1; 1)$ на всех тактах, т.е. агенты не меняют свои шаги. Численный эксперимент показывает, что последовательность $\{\tilde{\gamma}^t\}$ стабилизируется с точностью до третьего знака после запятой к уровню $\tilde{\gamma}^{t_s} = 1,039$ начиная с такта $t_s = 35$, а динамика (6) расходится. По утверждению 4 динамика (6) также расходится, поскольку для этого случая $\tilde{\gamma}^{t_s} > 1$. Рассмотрим другой случай, когда $\gamma^1 = \gamma^5 = \gamma^9 = \dots = (0, 2; 1; 1; 1)$, $\gamma^2 = \gamma^6 = \gamma^{10} = \dots = (1; 0, 2; 1; 1)$, $\gamma^3 = \gamma^7 = \gamma^{11} = \dots = (1; 1; 0, 2; 1)$, $\gamma^4 = \gamma^8 = \gamma^{12} = \dots = (1; 1; 1; 0, 2)$. Наборы параметров повторяются через каждые 3 такта. Численный эксперимент показывает, что начиная с такта $t_s = 21$ последовательность $\{\tilde{\gamma}^t\}$ стабилизируется к $\tilde{\gamma}^{t_s} = 0,955$ и динамика (6) сходится. По утверждению 4 динамика (6) также сходится, поскольку для этого случая $\tilde{\gamma}^{t_s} < 1$. Отметим, что в обоих случаях три агента делают полные шаги (равные единице) и один делает неполный шаг (равный 0,2), средние значения шагов совпадают (равны 0,8), а последовательности $\{\tilde{\gamma}^t\}$ стабилизируются. Однако результаты в них оказываются прямо противоположными. В первом случае динамика (6) расходится, а во втором сходится, что может быть не совсем очевидно и ожидаемо.

Для стабилизирующихся последовательностей всегда будет иметь место идеальная согласованность результатов численного моделирования и аналитического оценивания по $\tilde{\gamma}^t$, что иллюстрирует этот пример. Приведенный пример также иллюстрирует такие ситуации, когда в рамках агрегированного описания можно достаточно просто и единообразно формулировать условия сходимости динамик принятия решений, чего может не быть при детализированном описании.

Теперь перейдем к рассмотрению общих случаев динамики (6), когда последовательности $\{\tilde{\gamma}^t\}$ могут не являться стабилизирующимися.

Введем для процесса (6) агрегированный показатель вида

$$(10) \quad z_{t_0, t_1} = \sum_{t=t_0}^{t_1} z^t \quad (z_{t_0, t_0} = z^{t_0}),$$

где

$$(11) \quad z^t = \begin{cases} \tilde{\gamma}^t, & \tilde{\gamma}^t < \frac{1}{2} (t \in T_+); \\ 1 - \tilde{\gamma}^t, & \tilde{\gamma}^t > \frac{1}{2} (t \in T_-); \\ \frac{1}{2}, & \tilde{\gamma}^t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Свойства $z_{t_0,t}$:

- 1) Пусть $t_0 < t_1 < t_2$. Тогда $z_{t_0,t_2} = z_{t_0,t_1} + z_{t_1+1,t_2}$.
- 2) Пусть $t^* \in M(\tau) = \{t^* | z_{1,t^*} = \min_{t=1,\dots,\tau} z_{1,t}\}$. Тогда $z_{t^*+1,t} \geq 0$
 $\forall t = t^* + 1, \dots, \tau$.
- 3) Пусть $t^* = \max_{t \in M(\tau)} t$. Тогда $z_{t^*+1,t} > 0 \quad \forall t = t^* + 1, \dots, \tau$.

Утверждение 5. Пусть для олигополии Курно параметры $\tilde{\gamma}^t, z^t, z_{1,t}$ определяются выражениями (9), (10) и (11) соответственно. Тогда если $M(\tau) = \{t^ | z_{1,t^*} = \min_{t=1,\dots,\tau} z_{1,t}\} \neq \emptyset$ при $\tau \rightarrow \infty$, то процесс (6) сходится к положению равновесия.*

Доказательство этого основного утверждения работы приведено в Приложении.

По утверждению если минимум $z_{1,t}$ по t существует (т.е. $z_{1,t}$ не уходит в минус бесконечность) и t^* является точкой минимума, то $z_{t^*+1,t} \geq 0$ ($\forall t \geq t^* + 1$) и динамика переходит в сходящуюся.

В контексте утверждения 5 ключевую роль играет формирование величины $z_{1,t}$. В этой связи обсудим, как может она измениться в следующем $(t+1)$ -м такте.

Случай $\tilde{\gamma}^{t+1} < \frac{1}{2}$ соответствует тому, что по (10) $z_{1,t+1} = z_{1,t} + \tilde{\gamma}^{t+1}$. Если $0 < \tilde{\gamma}^{t+1}$, то $z_{1,t+1} > z_{1,t}$. Значение величины z повышается, что благоприятно сказывается на сходимости процесса. Если $\tilde{\gamma}^{t+1} < 0$, то $z_{1,t+1} < z_{1,t}$. Значение z понижается, что может неблагоприятно сказаться на сходимости процесса. Если $\tilde{\gamma}^{t+1} = 0$, то $z_{1,t+1} = z_{1,t}$. Значение z не меняется.

Случай $\frac{1}{2} < \tilde{\gamma}^{t+1}$ соответствует тому, что по (10)–(11) $z_{1,t+1} = z_{1,t} + 1 - \tilde{\gamma}^{t+1}$. Если $\tilde{\gamma}^{t+1} < 1$, то $z_{1,t+1} > z_{1,t}$. Значение величины z повышается, что благоприятно сказывается на сходимости процесса. Если $1 < \tilde{\gamma}^{t+1}$, то $z_{1,t+1} < z_{1,t}$. Значение z понижается, что может неблагоприятно сказываться на сходимости процесса. Если $\tilde{\gamma}^{t+1} = 1$, то $z_{1,t+1} = z_{1,t}$. Значение z -показателя не меняется.

Случай $\tilde{\gamma}^t = \frac{1}{2}$ благоприятствует сходимости процесса и $z_{1,t+1} = z_{1,t} + \frac{1}{2}$.

Утверждение 5 и проведенное здесь обсуждение дают основания для того, чтобы рассматривать показатель $z_{t_0,t}$ в качестве агрегированного индикатора в оценке сходимости динамики (6). Положительное текущее значение индикатора указывает на улучшение динамики рынка в целом относительно такта отсчета (в смысле (8)), что по утверждению 3 благоприятствует сходимости

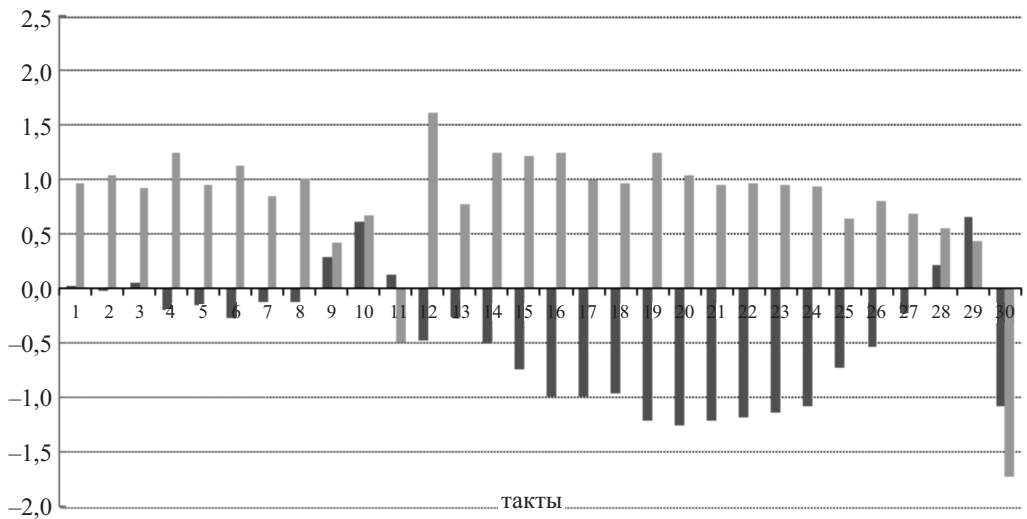


Рис. 1. Динамика индикаторов $\tilde{\gamma}^t$ (светлые столбики) и $z_{1,t}$ (темные столбики).

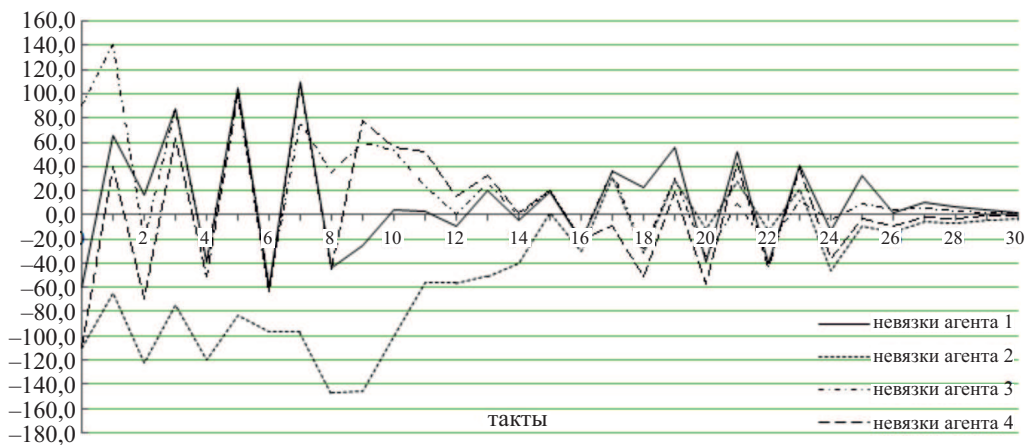


Рис. 2. Динамика невязок действий отдельных агентов.

динамики каждого агента. Отрицательное текущее значение агрегированного индикатора не дает оснований для утверждения об относительном улучшении динамик. В целом положительный вклад в индикатор и в сходимость процесса дают такты, для которых $0 < \tilde{\gamma}^t < 1$.

В рядах динамики в качестве показателя интенсивности используется базисный коэффициент роста, который в рассматриваемом случае для ряда совокупных невязок и промежутка $[t_0; t_0 + \tau]$ имеет вид $\frac{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau}}{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0}}$. Агрегированный по действиям агентов и промежутку индикатор $z_{t_0, t_0 + \tau}$ оценивает динамику этого коэффициента и указывает на такты ее разворота к сходимости к нулю.

Пример 2. Фрагмент численного расчета. Данный пример иллюстрирует действие утверждения 5. Пусть также $n = 4$. На рис. 1 приведена динамика индикатора $\tilde{\gamma}^t$, который рассчитывается согласно (9) по некоторым начальным условиям ε_i^0 и шагам агентов γ_i^t ($i = \overline{1, 4}$). На промежутке в тридцать тактов динамика $\tilde{\gamma}^t$ не стабилизируется. На этом же рисунке приведена соответствующая динамика индикатора $z_{1,t}$, который рассчитывается по (10)–(11). Влияние динамики индикатора $z_{1,t}$ на динамику невязок ε_i^t ($i = \overline{1, 4}$) можно проследить по рис. 2. До двадцатого такта не наблюдается тенденция к сходимости невязок всех агентов, поскольку на промежутке в тридцать тактов индикатор $z_{1,t}$ достигает своего минимума только на двадцатом такте (см. рис. 1). Тогда индикатор $z_{21,t}$, который (согласно его свойству 1) может быть рассчитан по формуле $z_{21,t} = z_{1,t} - z_{1,20}$, имеет положительный знак при $t \geq 21$ и возрастает до $t = 29$ включительно. Поэтому динамики невязок агентов движутся к теоретическому статичному равновесию Курно–Нэша $\varepsilon_i^* = 0$ ($i = \overline{1, 4}$).

Вернемся к примеру 1 со стабилизирующимися последовательностями индикаторов $\{\tilde{\gamma}^t\}$, чтобы продемонстрировать их применение. Для случая сходящейся динамики ε_i^t агрегированный индикатор начиная с $t_s = 21$ будет рассчитываться с учетом (11) по формуле $z_{t_s, \tau} = \sum_{t=t_s}^{\tau} (1 - \tilde{\gamma}^t) = (\tau - t_s + 1) \times (1 - \tilde{\gamma}^{t_s}) = (\tau - t_s + 1)0,445$. Его значение будет ограничено снизу при $\tau \rightarrow \infty$, поэтому на основании утверждения 5 подтверждается сходимость (6) по этому агрегированному индикатору. Для случая расходящейся динамики ε_i^t агрегированный индикатор начиная с $t_s = 35$ будет рассчитываться по той же формуле $z_{t_s, \tau} = (\tau - t_s + 1)(1 - \tilde{\gamma}^{t_s}) = (\tau - t_s + 1)(-0,039)$. Его значение не будет ограничено снизу при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому $M(\tau) = \emptyset$ при $\tau \rightarrow \infty$, и на основании утверждения 5 не подтверждается сходимость (6) по z -индикатору.

4. Применение агентами индикаторов

Предложенные индикаторы могут представлять не только теоретический, но и практический интерес. Опишем один из возможных вариантов применения агентами агрегированных индикаторов в оценке своей динамики и динамики рынка.

Традиционно в процедуре коллективного поведения (2) агент принимает решение об объеме своего текущего выпуска, не зная равновесного выпуска и не имея возможности судить, насколько его предыдущие действия и действия других агентов способствовали достижению равновесия. Очевидно, что такая возможность может быть полезной агенту, чтобы сделать текущий выбор.

Ее агент может получить, используя агрегированные индикаторы $\tilde{\gamma}^t$ и $z_{t_0, t}$.

Индикатор $\tilde{\gamma}^t$ показывает, что выбор шагов в предыдущем t -м такте всеми агентами дал положительный вклад в сходимость процесса, если $0 < \tilde{\gamma}^t < 1$. Индикатор $z_{t_0, t}$ показывает, что выбор шагов во временном промежутке $t_0, t_0 + 1, \dots, t$ дал улучшение динамики рынка в целом в такте t относительно такта t_0 , если $z_{t_0, t} > 0$.

Основная проблема возможности применения агентами индикаторов состоит в том, что процедуры коллективного поведения (2) и (6) описываются в разных «системах координат»: в одной системе по (2) рассчитываются текущие выпуски агентов, в другой – по (6) рассчитываются невязки текущих выпусков и по (9)–(10) формируются индикаторы.

Для того чтобы увязать эти системы координат, приведем следующие выкладки. Полагая, что $Q^t = \sum_{j \in N} q_j^t$, из (4) и $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} = (1 - 2\tilde{\gamma}^{t+1}) \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t$ следует, что $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t = \frac{Q^{t+1} - Q^t}{2\tilde{\gamma}^{t+1}}$. Тогда $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t - \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t-1} = \frac{Q^{t+1} - Q^t}{2\tilde{\gamma}^{t+1}} - \frac{Q^t - Q^{t-1}}{2\tilde{\gamma}^t} = -(Q^t - Q^{t-1})$. Приходим к рекуррентному соотношению

$$(12) \quad \tilde{\gamma}^{t+1} = \frac{Q^{t+1} - Q^t}{Q^t - Q^{t-1}} \cdot \frac{\tilde{\gamma}^t}{1 - 2\tilde{\gamma}^t}.$$

Примем следующие предположения, позволяющие каждому агенту, оставаясь в рамках системы координат процесса (2), объективно и наравне с другими конкурентами оценивать динамику рынка:

- 1) Все агенты «интеллектуальны» до уровня знания формулы (12), которая позволяет им рекуррентно вычислять значение индикатора $\tilde{\gamma}^t$, и формул (10)–(11) для вычисления индикатора $z_{t_0,t}$.
- 2) Все агенты в некоторый момент времени t_0 выбирают один и тот же шаг γ^{t_0} (t_0 – это такт, с которого будут синхронизованы представления всех агентов о ходе процесса. Его агенты выбирают по договоренности. По (9) будет, что $\tilde{\gamma}^{t_0} = \gamma^{t_0}(1 + n)/4$. Полагается, что величина $\tilde{\gamma}^{t_0}$ известна всем агентам).

Первое предположение вполне естественно для агента, использующего индикаторы. Оно означает, что в $(t + 1)$ -м такте каждый агент будет знать расчетные индикаторы $\tilde{\gamma}^t$ и совокупные выпуски предыдущих тактов Q^t ($t = 1, 2, \dots$). Индикаторы $\tilde{\gamma}^t$ вычисляются самими агентами по рекуррентной формуле (12), а знание агентами совокупных выпусков обеспечивается условиями процедуры коллективного поведения (2)–(3). В свою очередь, в $(t + 1)$ -м такте каждый агент будет знать также расчетные индикаторы $z_{t_0,t}$, которые согласно свойству 1 индикатора вычисляются самим агентом по рекуррентной формуле $z_{t_0,t} = z_{t_0,t-1} + z^t$, где z^t определяется по (11).

Второе предположение направлено на то, чтобы исключить влияние равновесных выпусков на индикатор $\tilde{\gamma}^t$ и процесс (6).

В рамках этих предположений, наблюдая по модели (2) ранее выбранные совокупные выпуски Q^t , каждый агент может уже самостоятельно и независимо от других получать единые оценки $\tilde{\gamma}^t$ и $z_{t_0,t}$ динамики рынка, синхронизированные с оценками конкурентов начиная с такта t_0 .

5. Заключение

Практическая и научная значимость, а также перспективы будущих исследований динамики коллективного поведения определяются аналитическим подтверждением интуитивного представления о том, что их агрегированное

описание на значительных временных промежутках может быть не менее точным, чем детализированное. Применение агрегированных индикаторов позволяет расширить понимание о множестве ситуаций, которые в условиях неполной информированности и отсутствия общего знания могут приводить модели олигополии к рефлексивным равновесиям – устойчивым исходам взаимодействия агентов. Представляется перспективной разработка и применение агрегированных индикаторов в поиске аналитических решений задач рефлексивного принятия решений в рамках и других, отличных от рассмотренных в данной работе, моделей олигополии и поведения, например с реакцией агентов по Штакельбергу, а также с учетом психических и поведенческих компонент деятельности агентов [9].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Оптимальные стратегии агентов могут быть определены на основе (5) как решение системы n однородных линейных уравнений $\partial \Pi_i / \partial \varepsilon_i = - \left(\sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) - \varepsilon_i = 0$ ($i \in N$) с n неизвестными. Определитель, соответствующий матрице коэффициентов при неизвестных, не равен нулю. Поэтому такая система имеет только нулевое решение $\varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$. Это решение будет равновесным по Нэшу. Предположим, что только i -й агент отклоняется от нулевого решения на конечную величину $\Delta \varepsilon_i \neq 0$. Тогда по (5) имеем, что $\Pi_i(\varepsilon^*) = 0 > -(\Delta \varepsilon_i)^2$, т.е. при отклонении прибыль агента уменьшается и поэтому тривиальное решение является равновесным.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 4. Пусть $0 < \tilde{\gamma}^{t_s} < 1$. По (7) имеем $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} = (1 - 2\tilde{\gamma}^{t_s})^\tau \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0}$. Отсюда $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ и по утверждению 3 будет $\varepsilon_i^{t_0 + \tau} \rightarrow \varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$.

Если $\tilde{\gamma}^{t_s} < 0$ или $1 < \tilde{\gamma}^{t_s}$, то $\left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} \right| \rightarrow \infty$, и поэтому динамика сходиться не может.

Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 5. Положим $t^* = \max_{t \in M(\tau)} t$ при $\tau \rightarrow \infty$. Тогда по свойству 3) для $z_{t^*+1, t}$ будет $z_{t^*+1, t^*+\tau} = \sum_{t \in T_+} \tilde{\gamma}^t + t_- - \sum_{t \in T_-} \tilde{\gamma}^t > 0$ при $\tau \geq 1$. Отсюда, учитывая выражения для средних значений $\tilde{\gamma}_+^t = \frac{1}{t_+} \sum_{t \in T_+} \tilde{\gamma}^t$, $\tilde{\gamma}_-^t = \frac{1}{t_-} \sum_{t \in T_-} \tilde{\gamma}^t$, имеем $t_+ \tilde{\gamma}_+^\tau - t_- (\tilde{\gamma}_-^\tau - 1) > 0$. Из этого неравенства следует неравенство $\frac{t_+(1-2\tilde{\gamma}_+^\tau) + t_-(2\tilde{\gamma}_-^\tau - 1)}{t_+ + t_-} < 1$.

По неравенству (8) имеем $\left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t^* + \tau} \right| \leq (1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau)^{t_+} |1 - 2\tilde{\gamma}_-^\tau|^{t_-} \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t^*} \right|$ ($\tau = t_+ + t_-$).

Для оценки выражения $(1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau)^{t_+} |1 - 2\tilde{\gamma}_-^\tau|^{t_-}$ в правой части этого неравенства воспользуемся следующим известным неравенством. Пусть $x_1, x_2 \geq 0$, $1 > \alpha > 0$. Тогда $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$. Равенство имеет место только при $x_1 = x_2$.

Поэтому будет справедливо:

$$\begin{aligned} (1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau)^{t_+} |1 - 2\tilde{\gamma}_-^\tau|^{t_-} &= (1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau)^{t_+} (2\tilde{\gamma}_-^\tau - 1)^{t_-} \leq \\ &\leq \left[\frac{t_+(1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau) + t_-(2\tilde{\gamma}_-^\tau - 1)}{t_+ + t_-} \right]^{t_+ + t_-}. \end{aligned}$$

Было показано, что выражение в квадратных скобках меньше единицы. Поэтому $\left[\frac{t_+(1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau) + t_-(2\tilde{\gamma}_-^\tau - 1)}{t_+ + t_-} \right]^{t_+ + t_-} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, и на основании утверждения 3 процесс (6) сходится к равновесию.

Утверждение 5 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Corchon L.C.(ed.), Marini M.A. (ed.). Handbook of Game Theory and Industrial Organization. V. I: Theory.* Edward Elgar Publishing, UK, USA, 2018.
2. *Corchon L.C.(ed.), Marini M.A. (ed.). Handbook of Game Theory and Industrial Organization. V. II: Applications.* Edward Elgar Publishing, UK, USA, 2018.
3. *Гераськин М.И.* Обзор новейших достижений в теории игр олигополии // *АиТ.* 2023. № 6. С. 3–25.
Geraskin M.I. A Survey of the Latest Advances in Oligopoly Games // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 6. P. 565–578.
4. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
5. *Ueda M.* Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 362.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.049.124535>
6. *Peng Y., Xiao Y., Lu Q., Wu X., Zhao Y.* Chaotic Dynamics in Cournot Duopoly Model with Bounded Rationality Based on Relative Profit Delegation Maximization // *Physica A: Statist. Mech. Appl.* 2020. V. 560. 125174 p.
7. *Koriyama Y., Ozkes A.I.* Inclusive Cognitive Hierarchy // *J. Econom. Behavior Organiz.* 2021. V. 186. P. 458–480.
8. *Новиков Д.А.* Ограниченная рациональность и управление // *Математическая теория игр и ее приложения.* 2022. Т. 14. Вып.1. С. 49–84.
9. *Новиков Д.А.* Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // *Управление большими системами.* М.: ИПУ РАН, 2020. Вып. 85. С. 206–237.
10. *Скаржунская Е.М., Цуриков В.И.* О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий // *Экономика и математические методы.* 2020. № 4. С. 103–115.
11. *Askar S.* On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information // *Appl. Math. Comput.* 2021. V. 393. No. 3.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125823>
12. *Alcantara-Jimenez G., Clempner J.B.* Repeated Stackelberg Security Games: Learning with Incomplete State Information // *Reliability Engineer. Syst. Safety.* 2020. V. 195(C). <https://doi.org/10.1016/j.ress.2019.106695>

13. Long J., Zhao H. Stability of Equilibrium Prices in a Dynamic Duopoly Bertrand Game with Asymmetric Information and Cluster Spillovers // Int. J. Bifurcat. Chaos Appl. Sci. Engineer. 2021. V. 31. No. 16. P. 215–240.
14. Xiao Y., Zhang S., Peng Y. Dynamic Investigations in a Stackelberg Model with Differentiated Products and Bounded Rationality // J. Comput. Appl Math. 2022. V. 414. No. 3. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114409>
15. Корепанов В.О. Модели рефлексивного группового поведения и управления // М.: ИПУ РАН, 2011. 127 с.
16. Угольников Г.А., Усов А.Б. Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий // АиТ. 2023. № 2. С. 150–168.
Ougolnitsky G.A, Usov A.B. The Interaction of Economic Agents in Cournot Duopoly Models under Ecological Conditions: A Comparison of Organizational Modes // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 2. P. 175–189.
17. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Агрегированные оценки динамики рефлексивного коллективного поведения в модели олигополии Курно // АиТ. 2024. № 9. С. 124–138.
Algazin G.I., Algazina D.G. Aggregate Estimates of Reflexive Collective Behavior Dynamics in a Cournot Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2024. V. 85. No. 9. P. 821–831.
18. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
19. Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г. Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 345–359.
20. Nash J. Non-Cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
21. Опоицев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
22. Яковлев М.К. Построение поля действительных чисел и теории пределов числовых последовательностей на основе понятия стабилизатора последовательности бесконечных десятичных дробей // Математика в высшем образовании. 2010. № 8. С. 41–52.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Чхартишвили.

Поступила в редакцию 24.05.2025

После доработки 26.06.2025

Принята к публикации 30.06.2025

Управление в социально-экономических системах

© 2026 г. Р.К. ШАВШИН (ruslanshavshin@gmail.com)
(Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики, Москва)

РОЛЬ ДИЗАЙНА РЫНКА В ЦЕНООБРАЗОВАНИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЫНОЧНОЙ ВЛАСТИ НА КОНЕЧНЫХ РЫНКАХ¹

Анализируется влияние дизайна рынка на равновесные характеристики на конечных рынках. Рассматривается модель направленного поиска на рынке труда в двух вариациях: когда условия контрактов предлагают фирмы и когда их предлагают сотрудники. Демонстрируется, что предпочтения сторон рынка (сотрудников, фирм и общества в целом) относительно его дизайна зависят от размеров рынка и могут как совпадать, так и различаться между различными сторонами. В рамках анализа показывается, что при определенном соотношении численности сторон рынка прирост в ожидаемом количестве заключенных контрактов превышает 10%.

Ключевые слова: дизайн рынка, направленный поиск, конечные рынки, рынок труда.

DOI: 10.7868/S2413977726030063

1. Введение

Концепция направленного поиска, лежащая в основе широкого класса исследований, предлагает свой взгляд на устройство рыночной структуры и взаимодействия, позволяющий объяснить некоторые важные наблюдаемые в реальности феномены. Одним из таких явлений является сосуществование на различных сторонах рынка агентов, которые могли бы заключить между собой сделку, но в итоге работы рыночного механизма оставшихся без контракта. Примеры включают в себя одновременное существование свободных вакансий и безработицы на рынке труда, одиноких мужчин и женщин в поиске на брачном рынке, необслуженных покупателей и продавцов с оставшимися запасами на товарном рынке.

Ключевая идея, определяющая концепцию направленного поиска, состоит в том, что процесс соединения агентов с разных сторон рынка происходит не случайным образом, а является результатом стратегического взаимодействия.

¹ Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

– На первом этапе агенты на одной из сторон рынка (*Proposers*) одновременно и независимо публично объявляют условия, на которых каждый из них готов заключить контракт с любым агентом с другой стороны рынка (*Respondents*).

– На втором этапе агенты на стороне *Respondents*, наблюдая все предложенные контракты, одновременно и независимо решают, с каким из агентов на стороне *Proposers* они хотят попытаться заключить контракт. Именно в этот момент происходит «направленный поиск» в том смысле, что решение агентами из *Respondents* принимается стратегически исходя из предложенных агентами на стороне *Proposers* условий и предсказания поведения других агентов со стороны *Respondents*.

– На третьем этапе взаимодействие происходит отдельно внутри образовавшихся подгрупп, состоящих из агента со стороны *Proposers* и всех агентов со стороны *Respondents*, решивших попытаться заключить контракт с данным агентом на предыдущем этапе. С помощью некоторого механизма в каждой подгруппе определяется пара агентов с разных сторон рынка, заключающих контракт, или отмечается отсутствие в итоге такой пары. В качестве механизма могут выступать усложненные варианты как аукционов того или иного формата, однако зачастую интерес представляет нестратегический механизм случайного сведения агентов с разных сторон рынка, соответствующий, например, ситуации, в которой продавец назначает цену на свой товар и затем случайно выбирает покупателя среди тех, кто подал заявку на покупку.

Базовой работой, наиболее близкой к этой, является [1], в которой рассматривается товарный рынок с однородными фирмами и покупателями, одной единицей товара у каждой фирмы и механизмом случайного сведения фирмы с одним из пришедших к ней покупателей. В дальнейшем было предложено множество продвижений и расширений, полноценный обзор которых представлен в [2]. При этом обобщений, сохраняющих возможность получения равновесных формул в явном виде, практически не представлено. Одним из таких является работа [3], где равновесие выводится аналитически для случая, в котором фирмам позволено иметь произвольный объем запасов, больший нуля.

Похожие мотивы возникают также в задаче определения стабильного паросочетания. Известно, что алгоритм Гейла–Шэпли ([4]) позволяет найти два решения указанной задачи, являющихся при этом верхним и нижним элементами решетки стабильных паросочетаний. Это означает, что вариация алгоритма Гейла–Шэпли, в которой фирмы являются предлагающей стороной, всегда приводит к стабильному соответствию, наилучшему для всех фирм и наихудшему для всех сотрудников из всех возможных стабильных паросочетаний. Обратное верно для вариации алгоритма Гейла–Шэпли, в которой предлагающей стороной являются сотрудники. В отличие от вышесказанного в рассматриваемой здесь модели в зависимости от размеров рынка фирмам, как и сотрудникам, может быть выгодно отказаться от роли предлагающей

стороны, при этом в ситуации с одинаковым числом агентов на различных сторонах рынка возможность получения преимущества одной стороной рынка над другой за счет смены дизайна в принципе отсутствует.

В существующей литературе при всем вышесказанном еще не было уделено внимания вопросу о том, как равновесные характеристики зависят от ключевого элемента базовой структуры рынка, а именно от того, кто является «покупателем», а кто – «продавцом». Однако данный вопрос играет важную роль в определении политики и последствий ее внедрения. Например, онлайн-платформа по соединению учеников и репетиторов может путем изменения своей архитектуры и дизайна взаимодействия пользователей построить работу путем выкладывания резюме репетиторами и откликов на них учеников или путем создания публичных заявок учениками и откликов на них заинтересовавшихся репетиторов. В зависимости от оценки ожидаемого количества пользователей, на каждой из сторон рынка платформа, обычно получающая комиссию за создание успешной пары, может внедрить тот или иной функционал с целью максимизации ожидаемого числа образовавшихся стабильных пар и, в конечном счете, ожидаемой комиссии. Аналогичный вопрос актуален для онлайн-платформ оказания услуг (*profi.ru*), поиска работы (*hh.ru*) и многих других. Важно отметить, что в реальности зачастую на платформе реализован не чисто один из вариантов, а некоторая их комбинация. При этом понимание того, как равновесные характеристики соотносятся друг с другом в двух предельных случаях в рамках стилизованной модели, поможет пролить свет на структуру оптимального дизайна платформы в более приближенных к реальности ситуациях.

В рамках анализа в этой работе была рассмотрена формулировка задачи в терминах рынка труда с однородными фирмами, обладающими одной свободной вакансией и готовыми платить максимальную заработную плату $wage_{\max}$, и однородными сотрудниками, желающими устроиться на работу при обеспечении минимальной заработной платы $0 \leq wage_{\min} < wage_{\max}$. Был проведен сравнительный анализ равновесных характеристик в зависимости от размеров рынка, т.е. количества фирм и сотрудников в случаях, когда условия контрактов в виде заработной платы предлагают сотрудники путем публикации резюме и когда заработную плату объявляют фирмы, публикуя описание вакансий.

Ключевой вклад этой работы заключается в определении структуры предпочтений различных сторон рынка (сотрудников, фирм и общества в целом) в зависимости от его размера. Продемонстрировано, что

- с точки зрения общественного благосостояния, определяемого как ожидаемое число сделок на рынке, публикация условий контрактов на первом этапе стороной с меньшей численностью предпочтительна, так как доставляет большее целевое значение, чем в обратном случае;

- с точки зрения каждой из сторон в ситуации, когда их численность отличается друг от друга не слишком сильно, предпочтительнее с точки зрения максимизации собственного излишка передать обязанность публиковать

условия контрактов на первом этапе другой стороне и занять позицию откликающихся на уже опубликованные предложения на втором этапе. В то же время в ситуации, когда численность фирм и сотрудников существенно отличается, с точки зрения максимизации собственного излишка каждой из сторон выгоднее самой публиковать условия контрактов на первом этапе;

– в силу того, что понятие существенности отличается для сторон из-за различных размеров каждой из них и, как следствие, асимметричности, множество всех допустимых размеров рынка разбивается на части в зависимости от всевозможных комбинаций набора предпочтений сторон рынка относительно обязанности публикации контрактов на первом этапе.

Помимо этого, оценены масштабы неэффективности и продемонстрировано, что при определенных размерах рынка исключительно за счет смены его дизайна можно добиться увеличения ожидаемого количества заключенных контрактов более чем на 10%.

Еще одним итогом проведенного анализа стала демонстрация неоднородности сути предпочтений сторон: описана ситуация, в которой одна из сторон рынка в результате смены его дизайна может потерять в своей относительной доле в совокупном излишке, но при этом выиграть в денежном выражении за счет роста совокупного излишка в результате более эффективной координации агентов на рынке. Другая сторона рынка также выигрывает в денежном выражении в рассматриваемом случае.

Таким образом, полученные результаты могут быть использованы при определении оптимального дизайна онлайн-платформы или иного рынка в зависимости от целевой функции лица, принимающего решение.

2. Модель

2.1. Описание рынка

Рассмотрим рынок труда, на котором присутствуют $n_f \geq 2$ однородных фирм, у каждой из которых есть ровно одна открытая вакансия, и $n_w \geq 2$ находящихся в поиске работы сотрудников. Обозначим множество сторон как $S = \{\text{Фирмы}, \text{Сотрудники}\}$. Пусть минимальная заработная плата, за которую готов работать каждый из сотрудников, равна $wage_{\min} \geq 0$, а максимальная заработная плата, которую готова платить каждая из фирм, равна $wage_{\max} > wage_{\min}$. Обозначим разность $wage_{\max}$ и $wage_{\min}$ как $\Delta wage$. Рынок устроен следующим образом.

На первом этапе агенты на одной из сторон рынка $Proposers \in S$ одновременно и независимо устанавливают вектор заработных плат. Например, если такой стороной являются фирмы, то каждая из них делает публичным описание вакансии с указанием фиксированной заработной платы, если же стороной $Proposers$ являются сотрудники, то каждый из них делает публичным свое резюме с указанием желаемой заработной платы. Ни в том, ни в другом случае заявленная заработная плата не может быть изменена позднее и станет частью действующего контракта соискателя в случае успешных переговоров.

На втором этапе, наблюдая предложенные агентами стороны *Proposers* условия контрактов, агенты на второй стороне рынка *Respondents* $\in S$ одновременно и независимо принимают решение, с каким из контрагентов на стороне *Proposers*, при этом ровно с одним, они хотят попытаться заключить контракт. Если на первом этапе описание вакансий публиковали фирмы, то на втором потенциальные сотрудники откликаются на них, при этом каждый сотрудник может откликнуться ровно на одну вакансию. Если же изначально сотрудники публиковали резюме, то на втором этапе фирмы приглашают их к трудоустройству, при этом каждая фирма может обратиться ровно к одному сотруднику.

На третьем этапе агенты на стороне *Proposers*, изначально публиковавшей условия контрактов, рассматривают поступившие на них отклики. Если агент на данной стороне получил не менее одного отклика, то он выбирает контрагента для заключения сделки равновероятно среди откликнувшихся и заключает успешную сделку. Агенты на стороне *Proposers*, не получившие ни одного отклика, равно как и агенты на стороне *Respondents*, чей отклик не получил ответа, остаются без заключенного контракта с нулевой полезностью / прибылью.

Все агенты действуют рационально и стратегически. Каждый из них максимизирует свой выигрыш, равный $wage - wage_{\min}$ для сотрудников и $wage_{\max} - wage$ для фирм, в случае успешного заключения контракта.

Обозначим модель, в рамках которой на первом этапе фирмы публикуют вакансии, как FP (firms posting). В рамках данной модели фирмы являются *Proposers*, а сотрудники – *Respondents*. Обозначим модель, в рамках которой на первом этапе сотрудники публикуют резюме, как WP (workers posting). В рамках данной модели фирмы являются *Respondents*, а сотрудники – *Proposers*. Отметим, что каждая из версий модели в отдельности представляет собой изложение классической базовой модели направленного поиска [1] в контексте рынка труда. В следующем разделе будет найдено совершенное в подыграх симметричное равновесие в каждой из моделей и сравнены равновесные характеристики.

2.2. Равновесие

В рамках данной секции отойдем от терминологии фирма / сотрудник и переформулируем условие задачи в терминах сторон *Proposers* / *Respondents*, рассмотренных во введении. Пусть количество агентов на стороне *Proposers* равно $n_p \geq 2$, на стороне *Respondents* – $n_r \geq 2$. Пусть полезность каждого агента от заключения контракта до вычета издержек (цены) на стороне *Proposers* равна $val_p \geq 0$, а на стороне *Respondents* – $val_r \geq 0$. При этом в зависимости от устройства функций полезности агентов из *Proposers* / *Respondents* их выигрыш принимает одну из двух форм:

$$\begin{cases} gain_p(val) = val - val_p, \\ gain_r(val) = val_r - val, \end{cases}$$

если в случае заключения контракта денежный трансфер в размере val идет в направлении $Respondents \Rightarrow Proposers$, подразумевая, что $val_r > val_p$, и

$$\begin{cases} gain_p(val) = val_p - val, \\ gain_r(val) = val - val_r \end{cases}$$

в обратном случае.

Теорема 1. В рассматриваемой модели существует единственное некоординированное совершенное в подыграх симметричное равновесие, в котором каждый агент из *Proposers* на первом этапе предлагает цену контракта

$$val = \frac{val_p \left(\frac{n_r}{n_p}\right) \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r} + val_r \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}{\frac{n_r}{n_p} \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r} + 1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}},$$

а каждый агент из *Respondents* на втором этапе выбирает для отклика агента из *Proposers* равновероятно с вероятностью $\gamma = \frac{1}{n_p}$.

Доказательство. Доказательство аналогично представленному в [2] для Proposition 5 с точностью до обозначений. Приведем ниже его ключевые шаги.

Чистой стратегией каждого агента j из *Proposers* является

$$val_j \in [\min(val_r, val_p), \max(val_r, val_p)].$$

Обозначим через $\mathbf{val} = (val_1, \dots, val_{n_p})$ профиль стратегий агентов *Proposers*.

Стратегией поиска для агента i из *Respondents* является вектор

$$\gamma_{i*} = (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in_p}),$$

где γ_{ij} отражает вероятность для данного агента i из *Respondents* выбрать для попытки заключения контракта агента j из *Proposers*. Обозначим через

$$\Gamma_{n_r \times n_p} = (\gamma_{1*}, \dots, \gamma_{n_r*})^T = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n_r1} & \cdots & \gamma_{n_r n_p} \end{pmatrix}$$

профиль стратегий агентов *Respondents*.

Равновесием является $(\mathbf{val}, \Gamma)$ такие, что ни один агент не имеет стимулов к отклонению, при этом симметричным является равновесие, в котором $val_j = val$ и $\gamma_{ij} = \frac{1}{n_p}$. Чтобы проверить, является ли заданная пара $(\mathbf{val}, \Gamma)$ равновесием, необходимо проверить, что происходит после единоличного отклонения одного из агентов *Proposers*. Начнем с симметричного вектора $\mathbf{val} = (val, \dots, val)$ и без ограничения общности предположим, что первый агент из *Proposers* отклонился от стратегии val к стратегии val^{dev} . Таким образом, теперь $\mathbf{val} = (val^{dev}, val, \dots, val)$. Необходимо проверить, является ли данное отклонение прибыльным при условии симметричного равновесия после отклонения.

Пусть для любого агента i из *Respondents* вероятность того, что он попытается заключить контракт с отклонившимся агентом *Proposers*, после отклонения равна $\gamma^{dev} = \gamma_{i1}(val^{dev}, val)$. Симметричное совершенное к подыграм равновесие описывается через val и $\gamma^{dev}(val^{dev}, val)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $val^{dev} = val$ доставляет максимум функции полезности потенциально отклоняющегося агента *Proposers* при условии отсутствия отклонений других агентов;
- 2) $(\gamma^{dev})^*(val^{dev}, val)$ составляет равновесие в подыгре для любых val^{dev} и val ;
- 3) на равновесном пути имеем $\gamma_{ij} = \frac{1}{n_p}$, хотя после отклонения агенты *Respondents* посещают отклонившегося агента из *Proposers* с вероятностью $\gamma^{dev} = \gamma^{dev}(val^{dev}, val)$, а всех остальных агентов *Proposers* равновероятно с вероятностью $\gamma^{nondev} = \frac{1-\gamma^{dev}}{n_p-1}$.

Вероятность того, что хотя бы один агент из *Respondents* попытается заключить контракт с отклонившимся агентом из *Proposers*, равна

$$\alpha_p^{dev} = 1 - \left(1 - \gamma^{dev}\right)^{n_r}.$$

Обозначим вероятность того, что агент *Respondents* заключит контракт, если он отправится к отклонившемуся агенту *Proposers*, как $\alpha_r^{dev} = \alpha_r^{dev}(val^{dev}, val)$. Заметим, что $n_r \gamma^{dev} \alpha_r^{dev} = \alpha_p^{dev}$, так как в левой части стоит ожидаемое число агентов *Respondents*, с которыми заключит контракт отклонившийся агент *Proposers*, а в правой части – ожидаемое число заключенных отклонившимся агентом контрактов. Таким образом,

$$\alpha_r^{dev} = \frac{1 - \left(1 - \gamma^{dev}\right)^{n_r}}{n_r \gamma^{dev}}.$$

Ожидаемая полезность отклонившегося агента из *Proposers* равна

$$V_p^{dev}(val^{dev}, val) = \alpha_p^{dev} gain_p(val^{dev}) = \left(1 - \left(1 - \gamma^{dev}\right)^{n_r}\right) gain_p(val^{dev}).$$

Ожидаемая полезность агента из *Respondents*, пытающегося заключить контракт с отклонившимся агентом из *Proposers*, равна

$$V_r^{dev}(val^{dev}, val) = \alpha_r^{dev} gain_r(val^{dev}) = \frac{1 - \left(1 - \gamma^{dev}\right)^{n_r}}{n_r \gamma^{dev}} gain_r(val^{dev}).$$

Ожидаемая полезность агента из *Respondents*, пытающегося заключить контракт с любым из неотклонившихся агентов из *Proposers*, равна

$$V_r^{nondev}(val^{dev}, val) = \frac{1 - \left(1 - \gamma^{nondev}\right)^{n_r}}{n_r \gamma^{nondev}} gain_r(val).$$

С учетом вышеописанного условия первого порядка для максимизации функции полезности $V_p^{dev}(val^{dev}, val)$ потенциально отклоняющегося агента

Proposers при условии отсутствия отклонений других агентов имеют вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V_p^{dev}}{\partial val^{dev}} = \text{sgn}(val_r - val_p) \alpha_p^{dev} + \text{gain}_p(val^{dev}) \frac{\partial \alpha_p^{dev}}{\partial val^{dev}} = \\ &= \text{sgn}(val_r - val_p) \alpha_p^{dev} + n_r (1 - \gamma^{dev})^{n_r - 1} \text{gain}_p(val^{dev}) \frac{\partial \gamma^{dev}}{\partial val^{dev}}. \end{aligned}$$

В симметричном смешанном равновесии в подыгре агентам *Respondents* безразлично, с каким из агентов *Proposers* (отклонившимся или любым из неотклонившихся) пытаться заключить контракт. Таким образом, γ^{dev} удовлетворяет условию

$$\frac{1 - (1 - \gamma^{dev})^{n_r}}{n_r \gamma^{dev}} \text{gain}_r(val^{dev}) = \frac{1 - (1 - \gamma^{nondev})^{n_r}}{n_r \gamma^{nondev}} \text{gain}_r(val).$$

Для любого $\gamma^{dev} \in (0, 1)$ можно взять производную неявной функции $\frac{\partial \gamma^{dev}}{\partial val^{dev}}$ и подставить ее в выведенные выше условия первого порядка для функции ожидаемой полезности отклонившегося агента из *Proposers*. Упрощение выражения подстановкой $\gamma^{dev} = \frac{1}{n_p}$ и $val^{dev} = val$ доказывает, что отклонение невыгодно тогда и только тогда, когда val принимает значение, определяемое выражением в условии настоящей теоремы.

Теорема доказана.

Приведем теперь формулы ключевых равновесных характеристик, рассматриваемых далее при сравнении дизайнов рынка.

Следствие 1. Безусловная вероятность заключить сделку в равновесии для каждого агента Respondents равна

$$\nu(\gamma, n_r) = \sum_{i=1}^{n_p} \gamma \mu(\gamma, n_r) = \mu(\gamma, n_r) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}}{\frac{n_r}{n_p}},$$

где $\mu(\gamma, n_r)$ – вероятность для агента из *Respondents* заключить сделку с выбранным агентом из *Proposers* при условии, что данный агент из *Respondents* выбрал для отклика заданного агента из *Proposers* с вероятностью один, а все остальные $n_r - 1$ агентов из *Respondents* выбирают данного агента из *Proposers* с равновесной вероятностью γ .

Ожидаемая полезность каждого агента из *Respondents* в равновесии имеет вид

$$\mathbf{E}[u_r] = \text{gain}_r \nu(\gamma, n_r) = \frac{|val_r - val_p| \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}{\frac{n_r}{n_p} \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r} + 1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r - 1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}}$$

и может быть ограничена сверху и снизу как:

$$\mathbf{E}[u_r] \in |val_r - val_p| \left(\left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}, \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r - 1} \right).$$

Ожидаемый излишек агентов *Respondents* (*Respondents Surplus, RS*) в равновесии имеет вид

$$\mathbf{E}[RS] = n_r \mathbf{E}[u_r].$$

Ожидаемая полезность каждого агента из *Proposers* в равновесии имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u_p] &= \text{gain}_p n_r \gamma \mu(\gamma, n_r) = \\ &= \frac{|val_r - val_p| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}{\frac{n_r}{n_p} \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r} + 1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}} \end{aligned}$$

и ограничена снизу и сверху как:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u_p] \in |val_r - val_p| &\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}, \right. \\ &\left. \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right) \left(1 + \frac{1}{n_p - 1}\right)\right). \end{aligned}$$

Ожидаемый излишек агентов *Proposers* (*Proposers Surplus, PS*) в равновесии имеет вид

$$\mathbf{E}[PS] = n_p \mathbf{E}[u_p].$$

Ожидаемый совокупный излишек (*Total Surplus, TS*) в равновесии равен

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[TS] &= \mathbf{E}[PS] + \mathbf{E}[RS] = n_p \mathbf{E}[u_p] + n_r \mathbf{E}[u_r] = \\ &= |val_r - val_p| n_r \nu(\gamma, n_r) = |val_r - val_p| n_p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right). \end{aligned}$$

Здесь важно отметить несколько моментов.

Во-первых, использование указанных выше верхней границы ожидаемой полезности агента из *Respondents* вместе с нижней границей ожидаемой полезности агента из *Proposers* дает точное выражение ожидаемого совокупного излишка.

Во-вторых, в допущении того, что аргументы n_p и n_r функции ожидаемого совокупного излишка вещественнозначные, первая производная по каждому из них равна нижней границе функции ожидаемой полезности агентов из *Proposers* и *Respondents* соответственно.

Ожидаемое число заключенных контрактов (*Number of Deals, ND*) в равновесии равно

$$\mathbf{E}[ND] = \frac{1}{|val_r - val_p|} \mathbf{E}[TS].$$

Ожидаемая доля заключенных контрактов от максимально возможного числа (*Share of Deals, SD*) равна

$$\mathbf{E}[SD] = \max\left(\frac{1}{n_p}, \frac{1}{n_r}\right) \mathbf{E}[ND].$$

Доля ожидаемого излишка агентов *Respondents* в ожидаемом совокупном излишке ограничена снизу и сверху как

$$\frac{\mathbf{E}[RS]}{\mathbf{E}[TS]} \in \left(\frac{n_r \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}}{n_p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}, \frac{n_r \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1}}{n_p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)} \right).$$

Равновесная цена контракта может быть представлена как

$$val = var_r + (val_p - val_r) \frac{\mathbf{E}[RS]}{\mathbf{E}[TS]}.$$

Доказательство основано на подстановке равновесной заработной платы в соответствующие выражения и дальнейших алгебраических преобразованиях.

3. Анализ устройства рынка

После того как в предыдущей секции были описаны равновесные характеристики рынка в общем случае, пришло время вернуться к модели с фирмами и сотрудниками и рассмотреть, как размеры рынка влияют на предпочтения сторон относительно его устройства.

3.1. Эффективность рынка и общественные предпочтения

Начнем анализ с одного из ключевых аспектов, а именно с эффективности работы рыночного механизма. В качестве параметров, характеризующих эффективность, могут быть взаимозаменяемо использованы следующие величины: ожидаемое число заключенных в равновесии контрактов, ожидаемая доля заключенных контрактов или ожидаемый совокупный излишек. По отдельности данные величины были описаны в следствии 1. Здесь же в первую очередь интересует разница в указанных величинах в зависимости от устройства рынка.

Определение 1. Функция разности ожидаемого числа заключенных контрактов в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка задается как

$$\begin{aligned} \Delta_{ND}(n_f, n_w) &= \\ &= \mathbf{E}\left[ND \middle| Proposers = Firms\right] - \mathbf{E}\left[ND \middle| Proposers = Workers\right] = \\ &= n_f \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w}\right) - n_w \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f}\right). \end{aligned}$$

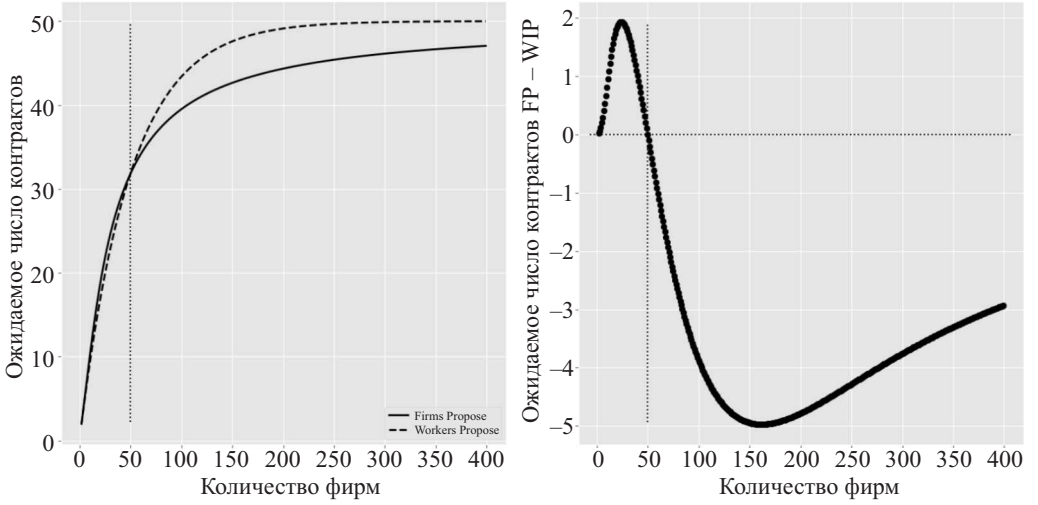


Рис. 1. Ожидаемое число заключенных в равновесии контрактов в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

Определение 2. Функция разности ожидаемой доли заключенных контрактов от максимально возможного числа в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка задается как

$$\begin{aligned}
 \Delta_{SD}(n_f, n_w) &= \\
 &= \mathbf{E} \left[SD \middle| Proposers = Firms \right] - \mathbf{E} \left[SD \middle| Proposers = Workers \right] = \\
 &= \max \left(\frac{1}{n_f}, \frac{1}{n_w} \right) \Delta_{ND}(n_f, n_w).
 \end{aligned}$$

Определение 3. Функция разности ожидаемого совокупного излишка в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка задается как

$$\begin{aligned}
 \Delta_{TS}(n_f, n_w) &= \\
 &= \mathbf{E} \left[TS \middle| Proposers = Firms \right] - \mathbf{E} \left[TS \middle| Proposers = Workers \right] = \\
 &= (wage_{\max} - wage_{\min}) \Delta_{ND}(n_f, n_w).
 \end{aligned}$$

Заметим, что все три обозначенные функции разности имеют один и тот же знак при одинаковом значении своих аргументов. Для наглядности и удобства восприятия обратимся к графической иллюстрации, представленной на рис. 1, а затем сформулируем аналитические свойства указанных функций.

Теорема 2. Рассмотрим функцию $\Delta_{ND}(n_f, n_w)$ разности ожидаемого числа заключенных контрактов в моделях FP и WP. Данная функция обладает следующими свойствами:

- 1) $\Delta_{ND}(n_f, n_w) \geq 0 \iff n_f \leq n_w$, причем $\Delta_{ND}(n_f, n_w) = 0 \iff n_f = n_w$.
- 2) $\Delta_{ND}(n_f; n_w)$ как функция от n_f при фиксированном n_w
 - возрастает на промежутке $[2, \theta_1)$, где $2 < \theta_1 < n_w$, при $n_w \geq 5$ (при $2 \leq n_w \leq 4$ θ_1 считаем равным 2),
 - убывает на промежутке $[\theta_1, \theta_2)$, где $n_w < \theta_2 < \infty$,
 - возрастает на промежутке $[\theta_2, \infty)$.

Приближенное значение точек θ_1 и θ_2 задается как

$$\begin{cases} \theta_1 \simeq \left(\frac{1}{k_2}\right) n_w \simeq 0,4747n_w, \\ \theta_2 \simeq \left(\frac{1}{k_1}\right) n_w \simeq 3,2565n_w, \end{cases}$$

где k_1 и k_2 – меньший и больший положительные корни уравнения

$$(1) \quad 1 - (1 + k) \exp(-k) - \exp\left(-\frac{1}{k}\right) = 0.$$

- 3) В пределе на бесконечности стремится к нулю по каждому из своих аргументов при фиксированном втором аргументе.

Доказательство. Для начала заметим, что

$$\begin{aligned} \Delta_{ND}(n_f = 2; n_w) &= 2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n_w}\right) - n_w \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^2\right) = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n_w}}\right) - n_w \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n_w} + \frac{1}{n_w^2}\right)\right) = \\ &= 2 - \frac{1}{2^{n_w-1}} - n_w \left(\frac{2}{n_w} - \frac{1}{n_w^2}\right) = \\ &= 2 - \frac{1}{2^{n_w-1}} - 2 + \frac{1}{n_w} = \frac{1}{n_w} - \frac{1}{2^{n_w-1}} > 0, \quad \forall n_w \geq 3 \end{aligned}$$

в силу того, что показательная функция растет быстрее, чем линейная. Также отметим, что $\Delta_{ND}(n_w; n_w) = 0$ в силу симметрии.

Расширим определение $\Delta_{ND}(n_f; n_w)$ как функции от вещественного аргумента n_f при заданном параметре n_w .

Первая производная имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta'_{ND}(n_f; n_w) &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w} - \frac{n_w}{n_f} \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w-1} + \\ &+ n_w \ln \left(1 - \frac{1}{n_w}\right) \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f}. \end{aligned}$$

Воспользуемся следующими приближениями:

$$\ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) \simeq -\frac{1}{a},$$

$$\left(1 - \frac{1}{a} \right)^b \simeq \exp \left(-\frac{b}{a} \right)$$

и перепишем выражение для первой производной в упрощенном виде:

$$\Delta'_{ND}(n_f; n_w) \simeq 1 - \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w} - \frac{n_w}{n_f} \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w-1} - \left(1 - \frac{1}{n_w} \right)^{n_f},$$

$$\Delta'_{ND}(n_f; n_w) \simeq 1 - \exp \left(-\frac{n_w-1}{n_f} \right) \left(1 + \frac{n_w-1}{n_f} \right) - \exp \left(-\frac{n_f}{n_w} \right).$$

С поправкой на приближение $\frac{n_w-1}{n_f} \simeq \frac{n_w}{n_f}$ введем замену $\frac{n_w}{n_f} = k > 0$.

$$\Delta'_{ND}(n_f; n_w) \simeq 1 - (1+k) \exp(-k) - \exp\left(-\frac{1}{k}\right).$$

Условия первого порядка, задающие точки экстремума функции $\Delta_{ND}(n_f; n_w)$, имеют вид

$$\Delta'_{ND}(n_f; n_w) = 0 \iff 1 - (1+k) \exp(-k) - \exp\left(-\frac{1}{k}\right) = 0.$$

Указанное уравнение имеет ровно два решения, удовлетворяющих условию $k > 0$ (WolframAlpha):

$$\begin{cases} k_1^* \simeq 0,307074, \\ k_2^* \simeq 2,106541. \end{cases}$$

Таким образом, точки экстремума как функции от параметра n_w имеют вид

$$\begin{cases} n_{f1}^* \simeq 3,25654n_w, \\ n_{f2}^* \simeq 0,47471n_w. \end{cases}$$

Отметим, что в рамках численного анализа удалось установить, что поправка $n_{f1}^* \simeq 3,25654n_w - 1$ дает чуть лучшее приближение к минимуму при рассмотрении Δ_{ND} как функции целочисленного аргумента. Однако для согласованности в основном тексте будет использоваться нескорректированная версия.

Вторая производная имеет вид

$$\Delta''_{ND}(n_f; n_w) = -\frac{n_w(n_w-1)}{n_f^3} \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w-2} + n_w \ln^2 \left(1 - \frac{1}{n_w} \right) \left(1 - \frac{1}{n_w} \right)^{n_f}.$$

Преобразовав ее с использованием приближения для логарифма и затем сравнив с нулем, получаем:

$$\Delta''_{ND}(n_f; n_w) < 0 \iff \frac{1}{n_w} \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f} < \frac{n_w(n_w - 1)}{n_f^3} \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w - 2},$$

$$\Delta''_{ND}(n_f; n_w) < 0 \iff \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w - 2} \frac{1}{n_f^3} > \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f - 1} \frac{1}{n_w^3}.$$

Взяв натуральный логарифм от обеих частей, еще раз использовав приближение и проведя арифметические упрощения получаем:

$$\Delta''_{ND}(n_f; n_w) < 0 \iff 3 \ln(n_f) + \frac{n_w - 2}{n_f} - \frac{n_f - 1}{n_w} - 3 \ln(n_w) < 0.$$

Подставляя параметризованное выражение для точек экстремума в неравенство с нулем второй производной получаем следующее:

$$\Delta''_{ND}(n_{f_2}^*(n_w); n_w) < 0 \iff 3 \ln(0,475n_w) + \frac{n_w - 2}{0,475n_w} - \frac{0,475n_w - 1}{n_w} - 3 \ln(n_w) < 0,$$

$$\Delta''_{ND}(n_{f_2}^*(n_w); n_w) < 0 \iff -0,6034 - \frac{-1,5253}{n_w} - \frac{-2,1065}{n_w - 1} < 0 \quad \forall n_w \geq 2.$$

Таким образом, точка $n_{f_2}^*$ является точкой максимума.

Проделав аналогичное упражнение для точки $n_{f_1}^*$, получаем

$$\Delta''_{ND}(n_{f_1}^*(n_w); n_w) > 0 \iff 3 \ln(3,2565n_w) + \frac{n_w - 2}{3,2565n_w} - \frac{3,2565n_w - 1}{n_w} - 3 \ln(n_w) < 0,$$

$$\Delta''_{ND}(n_{f_1}^*(n_w); n_w) > 0 \iff 7,1056 > \frac{7,2565}{n_w} + \frac{0,3071}{n_w - 1} \quad \forall n_w \geq 2.$$

Таким образом, точка $n_{f_1}^*$ является точкой минимума.

Заметим, что

$$\begin{cases} n_{f_1}^* \simeq 3,25654n_w > n_w, \\ n_{f_2}^* \simeq 0,47471n_w < n_w, \end{cases}$$

$\forall n_w \geq 2$, т.е. максимум функции $\Delta_{ND}(n_f, n_w)$ расположен слева от точки n_w , а минимум – справа от нее.

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение.

$$\begin{aligned}\lim_{n_f \rightarrow \infty} \Delta_{ND}(n_f, n_w) &= \lim_{n_f \rightarrow \infty} n_f \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w} \right) - \\ &\quad - \lim_{n_f \rightarrow \infty} n_w \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_w} \right)^{n_f} \right) = 0, \\ \lim_{n_f \rightarrow \infty} n_w \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_w} \right)^{n_f} \right) &= n_w, \\ \lim_{n_f \rightarrow \infty} n_f \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w} \right) &= n_w.\end{aligned}$$

В заключение следует отметить несколько моментов.

Во-первых, поскольку оригинальный аргумент n_f функции $\Delta_{ND}(n_w; n_w)$ является целочисленным, а не вещественным, то найденные точки минимума / максимума нуждаются в поправке на ближайшее целое число с наименьшим / наибольшим значением функции Δ_{ND} .

Во-вторых, несмотря на то, что в формулировке теоремы и ее доказательстве использовались приближения, проведенный численный анализ показывает, что разность между истинным максимумом / минимумом при целочисленном значении аргумента n_f и приближенным значением округления до целого не превышает 1 при любых значениях n_w .

Теорема доказана.

Следствие 2. Функция $\Delta_{TS}(n_f, n_w)$ разности ожидаемого совокупного излишка в моделях FP и WP обладает теми же свойствами, описанными в теореме 2, что и функция разности ожидаемого числа заключенных контрактов $\Delta_{ND}(n_f, n_w)$.

Доказательство. По определению

$$\Delta_{TS}(n_f, n_w) = (wage_{\max} - wage_{\min}) \Delta_{ND}(n_f, n_w).$$

Таким образом, относительно свойств в рамках теоремы 2 рассматриваемые функции эквиваленты как равные с точностью до умножения на положительную константу.

Следствие 3. Функция $\Delta_{SD}(n_f, n_w)$ разности ожидаемой доли заключенных контрактов от максимально возможного числа в моделях FP и WP обладает такими же свойствами, описанными в теореме 2, как и функция разности ожидаемого числа заключенных контрактов, с поправкой на координату точки максимума λ_1 . Приближенное значение точки λ_1 задается как

$$\lambda_1 \simeq k_1 n_w \simeq 0,3071 n_w,$$

где k_1 – меньший из двух положительных корней уравнения 1.

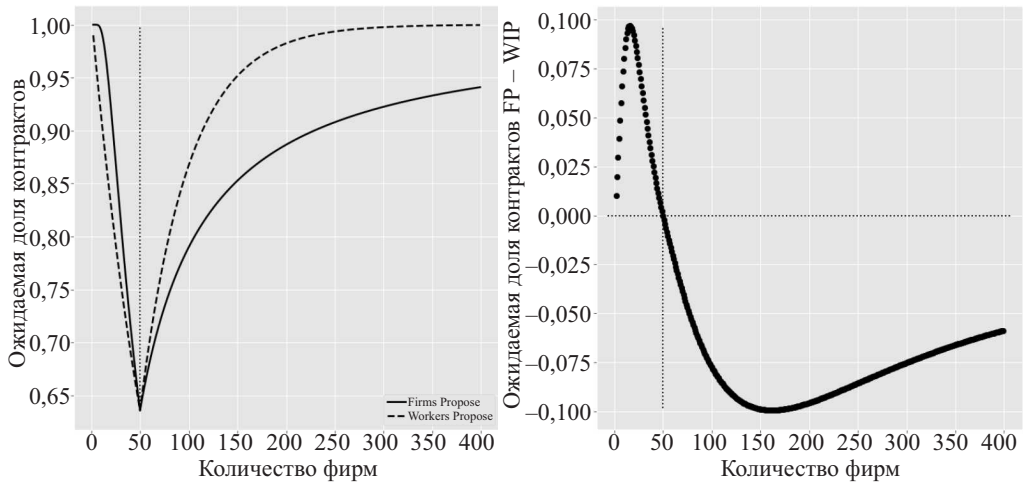


Рис. 2. Ожидаемая доля заключенных в равновесии контрактов в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

Доказательство. В случае $n_f \geq n_w$ по определению функции $\Delta_{SD}(n_f, n_w)$ имеем:

$$\Delta_{SD}(n_f, n_w) = \frac{1}{n_w} \Delta_{ND}(n_f, n_w),$$

т.е. умножение на $\frac{1}{n_w}$ не оказывает влияние ни на нули функции Δ_{ND} , ни на ее поведение как функции от аргумента n_f при фиксированном n_w .

В случае $n_f < n_w$ доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.

На основе обсуждения выше можно сформулировать следующее.

Утверждение 1. С точки зрения общественного благосостояния / рыночной эффективности, измеряемых любым из способов, заданных определениями 1, 2, 3, предпочтительнее, чтобы условия контрактов на первом этапе публиковала сторона, численность которой на рынке меньше.

В то же время, если говорить не только о бинарной относительной эффективности в двух случаях (FP и WP) при фиксированных размерах рынка, но задаться вопросом, насколько относительное превосходство одного дизайнера над другим меняется при изменении размеров рынка, то корректнее перейти к рассмотрению относительных величин, таких как ожидаемая доля сделок в равновесии, графическая иллюстрация которой представлена на рис. 2.

Заметим, что размеры рынка $n_f = n_w$ являются наименее эффективными с точки зрения ожидаемой доли заключенных контрактов в обеих моделях (FP и WP), при этом в силу этой чрезвычайной неэффективности общество не может получить выгоду за счет смены дизайнера рынка. В то же время для любого иного размера рынка один из дизайнеров является строго предпочтительным с общественной точки зрения. При этом следует отметить, что в случае коррелированного равновесия рынок с равным числом агентов на

каждой из сторон является наиболее эффективным, так как обеспечивает не только 100% долю заключенных контрактов, но и отсутствие агентов без контракта на каждой из сторон рынка.

Данная ситуация похожа на использование метрики ROC-AUC (Area Under the Receiver Operating Characteristic Curve) при оценке качества моделей машинного обучения в задаче бинарной классификации: модель, имеющая ROC-AUC, равный 0,5, является наихудшим возможным вариантом, так как соответствует случайному угадыванию и не подлежит улучшению. При этом модель, имеющая очень маленький ROC-AUC, равный 0,01, что соответствует перевернутому ранжированию классов, может быть существенно улучшена до ROC-AUC, равного $(1 - 0,01)$, простой перемены меток классов.

Перейдем к рассмотрению вопроса о достижимых масштабах прироста в эффективности рынка за счет смены его дизайна.

Следствие 4. Наибольшее и наименьшее значения функции $\Delta_{SD}(n_f; n_w)$ разности ожидаемой доли заключенных контрактов от максимально возможного числа в моделях FP и WP как функции от n_f при фиксированном n_w приблизительно равны по абсолютной величине

$$\begin{aligned}\Delta_{SD}(k_1 n_w; n_w) &\simeq -\Delta_{SD}\left(\frac{n_w}{k_1}; n_w\right) \simeq \\ &\simeq 1 - \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1} \exp(-k_1) - \exp\left(-\frac{1}{k_1}\right) \simeq 10,04\%\end{aligned}$$

и достигаются в точках

$$\begin{cases} \lambda_1 \simeq k_1 n_w \simeq 0,3071 n_w, \\ \theta_2 \simeq \left(\frac{1}{k_1}\right) n_w \simeq 3,2565 n_w, \end{cases}$$

где k_1 – меньший из двух положительных корней уравнения 1.

Таким образом, при определенных размерах рынка прирост в эффективности исключительно за счет смены дизайна может превышать 10% в ожидаемой доле заключенных контрактов.

Замечание 1. Важно отметить, что в силу используемых аппроксимаций приблизительное наибольшее и наименьшее значения функции $\Delta_{SD}(n_f; n_w)$ не зависят от параметра n_w . Истинные наибольшее и наименьшее значения не обладают этим свойством. При этом абсолютное расхождение не превышает 0,4% для $n_w \geq 50$ и падает с дальнейшим ростом n_w .

3.2. Предпочтения фирм

Рассмотрим теперь, каковы предпочтения фирм относительно устройства рынка в зависимости от его размера. Анализируемыми характеристиками являются ожидаемая полезность отдельной фирмы и ожидаемый совокупный излишек всех фирм, а также зависимость указанных величин от дизайна рыночного механизма.

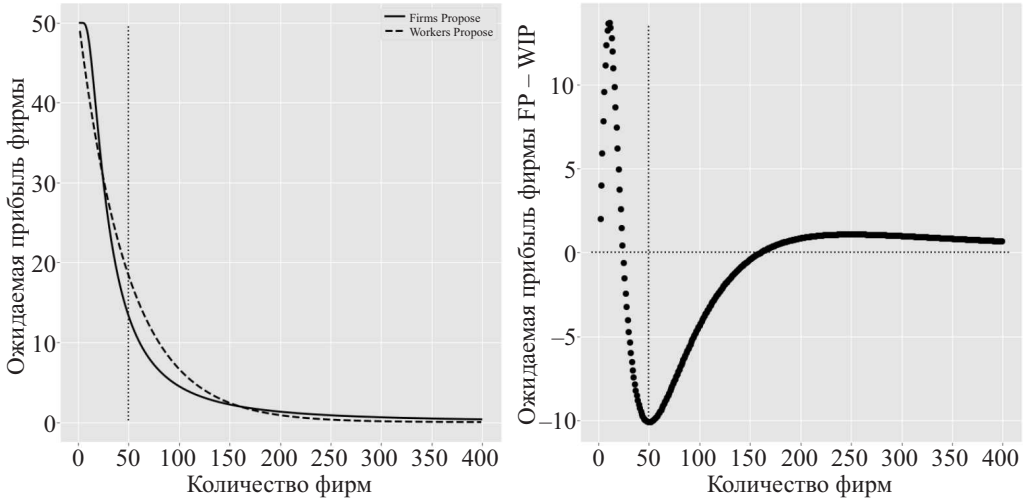


Рис. 3. Ожидаемая прибыль фирм в равновесии в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

Определение 4. Функция разности ожидаемой прибыли фирмы в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как

$$\begin{aligned} \Delta_{u_F}(n_f, n_w) &= \mathbf{E} \left[u_p \middle| Proposers = Firms \right] - \mathbf{E} \left[u_r \middle| Proposers = Workers \right] \simeq \\ &\simeq \Delta wage \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w-1} \frac{n_w}{n_f} - \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w} - \left(1 - \frac{1}{n_w} \right)^{n_f} \right). \end{aligned}$$

Замечание 2. В модели FP фирмы выполняют роль *Proposers*, а в модели WP – *Respondents*, поэтому для получения точной функции разности необходимо взять соответствующие величины из следствия 1. При этом полноценный анализ точной функции не представляется возможным, в связи с чем и было использовано указанное приближение, лежащее между нижней и верхней границами точной функции, полученными с использованием соответствующих границ из следствия 1.

Определение 5. Функция разности ожидаемого излишка фирм в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как

$$\begin{aligned} \Delta_{FS}(n_f, n_w) &= \mathbf{E} \left[PS \middle| Proposers = Firms \right] - \mathbf{E} \left[RS \middle| Proposers = Workers \right] = \\ &= n_f \Delta_{u_F}(n_f, n_w). \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация в частном случае представлена на рис. 3 для ожидаемой прибыли фирм и на рис. 4 для ожидаемого излишка фирм. Сформулируем теперь аналитические свойства указанных функций.

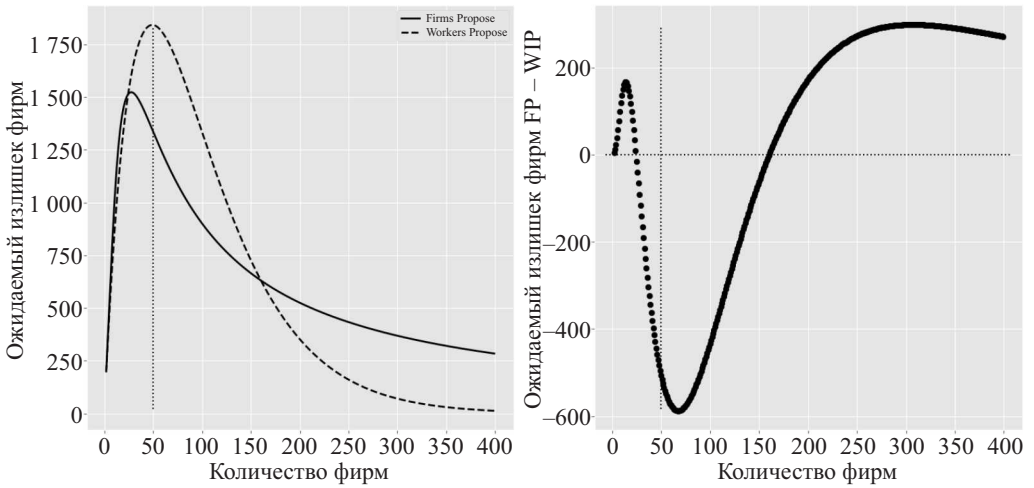


Рис. 4. Ожидаемый излишек фирм в равновесии в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

Теорема 3. Рассмотрим функцию $\Delta_{u_F}(n_f, n_w)$ разности ожидаемой прибыли фирмы в моделях FP и WP. Данная функция обладает следующими свойствами.

1) $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ как функция от n_f при фиксированном n_w имеет ровно два нуля θ_1 и θ_2 , приближенное значение которых задается как

$$\begin{cases} \theta_1 \simeq \left(\frac{1}{k_2}\right) n_w \simeq 0,4747n_w, \\ \theta_2 \simeq \left(\frac{1}{k_1}\right) n_w \simeq 3,2565n_w, \end{cases}$$

где k_1 и k_2 – меньший и больший положительные корни уравнения 1. При этом

$$\begin{cases} \Delta_{u_F}(n_f; n_w) > 0 \iff n_f < \theta_1 \vee n_f > \theta_2, \\ \Delta_{u_F}(n_f; n_w) < 0 \iff \theta_1 < n_f < \theta_2. \end{cases}$$

- 2) $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ как функция от n_f при фиксированном n_w
- возрастает на промежутке $[2, \xi_1)$, где $2 < \xi_1 < \theta_1$, при $n_w \geq 9$ (при $2 \leq n_w \leq 8$ ξ_1 считаем равным 2),
 - убывает на промежутке $[\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_2 = n_w$,
 - возрастает на промежутке $[\xi_2, \xi_3)$, где $\theta_2 < \xi_3 < \infty$,
 - убывает на промежутке $[\xi_3, \infty)$.

Приближенное значение точек ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 задается как

$$\begin{cases} \xi_1 \simeq p_1 n_w \simeq 0,1975n_w, \\ \xi_2 = p_2 n_w = n_w, \\ \xi_3 \simeq p_3 n_w \simeq 5,0639n_w, \end{cases}$$

где p_1 , p_2 и p_3 – корни уравнения

$$(2) \quad 3 \ln(p) + \frac{1}{p} - p = 0$$

в порядке возрастания. Отметим, что $p_1 = \frac{1}{p_3}$.

3) В пределе на бесконечности стремится к нулю по каждому из своих аргументов при фиксированном втором аргументе.

Доказательство. Расширим определение $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ как функции от вещественного аргумента n_f при заданном параметре n_w .

Доказательство первой части настоящей теоремы покрывается доказательством теоремы 2, так как данное в определении 4 приближение функции $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ в точности равно приближению первой производной функции $\Delta_{ND}(n_f, n_w)$, используемому в доказательстве теоремы 2, а следовательно, нули первой производной функции $\Delta_{ND}(n_f; n_w)$ и нули функции $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ совпадают.

С поправкой на приближения первая производная функции $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ равна второй производной функции $\Delta_{ND}(n_f, n_w)$, выражение на нули которой уже было расписано в доказательстве теоремы 2.

$$\Delta'_{u_F}(n_f; n_w) = 0 \iff 3 \ln\left(\frac{n_f}{n_w}\right) + \frac{n_w}{n_f} - \frac{n_f}{n_w} - \frac{2}{n_f} + \frac{1}{n_w} = 0.$$

В рамках приближения отбросив член $-\frac{2}{n_f} + \frac{1}{n_w}$ и сделав замену $\frac{n_f}{n_w} = p$, получаем уравнение

$$\Delta'_{u_F}(n_f; n_w) = 0 \iff 3 \ln(p) + \frac{1}{p} - p = 0.$$

Отметим, что $p = 1$ – корень. Заметим также, что если некоторое p^* является корнем, то и $\frac{1}{p^*}$ является корнем. Приближенное значение отличного от единицы корня (WolframAlpha) равно 0,1975. Воспользовавшись методом интервалов, можно показать, что ξ_1 и ξ_3 являются точками максимума, а ξ_2 – точкой минимума.

Теорема доказана.

Следствие 5. Функция $\Delta_{FS}(n_f, n_w)$ разности ожидаемого излишка фирм в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка обладает такими же свойствами, описанными в теореме 3, как и функция $\Delta_{u_F}(n_f, n_w)$ разности ожидаемой прибыли фирмы, с поправкой на координаты точек экстремума ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 . Приближенное значение точек экстремума задается как

$$\begin{cases} \phi_1 \simeq \left(\frac{1}{r_3}\right) n_w \simeq \frac{1}{3,7779} n_w \simeq 0,2647 n_w, \\ \phi_2 \simeq \left(\frac{1}{r_2}\right) n_w \simeq \frac{1}{0,7388} n_w \simeq 1,3536 n_w, \\ \phi_3 \simeq \left(\frac{1}{r_1}\right) n_w \simeq \frac{1}{0,1608} n_w \simeq 6,2189 n_w, \end{cases}$$

где r_1 , r_2 и r_3 – корни уравнения

$$1 - (1 + r + r^2) \exp(-r) - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \exp\left(-\frac{1}{r}\right) = 0$$

в порядке возрастания.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Экономическая интерпретация полученных выше результатов может быть сформулирована следующим образом.

Утверждение 2. На рынке, размеры сторон которого не сильно отличаются друг от друга:

$$\frac{1}{k_2} \simeq 0,4747 \leq \frac{n_f}{n_w} \leq \frac{1}{k_1} \simeq 3,2565,$$

фирмы предпочитают занять сторону *Respondents*, отдавая обязанность изначально предлагать условия контрактов сотрудникам; при этом если размеры сторон рынка отличаются значительно в любом направлении, с точки зрения фирм предпочтительнее уже самим занять сторону *Proposers*.

3.3. Предпочтения сотрудников

Перейдем теперь к анализу предпочтений сотрудников относительно устройства рынка. В этом плане интерес представляют ожидаемая полезность отдельного сотрудника и ожидаемый совокупный излишек всех сотрудников, но, главное, разница в указанных величинах в зависимости от устройства рынка.

Определение 6. Функция разности ожидаемой полезности сотрудников в моделях *FP* и *WP* в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как

$$\begin{aligned} \Delta_{u_W}(n_f, n_w) &= \mathbf{E} \left[u_r \middle| Proposers = Firms \right] - \mathbf{E} \left[u_p \middle| Proposers = Workers \right] \simeq \\ &\simeq \Delta_{wage} \left(\left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w} + \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f-1} \frac{n_f}{n_w} + \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f} - 1 \right). \end{aligned}$$

Определение 7. Функция разности ожидаемого излишка сотрудников в моделях *FP* и *WP* в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как

$$\begin{aligned} \Delta_{WS}(n_f, n_w) &= \mathbf{E} \left[RS \middle| Proposers = Firms \right] - \mathbf{E} \left[PS \middle| Proposers = Workers \right] \simeq \\ &\simeq n_w \Delta_{u_W}(n_f, n_w). \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация в частном случае представлена на рис. 5. Введенные функции обладают следующими аналитическими свойствами.

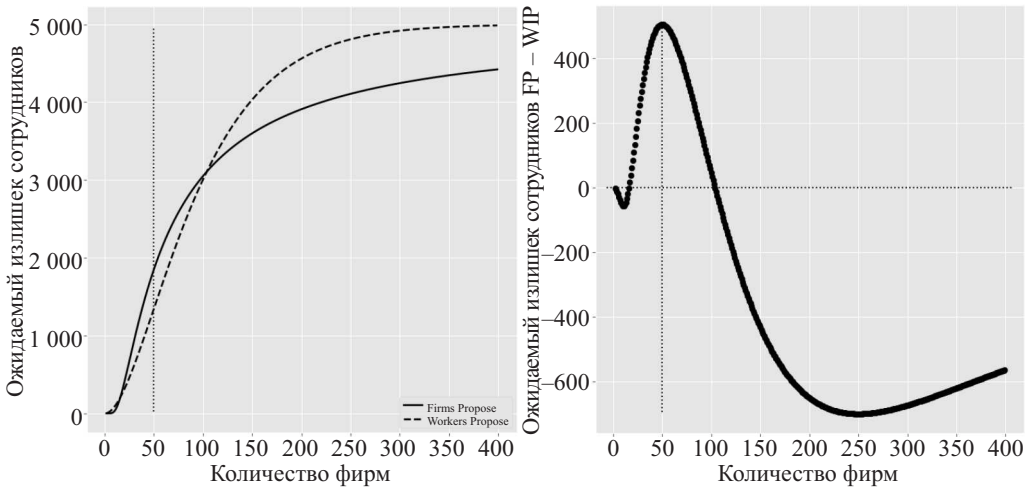


Рис. 5. Ожидаемый излишек сотрудников в равновесии в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

Теорема 4. Рассмотрим функцию $\Delta_{uW}(n_f, n_w)$ разности ожидаемой полезности сотрудников в моделях FP и WP. Данная функция обладает следующими свойствами.

1) $\Delta_{uW}(n_f; n_w)$ как функция от n_f при фиксированном n_w имеет ровно два нуля λ_1 и λ_2 , приближенное значение которых задается как

$$\begin{cases} \lambda_1 \simeq k_1 n_w \simeq 0,3071 n_w, \\ \lambda_2 \simeq k_2 n_w \simeq 2,1065 n_w, \end{cases}$$

где k_1 и k_2 – меньший и больший положительные корни уравнения 1. При этом

$$\begin{cases} \Delta_{uW}(n_f; n_w) < 0 \iff n_f < \lambda_1 \vee n_f > \lambda_2, \\ \Delta_{uW}(n_f; n_w) > 0 \iff \lambda_1 < n_f < \lambda_2. \end{cases}$$

2) $\Delta_{uW}(n_f; n_w)$ как функция от n_f при фиксированном n_w

- убывает на промежутке $[2, \xi_1)$, где $2 < \xi_1 < \lambda_1$, при $n_w \geq 9$ (при $2 \leq n_w \leq 8$ ξ_1 считаем равным 2),
- возрастает на промежутке $[\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_2 = n_w$,
- убывает на промежутке $[\xi_2, \xi_3)$, где $\lambda_2 < \xi_3 < \infty$,
- возрастает на промежутке $[\xi_3, \infty)$.

Приближенное значение точек ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 задается как

$$\begin{cases} \xi_1 \simeq p_1 n_w \simeq 0,1975 n_w, \\ \xi_2 = p_2 n_w = n_w, \\ \xi_3 \simeq p_3 n_w \simeq 5,0639 n_w, \end{cases}$$

где p_1 , p_2 и p_3 – корни уравнения 2 в порядке возрастания.

3) В пределе на бесконечности стремится к нулю по каждому из своих аргументов при фиксированном втором аргументе.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Следствие 6. Функция $\Delta_{WS}(n_f, n_w)$ разности ожидаемого излишка сотрудников в моделях *FP* и *WP* обладает теми же свойствами, описанными в теореме 4, что и функция разности полезности сотрудников $\Delta_{uW}(n_f, n_w)$.

Полученные результаты могут быть проинтерпретированы с экономической точки зрения следующим образом.

Утверждение 3. На рынке, размеры сторон которого не сильно отличаются друг от друга:

$$k_1 \simeq 0,3071 \leq \frac{n_f}{n_w} \leq k_2 \simeq 2,1065,$$

сотрудники предпочитают занять сторону *Respondents*, отдавая обязанность изначально предлагать условия контрактов фирмам; при этом если размеры сторон рынка отличаются значительно в любом направлении, с точки зрения сотрудников предпочтительнее уже самим занять сторону *Proposers*.

3.4. Рыночная власть и равновесная зарплата

Еще одной важной перспективой, показывающей сравнительное преимущество фирм над сотрудниками (или наоборот) и демонстрирующей рыночную власть, является ожидаемая доля излишка одной из сторон в ожидаемом совокупном излишке. Чем выше эта доля, тем более выгодное положение занимает одна сторона рынка по сравнению со второй. При этом необходимо отметить, что речь в данном случае идет лишь о разделе «пирога», но не о его абсолютной величине.

Следует заметить, что экономический смысл степени рыночной власти лежит в природе равновесной рыночной цены. Как было показано в следствии 1, заработная плата в равновесии, являясь взвешенным $wage_{\min}$ и $wage_{\max}$, выражена как линейная строго монотонная функция от доли ожидаемого излишка одной из сторон в ожидаемом совокупном излишке. В целях удобства без потери общности анализ будет приведен далее для нормированной версии.

Определение 8. Функция разности доли ожидаемого излишка сотрудников в ожидаемом совокупном излишке в моделях *FP* и *WP* в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f, n_w) &\simeq \\ &\simeq \frac{\mathbf{E} \left[RS \middle| Proposers = Firms \right]}{\mathbf{E} \left[TS \middle| Proposers = Firms \right]} - \frac{\mathbf{E} \left[PS \middle| Proposers = Workers \right]}{\mathbf{E} \left[TS \middle| Proposers = Workers \right]} \simeq \\ &\simeq \frac{n_w \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w}}{n_f \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_f} \right)^{n_w} \right)} + \frac{n_f \left(1 - \frac{1}{n_w} \right)^{n_f}}{n_w \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_w} \right)^{n_f} \right)} - 1. \end{aligned}$$

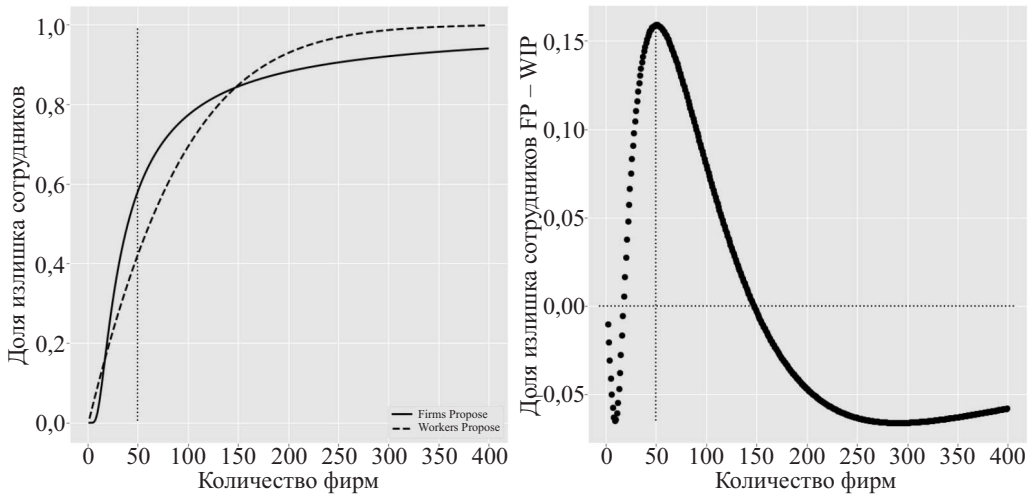


Рис. 6. Доля ожидаемого излишка сотрудников в ожидаемом совокупном излишке в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

С использованием еще одного приближения она может быть выражена как

$$\Delta_{\frac{WS}{TS}}(x) \simeq \frac{1}{x} \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)} \right) + x \left(\frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-x)} \right) - 1,$$

где $x = \frac{n_f}{n_w}$.

На рис. 6 представлена графическая иллюстрация обсуждаемой функции в частном случае. Введенная функция обладает следующими аналитическими свойствами.

Теорема 5. Рассмотрим функцию $\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f, n_w)$ разности доли ожидаемого излишка сотрудников в ожидаемом совокупном излишке в моделях FP и WP. Данная функция обладает следующими свойствами.

1) $\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w)$ как функция от n_f при фиксированном n_w имеет ровно два нуля α_1 и α_2 , приближенное значение которых задается как

$$\begin{cases} \alpha_1 \simeq s_1 n_w \simeq 0,3337 n_w, \\ \alpha_2 \simeq s_2 n_w \simeq 2,9963 n_w, \end{cases}$$

где s_1 и s_2 – меньший и больший положительные корни уравнения

$$\frac{1}{s} \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{s}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{s}\right)} \right) + s \left(\frac{\exp(-s)}{1 - \exp(-s)} \right) - 1 = 0.$$

При этом

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w) < 0 \iff n_f < \alpha_1 \vee n_f > \alpha_2, \\ \Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w) > 0 \iff \alpha_1 < n_f < \alpha_2. \end{cases}$$

- 2) $\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w)$ как функция от n_f при фиксированном n_w
- убывает на промежутке $[2, \omega_1)$, где $2 < \omega_1 < \alpha_1$, при $n_w \geq 11$ (при $2 \leq n_w \leq 10$ ω_1 считаем равным 2),
 - возрастает на промежутке $[\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_2 = n_w$,
 - убывает на промежутке $[\omega_2, \omega_3)$, где $\alpha_2 < \omega_3 < \infty$,
 - возрастает на промежутке $[\omega_3, \infty)$.

Приближенное значение точек ω_1 , ω_2 и ω_3 задается как

$$\begin{cases} \omega_1 \simeq t_1 n_w \simeq 0,1697 n_w, \\ \omega_2 = t_2 n_w = n_w, \\ \omega_3 \simeq t_3 n_w \simeq 5,8925 n_w, \end{cases}$$

где t_1 , t_2 и t_3 – положительные корни уравнения

$$\frac{t + \exp\left(-\frac{1}{t}\right) - t \exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{\left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right) - 1\right)^2 t^3} + \frac{1 - t}{\exp(t) - 1} - \frac{t}{(\exp(t) - 1)^2} = 0$$

в порядке возрастания.

3) В пределе на бесконечности стремится к нулю по каждому из своих аргументов при фиксированном втором аргументе.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 3. В силу того, что сумма долей ожидаемого излишка сотрудников и фирм в ожидаемом совокупном излишке равна 1, функция разности доли ожидаемого излишка фирм равна $1 - \Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f, n_w)$, имеет соответствующие свойства, а ее график является отражением графика функции $\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w)$ относительно оси абсцисс.

Полученные результаты могут быть проинтерпретированы с экономической точки зрения следующим образом.

Утверждение 4. На рынке, размеры сторон которого не сильно отличаются друг от друга:

$$s_1 \simeq 0,3337 \leq \frac{n_f}{n_w} \leq s_2 \simeq 2,9963,$$

сотрудники с точки зрения максимизации своей доли в ожидаемом совокупном излишке предпочитают занять сторону Respondents, отдавая обязанность изначально предлагать условия контрактов фирмам; при этом если размеры сторон рынка отличаются значительно в любом направлении, с точки зрения максимизации своей доли сотрудникам предпочтительнее уже самим занять сторону Proposers.

Предпочтения фирм с точки зрения максимизации своей доли в ожидаемом совокупном излишке при этом прямо противоположны.

Замечание 4. Важно отметить ключевое различие между утверждениями 3 и 4. В утверждении 3 сотрудники заботятся о максимизации своей полезности / излишка в денежном выражении. В случае же утверждения 4 сотрудники при выборе дизайна и фиксированных размерах рынка максимизируют свою долю в ожидаемом совокупном излишке. Следствием различных границ для этих двух целей, при которых происходит изменение предпочтений относительно дизайна рынка, является возникновение областей размеров рынка, в которых эти цели вступают в конфликт между собой.

3.5. Сравнительный анализ предпочтений сторон

После того как были рассмотрены предпочтения каждой из сторон рынка (сотрудников, фирм и общества в целом и в отдельности), пришло время свести результаты проведенного анализа воедино.

На рис. 7 представлен в графическом виде результат объединения утверждений 1–4 о предпочтениях сторон рынка. На его основе можно сделать следующие выводы.

Во-первых, если рассматривать предпочтения сторон исключительно в денежном выражении, ось $\frac{n_f}{n_w}$ разбивается на 6 интервалов. На двух из них, а именно $\frac{n_f}{n_w} \in (0,3071, 0,4747)$ и $\frac{n_f}{n_w} \in (2,1065, 3,2565)$, предпочтения всех сторон совпадают, на остальных – вступают в противоречие.

Во-вторых, если добавить в рассмотрение предпочтения сторон в отношении максимизации собственной доли в общем излишке, возникает важный эффект. При $\frac{n_f}{n_w} \in (0,3071, 0,3337)$ с позиции максимизации денежной величины для общества, фирм и сотрудников выгоднее, чтобы роль *Proposers* заняли фирмы. При этом с позиции максимизации доли в совокупном излишке сотрудникам выгоднее самим стать предлагающей стороной. То есть возможна ситуация, в которой стремление одной из сторон к максимизации своего «куска пирога» ударит по денежным интересам всех участников рынка, включая эту сторону. Для фирм аналогичный эффект наблюдается при $\frac{n_f}{n_w} \in (2,9963, 3,2565)$.

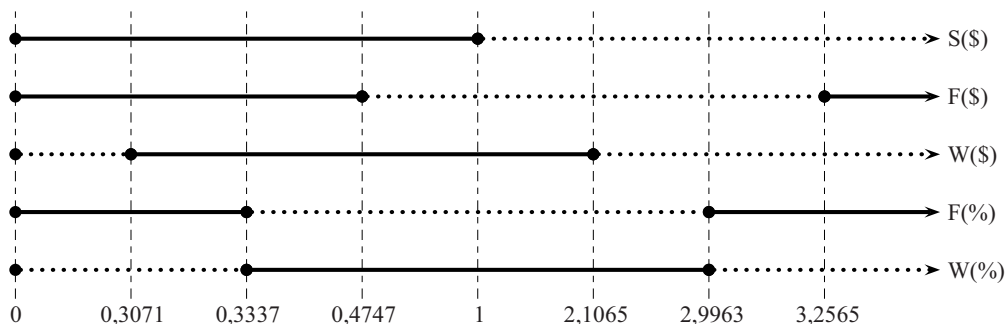


Рис. 7. Предпочтения сторон рынка относительно его дизайна при различном отношении сторон $\frac{n_f}{n_w}$. (Непрерывная линия соответствует предпочтению фирм на роль предлагающей стороны, пунктирная – предпочтению сотрудников.)

4. Заключение

В рамках проведенного анализа описана структура предпочтений различных сторон рынка относительно его устройства в зависимости от его размеров. Было продемонстрировано, что анализируемая структура неоднородна: при различном отношении числа фирм к числу сотрудников предпочтения сторон могут несколько раз изменяться на противоположные, в некоторых случаях совпадая между собой. Наиболее чувствительным к смене дизайна является отношение сторон рынка $\frac{n_f}{n_w} \simeq 0,3071$ и $\frac{n_f}{n_w} \simeq \frac{1}{0,3071}$, при котором прирост в ожидаемой доле заключенных контрактов может превышать 10%. Еще одним полученным результатом стала демонстрация неоднородности выбора целевой переменной при определении предпочтений сторон: было показано, что одна из сторон рынка в результате смены его дизайна может потерять в своей относительной доле в совокупном излишке, но при этом выиграть в денежном выражении за счет роста совокупного излишка в результате более эффективной координации агентов на рынке.

Все полученные результаты демонстрируют важность дизайна рынка как ключевого элемента рыночной структуры и могут быть использованы, например, на различных онлайн-платформах при решении задачи максимизации ее целевой переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burdett K., Shi S., Wright R.* Pricing and matching with frictions // *Journal of Political Economy*. 2001. V. 109. No. 5. P. 1060–1085.
2. *Wright R., Kircher P., Julien B., et al.* Directed search and competitive search equilibrium: A guided tour // *J. Econ. Lit.* 2021. V. 59. No. 1. P. 90–148.
3. *Sandomirskaja M., Shavshin R.* Pricing, Market Power, and Friction in a Finite Market: The Role of Capacities // *Higher School Econom. Res. Paper*. 2024. V. 267. 36 p.
4. *Gale D., Shapley L.* College admissions and the stability of marriage // *The American mathematical monthly*. 1962. V. 69. No. 1. P. 9–15.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 28.04.2025

После доработки 08.10.2025

Принята к публикации 11.10.2025

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2026 г. А.А. ГАЛЯЕВ, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru),
Л.М. БЕРЛИН (berlin.lm@phystech.edu),
П.В. ЛЫСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (pavellysen@ipu.ru),
В.Г. БАБИКОВ, канд. физ.-мат. наук (babikov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА¹

Статья развивает тематику предыдущих работ авторов. В ней исследуется последовательность задач и этапов их решения, которые формируют подход к решению проблемы обнаружения сигнала в шуме, в том числе при малом отношении сигнал/помеха. Формулируется последовательность математических постановок, требующих решения. Используются аналитические конструкции для получения тестовых статистик, статистик наблюдений и решающих правил в случае близости двух гипотез на основе частотных, временных и частотно-временных распределений. Устанавливается возможность повышения отношения сигнал/помеха при различении двух гипотез для d -сигналов. Теоретические результаты установлены доказательством соответствующих лемм.

Ключевые слова: критерии обнаружения, обработка сигналов, преобразование Фурье, обнаружение сигналов в шуме.

DOI: 10.7868/S2413977726030073

1. Введение

Задача обнаружения детерминированного сигнала при наличии шума среды на первый взгляд является задачей бинарной классификации. Но чем глубже исследователь погружается в формализацию задачи, тем больше возникает вопросов о том, какой информацией о свойствах сигнала и шума он обладает и как правильно понимать решение этой задачи. В общем случае задача обнаружения представляет собой бинарную классификацию, для которой требуется сформировать правило принятия решения о наличии или отсутствии полезного сигнала в сигнально-шумовой смеси. При этом признаки, сформированные на основе входящей временной последовательности отсчетов, могут относиться к множеству различных классов, на которые делятся как полезный сигнал, так и шум. Чем больше классов предлагается для

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

принятия решения, тем точнее требуется знать частотно-временные свойства сигнала и шума [1, 2].

В бинарной классификации различение двух гипотез опирается на функцию различения [3], которая показывает предельные возможности метода обнаружения детерминированного сигнала в шуме. Это можно рассматривать как некоторый аналог принципа неопределенности в квантовой механике или цифровой обработке сигналов (теорема Котельникова) [2]: даже увеличивая количество признаков, нельзя решить задачу обнаружения сигнала в шуме при малом отношении сигнал/помеха. Получается, что ключевыми физическими характеристиками сигнально-шумовой смеси, которые известны или могут быть измерены, являются вид и длина временного окна, частота дискретизации, отношение сигнал/помеха, статистические свойства шума, количество дискрет сигнала [4]. Остальные же характеристики отнесем к локальным или интегральным информационным характеристикам, которые являются функциями (функционалами) от входящего временного ряда [5–8]. Поэтому требуется сформировать оптимальные правила для синтеза информационной системы, решающей задачу обнаружения на основе ограниченной априорной информации [9, 10].

Особенностью такой оптимальной обработки являются неустойчивость к изменению статистических свойств шума и априорная неопределенность о свойствах сигнала [11, 12]. Оказывается, что при решении задачи обнаружения детерминированного сигнала при малом отношении сигнал/помеха дополнительной информацией является различающая способность гипотез [3, 13]. В целом актуальными на практике являются задачи обнаружения детерминированного сигнала при малом отношении сигнал/шум и задачи различения хаотических и случайных сигналов. Математические постановки таких задач разумно опираются на дополнительные предположения о свойствах сигнала и шума. Однако на практике многие математические конструкции оказываются не реализуемыми или реализуемыми с большими погрешностями.

Текущая работа посвящена установлению свойств задачи обнаружения и формированию подхода для улучшения качества решения. Будут рассмотрены несколько последовательных этапов формализации и решения задачи обнаружения, опираясь на известные формулировки задачи разделения двух гипотез и леммы Неймана–Пирсона. Затем необходимо выделить критерии, свойства и признаки детерминированного сигнала, применить методы оптимальной обработки сигналов с вычислением вероятностных временных, частотных и частотно-временных распределений и на финальном этапе построить статистики для модельных экспериментов.

2. Леммы Неймана–Пирсона, оптимальные тесты и вид функции ошибок

2.1. Задача обнаружения

Задача обнаружения сигнала $s(n)$ традиционно сводится к задаче различения двух гипотез

$$\begin{cases} \Gamma_0 : x(n) = w(n), \\ \Gamma_1 : x(n) = s(n) + w(n), \quad n = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Гипотеза Γ_0 связана с принятием решения о приеме только шума, а гипотеза Γ_1 – о приеме смеси полезного сигнала и шума, где последовательности $\{x(n)\}$, $n = 1, \dots, N$ – временной ряд из принятых данных, $\{s(n)\}$ – полезный сигнал, $\{w(n)\}$ – аддитивный случайный шум, N – длина временного ряда данных.

Случайные величины временного ряда $(x(1), \dots, x(n), \dots, x(N))$ принимают значения $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

2.2. Классическая лемма Неймана–Пирсона

Для получения аналитического выражения оценки вероятности ошибки различения гипотез можно применить одну из разновидностей леммы Неймана–Пирсона, которая является условием оптимальности [14, 15].

Лемма 1 [Неймана–Пирсона (классическая)]. Пусть имеется произвольная, называемая решающим правилом или тестом, измеримая функция многих переменных $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, такая что

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 1, & \text{верна гипотеза } \Gamma_0, \\ 0, & \text{верна гипотеза } \Gamma_1, \end{cases}$$

по которой находятся

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \text{вероятность (принять } \Gamma_1 \mid \text{верна } \Gamma_0), \\ \beta(\varphi) &= \text{вероятность (принять } \Gamma_0 \mid \text{верна } \Gamma_1). \end{aligned}$$

Тогда решающее правило φ^* оптимально, если

$$(1) \quad 1 - \beta(\varphi^*) = \sup_{\varphi} [1 - \beta(\varphi)] \text{ при условии } \alpha(\varphi^*) = \alpha_0,$$

где супремум берется по всевозможным тестам.

Здесь $\alpha(\cdot)$ – вероятность ложной тревоги, а $\beta(\cdot)$ – вероятность пропуска полезного сигнала.

2.3. Безусловная лемма Неймана–Пирсона

Лемма 2 [Неймана–Пирсона (безусловная)]. Пусть имеется произвольная, называемая решающим правилом или тестом, измеримая функция

многих переменных $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, такая что

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 1, & \text{верна гипотеза } \Gamma_0, \\ 0, & \text{верна гипотеза } \Gamma_1, \end{cases}$$

по которой находятся

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \text{вероятность (принять } \Gamma_1 \mid \text{верна } \Gamma_0), \\ \beta(\varphi) &= \text{вероятность (принять } \Gamma_0 \mid \text{верна } \Gamma_1). \end{aligned}$$

Тогда решающее правило φ^* оптимально, если

$$(2) \quad \alpha(\varphi^*) + \beta(\varphi^*) = \inf_{\varphi} [\alpha(\varphi) + \beta(\varphi)] = \mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) - \text{функция ошибок},$$

где инфимум берется по всевозможным тестам.

Особенность применения этой разновидности леммы Неймана–Пирсона состоит в том, что требуется не ошибаться, принимая одну гипотезу вместо другой.

Для функции ошибок справедлива точная формула следующего вида:

$$(3) \quad \mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) = 1 - \frac{1}{2} \|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| = 1 - TV(P_0, P_1),$$

где $P_0^{(N)}$ – многомерная функция распределения статистики наблюдений по гипотезе Γ_0 , $P_1^{(N)}$ – многомерная функция распределения статистики наблюдений по гипотезе Γ_1 , а $TV(P_0, P_1)$ – полная вариация меры со знаком. Здесь $\|Q\| = 2 \sup_A |Q(A)|$. Таким образом, если множества-носители мер P_0, P_1 не пересекаются, то возможно безошибочное различение гипотез. Если же меры $P_0^{(N)}$ и $P_1^{(N)}$ близки, то $\|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| \approx 0$, и тогда $\mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) \approx 1$.

Замечание 1. Для задачи обнаружения детерминированного полезного сигнала, например при малом отношении сигнал/шум, интересен случай $\|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| = 2TV(P_0, P_1) \approx 0$ и возможность разумной оценки этой величины. Поэтому когда вероятность суммарной ошибки различения двух гипотез близка к единице, появляется возможность использовать аналитическое выражение $TV(P_0, P_1)$ для конструирования критерия в задаче обнаружения полезного сигнала в сигнально-шумовой смеси.

Еще раз подчеркнем, что в классической лемме Неймана–Пирсона при заданной вероятности ложной тревоги максимизируется вероятность обнаружения сигнала, а в безусловной лемме Неймана–Пирсона минимизируется суммарная ошибка ложной тревоги и пропуска сигнала. Безусловная лемма вследствие аналитического представления функции ошибок предпочтительна при работе с малыми отношениями сигнал/шум и неизвестной помеховой обстановке. Возникает следующая

Задача 1. Определить правила выбора критерия и построения распределений P_0, P_1 , минимизирующих ошибку различения гипотез в задаче обнаружения сигнала при малом отношении сигнал/шум.

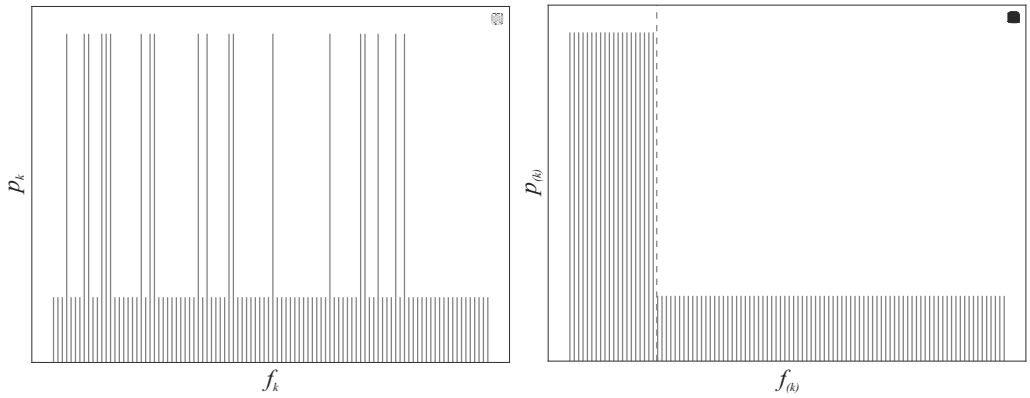


Рис. 1. Энергетический неупорядоченный и упорядоченный спектр d -сигнала в равномерном шуме ($d = 20$, $N = 100$).

Здесь и далее рассматриваются дискретные распределения вероятностей $P = \{p = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)\}$, которые по определению обладают следующими свойствами:

$$(4) \quad \forall p_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Дадим теперь определение d -сигнала, который будет применяться в работе. Для этого потребуется рассмотреть распределение следующего вида, где каждая вероятность p_k может принимать одно из двух различных значений:

$$(5) \quad \begin{cases} p_k = \frac{1 - p_{\max}}{N - d}, & \forall k = 1, \dots, N - d, \\ p_k = p_N = \frac{p_{\max}}{d}, & \forall k = N - d + 1, \dots, N. \end{cases}$$

Определение 1. Сигнал $s(t)$, для которого возможно представление временных, спектральных или частотно-временных отсчетов в виде распределения (5), назовем d -сигналом.

В [16] представлено следующее определение d -сигнала.

Определение 2. Сигнал, который состоит из d синусоидальных сигналов равной амплитуды, будем называть d -сигналом, а отдельные частоты этого сигнала будем называть дискретами. Тогда спектр этого сигнала будет иметь вид

$$(6) \quad A_d = \sum_{i=1}^d A_0 \exp(-j2\pi f_i \Delta T),$$

где A_0 – амплитуда единичного отсчета спектра, f_i – частота i -го отсчета (Γ_i), ΔT – временной интервал сигнала в секундах.

Пример спектра и упорядоченного спектра d -сигнала приведен на рис. 1.

Замечание 2. Частоты d -дискрет f_i и размер окна ΔT , где окном будем называть временной интервал сигнала, для которого производится дискретное преобразование Фурье (ДПФ), таковы, что выполняется следующее условие: $\forall f_i : f_i \Delta T = r_i$, где $r_i \in \mathbb{N}$, $r_i < N/2$.

Смысл выражения $r_i \in \mathbb{N}$ заключается в том, что целое количество периодов r_i соответствующей i -й d -дискреты спектра должно укладываться во временное окно ΔT сигнально-шумовой смеси.

Замечание 3. В зависимости от значений $p_{\max}$ и d получаются различные d -сигналы.

3. Оптимальное различение двух гипотез

Из классической леммы Неймана–Пирсона следует, что наилучший метод различения гипотез основан на отношении правдоподобия для дискретного времени следующего вида:

$$(7) \quad l_N(x(t)) = \ln \frac{P_0(x(1), \dots, x(N))}{P_1(x(1), \dots, x(N))},$$

где P_0 и P_1 – совместные распределения случайного процесса ξ_t , принимающего значения $x(1), \dots, x(N)$ в моменты времени $t = \Delta t, \dots, t = N\Delta t$. При заданной ширине временного окна $T = N\Delta t$ между α (вероятностью ложной тревоги) и β (вероятностью пропуска полезного сигнала) в условии оптимального приема имеется жесткая функциональная связь

$$(8) \quad \alpha = \alpha(\beta, T) \text{ или } \beta = \beta(\alpha, T) \text{ или } T = T(\alpha, \beta).$$

Получается, что по смыслу $T(\alpha, \beta)$ – наименьшее время наблюдения, за которое можно различить две гипотезы с заданными вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала [3].

Замечание 4. Поскольку при дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) имеется возможность увеличивать количество отсчетов N , то каждое наблюдение можно считать достаточным, чтобы исследовать закономерности

$$(9) \quad \alpha = \alpha(\beta) \text{ или } \beta = \beta(\alpha).$$

Определение 3. Назовем взаимной энтропией гипотезы Γ_0 относительно Γ_1 дивергенцию Кульбака–Лейблера

$$(10) \quad H_{0/1}(P_0, P_1) = D_{KL}(P_0, P_1).$$

Предложение 1. Если вероятность ошибки β не слишком мала, а именно $-\ln \beta \ll N$, то

$$(11) \quad \beta(\alpha) = \exp(-H_{0/1}(P_0, P_1))(1 - \alpha) + o\left(\frac{\ln \beta}{N}\right).$$

Определение 4. Различающей способностью гипотез назовем симметризованное расстояние Кульбака–Лейблера, оно же информационное расстояние,

$$(12) \quad I_D = D_{KL}(P_0, P_1) + D_{KL}(P_1, P_0).$$

Различающая способность используется тогда, когда результаты экспериментов по гипотезам Γ_0 и Γ_1 близки друг другу, т.е. когда рассматривается задача обнаружения слабого сигнала. В общем случае различающая способность зависит от отношения сигнал/шум. Следующие примеры показывают эту особенность.

Пример 1. Пусть имеются две гипотезы Γ_0 и Γ_1 и вычислены вероятности ложной тревоги α и пропуска сигнала β , тогда при выполнении условий предложения 1 имеем

$$(13) \quad I_D = -\ln \frac{\beta}{(1-\alpha)} - \ln \frac{\alpha}{(1-\beta)} = \ln \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta} \approx -(\ln \alpha + \ln \beta).$$

Пример 2. Пусть имеются две гипотезы Γ_0 и Γ_1 для различения детерминированного сигнала на фоне гауссовского шума со спектральной плотностью σ^2 , а детерминированный сигнал представим в виде

$$(14) \quad s(t) = s_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

где $\{\omega_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ – некоторые константы. Тогда

$$(15) \quad I_D = \frac{\int_0^T s^2(t) dt}{\sigma^2} = \frac{s_0^2}{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{\sigma^2}.$$

Это означает, что при разделении сигнала и шума различающая способность зависит от отношения сигнал/шум [3].

Пример 3. Пусть имеются две гипотезы Γ_0 и Γ_1 для различения детерминированного d -сигнала на фоне гауссовского шума со спектральной плотностью σ^2 , $d \ll N$, а спектр этого сигнала будет иметь вид

$$(16) \quad A_d = \sum_{i=1}^d A_0 \exp(-j\omega_i + \varphi_i),$$

где A_0 – амплитуда единичного отсчета спектра, ω_i – частота i -го отсчета, φ_i – фаза i -го отсчета. Тогда при использовании спектральной сложности и порядковых статистик для формирования упорядоченной спектральной плотности принятой смеси сигнал/шум [17] имеем

$$(17) \quad I_D \approx \ln \left(\frac{N}{d} \right) \left(\frac{\int_0^T s^2(t) dt}{\sigma^2} \right).$$

Это означает, что различающая способность зависит от количества дискрет сигнала и отношения сигнал/шум.

Примеры показывают до каких пределов возможно различение гипотез при заданных подходах к их сравнению. Примеры 1 и 2 показывают равенство статистического и энергетического подходов при прочих равных условиях. Пример 3 показывает отличие возможности различения энергетического подхода при условии знания ограниченности спектральной полосы сигнала при

заданной частоте дискретизации. Пример 1, приведенный к условиям примера 3, устанавливает, что в его условиях понижается вероятность пропуска сигнала при заданной величине ложной тревоги.

Представленные выше функции информационных дивергенций могут быть объединены общим понятием *f-дивергенции* [18]:

$$(18) \quad D_f(p||q) = \sum_{x \in \mathbb{R}^N} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right).$$

Выбор функции f порождает целое семейство различных дивергенций:

- Дивергенция Кульбака–Лейблера $D_{KL}(p, q)$ получается из (18) выбором $f(x) = x \log_2(x)$, $x > 0$.
- Дивергенция Йенсена–Шеннона получается из (18) выбором

$$(19) \quad f(x) = x \log_2 \frac{2x}{x+1} + \log_2 \frac{2}{x+1}, \quad x > 0.$$

- Полная вариация получается при $f(x) = \frac{1}{2}|1 - x|$:

$$(20) \quad TV(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{R}^N} |p(x) - q(x)|.$$

Замечание 5. На дискретных распределениях вида (4) справедливо выражение для полной вариации меры со знаком TV (total variation), записанное в виде

$$(21) \quad TV(P_0, P_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |p_i^0 - p_i^1|.$$

Кроме того, $TV(p, q)$ также является метрикой на пространстве распределений вероятностей и оценивает сверху дивергенцию Йенсена–Шеннона:

$$(22) \quad JSD(p||q) \leq TV(p, q).$$

Каждая из рассмотренных в разделе функций может использоваться для построения статистик наблюдений при вторичной обработке последовательности наборов измерений, содержащих по $i = 1, \dots, N$ отсчетов.

Для формализации критериев, которые учитывают не только случайную составляющую сигналов, но и детерминированную, введем понятия функции дисбаланса D и статистической сложности C (C – complexity) распределения

$$C(p) = H(p)D(p, q),$$

где $H(p)$ является энтропией распределения p , а дисбаланс $D(p, q)$ определяет расстояние между сигнальным и шумовым распределениями. Простейшим примером дисбаланса является евклидово расстояние в пространстве дискретных вероятностных распределений [19], которое удобно применять при оценке и сравнении сигналов, имеющих спектральное распределение q , близкое к равномерному.

4. Построение распределений P_0 и P_1

Сформулируем способы построения распределений P_0 и P_1 для отдельного наблюдения. Предлагается три способа построения распределений: на основе временного ряда $\{x_i\}$, на основе его дискретного преобразования Фурье и на основе частотно-временного преобразования, а именно классической или робастной спектрограмм.

4.1. Оптимизация частотно-временных распределений и виды спектрограмм

Оказывается, что кратковременное (оконое) преобразование Фурье может быть получено как решение оптимизационной задачи [20].

Задача 2. Нужно найти

$$(23) \quad F_s(t, \omega) = m^* = \arg \min_m I(t, \omega, m),$$

где

$$(24) \quad I(t, \omega, m) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t) \mathbf{F}(e(t, \omega, n, m)).$$

Здесь $\mathbf{F}(e)$ – функция потерь, $w(n\Delta t)$ – оконная функция, Δt – интервал дискретизации, а функция ошибки принимает вид

$$e(t, \omega, n, m) = s(t + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) - m.$$

Функция ошибки определяет остаточную величину, выражающую «сходство» между сигналом и гармоникой $\exp(i\omega n\Delta t)$. Разные виды спектрограммы могут быть получены при помощи различных функций $\mathbf{F}(e)$.

Замечание 6. Если $\mathbf{F}(e) = |e|^2$, то необходимые условия экстремума задачи 2

$$\frac{\partial I(t, \omega, m)}{\partial m} = 0$$

дают ее решение в виде

$$(25) \quad F_s(t, \omega) = \frac{1}{a_w} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t) s(t + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t),$$

$$a_w = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t).$$

Получается, что кратковременное преобразование Фурье $S_t(\omega)$ сигнала $s(t)$ равно

$$S_t(\omega) = F_s(t, \omega),$$

а соответствующая спектрограмма имеет вид

$$(26) \quad P_S(t, \omega) = |F_s(t, \omega)|^2.$$

Замечание 7. Поскольку (t, ω) являются дискретными переменными при дискретных преобразованиях, то можно определить

$$P_0 = \frac{P_S(t, \omega)}{\sum_{t, \omega} P_S(t, \omega)}.$$

Замечание 8. Метод максимального правдоподобия (ММП) применим, когда известна плотность распределения шума $p(e)$. ММП предполагает функцию потерь $\mathbf{F}(e) = -\ln p(e)$. Так, ММП-оценка спектров сигналов, искаженных гауссовским шумом $p(e) \sim \exp(-|e|^2)$, с соответствующей функцией $\mathbf{F}(e) = |e|^2$ представляет собой кратковременное преобразование Фурье. Кроме того, во многих случаях ММП-оценки весьма чувствительны к отклонениям от параметрической модели и гипотетического распределения. Даже небольшое отклонение от гипотезы может привести к существенному ухудшению такой оценки.

Следуя замечаниям 6 и 8, в статистике был разработан минимаксный робастный подход [8] в качестве альтернативы традиционному ММП, чтобы снизить чувствительность оценки ММП. Функция потерь в таком случае принимает вид $\mathbf{F}(e) = |e|$. Робастное минимаксное кратковременное преобразование Фурье (M-STFT) опирается на решение нелинейной системы уравнений (27)–(29)

$$(27) \quad F_s(t, \omega) = \frac{1}{a_w(t, \omega)} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} d(t, \omega, n) s(t + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t),$$

$$(28) \quad d(t, \omega, n) = \frac{w(n\Delta t)}{|s(t + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) - F_s(t, \omega)|},$$

$$(29) \quad a_w(t, \omega) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} d(t, \omega, n).$$

Определение 5. Пусть $\mathbf{F}(e) = |e|$ и в задаче 2 заданы (27)–(29), тогда робастная спектрограмма определяется как

$$(30) \quad P_s(t, \omega) = I(t, \omega, 0) - I(t, \omega, F_s(t, \omega)).$$

Заметим, что и для квадратичной функции потерь выражения (30) и (25) совпадают.

Еще один способ построения робастной спектрограммы заключается в построении оконного дискретного распределения Вигнера–Вилле. Само распределение задается в виде

$$(31) \quad W_s(t, \omega) = \frac{1}{a_w} \sum_{n=-N/2}^{N/2} w(n\Delta t) s(t + n\Delta t) s^*(t - n\Delta t) \exp(-i2\omega n\Delta t),$$

где

$$(32) \quad a_w = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t).$$

Оно может быть найдено из решения следующей оптимизационной задачи.

Задача 3. Нужно найти

$$(33) \quad W_s(t, \omega) = m^* = \arg \min_m J(t, \omega, m),$$

где

$$(34) \quad J(t, \omega, m) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t) \mathbf{F}(|e|).$$

Функция ошибки задается следующим образом:

$$e(t, \omega, n, m) = s(t + n\Delta t) s^*(t - n\Delta t) \exp(-i2\omega n\Delta t) - m,$$

$$\text{а } \mathbf{F}(|e|) = |e|^2.$$

4.2. Дискретное преобразование Фурье

Задача 4. Пусть имеется реализация $\{x_1, \dots, x_{2N+2}\}$ последовательности независимых случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_{2N+2}\}$ с нулевым математическим ожиданием, к которой применено ДПФ

$$(35) \quad X_k = \sum_{n=1}^{2N+2} x_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)},$$

определяющее случайную величину

$$(36) \quad \Xi_k = \sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)},$$

где $k = 0, \dots, N$, поскольку в силу свойства симметрии ДПФ вещественного сигнала вторая половина из $N + 1, \dots, 2N + 1$ комплексных амплитуд спектральных отсчетов комплексно сопряжена с первой.

Требуется найти дискретную функцию вероятности нормированного упорядоченного спектрального распределения $p_k(N)$ как нормированное среднее для каждого k -го значения случайной величины

$$(37) \quad \eta_k(N) = \frac{(\mathbf{T}I)_k}{E_X},$$

где $I_k = \Xi_k \Xi_k^*$ (квадрат модуля амплитуды или энергия спектрального отсчета), E_X – половина энергии сигнала, а $\mathbf{T}$ – оператор упорядочивания ряда в порядке невозрастания.

Решение задачи 4 в случае наблюдения независимых нормально распределенных случайных величин ξ_n , $n = 1, \dots, 2N + 2$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2 приводится в [17] и [13]. Оценка функции вероятности $\tilde{n}_k(N)$ нормированного упорядоченного дискретного спектра, порожденной соответствующей экспоненциальной случайной величиной I_k , выглядит следующим образом:

$$(38) \quad \tilde{n}_k(N) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \frac{1}{i}.$$

Для приближенного вычисления $n_k(N)$ выберем формулу

$$(39) \quad n_k(N) = -\frac{1}{NK_N} \ln \frac{2k-1}{2N+1}, \text{ где } K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{2k-1}{2N+1}.$$

Замечание 9. Считая, что нормированные порядковые статистики $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ принимают значения $P_0 = \{p = (\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)\}$ или $P_0 = \{p = (n_1, \dots, n_N)\}$, а статистики наблюдений $P_1 = \{p = (p_1, \dots, p_N)\}$, спектральную сложность также можно задавать на основе распределения (38) по формуле

$$(40) \quad C_{SS}(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left(\sum_{k=1}^N |p_k - \tilde{n}_k(N)| \right)^2$$

или его приближенного аналога (39) по формуле

$$(41) \quad C_S(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left(\sum_{k=1}^N |p_k - n_k(N)| \right)^2.$$

Теперь положим, что $N = N_1 N_2$, где N_1 – количество отсчетов в одном окне, а N_2 – количество окон. Поскольку энтропия в одном окне не зависит от порядка расположения отсчетов спектра, то ее можно определить как

$$H(n_k(N_1)) = -\frac{1}{\log_2 N_1} \sum_{k=1}^{N_1} n_k(N_1) \log_2 n_k(N_1).$$

Энтропия в N_2 статистически одинаковых окнах равна

$$H(P_S(N_2, N_1)) = -\frac{1}{\log_2 N_1 + \log_2 N_2} \left(\log_2 N_2 + \sum_{k=1}^{N_1} p_k(N_1) \log_2 p_k(N_1) \right).$$

5. Оптимизация информационных критериев и обнаружение d -сигналов

Теперь обратимся к некоторым уже известным информационным критериям различения гипотез и установим их свойства. Поскольку в лемме 2 установлено, что функция ошибок различения двух гипотез зависит от полной вариации $TV(p, q)$, то вводится еще одно понятие дисбаланса и статистической сложности на его основе [10]. Там же показано, что такой критерий является одним из лучших для решения задачи различения двух гипотез и индикации появления детерминированной составляющей слабого полезного сигнала в белом шуме:

$$(42) \quad C_{TV}(p) = H(p)D_{TV}(p),$$

где

$$(43) \quad D_{TV}(p) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^N \left| p_i - \frac{1}{N} \right| \right)^2,$$

$$(44) \quad H(p) = \frac{1}{\log_2 N} \left(- \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \right)$$

– нормированная энтропия Шеннона [21]. При вычислении суммы (44) принимается, что $\frac{0}{\log_2 0} = 0$ по непрерывности. Там же было показано, что максимальное значение C_{TV} достигается на распределении, состоящем всего из двух значений с оптимальным количеством отсчетов для каждого из этих значений. Справедлива следующая

Лемма 3. Максимум статистической сложности (42) достигается на семействе распределений (5).

Требуется определить оптимальные значения d и $p_{\max}$. Для этого вычислим значение дисбаланса D_{TV} на распределении (5):

$$(45) \quad D_{TV}(\omega, p_{\max}) = (p_{\max} - \omega)^2, \quad \omega = \frac{d}{N}.$$

В свою очередь энтропия равна

$$(46) \quad H(\omega, p_{\max}) = 1 - \frac{1}{\log_2 N} \left((1 - p_{\max}) \log_2 \frac{1 - p_{\max}}{1 - \omega} + p_{\max} \log_2 \frac{p_{\max}}{\omega} \right).$$

В таблице приведены оптимальные значения параметров формул (45) и (46), доставляющие максимум статистической сложности $C_{TV}(\omega, p_{\max})$.

Оптимальные параметры $C_{TV}(\omega, p_{\max})$ при различных значениях N

N	$C_{TV}(\omega^*, p_{\max}^*)$	$p_{\max}^*$	$1 - \omega^*$	d^*
3	0,1289	0,8241	0,6751	1 или 2
256	0,4789	0,9976	0,8752	32
512	0,5120	0,9991	0,8901	56
1024	0,5410	0,9997	0,9022	100
2048	0,5667	0,9999	0,9122	180

Из леммы 3 и таблицы видно, что d -сигналы играют важную роль при решении задачи обнаружения. Поэтому возникает следующая

Задача 5. Обнаружение d -сигнала в сигнально-шумовой смеси длины N , $N > d$.

Для решения задачи 5 по обнаружению d -сигнала применим энтропию Реньи H_γ с параметром γ ($\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$), подробные свойства которой представлены в [22].

$$(47) \quad H_\gamma = \frac{1}{1-\gamma} \left(\log_2 \sum_{k=1}^N p_k^\gamma \right).$$

Оказывается, что энтропия Реньи для d -сигнала вычисляется и равна

$$(48) \quad H_\gamma^{(d)} = \frac{1}{1-\gamma} \log_2 \left(d \left(\frac{p_{\max}}{d} \right)^\gamma + (N-d) \left(\frac{1-p_{\max}}{N-d} \right)^\gamma \right).$$

При больших N она может быть оценена следующим образом:

$$(49) \quad H_\gamma^{(d)} \approx \tilde{H}_\gamma^{(d)} = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} \log_2(d^{1-\gamma} p_{\max}^\gamma) = \log_2 d + \frac{\gamma}{1-\gamma} \log_2(p_{\max}), & \gamma > 1, \\ \log_2 N + \frac{\gamma}{1-\gamma} \log_2(1-p_{\max}), & 0 < \gamma < 1, \end{cases}$$

что показывает приближенную линейную связь между логарифмами количества дискрет сигнала, $p_{\max}$ и энтропией Реньи.

Из таблицы и (49) при $\gamma > 1$ следует равенство

$$(50) \quad \tilde{H}_\gamma^{(d^*)} = \log_2 d^*.$$

Подобные соотношения известны для частотно-временной обработки известных сигналов [20]. Энтропия Реньи на белом шуме принимает свое максимальное значение $\tilde{H}_\gamma^{(N)} = \log_2 N$.

Определение 6. Определим отношение “сигнал/помеха” для d -сигнала в случае, когда система (5) отвечает спектру мощности сигнально шумо-

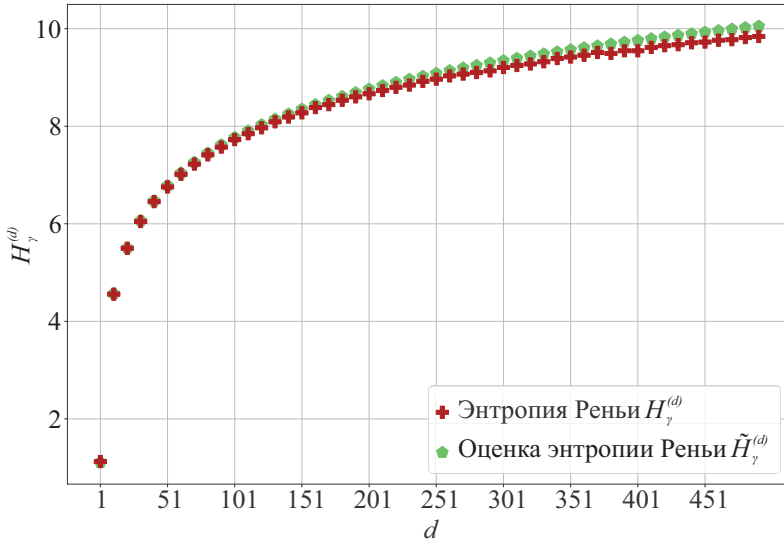


Рис. 2. Сравнение энтропии Реньи ($\gamma = 10$), вычисленной по формуле (47), и ее оценки (53).

вой смеси, как:

$$\begin{aligned}
 SNR &= 10 \log_{10} \delta = 10 \log_{10} \left(d \left(\frac{p_{\max}}{d} \right) \middle/ (N - d) \frac{(1 - p_{\max})}{(N - d)} \right) = \\
 (51) \quad &= 10 \log_{10} \left(\frac{p_{\max}}{1 - p_{\max}} \right).
 \end{aligned}$$

В таком случае $p_{\max}$ можно выразить через SNR для того, чтобы использовать для вычисления энтропии Реньи

$$(52) \quad p_{\max} = \frac{10^{\frac{SNR}{10}}}{1 + 10^{\frac{SNR}{10}}}.$$

Тогда $\tilde{H}_{\gamma}^{(d)}$ может быть выписана при $\gamma > 1$ согласно (49) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (53) \quad \tilde{H}_{\gamma}^{(d)} &= \log_2 d + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \log_2 \left(\frac{10^{\frac{SNR}{10}}}{1 + 10^{\frac{SNR}{10}}} \right) = \\
 &= \log_2 d + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \left[\frac{SNR}{10} \log_2 10 - \log_2 \left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

На рис. 2 представлено сравнение энтропии Реньи, вычисленной по формуле (47), и ее оценки (53) в виде зависимости от количества d гармонических компонент в сгенерированном сигнале, смешанном с белым шумом, $SNR = 0$ dB. Видно, что оценка близка к вычисленным значениям.

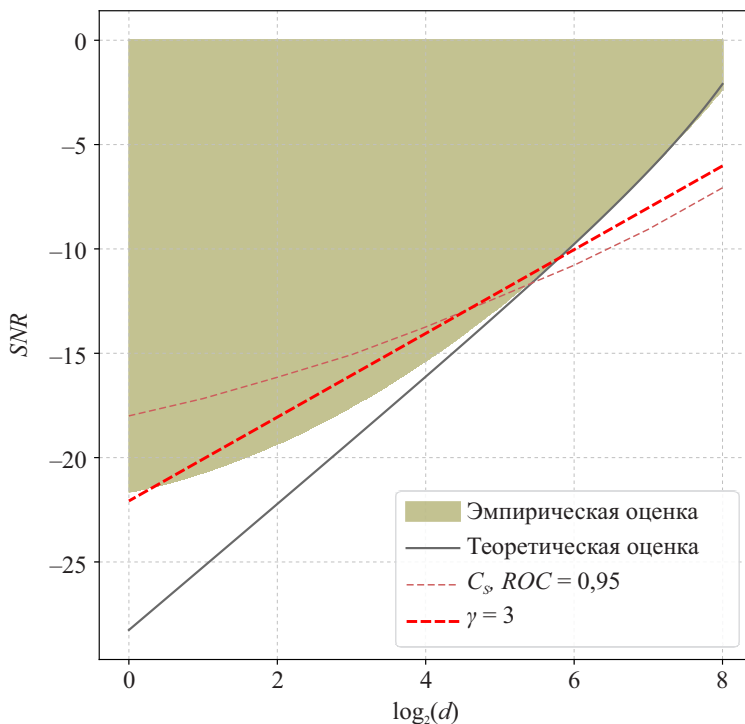


Рис. 3. Предельные значения SNR при обнаружении сигнала в белом шуме в зависимости от количества дискрет d ($N = 2048$).

Следствие 1. При малом отношении сигнал/помеха энтропия Реньи примет вид

$$(54) \quad \tilde{H}_\gamma^{(d)} \approx \log_2 d + \frac{\gamma \log_2 10}{10(1 - \gamma)} SNR.$$

Таким образом, зная максимальное значение энтропии Реньи, минимальное значение SNR можно оценить как

$$(55) \quad SNR_{\min} = \frac{10(1 - \gamma)}{\gamma \log_2 10} (\log_2 N - \log_2 d).$$

Согласно [4] взаимно-однозначное соответствие между кортежем H (энтропия), C_{TV} (статистическая сложность) и кортежем SNR (отношение сигнал/шум), $\log d$ (дискретность) дает возможность использовать метрические (аналитические)² сетки в задачах обнаружения и классификации сигнала в шуме.

Сравнительный анализ оценок SNR в зависимости от количества d дискрет в спектре представлен на рис. 3 ($N = 2048$). Закрашенная область демонстрирует результат эмпирического исследования предельных возможно-

² В [4] подробно раскрывается понятие метрической сетки. В контексте диаграммы сложности метрическая сетка – это приближенное взаимно-однозначное отображение кортежа таких информационных характеристик сигнально-шумовой смеси, как информационная энтропия и статистическая (спектральная) сложность, и кортежа таких характеристик, как дискретность (количество дискрет в спектре d -сигнала) и отношение сигнал/шум.

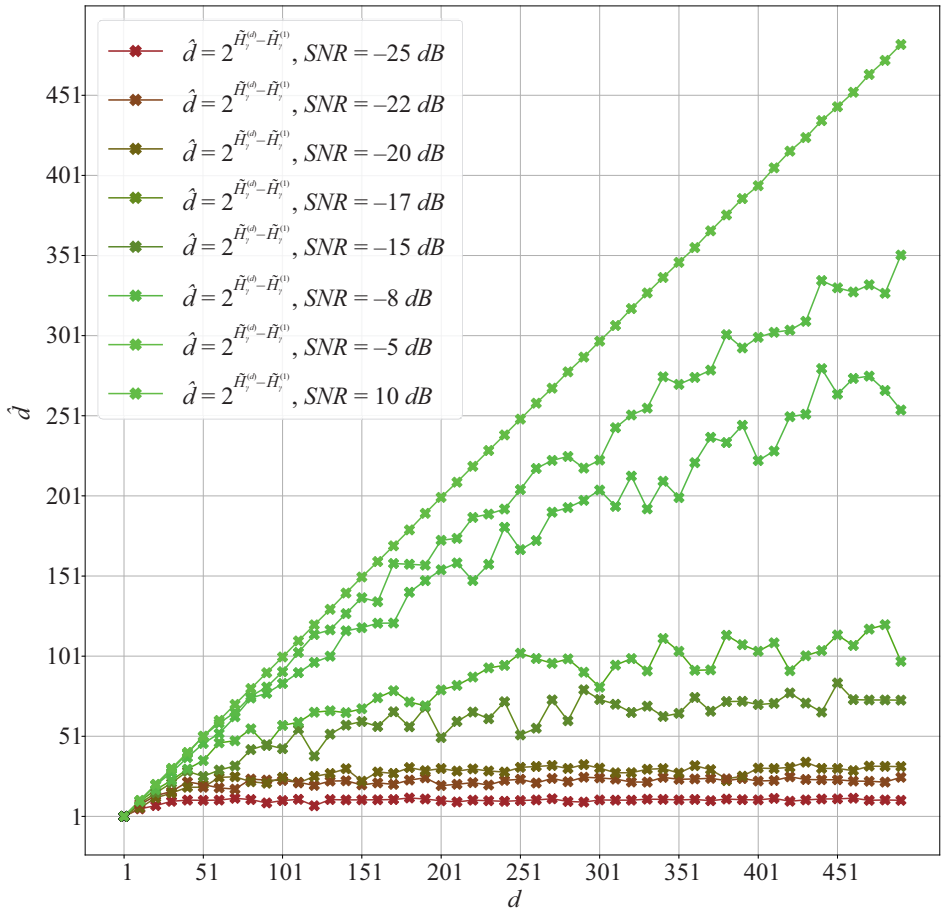


Рис. 4. Оценка количества компонент d -сигнала длины $N = 65\,536$ в белом шуме с помощью энтропии Реньи ($\gamma = 10$) для разных SNR .

стей классификации сигналов в белом шуме посредством диаграммы статистической сложности. Сплошная черная линия – это теоретическая оценка, полученная при помощи формулы из [16]:

$$(56) \quad SNR > 10 \lg \left(\frac{3d}{N - 3d} \right).$$

Тонкой пунктирной линией на рис. 3 показаны предельные возможности обнаружения сигнала при помощи критерия C_s (спектральная сложность). Результат зависимости предельного SNR от количества дискрет в спектре был получен посредством численного эксперимента ($ROC = 0,95$)³. Толстая пунктирная линия определяет оценку по формуле (55) при $\gamma = 3$.

³ Площадь под ROC-кривой (Receiver Operating Characteristic) или AUC (Area Under the Receiver Operating Characteristic curve). На практике для метрики оценки качества модели машинного обучения значение ROC-AUC 0,5 предполагает отсутствие какой-либо способности обнаруживать сигнал в шуме на основе заданного критерия, значение от 0,7 до 0,8 считается приемлемым, от 0,8 до 0,9 считается высоким, а значение более 0,9 считается превосходным.

Полученная формула (53) для $\tilde{H}_\gamma^{(d)}$ позволяет сформулировать следующую лемму для оценки $\hat{d}$ количества компонент d -сигнала.

Замечание 10. Оценка $\hat{d}$ количества компонент d -сигнала при использовании энтропии Реньи записывается в следующем виде:

$$(57) \quad \hat{d} = 2^{\tilde{H}_\gamma^{(\hat{d})} - \tilde{H}_\gamma^{(1)}}.$$

Доказательство. Выпишем формулу (53) для $d = \hat{d}$ и $d = 1$:

$$(58) \quad \begin{cases} \log_2 \hat{d} = \tilde{H}_\gamma^{(\hat{d})} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[\frac{SNR}{10} \log_2 10 - \log_2 \left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}} \right) \right], \\ \log_2 1 = 0 = \tilde{H}_\gamma^{(1)} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[\frac{SNR}{10} \log_2 10 - \log_2 \left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}} \right) \right]. \end{cases}$$

Выразив таким образом одинаковое в обоих случаях слагаемое, зависящее от SNR , в системе (58) через $\tilde{H}_\gamma^{(1)}$, получим утверждение леммы.

На рис. 4 представлена численная валидация замечания 10 в виде зависимости оценки количества компонент по формуле (57) для сгенерированных сигналов, состоящих из d гармонических компонент, смешанных с белым шумом для разных SNR . Из рис. 4 видно, что можно говорить о достаточно устойчивой оценке до 100 компонент при условии величины белого шума до -10 dB.

Далее получим оценку количества компонент, если использовать ненормированную энтропию Шеннона. Для этого представим выражение $\tilde{H}^{(d)}$, оценивающее энтропию Шеннона для d -сигнала при больших N .

$$(59) \quad \begin{aligned} H^{(d)} &= - \left(d \frac{p_{\max}}{d} \log_2 \frac{p_{\max}}{d} + (N-d) \frac{1-p_{\max}}{N-d} \log_2 \frac{1-p_{\max}}{N-d} \right) = \\ &= - \left(p_{\max} \log_2 \frac{p_{\max}}{d} + (1-p_{\max}) \log_2 \frac{1-p_{\max}}{N-d} \right) = \\ &= - (p_{\max} \log_2 p_{\max} + (1-p_{\max}) \log_2 (1-p_{\max})) + \\ &\quad + (p_{\max} \log_2 d + (1-p_{\max}) \log_2 (N-d)). \end{aligned}$$

Слагаемые в левой скобке ограничены в силу ограниченности $0 < p_{\max} < 1$, поэтому они не будут входить в выражение для $\tilde{H}^{(d)}$.

$$(60) \quad H^{(d)} \approx \tilde{H}^{(d)} = p_{\max} \log_2 d + (1-p_{\max}) \log_2 N.$$

Для получения оценки $\hat{d}$ по аналогии с доказательством замечания 10 рассмотрим энтропию Шеннона при $d = \hat{d}$ и $d = 1$.

$$(61) \quad \tilde{H}^{(1)} = (1-p_{\max}) \log_2 N \implies p_{\max} = 1 - \frac{\tilde{H}^{(1)}}{\log_2 N}.$$

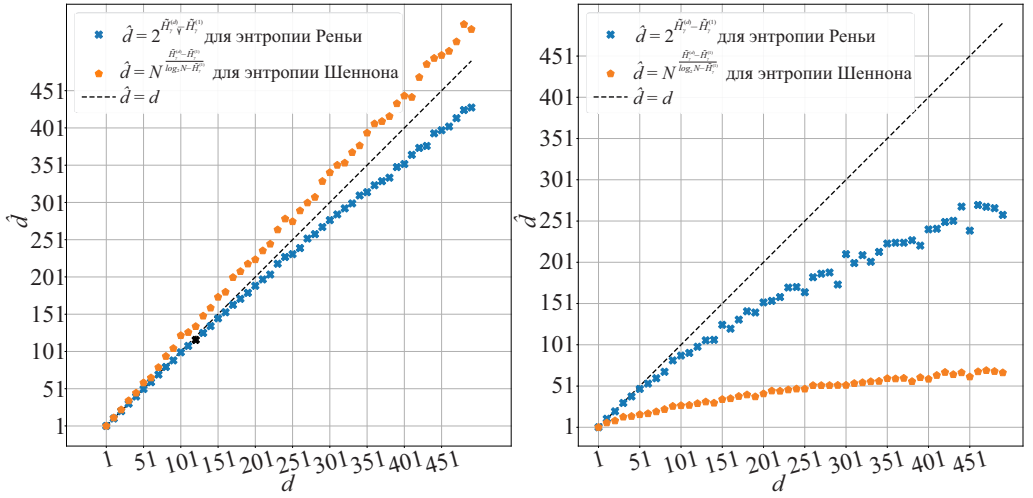


Рис. 5. Оценка количества компонент d -сигнала длины $N = 65\,536$ в белом шуме с помощью энтропии Реньи ($\gamma = 10$) и энтропии Шеннона для $SNR = 0$ dB и $SNR = -8$ dB.

Теперь используем полученное выражение $p_{\max}$ для $\tilde{H}(\hat{d})$.

$$(62) \quad \tilde{H}(\hat{d}) = \left(1 - \frac{\tilde{H}^{(1)}}{\log_2 N}\right) \log_2 d + \log_2 N \frac{\tilde{H}^{(1)}}{\log_2 N}.$$

Откуда

$$(63) \quad \log_2 \hat{d} = \frac{(\tilde{H}(\hat{d}) - \tilde{H}^{(1)}) \log_2 N}{(\log_2 N - \tilde{H}^{(1)})} \implies \hat{d} = N^{\frac{\tilde{H}(\hat{d}) - \tilde{H}^{(1)}}{\log_2 N - \tilde{H}^{(1)}}}.$$

В результате справедливо следующее замечание.

Замечание 11. Оценка $\hat{d}$ количества компонент d -сигнала при использовании энтропии Шеннона записывается в следующем виде:

$$(64) \quad \hat{d} = N^{\frac{\tilde{H}(\hat{d}) - \tilde{H}^{(1)}}{\log_2 N - \tilde{H}^{(1)}}}.$$

На рис. 5 показано функционирование оценок количества компонент по формулам (57) и (64), основанным на энтропии Реньи и Шеннона соответственно. Видно, что энтропия Реньи дает более робастную оценку.

6. Заключение

В работе установлена последовательность оптимизационных подзадач, требующих решения, для обнаружения сигнала в шуме, в том числе при малом отношении сигнал/помеха. В общем случае требуется определиться

с оптимальным статистическим тестом в задаче различения двух гипотез, установить оптимальные правила задания тестовой статистики наблюдений на основе дискретных спектральных или частотно-временных распределений, а также задать вид оптимального критерия различения. Аналитические конструкции критериев, понятие d -сигналов, информационные критерии обнаружения составляют основу решения этой бинарной задачи классификации: присутствует сигнал или нет. Дальнейшее улучшение качества решения такой задачи возможно при уточнении статистических свойств шума и сигнала в шуме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rihaczek A.* Signal energy distribution in time and frequency // *IEEE Transactions on Information Theory*. 1968. V. 14. No. 3. P. 369–374.
2. *Cohen L.* Time-Frequency Analysis. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
3. *Dobrushin R.L., Pinsker M.S., Shiryayev A.S.* An application of the concept of entropy to problems of detecting a signal in the noise // *Lithuanian Mathematical Journal*. 1963. V. 3. No. 1. P. 107–122.
4. *Babikov V.G., Galyaev A.A.* Analytical Representation of Complexity Diagrams // *Problems of Information Transmission*. 2025. V. 61. No. 1. P. 31–46.
5. *Horie T., Burioka N., Amisaki T., Shimizu E.* Sample entropy in electrocardiogram during atrial fibrillation // *Yonago Acta Med.* 2018. V. 61. No. 1. P. 49–57.
6. *Ribeiro M., Henriques T., Castro L., et al.* The Entropy Universe // *Entropy*. 2021. V. 23. No. 2. P. 1–35.
7. *Zunino L., Soriano M.C., Rosso O.A.* Distinguishing chaotic and stochastic dynamics from time series by using a multiscale symbolic approach // *Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys.* 2012. V. 86. No. 4. P. 1–10.
8. *Shen J., Hung J., Lee L.* Robust entropy-based endpoint detection for speech recognition in noisy environments // 5th International Conference on Spoken Language Processing (ICSLP 1998). ISCA, 1998.
9. *Allen R.L., Mills D.W.* Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.
10. *Berlin L.M., Galyaev A.A., Lysenko P.V.* Comparison of information criteria for detection of useful signals in noisy environments // *Sensors*. 2023. V. 23. No. 4. P. 1–17.
11. *Ramirez J., Segura J.C., Benítez C., et al.* A New Kullback–Leibler VAD for Speech Recognition in Noise // *IEEE Signal Process. Lett.* 2004. V. 11. No. 2. P. 266–269.
12. *Mehrotra K.G., Mohan C.K., Huang H.* Anomaly detection principles and algorithms. Terrorism, Security, and Computation. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018.
13. *Galyaev A.A., Berlin L.M., et al.* Order statistics of the normalized spectral distribution for detecting weak signals in white noise // *Autom. Remote Control*. 2024. No. 12. P. 1–16.

14. *Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. М.: МЦНМО: НМУ, 2020.
15. *Johnson P., Moriarty J., Peskir G.* Detecting changes in real-time data: a user's guide to optimal detection // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2017. V. 375. No. 2100. P. 1–16.
16. *Babikov V.G., Galyaev A.A.* Information Diagrams and Their Capabilities for Classifying Weak Signals // *Problems of Information Transmission.* 2024. V. 60. No. 2. P. 127–140.
17. *Galyaev A.A., Babikov V.G., Lysenko P.V., Berlin L.M.* A new spectral measure of complexity and its capabilities for detecting signals in noise // *Dokl. Math.* 2024. V. 110. No. 1. P. 361–368.
18. *Sason I.* On f-divergences: Integral representations, local behavior, and inequalities // *Entropy.* 2018. V. 20. No. 5. P. 1–32.
19. *López-Ruiz Ricardo.* Shannon information, LMC complexity and Rényi entropies: a straightforward approach // *Biophys. Chem.* 2005. V. 115. No. 2–3. P. 215–218.
20. *Boashash B.* Time-Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive Reference. London: Academic Press, 2016.
21. *Shannon C.E.* A mathematical theory of communication // *Bell Syst. Tech. J.* 1948. V. 27. P. 379–423.
22. *Rényi Alfréd.* On measures of entropy and information // *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, volume 1: contributions to the theory of statistics.* University of California Press, 1961. V. 4. P. 547–562.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 07.07.2025

После доработки 01.09.2025

Принята к публикации 24.09.2025

Заметки, хроника, информация

© 2026 г.

15-й СЕМИНАР ИФАК ПО АДАПТИВНЫМ И ОБУЧАЮЩИМСЯ СИСТЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ

Со 2 по 4 июля 2025 г. в городе Мехико, столице Мексики, состоялся семинар по адаптивным и обучающимся системам управления (15th IFAC Workshop on Adaptive and Learning Control Systems, ALCOS 2025). Он прошел под эгидой технического комитета 1.2 по адаптивным и обучающимся системам Международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК) и был организован факультетом электротехники и электроники Автономного технологического института Мексики (Instituto Tecnológico Autonomo de Mexico, ITAM). Техническим спонсором мероприятия выступила Мексиканская ассоциация автоматического управления (Asociacion de Mexico de Control Automatico, AMCA).

ALCOS является одним из регулярных семинаров ИФАК, целью которого является обмен идеями и результатами в области адаптивных и обучающихся систем управления, которые находят применение в условиях параметрической и функциональной неопределенности, нелинейной динамики и внешних возмущающих воздействий. Впервые мероприятие прошло в Сан-Франциско в 1983 г., и затем оно проходило в Лунде, Швеция (1986), Глазго, Шотландия (1989), Гренобле, Франция (1992), Будапеште, Венгрия (1995), Глазго, Шотландия (1998), Черноббио-Комо, Италия (2001), Катаяма, Япония (2004), Санкт-Петербурге, Россия (2007) [1], Анталии, Турция (2010), Кане, Франция (2013) [2], Эйндховене, Голландия (2016), Уинчестере, Великобритания (2019), Касабланке, Марокко (2022).

Отметим, что до 2019 г. мероприятие носило название семинар по адаптации и обучению в системах управления и обработки сигналов (Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, ALCOSP). Более того, до 1998 г. семинар назывался симпозиумом (по правилам ИФАК мероприятие называется симпозиумом, если число его участников стабильно превышает 100). Однако начиная с 1998 г. число участников стало меньше 100. В 2001 г. профессор Биттанти (S. Bittanti), проводивший ALCOSP в Италии, предложил расширить его сферу и провести одновременно с ALCOSP-2001 семинар по управлению колебаниями Periodic Control Systems (PSYCO 2001). Это, действительно, привлекло новых участников, интересующихся управлением колебаниями, в том числе хаотическими, в механике, биологии и других областях, и общее число участников стало больше 100. Хотя в последующие годы 100 участников не набиралось, проводить два мероприятия вместе было

удобно и традиция сохранялась. В то же время сочетание двух разнонаправленных событий в одно время и в одном месте вызывало иногда недоумение, и в начале 2017 г. на онлайн-заседании технического комитета 1.2 был поднят вопрос о смене формата и названия семинара. На самом деле, работ по обработке сигналов на ALCOSP практически не было, так как обработка сигналов относится к области интересов другого технического комитета: комитета 1.1 «Идентификация и обработка сигналов». После непродолжительной дискуссии в январе 2017 г. было решено название семинара изменить на нынешнее ALCOS. Область управления колебаниями решили включить в сферу нового воркшопа неявно.

В новом формате мероприятие проводилось в 2019 г. в Уинчестере, в 2022 г. в Касабланке и в 2025 г. в Мехико.

В организации и проведении ALCOS 2025 активное участие принимали ученые из России, в частности сопредседателем семинара выступил А.А. Бобцов (ИТМО, Санкт-Петербург), членами международного программного комитета являлись: А.Л. Фрадков (ИПМаш РАН и СПбГУ, Санкт-Петербург), А.А. Пыркин (ИТМО, Санкт-Петербург), А.И. Глущенко (ИПУ РАН, Москва), а шесть участников из России (А.Л. Фрадков (ИПМаш РАН и СПбГУ), О.Н. Граничин (СПбГУ), А.А. Пыркин (ИТМО), А.А. Ведяков (ИТМО), А.А. Перегудин (ИТМО), А.И. Глущенко (ИПУ РАН)) были председателями или сопредседателями семи заседаний.

Из 53 работ, которые были представлены в 2025 г. на ALCOS, международный программный комитет отобрал 51 статью, которые были включены в окончательную программу семинара. К процессу рецензирования были привлечены 21 ответственный редактор и 236 независимых рецензентов. Каждая поданная статья была оценена как минимум двумя рецензентами. Окончательная программа включала три пленарных заседания, одну специальную секцию (invited session) и десять регулярных сессий. В рамках семинара ежедневно проходило две параллельные сессии.

В работе сессий приняло участие около 60 специалистов из 13 стран (Россия, Мексика, Франция, Индия, США, Бразилия, Великобритания, Колумбия, Китай, Марокко, Норвегия, Канада, Германия). Наибольшее число докладов (20) представили ученые из России (подсчет велся по аффилиации докладчика). Следующими по количеству докладов являются Мексика (9), Индия (5) и Франция (4). Россия была представлена учеными из Санкт-Петербурга, Москвы, Краснодара и Красногорска. Все запланированные доклады были представлены.

Относительно небольшое число докладов во многом объясняется конкретностью тематики семинара, в отличие от конференций по теории управления в целом, например European Control Conference (ECC), American Control Conference (ACC), Conference on Decision and Control (CDC) и т.д. При этом такая узкая направленность делает практически все заседания интересными для посещения, а всего две параллельные секции обеспечивают возможность

услышать практически половину всех докладов. Вновь обращаясь к исторической ретроспективе, отметим, что при рассмотрении последних 20 лет в 2010, 2016 и 2019 гг. количество докладов на ALCOS (ALCOSP) также не превышало 60, в 2007 было принято 90 докладов, и лишь в 2013 и 2022 гг. это число превысило 100 докладов.

Программа семинара включала три пленарных доклада.

Профессор А.Л. Фрадков, представляющий ИПМаш РАН и СПбГУ, посвятил свой доклад вопросам применения метода скоростного градиента для моделирования, управления, адаптации и обучения (“Speed-gradient for modeling, control, adaptation and learning”). В ходе выступления было дано описание современного состояния метода скоростного градиента, разработанного в основном в 1970-х и 1980-х гг., приведена краткая информация об алгоритмах скоростного градиента и их применимости, оптимальности и условиях пассивности. Были показаны применения метода скоростного градиента к адаптивному управлению и идентификации, нелинейному управлению, управлению энергией и нелинейными колебаниями, управлению сетями и распределенными системами, а также приведены примеры применения метода в инженерных, физических, биологических и экологических системах. Также были упомянуты недавние модификации и расширения метода, включая неевклидовы алгоритмы скоростного градиента, основанные на функциях Ляпунова–Брэгмана. В завершающей части доклада была продемонстрирована применимость метода скоростного градиента для разработки моделей природных явлений. Доклад вызвал живую дискуссию, в процессе которой обсуждались как классические вопросы о связи метода скоростного градиента и второго метода Ляпунова для синтеза адаптивных регуляторов, так и важные моменты, связанные с будущим развитием данного метода. Например, обсуждалась возможность его применения для решения задач оптимизации при наличии ограничений. Такое расширение было бы крайне важным, в частности, для разделов теории управления, в которых задача синтеза управления формулируется как задача оптимизации.

Профессор Жоао Педру Хеспанья (Joao Pedro Hespanha), представляющий Университет Калифорнии, Санта-Барбара, представил доклад по тематике обучения с подкреплением для крупномасштабных игр (“Reinforcement Learning for Large-Scale Games”). В рамках выступления рассматривалось использование метода обучения с подкреплением в Марковских играх с нулевой суммой для двух игроков с конечным, но большим пространством состояний, цель которых состоит в поиске минимаксных стратегий с “умеренными” вычислениями, т.е. поставлена задача подтвердить оптимальность стратегий, не исследуя все пространство состояний игры. Был дан обзор метода Q-обучения, который был предложен в конце 1980-х гг. как альтернатива принципа динамического программирования для одного игрока и игр с нулевой суммой для двух игроков. Подход основан на обучении с подкреплением и не требует известной Марковской модели системы. Далее в докладе было показано, что большая часть работ, посвященных доказательству коррект-

ности Q-обучения, основана на установлении того, что каждая его итерация сходится к единственной фиксированной точке уравнения типа Беллмана, что обычно требует исследования всего пространства состояний. В основной части доклада было продемонстрировано, что для игр с нулевой суммой можно построить математически корректные оптимальные стратегии с помощью алгоритмов, вдохновленных Q-обучением, без необходимости сходимости Q-функции по всему пространству состояний. Фактически выборки, используемые для обновления Q-функции, могут даже не исследовать весь набор достижимых состояний, а для определенных классов игр доля исследованных состояний становится все меньше и меньше по мере увеличения размера пространства состояний.

Профессор Зонг-Пин Джанг (Zhong-Ping Jiang) из Нью-Йоркского университета представил доклад по тематике применения подходов на основе обучения для синтеза адаптивных оптимальных регуляторов (“Learning for Adaptive Optimal Control”). Управление на основе обучения является методом прямого адаптивного управления, направленным на адаптацию оптимальных регуляторов непосредственно на основе получаемых в реальном времени данных. В докладе сначала были продемонстрированы известные разработки в области управления на основе обучения для линейных и нелинейных систем с неизвестной динамикой в непрерывном времени, а далее были представлены последние результаты анализа устойчивости регуляторов в непрерывном времени, синтезируемых на основе обучения. И если при рассмотрении линейных систем для синтеза адаптивного LQ-регулятора удастся обойтись параметризациями в виде линейных регрессионных уравнений, на основе которых могут быть получены законы адаптации параметров такого регулятора, то для нелинейных систем синтез адаптивных оптимальных регуляторов требует использования универсальных аппроксиматоров, в частности применения двух нейронных сетей в структуре регулятора (одной – для аппроксимации значения целевой функции, другой – для аппроксимации идеального регулятора). Это приводит к локальности получаемого результата с точки зрения устойчивости, а в случае наличия возмущений – к необходимости принятия допущения об их малости. В заключении доклада эффективность управления на основе обучения была продемонстрирована на примере автономных транспортных средств и медицины.

Тематика секционных заседаний ALCOS 2025 была сосредоточена на: задачах адаптивного управления и идентификации для линейных и нелинейных систем, адаптивных наблюдателях, управлении сетевыми системами, методах управления на основе данных и обучения с подкреплением. Особое внимание было уделено соединению теоретических разработок с приложениями в таких областях, как робототехника, аэрокосмическая промышленность, энергетические системы и автономные транспортные средства. Как было отмечено по итогам одного из заседаний, дискуссия была очень интересна, поскольку практически все специалисты в мире по ее тематике собрались в одном месте – на секциях ALCOS.

В программе ALCOS 2025 единственная тематическая сессия была организована профессором О.Н. Граничиным и Е.Ю. Тарасовой (СПбГУ) и посвящена вопросам управления мультиагентными системами на основе применения так называемых интеллектуальных подходов, в том числе для случаев динамической топологии сети, действия шумов и внешних возмущений и пр.

Хотелось бы отметить следующее. В последнее время не только в рамках ALCOS, но и ACC, ECC, CDC существенно возросло число докладов по тематике управления на основе данных (data-driven control) и обучения с подкреплением (reinforcement learning). Такие доклады неизменно привлекают большое внимание участников, особенно среди молодых ученых. Возможно, это объясняется тем фактом, что в настоящее время довольно популярным направлением подготовки специалистов является анализ данных, машинное обучение, глубокие нейронные сети и прочие инструменты работы с данными. И именно управление на основе данных и обучение с подкреплением кажется выпускникам таких специальностей наиболее простым и понятным путем, чтобы войти в теорию управления. Однако у всего есть своя цена. Для управления на основе данных требование полноранговости матрицы, составленной из собранных измерений, для линейных систем фактически означает возможность идентифицировать параметры такой системы, что сводит решение поставленной задачи к применению уже хорошо известных методов адаптивного и робастного управления. Для обучения с подкреплением такая цена – это жесткие допущения при доказательстве устойчивости и локальность получаемого результата. И об этом следует помнить. Данный абзац является дискуссионным, отражает исключительно субъективное мнение авторов, и авторы готовы обсуждать сказанное выше путем получения обратной связи от читателей.

Отдельно хотелось бы выделить секционный доклад профессора Мiroслава Крстича (Miroslav Krstic) из университета Калифорнии, Сан-Диего, США. В своем докладе он предложил альтернативу хорошо известной сигма-модификации, применяемой в законах настройки параметров адаптивных регуляторов для обеспечения: 1) ограниченности параметрической ошибки при наличии внешних возмущений и непараметрической неопределенности, 2) сходимости ошибки слежения пусть и в ограниченную область, но с нерегулируемой границей, пропорциональной величине неизвестных идеальных параметров регулятора, непараметрической неопределенности и возмущений. В отличие от известных подходов, изложенный в докладе метод позволяет обеспечить желаемую заранее заданную точность по ошибке слежения при наличии произвольных внешних возмущений и непараметрической неопределенности за счет одновременного применения: зоны нечувствительности, нелинейного демпфирования и параметрической адаптации.

На взгляд авторов данной заметки, место проведения семинара было выбрано крайне удачно. Мехико – это очень большой мегаполис с красивыми парками и интересной архитектурой. Число жителей агломерации Мехико превышает 21 млн человек. Благодаря высокогорному субтропическому кли-

мату, в течение всего семинара температура воздуха была умеренной – около $+22^{\circ}\text{C}$, что располагало к спокойному обсуждению проблем и общению между учеными. Университет ИТАМ, основанный в 1946 г., в котором проходили все заседания, является небольшим (около 3500 студентов) частным университетом Мехико, кампус которого организован очень продуманно и создает атмосферу уюта. Разумеется, у участников семинара осталось время и для посещения многочисленных достопримечательностей Мехико, таких как Теотиуакан, Чапультепекский дворец, площадь Конституции, национальный музей антропологии, дворец изящных искусств и многих других.

Отдельно хотелось бы поблагодарить команду организаторов семинара, в частности председателя международного программного комитета профессора Ромео Ортегу (Romeo Ortega) и членов национального организационного комитета профессора Хосе Гваделупе Ромеро (Jose Guadalupe Romero), профессора Рафаэля Сиснейроса (Rafael Cisneros) и профессора Хьюго Родригеса (Hugo Rodriguez). Коллеги не только организовали ALCOS 2025 на очень высоком уровне, но и за день до его начала провели отдельный семинар “В ознаменование 40-летия научного сотрудничества между Россией и Мексикой в области теории управления” (“Commemorating forty years of scientific collaboration between Russia and Mexico in the field of Control Theory”), на котором выступила с приветствием представительница посольства РФ в Мексике и в котором, кроме уже упомянутых в данной заметке коллег, приняли участие профессора Л.М. Фридман (National Autonomous University of Mexico, UNAM), А.С. Позняк (Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute, CINVESTAV-IPN), Х. Морено (J. Moreno, National Autonomous University of Mexico, UNAM), И. Чаирез (I. Chairez, Monterrey Institute of Technology and Higher Education, ITESM), Л. Агуилар (L. Aguilar, Instituto Politecnico Nacional, IPN), Х. Давила (J. Davila, Instituto Politecnico Nacional, IPN), В.О. Никифоров (ИТМО) и др. Сообщения, которые делали участники семинара, были направлены как на представление научных результатов, так и на ознакомление слушателей с историей развития Российско-Мексиканского научного сотрудничества по тематике теории управления. Подобные семинары являются очень ценными для новых поколений исследователей, поскольку знание истории позволяет осмысленно ставить цели и определять задачи для дальнейших исследований.

Место проведения следующего семинара будет определено в 2026 г. в рамках конгресса ИФАК, который пройдет в г. Пусан, Южная Корея.

Более подробную информацию можно найти на официальной веб-странице <https://alcos2025.itam.mx/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Девятый семинар ИФАК по адаптации и обучению в системах управления и обработки сигналов (ALCOSP 2007) и третий

семинар ИФАК по периодическим системам управления (PSYCO 2007) // АиТ. 2008. № 4. С. 202–205.

2. *Бобцов А.А., Фрадков А.Л., Жири Ф.* 11-й семинар по адаптации и обучению в системах управления и обработки сигналов Международной федерации по автоматическому управлению (ALCOSP 2013) и 5-й семинар ИФАК по периодическим системам управления (PSYCO 2013) // АиТ. 2014. № 10. С. 153–157.

А.А. Бобцов, д-р техн. наук,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург,

А.И. Глуценко, д-р техн. наук,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,

К.А. Ласточкин, канд. физ.-мат. наук,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,

Р. Ортега, Ph.D.,
Автономный технологический институт Мексики, Мехико,

А.Л. Фрадков, д-р техн. наук,
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

В связи с непредвиденными обстоятельствами произведена замена DOI статей с префиксом Российской академии наук за 2025 год. В первых выпусках журналов РАН за 2026 год размещена информация о замене цифрового идентификатора на действующий DOI.

Таблица соответствия архивных и действующих цифровых идентификаторов объектов (DOI) выпусков журнала за 2025 г.

Наименование статьи	Автор / авторский коллектив	Цифровой идентификатор объекта (DOI)	
		архивный	действующий
Номер 1			
Финитная стабилизация по неполным измерениям систем нейтрального типа в классе регуляторов с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями	Хартовский В.Е., Урбан О.И.	10.31857/S0005231025010011	10.7868/S2413977725010011
Уравнение Лурье и эквивалентные гамильтоновы системы	Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С.	10.31857/S0005231025010027	10.7868/S2413977725010027
Подходы к оптимизации методов наведения на высокоскоростные интенсивно маневрирующие цели. Ч. 2	Верба В.С., Меркулов В.И., Харьков В.П.	10.31857/S0005231025010033	10.7868/S2413977725010033
Полунатурное моделирование цифровой системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ	Коньков А.Е., Кружков В.И., Павлова Е.А., Коренев П.С., Чектыбаев Б.Ж., Котов С.В., Зарва Д.Б., Жаксыбаева А.А.	10.31857/S0005231025010044	10.7868/S2413977725010044

О гарантированной оценке отклонения от целевого множества в задаче управления при обучении с подкреплением	Чистяков И.А.	10.31857/S0005231025010057	10.7868/S2413977725010057
Анализ устойчивости системы «мост–пешеходы» на основе критерия Цыпкина	Зайцева Ю.С., Фрадков А.Л.	10.31857/S0005231025010068	10.7868/S2413977725010068
Алгебраические методы синтеза моделей на основе графического представления автоматов	Меньших В.В., Никитенко В.А.	10.31857/S0005231025010073	10.7868/S2413977725010073
Номер 2			
Оптимальная абсолютная стабилизация неизвестных систем Лурье на основе экспериментальных и априорных данных	Коган М.М., Степанов А.В.	10.31857/S0005231025020014	10.7868/S2413977725020014
К вычислению размера границы области устойчивости по Шуру	Куковеров М.В.	10.31857/S0005231025020024	10.7868/S2413977725020024
Задачи H^2/H_∞ -теории регуляторов для линейных стохастических объектов мультипликативного типа	Шайкин М.Е.	10.31857/S0005231025020039	10.7868/S2413977725020039
Подходы к оптимизации методов наведения на высокоскоростные интенсивно маневрирующие цели. Ч. 3	Верба В.С., Меркулов В.И., Ильчук А.Р.	10.31857/S0005231025020047	10.7868/S2413977725020047

Визуальное сервоуправление для деформируемых объектов с использованием геометрических примитивов и заранее спланированных траекторий	Деррар Я., Саиди Ф., Мальти А.	10.31857/S0005231025020058	10.7868/S2413977725020058
Номер 3			
Оценивание состояния и стабилизация непрерывно-дискретных систем с неопределенными возмущениями	Маликов А.И.	10.31857/S0005231025030013	10.7868/S2413977725030013
Анализ устойчивости нестационарных механических систем с разрывными правыми частями	Платонов А.В.	10.31857/S0005231025030024	10.7868/S2413977725030024
Квазиоптимальное по быстродействию угловое ускорение космического аппарата, полученное на основе концепции Пуансо	Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.	10.31857/S0005231025030035	10.7868/S2413977725030035
Метод маргинального асимптотически-диффузионного анализа мультиклассовой RQ-системы $M_n/GI_n/1$	Назаров А.А., Фёдорова Е.А.	10.31857/S0005231025030041	10.7868/S2413977725030041

Синтез дискретных регуляторов многомерных систем по инженерным критериям качества	Честнов В.Н., Шатов Д.В.	10.31857/S0005231025030059	10.7868/S2413977725030059
Устойчивое регрессионное моделирование: методы внутренней точки, симплекс-метод, спуск по узловым прямым	Голованов О.А., Тырсин А.Н.	10.31857/S0005231025030063	10.7868/S2413977725030063
Траекторный метод восстановления сетевой инфраструктуры	Гребенюк Г.Г., Крыгин А.А.	10.31857/S0005231025030074	10.7868/S2413977725030074
Номер 4			
Адаптивная компенсация внешних возмущений в многоканальных системах при управлении по выходу	Никифоров В.О., Герасимов Д.Н., Дударенко Н.А.	10.31857/S0005231025040018	10.7868/S2413977725040018
Задача оптимального управления коэффициентами нелинейного уравнения типа Шредингера	Пашаев А.М., Искендеров А.Д., Мусаева М.А.	10.31857/S0005231025040024	10.7868/S2413977725040024
Декомпозиционно-автокомпенсационное распознавание сигналов на базе принципов непрерывности, инвариантности, размножения и ранжирования с учетом регулярных и нерегулярных помех	Булычев Ю.Г.	10.31857/S0005231025040036	10.7868/S2413977725040036

Многомерные непрерывные распределения и копулы, порождающие нетранзитивные наборы зависимых случайных величин	Лебедев А.В.	10.31857/S0005231025040043	10.7868/S2413977725040043
Управление качеством данных при решении задач в исследовательских инфраструктурах над неоднородными источниками данных	Скворцов Н.А.	10.31857/S0005231025040057	10.7868/S2413977725040057
Использование ансамблей с увеличенной дивергенцией в пространстве прогнозов в рекомендательных системах	Сенько О.В., Докукин А.А., Мельник Ф.А.	10.31857/S0005231025040061	10.7868/S2413977725040061
Минимаксный подход для учета качественных предпочтений при многокритериальной оценке	Шапошников Д.Е.	10.31857/S0005231025040075	10.7868/S2413977725040075
Номер 5			
Асимптотически-диффузионный анализ приоритетной RQ-системы $M^{(2)} M^{(2)} _1$	Назаров А.А., Измайлова Я.Е.	10.31857/S0005231025050013	10.7868/S2413977725050013
Адаптивное управление по выходу с гарантией заданного качества регулирования	Гуков А.А.	10.31857/S0005231025050025	10.7868/S2413977725050025

Синтез самопроверяемых дискретных устройств на основе полиномиальных кодов с контролем вычислений по нескольким диагностическим признакам	Ефанов Д.В., Пивоваров Д.В.	10.31857/S0005231025050036	10.7868/S2413977725050036
Нерегрессионные модели для игрового чат-бота с искусственным интеллектом для обучения программированию на основе головоломок типа Wordle	Варнавский А.Н.	10.31857/S0005231025050049	10.7868/S2413977725050049
Построение области Парето при комбинировании допустимых решений многокритериальной аксиальной задачи о назначениях	Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.	10.31857/S0005231025050056	10.7868/S2413977725050056
Статистическое исследование качества алгоритма соединения циклов для решения задачи коммивояжера на минимум	Леонова Ю.Ф., Панюков А.В.	10.31857/S0005231025050065	10.7868/S2413977725050065
Соотношения между длиной среднего кратчайшего пути и другими центральностями в графах	Тужилин М.А.	10.31857/S0005231025050072	10.7868/S2413977725050072

Номер 6			
Обобщение теоремы о кругах Гершгорина с применением к анализу и синтезу систем управления	Фуртат И.Б.	10.31857/S0005231025060012	10.7868/S2413977725060012
Экспоненциальная стабилизация по неполным измерениям и асимптотическая оценка решения линейных систем нейтрального типа	Хартовский В.Е., Метельский А.В., Карпук В.В.	10.31857/S0005231025060026	10.7868/S2413977725060026
Стабилизация колебаний в автономной скорректированной консервативной системе путем конструирования притягивающего цикла	Тхай В.Н.	10.31857/S0005231025060038	10.7868/S2413977725060038
Использование методов оптимальной фильтрации для пассивного мониторинга доступной пропускной способности сетевого канала	Борисов А.В.	10.31857/S0005231025060048	10.7868/S2413977725060048
Фильтр Калмана в задаче бескарданной аэро-гравиметрии с учетом уточненной модели погрешностей спутниковых данных	Архипова А.С., Вязьмин В.С.	10.31857/S0005231025060055	10.7868/S2413977725060055

Информационное управление стратегией игрока в игре олигополии n лиц при рефлексивном поведении игроков	Гераськин М.И.	10.31857/S0005231025060061	10.7868/S2413977725060061
Оптимизация по вероятностному критерию в динамической модели прохождения теста	Иванов С.В., Степанов А.Е.	10.31857/S0005231025060073	10.7868/S2413977725060073
Номер 7			
Гибридный метод комплексирования разнесенных датчиков для адаптивной идентификации стационарных и подвижных объектов в условиях априорной неопределенности	Булычев Ю.Г.	10.31857/S0005231025070017	10.7868/S2413977725070017
Программное управление поиском объектов в условиях ограничений на количество линий обработки в независимых каналах поисковой системы	Хуторцев В.В.	10.31857/S0005231025070028	10.7868/S2413977725070028
Построение виртуального анализатора с несколькими выходами на основе предиктора ошибок для управления качеством целевого продукта сложной ректификационной колонны	Штакин Д.В., Плотников А.А., Снегирев О.Ю., Торгашов А.Ю.	10.31857/S0005231025070039	10.7868/S2413977725070039

Алгоритм управления действиями игрока в игре триполии при линейных функциях спроса и издержек	Гераськин М.И.	10.31857/S0005231025070043	10.7868/S2413977725070043
Модификация многомерного нечеткого регулятора с локальным терм-делением входных переменных	Антипин А.Ф., Антипина Е.В., Мустафина С.А.	10.31857/S0005231025070053	10.7868/S2413977725070053
Методы рандомизированного машинного обучения для генерации ансамблей случайных данных с заданными числовыми характеристиками	Попков Ю.С., Попков А.Ю., Дубнов Ю.А.	10.31857/S0005231025070065	10.7868/S2413977725070065
Об эмерджентности систем бинарных отображений	Каркищенко А.Н.	10.31857/S0005231025070076	10.7868/S2413977725070076
Номер 8			
Поисковый метод стоастической нестационарной оптимизации функции с гёльдеровским градиентом	Акинфиев И.А., Граничин О.Н., Тарасова Е.Ю.	10.31857/S0005231025080013	10.7868/S2413977725080013
О надежном восстановлении сигналов из непрямых наблюдений	Бекри Я., Юдицкий А., Немировский А.	10.31857/S0005231025080025	10.7868/S2413977725080025

Точные аппроксимации множеств с вероятностными ограничениями с помощью пакетного вероятностного масштабирования	Мирасьерра В., Маммарелла М., Даббене Ф., Аламо Т.	10.31857/S0005231025080031	10.7868/S2413977725080031
Оптимальное робастное слежение для дискретного минимально-фазового объекта при неизвестных смещении и норме внешнего возмущения и нормах неопределенностей	Соколов В.Ф.	10.31857/S0005231025080041	10.7868/S2413977725080041
О проблеме оптимального управления с управлением в диске	Хильдебранд Р., Шикаке Мапунгвана Т.	10.31857/S0005231025080052	10.7868/S2413977725080052
Решение задач о многотоварных сетевых потоках большой размерности на графических процессорах	Чжан Ф., Бойд С.	10.31857/S0005231025080066	10.7868/S2413977725080066
Номер 9			
Исследование градиентного метода с неточной информацией о градиенте на некоторых классах (L_0, L_1) -гладких невыпуклых задач	Аблаев С.С., Стоякин Ф.С., Федотов М.Н., Алкуса М.С., Савчук О.С., Гасников А.В.	10.31857/S0005231025090015	10.7868/S2413977725090015
Безградиентная стохастическая оптимизация для аддитивных моделей	Ахаван А., Цыбаков А.Б.	10.31857/S0005231025090025	10.7868/S2413977725090025

Синтез робастных законов управления по зашумленным текущим данным	Бирюков Р.С., Коган М.М.	10.31857/S0005231025090035	10.7868/S2413977725090035
Обзор методов предупреждения конфликтов при управлении воздушным движением с помощью глубокого обучения с подкреплением	Кулида Е.Л., Лебедев В.Г.	10.31857/S0005231025090048	10.7868/S2413977725090048
Разработка конструкции и системы планирования траектории гибкого змееподобного робота-манипулятора на основе эмпирического подхода	Синьбинь Чжан, Чжо Чэнь, Хаосян Су, Лиго Тань, Хунвэй Лю, Маньлу Лю, Цзяньвэнь Хо, Новикова С.В.	10.31857/S0005231025090055	10.7868/S2413977725090055
Номер 10			
Псевдооптимальное решение вариационной задачи со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса	Афанасьев В.Н.	10.31857/S0005231025100014	10.7868/S2413977725100014
Синтез гибридных нелинейных систем управления на основе квазилинейного подхода	Гайдук А.Р.	10.31857/S0005231025100027	10.7868/S2413977725100027

Метод функций Грина в задаче о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой	Хацкевич В.Л.	10.31857/S0005231025100035	10.7868/S2413977725100035
Асимптотическое поведение анизотропийного регулятора в форме динамической обратной связи по выходу при малых значениях средней анизотропии внешних возмущений	Белов И.Р., Кустов А.Ю.	10.31857/S0005231025100044	10.7868/S2413977725100044
Применение фильтра линейных псевдонаблюдений в задачах слежения и позиционирования по наблюдениям со случайными запаздываниями	Босов А.В.	10.31857/S0005231025100058	10.7868/S2413977725100058
Групповые квазиПуассоновские модели в анализе очередей пачечного телекоммуникационного трафика	Лихтиндер Б.Я., Привалов А.Ю.	10.31857/S0005231025100068	10.7868/S2413977725100068
Номер 11			
Численный метод решения задачи быстрого действия для линейных нестационарных дискретных систем общего вида	Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А.	10.31857/S0005231025110018	10.7868/S2413977725110018

Синтез ПИД-регулятора для подавления ограниченных внешних возмущений	Хлебников М.В.	10.31857/S0005231025110024	10.7868/S2413977725110024
Синтез релейных регуляторов автоколебательных систем управления на основе обучающих примеров	Мозжечков В.А.	10.31857/S0005231025110034	10.7868/S2413977725110034
Модель обслуживания мультисервисного трафика в узле доступа спутниковой сети связи с динамически изменяемой скоростью предоставления сервисов	Маслов А.А., Себекин Г.В., Степанов М.С., Степанов С.Н., Щурков А.О.	10.31857/S0005231025110044	10.7868/S2413977725110044
Траекторное противодействие линейному наблюдателю	Потапов А.П., Галяев А.А.	10.31857/S0005231025110058	10.7868/S2413977725110058
Распределенный алгоритм нумерации вершин графа, совмещенный с построением дерева обхода в ширину	Кузнецов О.П.	10.31857/S0005231025110064	10.7868/S2413977725110064
Номер 12			
Обзор методов производственной фотограмметрии повышенной точности	Гудым А.В., Соколов А.П.	—	10.7868/S2413977725120013

Алгоритм построения матриц обратной связи в задаче размещения спектра для линейной системы управления	Зубова С.П., Раецкая Е.В.	—	10.7868/S2413977725120029
Комплексный метод углового сверхразрешения групповой цели	Лаговский Б.А., Рубинович Е.Я.	—	10.7868/S2413977725120033
Обобщенное $\mathcal{H}_2$ -управление линейной непрерывной системой с марковскими переключениями на конечном горизонте	Бирюков Р.С., Бубнова Е.С.	—	10.7868/S2413977725120049
Об одной задаче, связанной с моментом первого достижения заданного уровня случайным процессом	Семаков С.Л.	—	10.7868/S2413977725120053

СОДЕРЖАНИЕ

Стохастические системы

Маркович Н.М. Количество треугольников в обобщенной модели кластерного присоединения	3
Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Инвариантность стационарных распределений экспоненциальных сетей с запретами	21

Робастное, адаптивное и сетевое управление

Сперанский Д.В. Оптимальные покрывающие деревья в задачах диагностики и синтеза нечетких устройств	32
--	----

Управление в технических системах

Максименко М.В., Тихонов А.А. Модификация электродинамического метода трехосной стабилизации искусственного спутника земли в орбитальной системе координат	46
--	----

Управление в социально-экономических системах

Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Агрегированные индикаторы динамики игры олигополии	64
Шавшин Р.К. Роль дизайна рынка в ценообразовании и распределении рыночной власти на конечных рынках	76

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Галяев А.А., Берлин Л.М., Лысенко П.В., Бабилов В.Г. Оптимизационные постановки в задаче обнаружения сигнала	103
--	-----

Заметки, хроника, информация

Бобцов А.А., Глущенко А.И., Ласточкин К.А., Ортега Р., Фрадков А.Л. 15-й семинар ИФАК по адаптивным и обучающимся системам управления. .	124
Таблица соответствия архивных и действующих цифровых идентификаторов объектов (DOI) выпусков журнала за 2025 г.	131

C O N T E N T S

Stochastic Systems

Markovich N.M. Counting Triangles in the Generalized Clustering Attachment Model	3
Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. Invariance of Stationary Distributions of Exponential Networks with Prohibitions	21

Robust, Adaptive and Network Control

Speranskiy D.V. Optimal Covering Trees in Problems of Diagnostics and Synthesis of Fuzzy Devices	32
---	----

Control in Technical Systems

Maksimenco M.V., Tikhonov A.A. Modification of the Electrodynamic Method of Triaxial Satellite Stabilization in the Orbital Frame	46
--	----

Control in Social Economic Systems

Algazin G.I., Algazina D.G. Aggregate Indicators of Oligopoly Game Dynamics ...	64
Shavshin R.K. Pricing, Market Power and Friction in Finite Market: The Role of Proposing Side	76

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Galyaev A.A., Berlin L.M., Lysenko P.V., Babikov V.G. Optimization Statements of Signal Detection Problems	103
---	-----

Notes, Meetings, Information

15th IFAC Workshop on Adaptive and Learning Control Systems	124
Table of Correspondence of Archived and Current Digital Object Identifiers (DOI) of the Journal Issues for 2025	131