



ISSN 0005-2310 (Print)
ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

4

АПРЕЛЬ

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

Тематический выпуск

© 2026 г.

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВЫПУСКУ ПО МАТЕРИАЛАМ 17-й МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ»

В специальном выпуске представлены избранные доклады 17-й международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2024)», г. Москва, состоявшейся 24–26 сентября 2024 г. Специфику рассматриваемых работ характеризует ориентация на решение актуальных задач управления крупномасштабными системами. Работы демонстрируют движение от фундаментальных теоретических построений (уравнения математической физики, теория устойчивости) через разработку новых алгоритмов и методов (оптимизация, робастное управление, машинное обучение) к решению конкретных прикладных задач в промышленности, энергетике и социальной сфере. Во всех работах объектом выступает система, которую можно охарактеризовать как крупномасштабную:

- Технические и техноприродные системы: энергосистемы (анализ колебательной устойчивости, И.Б. Ядыкин), процессы разработки нефтегазовых месторождений (модели двухфазной фильтрации, М.М. Вольных и А.Г. Кушнер; размещение скважин, А.И. Ермолаев и др.), химические и нефтеперерабатывающие предприятия (ликвидация аварий, А.Ф. Резчиков и др.), машиностроительные предприятия (теория расписаний, Е.Н. Хоботов).
- Организационные и социально-экономические системы: научные коллективы (производительность труда, А.С. Богомолов и др.), энергетический сектор (прогнозирование показателей, В.А. Иванюк), проектные программы (учет «мягких зависимостей», И.В. Буркова и А.В. Щепкин).

Работа А.С. Богомолова, О.И. Дранко, В.А. Кушникова и др. «Математическая модель увеличения производительности труда научного коллектива» находится в фокусе текущей научно-технической политики России. Главная новизна работы заключается в формализации процесса коллективного научного творчества как оптимизационной задачи. Авторы предлагают рассматривать процесс подготовки публикаций не как неделимое целое, а как набор дискретных заданий (написание введения, обзора, проведение расчетов и т.д.), которые могут быть распределены между сотрудниками с разной эффективностью. Авторы напрямую связывают свою работу с Национальным проектом Российской Федерации «Производительность труда», целью которого является значительное повышение этого показателя к 2030 г. Проблема

повышения производительности интеллектуального/творческого труда актуальна для академических институтов, университетов, корпоративных научных центров и любых других организаций, где результат зависит от эффективности командной работы исследователей.

Статья И.Б. Ядыкина «Энергетические метрики устойчивости линейных непрерывных систем» находится на переднем крае фундаментальной теории управления, решая задачи, востребованные в современных приложениях (энергетика, сложные сети). Статья содержит несколько крупных и взаимосвязанных оригинальных результатов: концепцию базовых систем и инвариантных энергетических метрик, спектральные разложения для кратных корней, новые формулы для решений уравнений Ляпунова в частотной области, эффективный алгоритм вычисления обратного грамиана и гибридный критерий устойчивости. Автор убедительно демонстрирует связь работы с актуальными прикладными задачами, такими как анализ колебательной устойчивости электроэнергетических систем (слабодемпфированные межрайонные колебания, резонансное взаимодействие мод), анализ управляемости сложных сетей (социальных, транспортных, биологических) и создание цифровых двойников. Это подчеркивает востребованность результатов в высокотехнологичных отраслях.

Работа М.М. Вольных, А.Г. Кушнера «Задача Коши для уравнения Бакли–Леверетта двухфазной фильтрации с переменной пористостью» отличается ярко выраженной прикладной (нефтяная инженерия) и теоретической (математическая физика) составляющими. Статья содержит несколько оригинальных научных результатов: новую постановку классической задачи (переменная пористость), применение геометрического аппарата для ее анализа, получение явных формул для характеристик и многозначного решения в важном частном случае. Работа вносит существенный вклад как в теорию уравнений в частных производных, так и в математическое моделирование процессов нефтедобычи. Полученные результаты (параболические характеристики вместо прямых) качественно отличаются от классического случая, что демонстрирует важность учета переменной пористости. Работа С.А. Кочеткова, В.А. Уткина «Робастный подход к динамической компенсации возмущений» направлена на решение ключевой проблемы теории управления – обеспечения робастности к возмущениям – и подтверждает это на современном и сложном объекте (БПЛА с грузом). Статья характеризуется высоким уровнем новизны и содержит ряд оригинальных научных результатов, главными из которых являются: 1) синтез методов динамической компенсации и скользящих режимов для обеспечения робастности в нелинейных системах и 2) новая концептуальная постановка задачи, где часть модели объекта выступает в роли управляемого генератора неопределенностей. Работа вносит значительный вклад в развитие теории робастного и инвариантного управления.

Работа А.Ф. Пашенко, Е.С. Дуванова «Гибридные регуляторы в задачах управления реальными системами» отвечает на запрос промышленности в создании адаптивных и точных систем управления для сложных объек-

тов, подтверждая это экспериментами. Работа обладает научной новизной на инженерно-методологическом уровне. Главный вклад – в оригинальном синтезе и сравнительном анализе двух гибридных подходов (NNPC и FQR), их детальной проработке в среде MATLAB/Simulink и успешной апробации на реальных лабораторных объектах с разной динамикой.

Работа А.Ф. Резчикова, О.И. Дранко, В.А. Кушникова и др. «Модели для управления ликвидацией последствий критических ситуаций на нефтеперерабатывающих и химических предприятиях» посвящена проблеме промышленной безопасности, защиты населения и территорий от чрезвычайных ситуаций техногенного характера, что соответствует приоритетам, закрепленным в федеральном законодательстве (№68-ФЗ) и ГОСТах. Сильной стороной проведенного исследования является сочетание комплексного системно-динамического подхода к задаче ликвидации аварий с оригинальным алгоритмом коррекции модели. Авторы предлагают итеративный алгоритм, позволяющий поддерживать погрешность модели на приемлемом уровне ($\leq 10\%$).

Статья Е.Н. Хоботова «Методы построения и особенности расписаний работ для предприятий машиностроения» решает ключевую и давно назревшую проблему теории расписаний – переход от оптимизации на уровне цеха к реальному планированию на уровне крупного машиностроительного предприятия. Ее несомненная научная новизна заключается в оригинальной, многоуровневой и адаптивной методологии последовательного агрегирования/декомпозиции, которая позволяет практически решать задачи ранее недоступной размерности.

Ценность статьи В.А. Иванюк «Применение методов машинного обучения в анализе и прогнозировании малых выборок макроэкономических показателей энергетического сектора РФ» заключается в оригинальном прикладном анализе. Автор проводит сравнительный анализ трех принципиально разных классов моделей (классическая линейная регрессия, метод экспоненциального сглаживания и нейросетевой подход) на тщательно обработанных данных с применением байесовского ансамблирования (усреднения), проработкой ограничений, отраслевой детализацией и выделением критических секторов.

Работа И.В. Бурковой, А.В. Щепкина «Учет мягких зависимостей при наличии стохастической неопределенности в реализации проектов программы» имеет большую практическую значимость. В современном проектном управлении, особенно в сложных программах (строительство, ИТ-разработка, НИОКР), руководители постоянно сталкиваются с выбором: стоит ли внедрять дополнительные, необязательные мероприятия, которые могут ускорить или удешевить последующие этапы? Это и есть «мягкие зависимости» в терминах авторов. Новизна данной статьи заключается в углубленном анализе влияния вероятностного характера этих зависимостей.

Статья А.И. Ермолаева, А.В. Ахметзянова, А.Р. Латипова «Управляемый случайный поиск и отношение правдоподобия в задачах булева программи-

рования» посвящена разработке и тестированию приближенного алгоритма для решения задач линейного булева программирования большой размерности. Актуальность работы обусловлена тем, что для многих прикладных задач точные методы (например, метод ветвей и границ) требуют непоправимых вычислительных ресурсов, а ценность точного решения снижается из-за погрешности исходных данных. Авторы предлагают итерационный алгоритм управляемого случайного поиска, который на каждом шаге проверяет одну из двух статистических гипотез с использованием последовательного критерия отношения вероятностей (ПКОВ). Эффективность алгоритма продемонстрирована на практически важной задаче разработки нефтегазовых месторождений – оптимальном размещении заданного числа скважин. Вычислительные эксперименты проводились для различных размерностей сетки (до 400 блоков) и числа скважин.

Председатель Программного комитета конференции
«Управление развитием крупномасштабных систем»

С.Н. Васильев, академик РАН

snv@ipu.ru

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН)

© 2026 г. А.С. БОГОМОЛОВ, д-р техн. наук (Alexbogomolov@ya.ru)
(Саратовский научный центр РАН;
СГУ им. Н.Г. Чернышевского),
О.И. ДРАНКО, д-р техн. наук (olegdranko@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
В.А. КУШНИКОВ, д-р техн. наук (kushnikoff@iptmuran.ru)
(Саратовский научный центр РАН),
А.Ф. РЕЗЧИКОВ, чл.-корр. РАН (rw4cy@mail.ru),
И.А. СТЕПАНОВСКАЯ, канд. техн. наук (irstepan@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УВЕЛИЧЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА НАУЧНОГО КОЛЛЕКТИВА

Исследование основано на идее внесения необходимой практичной, производственной составляющей и оптимизации в творческий процесс создания научных публикаций. Производительность труда научного коллектива рассматривается как относительная оценка его публикационной активности. Содержательно и формально ставится задача распределения заданий между членами научного коллектива с целью максимизации производительности труда. Целесообразное распределение заданий может определяться путем решения задачи оптимизации. В этой задаче нижние ограничения формируются исходя из плана публикаций по выполняемому государственному заданию, верхние ограничения – из максимальной должностной нагрузки членов коллектива, целевая функция – отношение оценки публикационной активности коллектива к общему количеству часов нагрузки. Предлагаемый подход проиллюстрирован расчетами на основе накопленной статистики. В результате расчетов на основании текущих критериев оценки публикационной активности выявлено, что наиболее продуктивными по шкале оценки Минобрнауки будут исследования преимущественно в направлении публикации статей I уровня «Белого списка научных журналов», тогда как для обеспечения высокого показателя результативности научной деятельности по текущей шкале Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН оказываются наиболее предпочтительно заниматься подготовкой выступлений на конференциях Scopus и публикаций в журналах IV уровня. При этом рекомендации сильно зависят от нормировки времени сотрудников на различные задания. Расчет по реальным данным показывает значительное увеличение производительности труда в одной из лабораторий ИПУ РАН в результате применения предлагаемого подхода.

Ключевые слова: моделирование, управление, оптимизация, производительность труда, публикация, научный труд.

DOI: 10.7868/S2413977726040014

1. Введение

Научное исследование – это сложный многослойный процесс, творческие составляющие которого сложно поддаются формализации и планированию. Тем не менее государство и частные грантодатели представляют определенные требования к результатам этого процесса с тем, чтобы они были получены и применены своевременно. В связи с этим перед научным работником и коллективом возникает задача систематизации и планирования процесса подготовки публикаций с целью повышения продуктивности их создания. Проблема повышения производительности труда в настоящее время актуальна для многих отраслей человеческой деятельности. Так, в Национальном проекте Российской Федерации «Производительность труда» запланировано повышение этого показателя не менее чем на 40% к 2030 г. на предприятиях базовых и сырьевых отраслей экономики, учреждениях социальной сферы [1]. Развитие актуальных моделей и методов решения данной задачи необходимо для сохранения и увеличения конкурентоспособности государства в современном мире. Значение производительности труда можно рассматривать в числе индикаторов развития страны [2].

К числу приоритетных направлений решения поставленной задачи следует относить прикладную и фундаментальную науку. Однако в креативных индустриях, к которым относится научное творчество, решение задачи повышения производительности труда имеет свою специфику. При оценке научной деятельности коллектива обычно руководствуются справедливым мнением о том, что основным критерием этой оценки является теоретическая и практическая значимость результатов исследований. Но понимание и признание этой значимости сообществом может прийти не сразу. Поэтому в эпоху информатизации особенно важно активизировать внедрение получаемых научных результатов. Для этого процесс научного творчества, на взгляд авторов статьи, должен сопровождаться систематическими и целенаправленными усилиями по продвижению в ведущие профильные журналы и наукометрические системы. Успешное продвижение научных результатов не только способствует их признанию, но и дает необходимый, в том числе – материальный, стимул продолжению деятельности коллектива. Для решения этих вопросов предназначены предлагаемые государством, квалифицированными заказчиками и экспертными советами системы оценки продуктивности научной работы. В России основными такими системами являются «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» [3] и «Белый список научных журналов» Российского центра научной информации [4] (далее БС РЦНИ). В международном пространстве это Scopus [5], Web of Science [6] и другие системы. Активность представления исследователей и изданий в этих пространствах связана с известными и принятыми в мире системами и методологиями оценки научных трудов, такими как индекс Хирша [7], индекс FWCI (отношение общего количества цитирований к среднему количеству цитиро-

ваний по предметной области) [8], а также другими показателями, например на основе библиометрических показателей [9] и оценки мнений в социальных сетях [10]. Однако эти оценки и алгоритмы их вычисления не дают непосредственно ответа на вопросы коллективной организации научного труда.

В силу изложенных причин вопросы повышения производительности научного труда и публикационной активности в таких системах нуждаются в систематическом изучении и обеспечении специализированными математическими моделями и алгоритмами. Эти модели и алгоритмы будут направлены на управление производительностью труда отдельного исследователя, лаборатории, института и научных отраслей страны в целом. Предлагаемая статья посвящена построению таких моделей и алгоритмов.

2. Состояние проблематики

2.1. Методологические основы

Теория решения изобретательских задач [11] может дать ряд полезных рекомендаций по рациональной подготовке коллективных публикаций:

- анализ и разрешение противоречий (погружение в тему против ограниченного времени, единый стиль статьи против личных особенностей письма разных авторов, тщательная экспертиза против оперативного выполнения);
- применение основных принципов и инструментов теории решения изобретательских задач (ресурсы, автоматизация и др.);
- распределение ролей сотрудников в команде (ведущий автор, исследователь, теоретик, практик, редактор).

Однако эта теория не предлагает использовать математические методы и расчеты при распределении нагрузки в виде заданий, наиболее подходящих тем или иным исполнителям.

Похожие рекомендации можно вывести из концепции научной организации труда [12]. При создании публикаций должен иметь место системный подход к распределению обязанностей между участниками процесса, где каждый специалист выполняет строго определенные функции:

- руководитель проекта координирует работу и осуществляет финальное редактирование;
- исследователь занимается сбором и анализом данных;
- методолог разрабатывает исследовательский подход;
- писатель формирует текст;
- редактор отвечает за стилистическую правку и корректуру.

При этом важно учитывать квалификационный уровень участников: научный руководитель обеспечивает экспертную оценку, соавторы разрабатывают методологию, аспиранты занимаются первичной обработкой данных, а младшие научные сотрудники выполняют вспомогательные задачи.

Полагаем, что математические модели и аналитические расчеты для поддержки и обоснования принятия решений при распределении заданий по подготовке публикаций станут развитием и конкретизацией этих подходов. При этом будут учтены принципы во многом перекликающиеся с этими концепциями методологии бережливого производства (Lean Manufacturing) [13], японской методологии непрерывного улучшения [14] и системы 5S (5С – сортировка, систематизация, содержание в чистоте, стандартизация, совершенствование (самодисциплина)) [15].

2.2. Математические модели и методы

Нахождение целесообразного распределения заданий при подготовке публикаций может быть основано на классических методах математического программирования [16] и их модификациях [17], используемых при организации и планировании производства, а также для улучшения прогнозируемых показателей функционирования организационных систем [18–20]. Рассматриваются как методы индивидуального стимулирования [21], так и задачи, связанные с распределением работ по исполнителям, где следует упомянуть вариации классических методов решения задачи о назначениях [22]. Эти методы направлены на распределение работ для их скорейшего завершения, что отчасти соответствует целям рассматриваемой задачи.

2.3. Современные исследования и практики по распределению труда

Рассматриваемая задача может трактоваться как задача управления временем, однако современные техники и методы тайм-менеджмента дают в основном стратегические рекомендации качественного характера.

Повышение продуктивности деятельности человека в настоящее время исследуется в различных отраслях, в том числе с использованием искусственного интеллекта: в логистике [23], в цепочках поставок в сфере туризма [24] и др. В сфере интеллектуального производства также широко исследуется вопрос баланса людей и роботов [25]. В [26] предлагается использовать модель системной динамики для анализа взаимосвязей факторов, влияющих на производительность труда в коллективе. Несмотря на то, что в этой статье не дается рекомендаций по целесообразному распределению работ, отметим перспективы системной динамики для анализа и моделирования выполнимости планов такого целесообразного распределения.

В современных публикациях показывается, что значимую роль в повышении производительности труда может играть управление талантами [27], однако оно используется преимущественно при формировании коллективов, а не при распределении задач по сотрудникам.

Среди предлагаемых рекомендаций – повышение мобильности исследователей [28], смена места жительства и организации после окончания обучения [29]. Выводы в таких исследованиях основаны на изучении достаточно

обширной статистики, однако конкретных рекомендаций для работы научных коллективов там не дается.

В других работах некоторые стратегические рекомендации даются преимущественно для индивидуальных исследователей. Рекомендуются регулярность, системность и умеренность: работа над текстом, не превышающая в сумме 40–45 ч в неделю, избегание прокрастинации и перфекционизма, метод «малых шагов» при написании статей [30].

В ИПУ РАН разрабатывается информационная система анализа научной деятельности (ИСАНД) [31] в области теории управления [32, 33]. На 15.01.2025 обработано 186 000 публикаций 185 000 авторов. Описана онтология ИСАНД, ориентированная на представление и сбор знаний в области теории управления: как научного знания (онтология теории управления), так и знаний, связанных с научной деятельностью агентов в данной области (организаций, журналов, конференций и отдельных исследователей).

Отдельно авторами различных публикаций отмечается польза совместного творчества при создании публикаций. Считается, что ученый может повысить свою продуктивность, работая в совместных проектах с другими исследователями. Отсюда можно предположить, что общая оценка публикационной активности научного коллектива при распределении работ над отдельными статьями между исследователями будет больше, чем в случае, когда они будут готовить только свои личные публикации. Это предположение согласуется с опытом: высокорейтинговые публикации, как правило, имеют достаточно большое число соавторов. Однако совместная работа над публикациями, при достаточно большом их требуемом количестве, в ряде случаев нуждается в определенном регулировании в части целесообразного распределения заданий и передачи информации между исполнителями отдельных работ. Вопросы такой организации научных коллективов, сотрудники которых обладают индивидуальными особенностями, разными способностями и техническими возможностями для выполнения той или иной части работы, в открытых публикациях, по-видимому, не исследовались. Поиску аналитических моделей и методов для решения таких вопросов посвящено настоящее исследование. Рассматриваемая здесь задача имеет следующую формально-содержательную постановку.

3. Постановка задачи

Пусть имеется коллектив из n сотрудников, которые в течение периода времени T делают m видов публикаций. Каждая публикация вида $i = 1, \dots, m$ оценивается в $p_i \geq 0$ баллов. Далее, если не оговорено иное, индекс i будет использоваться для публикаций и будет подразумеваться, что $i = 1, \dots, m$.

Задано множество типов частей публикации $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ (например: обзор, модель, расчет и т.д.) так, что публикация каждого вида i представима как некоторое множество частей $S_i \subseteq S$. Часть публикации определенного

типа назовем заданием, например: введение, заключение, математическая модель и т.д. Рассмотрим универсум U – множество всех заданий, т.е. частей всех типов $s_1, \dots, s_k$ всех видов публикаций. Предполагаем, что различные сотрудники могут в произвольном порядке выполнять задания из U . Публикация считается завершенной, когда завершено выполнение всех заданий в ней.

Для каждого сотрудника $j = 1, \dots, n$ известно время $t_{j,i}$ успешного выполнения им любого задания $u_i \in U$. Это значение определяется эмпирически с учетом должности, опыта, склонностей и технических возможностей сотрудника. Оно может отражать как творческие качества сотрудника (например, «креативность» как способность за короткое время выдать продуктивный замысел исследования), так и организаторские (достаточно быстро скоординировать части публикации от разных соавторов) и исполнительские способности, организованность (например, оперативно оформить, отправить в журнал новую публикацию). Далее, если не оговорено иное, индекс j будет использоваться для обозначения сотрудников и будет подразумеваться, что $j = 1, \dots, n$.

Задача состоит в том, чтобы каждому сотруднику j поставить в соответствие (поручить) множество $U_j(T) \subseteq U$ заданий таким образом, чтобы общая оценка завершенных публикаций членов научного коллектива за период T по отношению к штатному времени работы за этот период была максимальной:

$$\frac{\sum_{i=1}^m k_i p_i}{\sum_{j=1}^n T_j} \rightarrow \max,$$

где $k_i \geq 0$ – количество сделанных коллективом за период T публикаций типа i , T_j – нагрузка сотрудника за период T .

При этом должны выполняться следующие ограничения:

- $k_i \geq a_i$, где $a_i \geq 0$ – заданные числа, отражающие план публикаций из заявки на выполняемую тему государственного задания или гранта;
- суммарное время загрузки каждого сотрудника j за период T не превышает его нагрузку T_j ;
- каждое задание поручается не более чем одному сотруднику. Это обеспечивается достаточно детальным разбиением публикаций на задания;
- полагаем, что за период T готовится целое количество публикаций. Случай, когда работа с публикацией идет несколько лет, не рассматриваем. В реальных ситуациях публикация может быть подготовлена, но не принята. В дальнейших периодах она может перерабатываться и подаваться в другие издания, и результат затраченных усилий и ресурсов в период T эффективно не оценивается.

Содержательно задача состоит в распределении ресурсов научных сотрудников наиболее продуктивным образом.

4. Модели для решения задачи

4.1. Модель подготовки публикации

Предлагаемая укрупненная схема подготовки публикации представлена на рис. 1. Процесс носит итерационный характер, что отражено обратными связями на схеме. На практике в процессе создания публикации эти связи могут быть сложнее.

В данной работе при расчетах декомпозиции по исполнителям были выделены следующие ниже основные компоненты публикации (задания). Каждая из этих компонент, как следует из опыта написания статей авторским коллективом, может быть поручена научному работнику в зависимости от его запаса времени, квалификации и склонностей.

1. Текст
 - 1.1. Название
 - 1.2. Аннотация
 - 1.3. Введение
 - 1.4. Обзор
 - 1.5. Модель
 - 1.6. Алгоритм
 - 1.7. Данные
 - 1.8. Расчеты
 - 1.9. Обсуждение расчетов
 - 1.10. Заключение
 - 1.11. Литература
 - 1.12. Координация разделов
 - 1.13. Оформление
2. Экспертиза. Акт
3. Отправка в журнал / на конференцию
4. Работа с рецензиями
5. Презентация, выступление
6. Фиксация результатов (ПРНД, конкурсы лучших работ)

На рис. 2 представлен типовой фрагмент процесса распределения заданий для одной публикации (статьи III уровня БС РЦНИ). Под текущим ресурсом понимается оставшееся у сотрудника на момент планирования время в часах, в кругах обозначено количество часов, требующееся сотруднику на выполнение задания, двойным обведены вершины, выбираемые в рамках оптимального или квазиоптимального решения.

Далее опишем предлагаемую математическую модель для целесообразного распределения заданий по подготовке публикации.

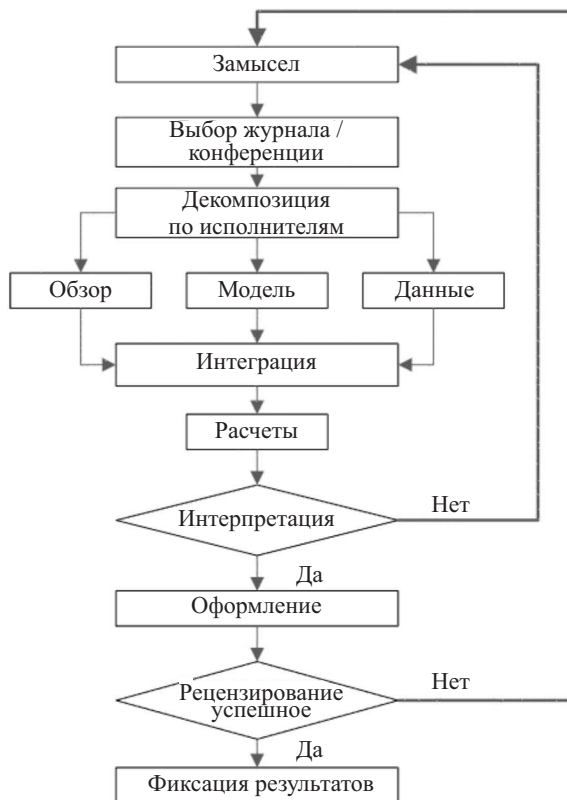


Рис. 1. Укрупненный граф этапов создания публикации.

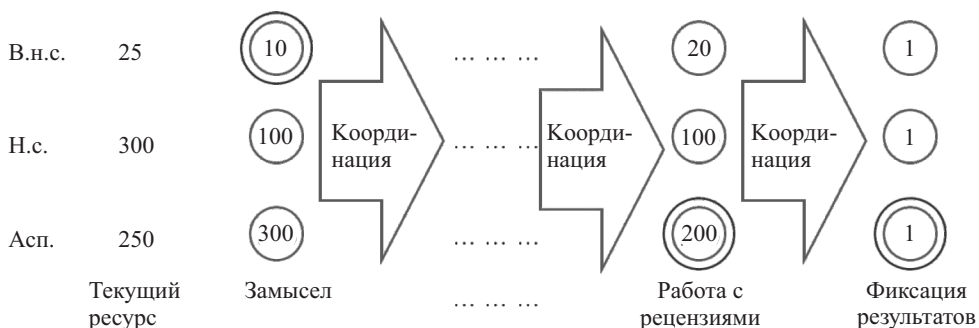


Рис. 2. Фрагмент процесса распределения заданий для одной публикации.

4.2. Математическая модель

В общем случае, решение предполагает нахождение распределения заданий в виде 0–1 матрицы X из n строк и $m' = \sum_{i=1}^m p_i e_i$ столбцов, где $p_i \geq a_i$ – реалистичная верхняя оценка количества публикаций типа i за период T (например, у небольшого коллектива за год, вероятно, будет не более одной–двух статей I уровня БС РЦНИ); e_i – количество заданий в разбиении публикации типа i .

Каждая строка матрицы X определяет выполнение или невыполнение сотрудником j каждого задания в каждой из рассматриваемых публикаций коллектива. Элемент матрицы $[X]_{j,i}$ равен 1, если сотруднику поручено задание, соответствующее столбцу i матрицы X , и равен 0, если не поручено.

Публикацию A считаем завершенной (запланированной к завершению), если суммы $\sum_{j=1}^n [X]_{j,i}$ по всем столбцам матрицы X , соответствующим этой публикации, равны 1 (при условии, что каждое задание поручается не более чем одному исполнителю). Обозначим через $I(A, X)$ индикатор выполнения этого условия: $I(A, X) = 1$, если у каждого из заданий, на которые разбита публикация A , есть исполнитель, и $I(A, X) = 0$ в противном случае. Некоторые свойства функции $I(A, X)$ дает следующее утверждение.

Утверждение 1. Функция $I(A, X)$ нелинейна относительно переменных X , но представима с использованием операции умножения.

Доказательство утверждения 1. Нелинейность $I(A, X)$ вытекает из того, что матрицу X_0 , в которой публикация A будет завершенной, т.е. $I(A, X_0) = 1$, можно легко представить в виде суммы матриц $X_0 = X_1 + X_2$, в каждой из которых публикация A не завершена, а значит, $I(A, X_1) = I(A, X_2) = 0$. Линейность же функции $I(A, X)$ по переменным X требовала бы равенства $I(A, X_0) = I(A, X_1) + I(A, X_2)$, что в этом случае не соблюдается.

Представимость с использованием операции умножения следует из того факта, что $I(A, X)$ можно представить как

$$I(A, X) = \prod_{i \in [X]_A} \sum_{j=1}^n [X]_{j,i},$$

где $[X]_A$ – множество номеров столбцов X , связанных с A , что и требовалось.

Далее, с учетом введенных обозначений, количество выполняемых в период T публикаций вида i будет $k_i = \sum_{j=1}^{p_i} I(A_{i,j}, X)$, где $A_{i,j}$ – публикация типа i под номером j . Тогда оценка публикационной активности коллектива равна

$$Pub = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^{p_i} I(A_{i,j}, X).$$

Учитывая размерность введенной выше матрицы переменных X , далее будем рассматривать задачу булева программирования с nm' переменными. При этом большая часть переменных будет равна 0, что отражает неучастие сотрудников в некоторых публикациях. Кроме того, размерность задачи на практике существенно снижается за счет предположений о числах p_i , а также за счет поручения одним и тем же сотрудникам близких заданий.

Пусть нормы времени, которое требуется сотрудникам на выполнение заданий U , записаны в матрице $Norm$ размерности $\sum_{i=1}^m e_i$, где n – количество сотрудников, m – количество типов публикаций, e_i – количество заданий, на которые разбивается публикация типа i . Элемент матрицы $Norm$ равен количеству часов, которое требуется сотруднику из строки для выполнения задания из соответствующего столбца.

Учитывая, что публикации каждого типа i могут рассматриваться в количестве от 1 до p_i , построим соответствующую расширенную нормировочную матрицу $Norm'$ размерности $n \times m'$, где $\sum_{i=1}^m p_i e_i$. Столбцы $Norm'$ соответствуют заданиям, на которые разбиваются публикации $1, \dots, p_1$ типа 1, $1, \dots, p_2$ типа 2, $\dots, 1, \dots, p_m$ типа m . Тогда время, затрачиваемое сотрудником j на выполнение всех своих заданий, равно скалярному произведению строки j матрицы X на строку j матрицы $Norm$. Условие ограничения времени сотрудника по нагрузке приобретает в таком случае вид

$$\sum_{i=1}^{m'} [M]_{j,i} [X]_{j,i} \leq T_j.$$

Таким образом, математическая постановка задачи с учетом введенных выше обозначений состоит в следующем. Найти булеву матрицу X такую, что

$$\frac{\sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^{p_i} I(A_{i,j}, X)}{\sum_{j=1}^n T_j} \rightarrow \max,$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p_i} I(A_{i,j}, X) &\geq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^{m'} [M]_{j,i} [X]_{j,i} &\leq T_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n [X]_{j,i} &\leq 1, \quad i = 1, \dots, m'. \end{aligned}$$

Отметим, что в данной задаче первое ограничение и целевая функция нелинейны относительно переменных задачи, так как содержат индикатор публикации $I(A, X)$, нелинейность которого показана выше. Линейность может иметь место, если индикаторы всех рассматриваемых публикаций положить равными конкретным значениям, 0 или 1. Однако это также будет означать определенность в выборе статей различных типов, например, одна статья I уровня БС РЦНИ и по две статьи II и III уровней. Это означает, что планируемая оценка публикационной активности коллектива будет известна и производительность труда коллектива будет иметь определенное значение.

5. Критерии и данные

5.1. Критерии оценки научной деятельности

Критерии научной деятельности базируются, как правило, на оценке публикаций коллектива, и уже на основе этой оценки обычно получаются другие результаты (вознаграждения, гранты и т.д.). В РФ в настоящее время основные критерии оценки публикаций дают руководящие документы Министерства образования и науки [3, 4].

Помимо общественной мотивации целесообразно учитывать возможные личные критерии, влияющие на премиальную часть оплаты труда. Например, показатель результативности научной деятельности (далее – ПРНД) сотрудника j ИПУ РАН [34] определяется как

$$\text{ПРНД}_j = \sum_{i=1}^{k(j)} \frac{p_i}{n_i},$$

где $k(j)$ – количество публикаций сотрудника, n_i – количество соавторов публикации i , p_i – вес публикации в баллах из табл. 1.

Квалификационные требования к сотрудникам Института могут выдвигаться как на основе соответствий из подобных таблиц (например, не менее некоторого количества баллов за год для старшего научного сотрудника),

Таблица 1. Веса в системе оценки публикаций ИПУ РАН

№	Виды публикаций	Баллы
1	Публикация в издании I уровня БС РЦНИ	400
2	Публикация в издании II уровня БС РЦНИ	300
3	Публикация в издании III уровня БС РЦНИ	200
4	Публикация в издании IV уровня БС РЦНИ	150
5	Статьи в журналах, сборниках статей или трудах конференций, главы в книгах	72I
6	Статьи в журналах, входящих в Перечень ВАК	24
7	Статьи в журналах, сборниках статей, главы в книгах из списка журналов	6
8	Тезисы докладов на научной конференции	2
9	Пленарный доклад на научной конференции / на конференции, труды которой индексируются WoS или Scopus	12/96
10	Доклад на конференции (объемом не менее трех страниц)	6
11	Брошюра (не имеет ISBN или объемом менее 6 п.л.), за п.л.	2
12	Монография (ISBN и объем более 6 п.л.) / Монография WoS, Scopus, за п.л.	12/24
13	Патент РФ	18
14	Свидетельство о регистрации ПО, базы данных или интегральной микросхемы	5

так и наряду с ними (например, не менее 10 публикаций за 5 лет для главного научного сотрудника, требуемый уровень технической готовности научных результатов и др.). Сотрудники заинтересованы в повышении производительности труда всего коллектива, однако вопросы тонкого взаимодействия и взаимного усиления мотивации сотрудников и коллективов в целом нуждаются в дополнительном исследовании, [35, 36].

5.2. Исходные данные

В качестве основного ресурса, позволяющего сотрудникам выполнять задания в рамках подготовки публикаций, рассматривалось рабочее время как дефицитный ресурс в логике «затраты – эффект» [37, 38]. В качестве источника данных были взяты таблицы управленческого учета фактического расхода времени, связанного с подготовкой публикаций доктором технических наук, ведущим научным сотрудником одной из лабораторий ИПУ РАН. Учет времени проводится в системе Outlook, для анализа производится выгрузка в Excel. Далее база данных обрабатывается методами обработки больших данных (Business Intelligence, BI). Время обработки – до 15 мин в месяц. Время анализа при устоявшемся процессе планирования и анализа – 0,5–1 ч в месяц. Сводные итоги времени загрузки в ИПУ представлены в табл. 2. Использовалось следующее разделение по видам деятельности:

- «Публикации» – время, привязанное к конкретной публикации.
- «НИР» – время, не привязанное к конкретной публикации: общие обсуждения, сбор и обработка данных организаций (БФО ФНС), организация конференции (MLSD), рецензии и т.п. Потом эти данные / расчеты могут попасть (могут не попасть) в публикации, но в учете времени на текущий момент это не учитывается.
- «Орг.» – организационные вопросы.
- «Новые» – проработка новых проектов.
- «Конс.» – консультации.
- «Дорога» включает время в одну сторону.

Таблица 2. Загрузка по видам деятельности, ч

Год	Публикации	НИР	Орг.	Дорога	Отчет	Новые	Конс.	Подготовка	Общий итог
2020	507	467	198	48	84	97	26	19	1444
2021	602	636	164	107	69	14	60	30	1681
2022	475	715	92	135	22	6	28	11	1483
2023	468	680	73	184	19	28	11	14	1475
Общий итог	2051	2499	526	474	194	144	125	73	6084
Среднее	512	626	131	119	48	36	31	18	1521

6. Анализ и расчеты

6.1. Анализ деятельности по подготовке публикаций

Было проанализировано 38 публикаций автора за 2020–2023 гг., включая «нерезультативные» публикации (получены отказы, сделана часть работы, включая работы на будущее, в задел). Суммарная оценка времени подготовки нерезультативных публикаций составила 499 ч за 4 г. Распределение публикаций по годам приведено в табл. 3.

При этом наблюдается:

- рост количества публикаций;
- рост ПРНД;
- стабилизация количества часов;
- рост баллов ПРНД на 1 ч.

Отметим, что среднее количество баллов ПРНД на 1 ч остается на сравнительно невысоком уровне.

Распределение публикаций по видам приведено в табл. 4.

По итогам анализа представленных данных сделан вывод, что конференции по результативности (0,72 балла/ч) несколько превышают журнальные статьи (0,48 балла/ч).

Таблица 3. Распределение публикаций по годам

Год	Количество публикаций	ПРНД автора	Стаб., кол-ва ч	Среднее, балл/ч
2020	9	183	440	0,42
2021	10	168	530	0,32
2022	15	278	490	0,57
2023	16	327	461	0,71
Итог	50	956	1921	0,50

Таблица 4. Распределение публикаций по видам за 2020–2023 гг

Общий, журнал или конференция	Количество публикаций	ПРНД автора	Часов	Среднее, балл/ч
Монография	3	115	104	1,11
Конференция	24	630	876	0,72
Журнал	11	210	442	0,48
(пусто)	12	0	499	0,00
Итог	50	956	1921	0,50

6.2. Расчеты

На каждое задание нужно определенное время, зависящее от объема, сложности и уровня публикации. В табл. 5 приведен вариант таблицы оценки затрат времени по видам публикаций для исследователя с квалификацией доктора технических наук, ведущего научного сотрудника. Через «УБС i » в этой и следующих таблицах обозначен уровень i БС РЦНИ.

Таблица 5. Оценка времени на подготовку публикации. Автор 1

Раздел	УБС1	УБС2	УБС3	УБС4	Scopus IEEE	БАК
Объем, в расчете тыс. знаков	1170	565	314	191	135	126
Всего ресурсов, ч	965	450	253	160	96	117
1. Текст	20	15	10	10	8	10
1.1. Замысел	10	5	3	2	1	1
1.2. Название	10	5	3	2	1	1
1.3. Аннотация	10	8	6	5	3	3
1.4. Введение	200	50	20	15	10	12
1.5. Обзор	100	40	20	20	15	20
1.6. Модель, алгоритм	100	60	30	20	15	20
1.7. Данные	400	200	120	60	30	30
1.8. Расчеты	80	40	20	10	5	5
1.9. Обсуждение расчетов	5	4	3	2	1	1
1.10. Заключение	10	8	6	4	2	4
1.11. Литература						
1.12. Координация разделов	20	15	12	10	5	10
1.13. Оформление	40	30	20	10	3	3
2. Отправка в журнал/на конференцию, Акт экспертизы	160	80	40	20	5	5
3. Работа с рецензиями	0	0	0	0	30	0
4. Презентация, выступление (очно)	5	5	1	1	1	1
5. Фиксация результатов (ПРНД, конкурсы лучших работ)	5	5	1	1	1	1

Отметим, что во время подготовки этих фактических данных понятие БС РЦНИ еще не было введено в руководства по оценке публикационной активности, поэтому фактически БС РЦНИ учитываются в виде уровней 2 и 4, также учитывается представление издания в Scopus и БАК.

В представленном расчете на основе фактических данных была сделана экстраполяция норм времени на статьи I уровня БС РЦНИ. Текущий сценарий предполагает, что время и сложность написания статьи I уровня значительно увеличиваются за счет дополнительной сложности постановки задачи и обсуждения результатов, подготовки обзора, удовлетворения требований рецензентов. В других научных коллективах могут сложиться другие усредненные нормативы времени на подготовку публикаций различных категорий, к чему предложенный метод может быть адаптирован.

Оптимизационная задача на основе данных из табл. 5 решалась методом нелинейного программирования. Анализ результатов расчетов (табл. 6) показывает, что при оптимизации должны выбираться виды публикаций с наибольшим отношением результата в баллах к затратам времени.

Таблица 6. Эффективность часа для одного автора (ведущий научный сотрудник)

Раздел	УБС1	УБС2	УБС3	УБС4	Scopus	ВАК
Эффективность часа, критерий Минобрнауки	0,017	0,018	0,016	0,013	0,007	0,001
Эффективность часа, критерий ПРНД	0,342	0,531	0,637	0,785	0,533	0,190

Для небольшого коллектива с небольшими транзакционными издержками каждая операция поручается исполнителю с максимальной производительностью (эффективностью). При перегрузке исполнителя задание поручается следующему по эффективности сотруднику. По своей сути данный подход восходит к методике «затраты-эффект».

Рассмотрим пример оптимизации деятельности в двух случаях: для Автора 1 – в.н.с. и для Автора 2 – н.с.

Пример 1 (один автор). Ниже показаны результаты оптимизационных расчетов для Автора 1 (ведущий научный сотрудник) по критерию Минобрнауки (табл. 7) и критерию ПРНД (табл. 8). Разница достижения предельных значений критерия Минобрнауки составляет около 18%, по критерию ПРНД – 47%. Аналогичные оптимизационные расчеты для Автора 2 (научный сотрудник) по критериям Минобрнауки (табл. 9) и ПРНД (табл. 10) показывают несколько меньшую разницу в достижении предельных значений критериев – около 20%.

Анализ полученных данных позволяет сделать вывод: основным приоритетом при достижении максимального результата по методике Минобрнауки являются публикации I уровня БС РЦНИ, а при обеспечении максимального количества публикаций IV уровня, а также конференции с публикацией в

Таблица 7. Результаты оптимизации, для одного Автора 1 (ведущий научный сотрудник), критерий Минобрнауки

Раздел	Всего	УБС1	УБС2	УБС3	УБС4	Scopus	ВАК
Сценарий критерия Минобрнауки	15,6	4,8	10,0	0,8	0,0	0,0	0,0
Дополнительно: ПРНД	428,1	96,2	300,0	31,9	0,0	0,0	0,0
Количество публикаций	1,4	0,2	1,0	0,2	0,0	0,0	0,0
Общее кол-во часов	896	281,24	565,00	50,12	0,00	0,00	0,00

Таблица 8. Результаты оптимизации, для одного Автора 1 (ведущий научный сотрудник), критерий ПРНД

Раздел	Всего	УБС1	УБС2	УБС3	УБС4	Scopus	ВАК
Сценарий ПРНД: критерий Минобрнауки	13,2	0,0	0,0	8,2	5,0	0,0	0,0
Критерий ПРНД	627,6	0,0	0,0	327,6	300,0	0,0	0,0
Количество публикаций	3,64	0,00	0,00	1,64	2,00	0,00	0,00
Общее кол-во часов	896	0,00	0,00	514,36	382,00	0,00	0,00

Таблица 9. Результаты оптимизации, для одного Автора 2 (научный сотрудник), критерий Минобрнауки

Раздел	Всего	УБС1	УБС2	УБС3	УБС4	Scopus	БАК
Сценарий критерия Минобрнауки	7,8	0,0	1,6	6,2	0,0	0,0	0,0
Дополнительно: ПРНД	296,3	0,0	48,9	247,4	0,0	0,0	0,0
Количество публикаций	1,4	0,0	0,2	1,2	0,0	0,0	0,0
Общее кол-во часов	896	0,00	177,57	718,79	0,00	0,00	0,00

Таблица 10. Результаты оптимизации для одного Автора 2 (научный сотрудник), критерий ПРНД

Раздел	Всего	УБС1	УБС2	УБС3	УБС4	Scopus	БАК
Сценарий ПРНД: критерий Минобрнауки	6,4	0,0	0,0	1,4	5,0	0,0	0,0
Критерий ПРНД	356,6	0,0	0,0	56,6	300,0	0,0	0,0
Количество публикаций	2,28	0,00	0,00	0,28	2,00	0,00	0,00
Общее кол-во часов	896	0,00	0,00	164,36	732,00	0,00	0,00

Таблица 11. Результаты оптимизации для двух авторов, критерий Минобрнауки

Раздел	Всего	УБС1	УБС2	УБС3	УБС4	Scopus	БАК
Сценарий критерия Минобрнауки	17,5	0,0	20,0	15,0	0,0	0,0	0,0
Дополнительно: ПРНД	1 198	0	600	598	0	0	0
Количество публикаций	4,99	0,00	2,00	2,99	0,00	0,00	0,00
Общее кол-во часов	1 793	0	980	812	0	0	0

Таблица 12. Результаты оптимизации для двух авторов, критерий ПРНД

Раздел	Всего	УБС1	УБС2	УБС3	УБС4	Scopus	БАК
Сценарий критерия ПРНД	15,4	0,0	0,9	20,0	10,0	0,0	0,0
Дополнительно: критерий Минобрнауки	1 426	0	26	800	600	0	0
Количество публикаций	8,09	0,00	0,09	4,00	4,00	0,00	0,00
Общее кол-во часов	1 793	0	43	1 087	663	0	0

Таблица 13. Сводные результаты оптимизации, для коллектива авторов

Критерий	Автор 1 (ведущий научный сотрудник)	Автор 2 (научный сотрудник)	Автор 1 и 2, Минобрнауки	Автор 1 и 2, ПРНД
Критерий Минобрнауки	15,5	7,8	$8,75 = 17,5/2$	$7,7 = 15,4/2$
Критерий ПРНД	428	296	$599 = 1198/2$	$713 = 1426/2$

Таблица 14. Распределение времени между авторами

Раздел	Автор 1	Автор 2
1. Текст		
1.1. Замысел	1,00	0,00
1.2. Название	0,00	1,00
1.3. Аннотация	1,00	0,00
1.4. Введение	1,00	0,00
1.5. Обзор	1,00	0,00
1.6. Модель, алгоритм	1,00	0,00
1.7. Данные	0,00	1,00
1.8. Расчеты	0,00	1,00
1.9. Обсуждение расчетов	0,88	0,12
1.10. Заключение	1,00	0,00
1.11. Литература	0,00	1,00
1.12. Координация разделов	1,00	0,00
1.13. Оформление	0,00	1,00
2. Отправка в журнал / на конференцию. Акт экспертизы	0,54	0,46
3. Работа с рецензиями	1,00	0,00
4. Презентация, выступление (очно)	0,00	1,00
5. Фиксация результатов (ПРНД, конкурсы лучших работ)	0,00	1,00

журналах, учитываемых Scopus. По методике ПРНД (ИПУ РАН) основным приоритетом выявлены публикации III и IV уровней БС РЦНИ (в предыдущей редакции ПРНД ИПУ основным приоритетом были статьи из журналов, учитываемых в Scopus).

Пример 2 (два автора).

В этом примере исходим из следующих допущений:

- публикации совместно готовятся двумя авторами;
- авторы связаны тематикой и достаточно эффективной коммуникацией, так что координировать их практически не требуется;
- распределение заданий (матрица X) устанавливается единым по всем видам публикаций;
- результаты совместного труда учитывают количество авторов (фрактальность).

Анализ результатов расчета показывает, что и по критерию Минобрнауки (табл. 11), и по критерию ПРНД (табл. 12) целесообразно направлять усилия на подготовку статей II и III уровней БС РЦНИ.

Сводные результаты показаны в табл. 13. Для совместной работы коллектива по критерию ПРНД выгодно объединение усилий. По критерию Минобрнауки Автор 1 значительно теряет (в личном варианте одна статья УБС2 и 0,24 статьи УБС1, в совместном варианте с учетом фрактальности одна статья УБС2 и 1,5 статьи УБС3).

Расчетное распределение обязанностей между Авторами показано в табл. 14.

7. Апробация и обсуждение

7.1. Апробация результатов

В качестве апробации описанного подхода приведем результаты лаборатории «крупномасштабных систем» ИПУ РАН. На рис. 3 показан граф связности по публикациям из системы ИСАНД. Половина авторов (5 чел) связаны друг с другом, вторая половина (5 чел) слабо связаны друг с другом. Рассматриваемый коллектив авторов можно оценить как среднесвязанный [32].

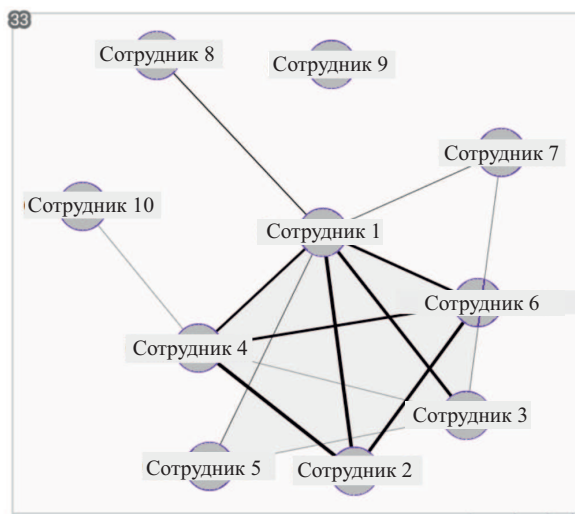


Рис. 3. Сеть связности соавторов из рассматриваемого подразделения.

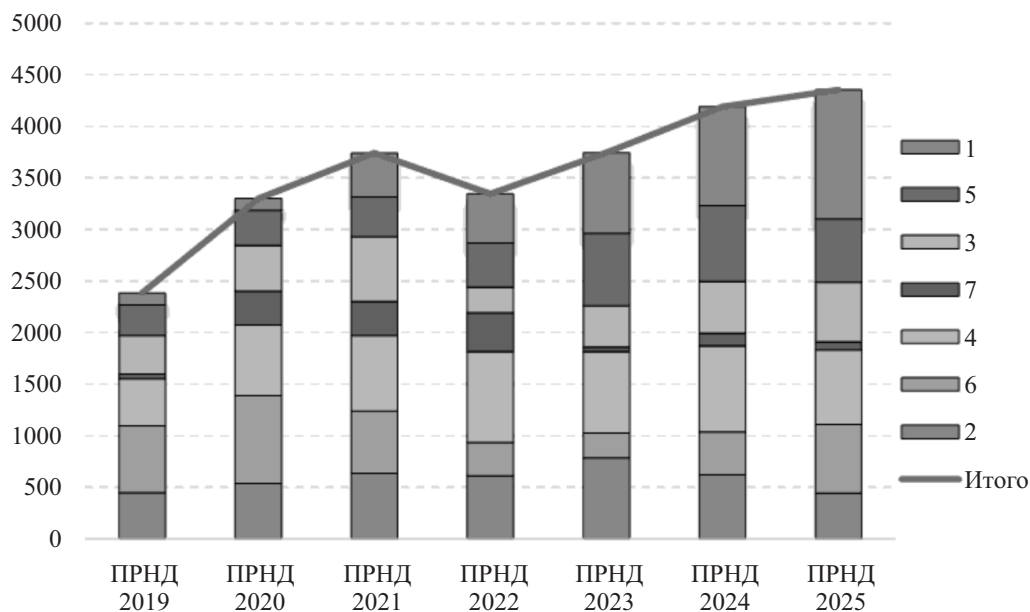


Рис. 4. Динамика результатов авторов по методике ПРНД.

На рис. 4 показана динамика показателя ПРНД авторов лаборатории (постоянный состав). Не учитываются результаты части авторов, которые недавно пришли в лабораторию, их результаты добавились в последние годы. В расчетах не было учтено время работы сотрудников, проработавших небольшое время.

По методике ПРНД за определенный год учитываются результаты за три предыдущих года. Например, ПРНД 2025 г. – это результаты за 2022–2024 гг. На рис. 4 видно увеличение результативности лаборатории в целом.

При этом прирост достигнут частью авторов, активно использующих технологию формирования публикаций с разделением труда по разделам:

- Автор 1: с 117 до 1251 баллов;
- Автор 3: с 375 до 579 баллов;
- Автор 5: с 297 до 614 баллов;
- Автор 4: с 456 до 720 баллов.

7.2. Выводы по расчетам:

- наиболее целесообразной является командная работа, при которой авторы переключаются на задания, наиболее им подходящие (на которых они показывают наибольшую производительность в силу своей квалификации и склонностей);
- очередное задание при такой работе попадает наиболее эффективному и не загруженному в данный момент автору;
- пик по публикациям соответствует наиболее высокой эффективности использования доступного рабочего времени соавторов;
- для полноценной реализации предлагаемых результатов критически важно иметь учет времени различных членов коллектива по различным заданиям;
- чем выше степень связанности коллектива, тем больше возможности для внедрения полученных результатов и тем больше повышение производительности научного труда в результате этого внедрения.

7.3. Ограничения модели и подхода

Предлагаемый подход имеет ряд ограничений, которые обуславливаются следующими причинами:

- требуется время и усилия по накоплению достоверной статистики и выделению норм времени выполнения авторами отдельных заданий;
- на стадии замысла, которая согласно табл. 5, занимает сравнительно немного времени, исследователь не всегда может точно предполагать, как и насколько полно этот замысел может быть реализован. В ряде случаев реализация может оказаться нерезультативной;

- могут иметь место достаточно большие транзакционные издержки (обмен информацией, согласование текстов, итерации при формулировании модели и проведении расчетов). В достаточно больших или достаточно не связанных коллективах реалистично, по-видимому, выделение «клик» связанных авторов, где каждая «клика» будет работать над «своим» кругом публикаций по предлагаемой методике.

7.4. Рекомендации авторам и коллективам

В рассмотренном выше случае предлагаются следующие варианты повышения производительности научного труда.

1. Сокращение неэффективного времени «НИР» и «Орг.» – общих работ, напрямую не ведущих к публикациям. При возможном высвобождении времени на 20% экономится 125 ч в год.
2. Высвобожденные часы направить на подготовку публикаций. Оценка изменений: 512 ч было + 125 дополнительно = 637 ч.
3. Проводить детальный анализ выполнения отдельных заданий, с возможным сокращением времени на их выполнение. При оценке возможной экономии времени на 20 процентов
4. Применять пакеты прикладных программ для проведения расчетов.
5. Использовать генеративный искусственный интеллект (ГИИ) для подготовки текстов. Данный пункт требует большой аккуратности и имеет значительные ограничения. На текущем этапе ГИИ может формировать общие описания (без учета глубины и специфики публикации) и литературно перефразировать текст, но кардинально ошибается в проведении расчетов, формировании ссылок. Системы проверки на плагиат ограничивают использование ГИИ.
6. Писать текст публикации сразу в шаблоне журнала (экономия времени на оформление).
7. При планировании времени сотрудников следует учитывать целесообразность наличия у каждого из них некоторого запаса времени на развитие более индивидуальных проектов, обдумывание которых не всегда сразу выносятся в коммуникацию.

8. Заключение

Представлена содержательная и аналитическая постановка задачи повышения производительности труда коллектива научных сотрудников. Показано, что задача сводится к задаче нелинейной оптимизации. Представлен подход к решению, использующий специфику предметной области. На примере расчета с реальными данными и анализом времени подготовки публикаций одной из лабораторий ИПУ показано кратное повышение производительности научного труда в результате применения предлагаемой методики. В лаборатории «крупномасштабных систем» ИПУ РАН значительно увеличилось

результаты подгруппы сотрудников, активно участвующих в совместных работах с разделением труда. В целом можно сделать вывод, что предложенная методика работает, но не в полной мере и не с максимальной эффективностью. Это обуславливается ограниченной коммуникацией авторов в коллективе, а также сложностями с определением норм времени выполнения различными авторами тех или иных заданий. Считаем, что подобная постановка задачи и методика решения целесообразна к применению не только в лабораториях ИПУ РАН, но в научной деятельности других исследовательских центров (вузы, корпоративные институты, инженерные центры и другие организации с творческим трудом). Для этого потребуются соответствующая адаптация модели, ограничений, процедур сбора и структуризации данных. Постоянный процесс внедрения и использования таких систематических процедур для контроля и повышения производительности интеллектуального труда необходим для сохранения и развития достижений страны на международной конкурентной арене.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сайт национального проекта «Производительность труда». [Электронный ресурс]: <https://национальныепроекты.рф/projects/proizvoditelnost-truda/> (дата обращения: 12.05.2025).
2. Дранко О.И., Резчиков А.Ф., Степановская И.А. и др. Сценарное моделирование развития страны на основе индикативного планирования // Проблемы управления. 2024. № 5. С. 25–41.
3. Сайт ВАК РФ. [Электронный ресурс]: <https://vak.gisnauka.ru/> (дата обращения: 03.04.2026).
4. Список журналов ФГБУ «Российский центр научной информации». [Электронный ресурс]: <https://journalrank.rcsi.science/ru/record-sources/> (дата обращения: 03.04.2026).
5. Сайт «Скопус». [Электронный ресурс]: <https://www.scopus.com/> (дата обращения: 03.04.2026).
6. Сайт «Веб оф сайнс». [Электронный ресурс]: <https://www.webofscience.com> (дата обращения: 03.04.2026).
7. Hirsch J.E. An index to quantify an individual's scientific research output // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2005. V. 102. No. 46. P. 16569–16572.
8. Справочная страница «Индекс цитирования, взвешенный по области исследования (FWCI)». [Электронный ресурс]: https://helpcenter.pure.elsevier.com/en_US/data-sources-and-integrations/field-weighted-citation-impact-fwci-metrics (дата обращения: 03.04.2026).
9. Henneken E.A., Kurtz M.J. Usage Bibliometrics as a Tool to Measure Research Activity // Springer Handbook of Science and Technology Indicators. Springer Handbooks. Springer. Cham, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-030-02511-3_32
10. Hoffmann C.P., Lutz C., Meckel M. Impact Factor 2.0: Applying Social Network Analysis to Scientific Impact Assessment // 2014 47th Hawaii International Conference on System Sciences. Waikoloa, HI, USA. 2014. P. 1576–1585. <https://doi.org/10.1109/HICSS.2014.202>

11. *Альтшуллер Г.С.* Найти идею: Введение в ТРИЗ – теорию решения изобретательских задач. 3-е изд. М.: Альпина Паблишер, 2010.
12. *Мясищев В.Н.* Принципы организации научного изучения труда. Эргология и эрготехника // Институт психологии РАН. Организационная психология и психология труда. 2023. Т. 8. № 3. С. 190–211.
https://doi.org/10.38098/ipran.opwp_2023_28_3_009
13. *Popov A.* Modern Approaches to the Implementation and Use of Lean Production Model // BIO Web of Conferences. 2023. V. 76. P. 02002.
14. *Imai M.* Kaizen: The Key To Japan's Competitive Success. New York: McGraw-Hill Education, 1986. 260 p.
15. *Randhawa J., Ahuja I.* 5S implementation methodologies: literature review and directions // International Journal of Productivity and Quality Management. 2024. V. 20. No. 1. P. 49. <https://doi.org/10.1504/IJPQM.2017.080692>
16. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Физматлит, 2004.
17. *Sinha S.M.* Mathematical Programming. Theory and Methods. Elsevier Science, 2006. <https://doi.org/10.1016/B978-813120376-7/50002-6>
18. *Tsvirkun A.D., Rezchikov A.F., Dranko O.I., et al.* Optimization and Simulation Approach to Determining Critical Combinations of Company Parameters // Autom. Remote Control. 2024. V. 85. No. 10. P. 867–874.
<https://doi.org/10.1134/S0005117924700322>
19. *Bogomolov A.S., Dvoryashina M.M., Dranko O.I., et al.* Stress testing of nonfinancial organizations: an analytical approach to solving the reverse problem // Control Sciences. 2021. No. 6. P. 13–24.
20. *Резчиков А.Ф., Дранко О.И., Богомолов А.С. и др.* Определение критических комбинаций параметров сложных систем // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2024): Труды Семнадцатой международной конференции, Москва, 24–26 сентября 2024 года. М.: ФГБОУ УН ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2024. С. 420–425.
21. *Кочиева Т.Б., Новиков Д.А.* Базовые системы стимулирования. М.: ИПУ РАН, 2000. 108 с.
22. *Taha Х.А.* Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2007. 901 с.
23. *Sun Z., Tian Z., Xie X., et al.* An meta-cognitive based logistics human resource modeling and optimal scheduling // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2024. T. 130. P. 107760.
24. *Torkabadi A., Mamoudan M.M., Erdebilli B., et al.* A multi-objective game theory model for sustainable profitability in the tourism supply chain: Integrating human resource management and artificial neural networks // Systems and Soft Computing. 2025. T. 7. P. 200217.
25. *Wagh S.D.* Implementation of Manufacturing Execution System (MES) to Increase Productivity and Competitiveness in the Manufacturing Sector // International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology. 2024. No. 12(4). P. 3703–3714.
26. *Alefari M., Almanei M., Salonitis K.* A System Dynamics Model of Employees' Performance // Sustainability. 2020. T. 12. P. 6511.
27. *Epebinu O., Oguntuase D., Oruma A.* Talent Management and Organizational Performance. A Study in South-West Nigeria // Business Perspective Review. 2023. T. 5. No. 2. P. 28–36. <https://doi.org/10.38157/bpr.v5i2.600>

28. *Нефедова А.И., Волкова Г.Л., Дьяченко Е.Л. и др.* Международная мобильность и публикационная активность молодых ученых: что говорят статистика, библиометрия и сами сотрудники // Журнал Новой экономической ассоциации. 2021. № 4 (52). С. 98–121.
29. *Slepykh V.* Academic inbreeding and productivity of STEM early career researchers in different environments // Research Policy. 2025. Т. 54. No. 6. P. 105240.
30. *Murray R.* Writing for Academic Journals. N.Y.: Open University Press-McGraw-Hill, 2013.
31. Сайт «Информационной системы анализа научной деятельности». [Электронный ресурс]: <https://isand.ipu.ru/> (дата обращения: 03.04.2026).
32. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. и др.* Информационная система анализа научной деятельности (ИСАНД) в области теории управления // Проблемы управления. 2024. № 3. С. 42–65.
33. *Губанов Д.А., Кузнецов О.П., Суховеров В.С., Чхартишвили А.Г.* О построении профилей в тематическом пространстве теории управления / Материалы 9-й Международной конференции “Знания-Онтологии-Теории” (ЗОНТ-2023, Новосибирск). Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2023. С. 89–94.
34. Приказ № 53 от 25.02.2025 «Положение о рейтинговых стимулирующих надбавках Института с 01.01.2026 г.». ИПУ РАН.
35. *Дранко О.И., Резчиков А.Ф., Степановская И.А. и др.* Оценка синергизма целей при управлении киберфизическими производственными системами машиностроительного предприятия // Датчики и системы. 2024. № 2(274). С. 23–29. <https://doi.org/10.25728/datsys.2024.2.4>
36. *Цвиркун А.Д., Резчиков А.Ф., Кушников В.А. и др.* Модели и методы проверки достижимости целей и выполнимости планов в крупномасштабных системах на примере целей и планов ликвидации последствий наводнения // АиТ. 2023. № 12. С. 49–63. <https://doi.org/10.31857/S000523102312005X>
37. *Кох Р.* Революция 80/20. Почему наступает эра творческих индивидуалов и как вы можете обрести богатство и благосостояние. М.: Поппури, 2004. 336 с.
38. *Дранко О.И., Ириков В.А.* Метод “затраты–эффективность” как инструмент выбора приоритетных проектов предприятий // Управленческий учет. 2011. № 4. С. 15–20.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 16.10.2025

Принята к публикации 20.11.2025

© 2026 г. И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТРИКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ¹

Введено понятие о базовых системах как системах с передаточной функцией в виде обратного характеристического полинома системы. Получены спектральные разложения энергетических метрик устойчивости базовых систем для их уравнений состояния в канонических формах: Жордана, модальной, управляемости и наблюдаемости. Получены формулы спектральных разложений квадрата H_2 -нормы передаточной функции базовой системы для случая кратных корней ее передаточной функции. Разработаны рекуррентные алгоритмы вычисления спектральных разложений обратных матриц грамианов непрерывных динамических систем по кратным спектрам исходных матриц динамики. Получены спектральные разложения энергетических метрик устойчивости в виде спектрального разложения квадрата H_2 -нормы передаточной функции базовой системы для случая ее простых и кратных корней. Предложен новый подход к анализу устойчивости линейных систем на основе усиленного критерия устойчивости Рауса–Гурвица, который включает формирование таблиц Рауса и матриц Сяо, вычисление спектра матрицы динамики, вычисление спектральных разложений энергетических метрик, совместное использование критерия устойчивости Рауса–Гурвица и критерия ограниченности энергетических метрик устойчивости базовых систем. Даны рекомендации по использованию полученных результатов.

Ключевые слова: спектральные разложения, канонические формы, базовые системы, грамианы, дифференциальные уравнения Ляпунова и Сильвестра, матрицы Коши, матрицы Сяо, энергетические метрики.

DOI: 10.7868/S2413977726040024

1. Введение

Хорошо известно, что грамианы являются решениями уравнений Сильвестра и Ляпунова, которым посвящено громадное число научных работ, среди которых отметим [1–4]. Эти алгебраические и дифференциальные матричные уравнения играют также фундаментальную роль в теории управления. В последние годы возник интерес к развитию методов вычислений различных энергетических показателей для анализа устойчивости и степени управляемости, достижимости и наблюдаемости этих систем. Первые спектральные разложения грамианов для линейных непрерывных и дискретных систем с

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-20158).

простым спектром были получены в работе [1] на основе спектрального разложения интегрального представления решения уравнений Ляпунова или Сильвестра. В ней впервые исследованы временные характеристики грамианов в канонических формах управляемости и роль собственных векторов и ядер матриц Коши в задачах синтеза оптимальных моделей низкой размерности динамических систем. Энергетические показатели устойчивости достижимости для линейных устойчивых и неустойчивых линейных систем были предложены в ряде работ [5–12]. В теории управления метод грамианов как метод решения дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра применяется для решения следующих прикладных задач:

- Оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств [7, 10–13];
- Упрощения моделей линейных и билинейных систем управления на основе использования энергетических метрик [1–3];
- Анализа и синтеза модальных систем управления [13–15, 17];
- Анализа точности систем управления при случайных возмущениях [2, 4];
- Мониторинга состояния и технической диагностики на основе выявления аномалий энергетического баланса [13, 16, 18].

Метод грамианов позволяет получить не только качественную, но и количественную оценку указанной энергии, сосредоточенной в слабоустойчивых колебаниях. Эффект резонансного взаимодействия близких колебательных мод в динамической системе может усиливаться многократно. Преобразование уравнений состояния в канонические формы управляемости и наблюдаемости позволяет выделить среди всех энергетических метрик инвариантные метрики, не зависящие от преобразования координат. Структурные свойства управляемости и наблюдаемости в контексте вычисления и анализа грамианов исследованы в работах [19, 20]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, рассматривалась в [4, 7].

2. Предварительное обсуждение результатов и постановка задачи

Рассмотрим непрерывную стационарную МИМО LTI линейную стационарную непрерывную динамическую систему со многими входами и многими выходами вида

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$. В случае SISO LTI систем $u(t) \in R^1$, $y(t) \in R^1$. Уравнения Ляпунова и Сильвестра играют важную роль в теории управления и проектировании систем управления по интегральным показателям качества, в синтезе оптимальных систем с использованием наблюдателей

состояния. Для решения этих задач применяются уравнения Ляпунова двух типов:

$$(2.2) \quad AP + PA^T = -I_n.$$

$$(2.3) \quad AP + PA^T = - \sum_{j,\eta} e_j e_\eta^T.$$

Уравнения первого типа возникают в МИМО LTI системах, задаваемых уравнениями состояния общего вида (2.1). Уравнения второго типа возникают в SISO LTI системах, задаваемых уравнениями состояния в модальной канонической форме и в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В модальной канонической форме в этом случае имеем следующие выражения для матрицы A_d , векторов b, c :

$$(2.4) \quad A_d = \text{diag} [s_1 \ \dots \ s_n], \quad b = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T, \quad c = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]^T,$$

где r_i – вычет передаточной функции в полюсе “ i ”. Для базовой системы имеем [1]

$$(2.5) \quad c = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T.$$

В канонических формах управляемости в этом случае уравнения состояния имеют вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c^F x_c(t) + b^F u(t), \quad x_c(0) = 0, \\ y_c(t) &= c^F x_c(t), \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b^F = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T,$$

$$c^F = [\xi_0 \ \xi_1 \ \dots \ \xi_{n-2} \ \xi_{n-1}],$$

где ξ_i – коэффициент полинома числителя передаточной функции

$$W(s) = \frac{\xi_{n-1}s^{n-1} + \dots + \xi_1 s + \xi_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Для базовой системы имеем

$$(2.8) \quad c^F = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0].$$

Классический критерий устойчивости непрерывных линейных систем основан на решении уравнений вида (2.2), (2.3) с измененной правой частью вида $-bb^T$. Эти матрицы зависят от матриц преобразования подобия, так

что грамианы управляемости и выражения квадратов H_2 -нормы передаточной функции, полученные с помощью грамианов, не являются инвариантами при различных преобразованиях пространства состояний. Этого недостатка можно избежать, если использовать правые части вида (2.2) или (2.3). Назовем эти уравнения второго типа базовыми уравнениями Ляпунова, а соответствующие уравнения состояния, в которых вектор c^F выбран в виде $c^F = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$ или $c = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$, базовыми уравнениями состояния. Этим уравнениям состояния соответствует передаточная функция (ПФ)

$$(2.9) \quad W_{base}(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{1}{N(s)},$$

где $N(s)$ – характеристический многочлен системы.

Определение 1 [5, 6]. Назовем матрицей Сяо квадратную матрицу, имеющую структуру нулевого плеча вида

$$(2.10) \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}, \quad y_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Элементы этой матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, & \text{если } j + \eta = 2k + 1, \quad k = 1, \dots, n; \\ y_n = \frac{1}{2Y_{n,1}}, \\ y_{n-l} = \frac{-\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i Y_{n-l, i+1} y_{n-l+i}}{Y_{n-l,1}}, \\ \text{если } j + \eta = 2k, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Известно, что базовые уравнения играют важную роль при исследовании устойчивости линейных систем. Рассмотрим дифференциальное уравнение состояния вида

$$(2.11) \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = \delta(t), \\ y^{(n-1)}(0) = 1, \quad y^{(n-2)}(0) = 0, \quad \dots, \quad y(0) = 0,$$

где $\delta(t) - \delta$ – функция Дирака. Это уравнение соответствует передаточной функции базовой системы. Доказано, что грамиан управляемости для системы (2.11) имеет вид матрицы Сяо (2.10), в которой элементы y_i вычисляются с помощью измеряемых величин $y^{(i)}(t)$ [6].

$$(2.12) \quad y_i = \int_0^\infty \left[y^{(i)}(t) \right]^2 dt.$$

Эти оценки имеют физический смысл измеряемых энергий состояний системы, причем они могут быть вычислены различными способами, в том числе с использованием наблюдателей состояния [19]. В соответствии с [10–12] введем

Определение 2. Энергетической метрикой устойчивости системы (2.1) назовем квадрат H_2 -нормы ее передаточной функции.

Покажем, что базовые системы могут быть полностью управляемы при выполнении дополнительных условий. Матрица управляемости для модальной базовой системы (2.4), (2.5) является матрицей Вандермонда, которая является матрицей полного ранга только при условии, что все собственные числа матрицы динамики различны. Матрица управляемости для базовой системы (2.7), (2.8) не вырождена. Поэтому базовая система (2.7), (2.8) полностью управляема. Матрица грамиана управляемости для базовой системы (2.7), (2.8) в форме Сяо имеет вид [5]

$$(2.13) \quad P^{cF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_k - s_\lambda)} 1_{j+1\eta+1},$$

$$(2.14) \quad P^{cF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1}.$$

Отсюда следует, что матрицы грамианов P^{cF} положительно определены.

Замечание 1. Из (2.14) следует, что матрица Сяо зависит от квадратичных форм $s_k^j (-s_k)^\eta$, образованных собственными числами исходной базовой и антиустойчивой базовой систем, от вычетов передаточной функции базовой системы и от значений характеристического полинома антиустойчивой системы в его собственных числах. Квадратичные формы определяют свойство нулевого плеча матриц Сяо. Знаменатель выражения (2.14), который зависит от характеристического полинома $N(s)$, определяет значение квадрата H_2 -нормы передаточной функции, являющейся энергетической метрикой системы (2.1). Очевидна важная роль базовой системы в формировании энергетических метрик устойчивости. Полная управляемость базовых систем является одним из условий положительной определенности их грамианов управляемости. Это упрощает определение грамианов управляемости для базовой системы (2.7), (2.8), упрощает преобразование грамианов в форму Адамара и вычисление квадрата H_2 -нормы передаточной функции (2.9). Кроме того, это гарантирует нормальность матрицы грамиана, следствием которой является положительность диагональных элементов и следа соответствующих грамианов. Их элементы зависят только от собственных чисел матрицы динамики и ее характеристического многочлена, которые не зависят от преобразований подобия и, следовательно, являются инвариантами при этих преобразованиях. Что касается базовой системы (2.4), (2.5), то грамиан управляемости

в ней приобретает простую форму матриц Коши [1,21].

$$(2.15) \quad P_c = \frac{-1}{s_j + s_\eta^*}, \quad \forall j, \eta = \overline{1, n}, \quad \forall s_j, s_\eta \in C^-.$$

Симметричная матрица Коши определяется в виде

$$(2.16) \quad C = \frac{-1}{x_j + x_\eta}, \quad \forall j, \eta = \overline{1, n}, \quad \forall x_j, x_\eta \in R^-.$$

Для таких матриц имеет место следующая

Теорема 1 [21]. Симметричная матрица Коши вида (2.16) положительно определена тогда и только тогда, когда числа x_j, x_η положительны и взаимно различны

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad 0 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1.$$

Следствие 1. Рассмотрим матрицу Коши вида (2.16), устойчивой базовой системы (2.4), (2.5), или для системы (2.7), (2.8). Предположим, что системы устойчивы и собственные числа их матриц динамики действительные и взаимно различные. Тогда симметричная матрица Коши вида (2.16) положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$0 < -s_1 < -s_2 < \dots < -s_n, \quad 0 < -s_n < -s_{n-1} < \dots < -s_1.$$

В данном случае роль положительных чисел x_j, x_η , играют вещественные части собственных чисел матрицы динамики $-s_j, -s_\eta$, которые могут оказаться комплекснозначными. Это требует представления грамианов в виде устойчивых эрмитовых матриц

$$[P_c]_{Herm} = [P_o]_{Herm}, \quad p_{j\eta Herm} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{s_j + s_\eta^*} + \frac{-1}{s_j^* + s_\eta} \right) = Re \left(\frac{-1}{s_j + s_\eta^*} \right).$$

В [1, лемма 9,4] доказано, что матрица Коши (2.15) устойчивой диагонализированной базовой системы положительно определена. Заметим, что для базовых систем их грамианы управляемости и наблюдаемости совпадают

$$P_c = P_o.$$

В этом случае получим важное свойство базовой системы

$$\sigma_k = (-2Re(s_k))^{-1}, \quad k = \overline{1, n},$$

где σ_k – Ганкелевы сингулярные числа матриц грамианов. В этом случае получаем простую формулу для квадрата H_2 -нормы передаточной функции базовой системы

$$\|W(s)\|_2^2 = tr P_C = \sum_{k=1}^n \sigma_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{-2Re(s_k)}.$$

Важную роль в исследовании спектральных разложений решений уравнений вида (2.2), (2.3), в том числе грамианов базовых систем, играют кратные собственные числа матриц динамики, что связано с рассмотрением уравнений состояния в форме Жордана.

Цели настоящего исследования следующие. Первой целью статьи будет получение спектральных разложений матриц грамианов базовых непрерывных динамических систем по кратным спектрам их матриц динамики. Другой целью статьи является разработка рекуррентных алгоритмов вычисления грамиана управляемости и его обратного грамиана для МИМО ЛТИ непрерывных систем. Третьей целью является анализ энергетических метрик устойчивости линейных стационарных систем с использованием алгебраического критерия устойчивости Рауса–Гурвица.

3. Основные результаты

Рассмотрим задачу вычисления спектральных разложений МИМО ЛТИ и SISO ЛТИ систем с помощью решений дифференциальных и алгебраических уравнений Ляпунова в частотной области. Как известно, если линейная система устойчива, ее передаточная функция строго собственная, но все полюса различны, то справедливы следующие формулы для вычисления квадрата H_2 -нормы $W(s)[1]$:

$$(3.1) \quad \|W(s)\|_2^2 = \sum_{k=1}^n r_k W(-s_k), \quad r_k = \text{Res}[N^{-1}(s), s_k].$$

В случае базовой системы (2.4), (2.5) эта энергетическая метрика устойчивости является сепарабельной по полюсам передаточной функции, причем каждая спектральная составляющая является положительным числом. Энергетические метрики устойчивости J_1, J_2 имеют вид [19]

$$(3.2) \quad J_1 = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)},$$

$$(3.3) \quad J_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{1}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}.$$

Формулу (3.2) можно представить в эквивалентной форме

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_k - s_\lambda)}.$$

Поскольку матрица устойчивой диагонализированной базовой системы положительно определена, формулу (3.3) можно представить в виде следа матрицы Коши

$$J_2 = \text{tr} \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \text{Re} \left(\frac{-1}{s_k + s_\rho^*} \right) e_k e_\rho^T.$$

Спектральное разложение передаточной функции ПФ по кратным полюсам базовой SISO LTI системы в общем виде имеет форму [24]

$$(3.4) \quad W(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{L_{k\nu}}{(s - s_k)^{m_k - \nu + 1}},$$

где s_k – полюс передаточной функции, $L_{k\nu}$ – вычет ПФ порядка “ ν ” в полюсе s_k

$$(3.5) \quad L_{k\nu} = \frac{1}{(\nu - 1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} \left(\frac{(s - s_k)^\nu}{N(s)} \right) \right]_{s=s_k}.$$

Для базовых систем вычисление вычета передаточной функции ПФ по кратным полюсам резко упрощается. Пусть строго собственная передаточная функция ПФ общего вида SISO LTI системы имеет форму

$$W(s) = \frac{1}{N(s)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)^{m_i}}.$$

Введем обозначения

$$N_{k1}(s) = (s - 1)^{m_1} \times \dots \times (s - s_{k-1})^{m_{k-1}} \times (s - s_{k+1})^{m_{k+1}} \times \dots \times (s - s_n)^{m_n},$$

$$N_{k1}(s_k) = (s_k - s_1)^{m_1} \times \dots \times (s_k - s_{k-1})^{m_{k-1}} \times (s_k - s_{k+1})^{m_{k+1}} \times \dots \times (s_k - s_n)^{m_n}.$$

Тогда вычет $L_{k\nu}$ передаточной функции $W(s)$ может быть вычислен с помощью следующего рекуррентного алгоритма.

Первый шаг алгоритма $\nu = 1$

$$L_{k1}(s_k, s_\mu) = N_k^{-1}(s_k, s_\mu) \quad \forall k, \mu = \overline{1, n}.$$

Второй шаг алгоритма $\nu = 2$

$$L_{k2}(s_k, s_\mu) = -N_k^{-1}(s_k, s_\mu) \left(\frac{m_1}{s_k - s_1} + \dots + \frac{m_{k+1}}{s_k - s_{k+1}} + \dots + \frac{m_n}{(s_k - s_n)} \right),$$

$$\forall k, \mu = \overline{1, n},$$

или

$$L_{k2}(s_k, s_\mu) = -L_{k1}(s_k, s_\mu) \sum_{\mu=1, \mu \neq k}^m \frac{m_\mu}{(s_k - s_\mu)}, \quad \forall k, \mu = \overline{1, n}.$$

$$L_{k3} = \frac{1}{2!} \left[L_{k2} - \frac{1}{N_{k1}(s)} \sum_{\mu=1, \mu \neq k}^n \frac{m_\mu}{(s - s_\mu)^2} \right] \Bigg|_{s=s_k}, \quad \forall k = \overline{1, n}, \quad \forall \nu = \overline{1, m_k}.$$

Из формул вычетов следуют предельные соотношения

$$\lim_{s_k \rightarrow s_i} |L_{k\nu}| = \infty.$$

Теорема 2. *Спектральные разложения энергетических метрик устойчивости базовых систем по кратным полюсам ПФ.*

Рассмотрим базовую SISO LTI систему общего вида с кратными полюсами с передаточной функцией вида (3.2). Предположим, что система полностью управляема, строго собственная и устойчивая.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Спектральное разложение энергетической метрики устойчивости базовой системы по кратным полюсам ПФ имеет вид

$$(3.6) \quad J_1 = J_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k - \nu)!} \left\{ L_{k\nu} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{1}{N(-s)} \right) \right]_{s=s_k} \right\}_{Herm},$$

$$(3.7) \quad L_{k\nu} = \frac{1}{(\nu - 1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} \left(\frac{(s - s_k)^\nu}{N(s)} \right) \right]_{s=s_k}.$$

2. Спектральное разложение энергетической метрики базовой системы по комбинационным кратным полюсам ПФ имеет вид

$$(3.8) \quad J_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{(m_k - \nu + m_\rho - \mu + 1)!}{(m_k - \nu)!} \times \\ \times \left[L_{k\nu} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s_k - s_\rho^*)^{m_k-\nu+m_\rho-\mu+1}} \right]_{Herm},$$

где

$$(3.9) \quad L_{\rho\mu} = \frac{1}{(\mu - 1)!} \left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}} \left(\frac{(s - s_\rho)^\mu}{N(s)} \right) \right]_{s=s_\rho}.$$

Энергетические метрики базовой системы (2.4), (2.5) или системы (2.7), (2.8) J_1, J_2 являются положительными числами. Они являются инвариантами при различных преобразованиях подобия.

Доказательство. Рассмотрим следующие разложения передаточных функций исходной системы (2.1) для случая ее кратных полюсов и ее антиустойчивой подсистемы

$$(3.10) \quad W(-s) = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{L_{k\nu}}{(-s - s_k)^{m_k-\nu+1}},$$

где $L_{k\nu}$ – вычет порядка “ ν ” в полюсе s_k ПФ $W(s)$

$$L_{k\nu} = \frac{1}{(\nu - 1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} \left(\frac{(-s - s_k)^\nu}{N(-s)} \right) \right]_{s=s_k}.$$

Воспользуемся тем, что в данном случае передаточная функция, как и ее обратное преобразование Лапласа являются скалярными функциями.

$$(3.11) \quad J = \|N^{-1}(s)\|_2^2 = \int_0^\infty L^{-1} [N^{-1}(s)] L^{-1} [N^{-1}(-s^*)] dt.$$

Вычислим интеграл (3.11) в виде предела при $T \rightarrow \infty$ другого интеграла

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T L^{-1} [N^{-1}(s)] L^{-1} [N^{-1}(-s)] dt.$$

Введем первообразную функцию

$$H(t) = L^{-1} [N^{-1}(s)] L^{-1} [N^{-1}(-s)],$$

где

$$\begin{aligned} [N^{-1}(s)] &= \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} L_{k\nu} \frac{1}{(s-s_k)^{m_k-\nu+1}}, \\ L_{k\nu} &= \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} \left(\frac{(s-s_k)^\nu}{N(s)} \right) \right]_{s=s_k}, \\ L^{-1} [N^{-1}(s)] &= \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{L_{k\nu}}{(m_k-\nu)!} t^{m_k-\nu} e^{s_k t}, \\ [N^{-1}(-s)] &= \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^{\rho} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s-s_k)^{m_\rho-\mu+1}}, \\ L_{\rho\mu} &= \frac{1}{(\mu-1)!} \left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}} \left(\frac{(-s-s_\rho)^\mu}{N(-s)} \right) \right]_{s=s_\rho}, \\ L^{-1} [N^{-1}(-s)] &= \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{L_{\rho\mu}}{(m_\rho-\mu)!} t^{m_\rho-\mu} e^{-s_\rho^* t}. \end{aligned}$$

Первое утверждение теоремы связано с разложением квадрата H_2 -нормы $N^{-1}(s)$, когда в первообразной функции спектральному разложению подвергается только функция $L^{-1} [N^{-1}(s)]$. В этом случае теорема о преобразовании Лапласа произведения комплексных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную дробь приобретает вид

$$\begin{aligned} L [L^{-1} [N^{-1}(s)] \times N^{-1}(-s)] &= L [H(t)] = \\ &= H(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{(-1)^{m_k-\nu} L_{k\nu}}{(m_k-\nu)!} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{1}{N(-s)} \right) \right]_{s=s-s_k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$J_1 = \|N^{-1}(s)\|_2^2 = -H(0) = J_2 = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!} \left\{ L_{k\nu} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{1}{N(-s)} \right) \right]_{s=s_k} \right\}_{Herm}.$$

Это доказывает первое утверждение теоремы. Если добавим в эту схему спектральное разложение второй функции $L^{-1}[N^{-1}(s)]$ и используем теорему о преобразовании Лапласа произведения комплексных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную дробь, то получим формулу

$$L[L^{-1}[N^{-1}(s)] \times N^{-1}(-s)] = L[H(t)] = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!} L_{k\nu} \left\{ \frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left[\sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^{m_\rho} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s-s_\rho^*)^{m_\rho-\mu+1}} \right]_{s=s_k} \right\} = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{(m_k-\nu+m_\rho-\mu+1)!}{(m_k-\nu)!} \times \\ \times \left[L_{k\nu} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s_k-s_\rho^*)^{m_k-\nu+m_\rho-\mu+1}} \right]_{Herm}.$$

Поскольку $H(t)$ – первообразная функция, то из (3.4) с учетом устойчивости системы следует

$$J_2 = \|N^{-1}(s)\|_2^2 = H(t)]_0^\infty = -H(0) = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{(m_k-\nu+m_\rho-\mu+1)!}{(m_k-\nu)!} \times \\ \times \left[L_{k\nu} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s_k-s_\rho^*)^{m_k-\nu+m_\rho-\mu+1}} \right]_{Herm}.$$

Это доказывает второе утверждение теоремы. Заметим, что при доказательстве теоремы не были использованы матрицы динамики базовой системы. Отсюда вытекает, что ее утверждения справедливы как для базовой системы (2.4), (2.5), так и для системы (2.7), (2.8). Кроме того, энергетические метрики J_1, J_2 равны друг другу, они являются положительными числами, поскольку H_2 -норма передаточной функции является положительным числом. Они являются инвариантами при различных преобразованиях подобия, поскольку являются функциями собственных чисел матрицы динамики системы.

Рассмотрим далее дифференциальное и алгебраическое уравнения Ляпунова вида

$$(3.12) \quad \frac{dP(t)}{dt} = A_d P(t) + P(t) A_d^T + b_d b_d^T, \quad P(0) = 0_{n \times n}, \quad t \in [0, T],$$

$$(3.13) \quad A_d P(t) + P(t) A_d^T = -b_d b_d^T.$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 2, но все полюса ПФ различны. Тогда справедливо следующее утверждение:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} J_1(s_1, \dots, s_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\dot{N}(s_k)} \frac{1}{(-s_k)^n + \dots + a_1(-s_k) + a_0} > 0, \\ J_2(s_1, \dots, s_n) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n J_{2,k\rho}(s_1, \dots, s_n) > 0, \\ J_{2,k\rho}(s_1, \dots, s_n) &= 2 \operatorname{Re} \frac{r_k r_\rho}{(-s_k - s_\rho)} = 2 \alpha_{k\rho} \operatorname{Re} \frac{(r_k r_\rho)}{\alpha_{k\rho}^2 + \beta_{k\rho}^2}, \\ \alpha_{k\rho} &= -\operatorname{Res}_k - \operatorname{Res}_\rho, \quad \beta_{k\rho} = -\Im s_k - \Im s_\rho. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим базовую систему (2.6), (2.7) и формулы (2.11), (2.12). Поскольку для базовой системы векторы входа и выхода имеют вид (2.7), (2.8), получаем

$$J_2(s_1, \dots, s_n) = c^F P_c^F (c^F)^T = y_{n-1} = \int_0^\infty k^2(\tau) d\tau,$$

где $k(\tau)$ – импульсная переходная функция системы. Отсюда вытекают формулы из утверждений.

Теорема 3. Предположим, что система SISO LTI (2.1) является полностью управляемой, существует невырожденное преобразование координат $x_d = Tx$ такое, что

$$A_d = T A T^{-1}.$$

Предположим, что все собственные числа матрицы A различны, не принадлежат мнимой оси и выполнены условия

$$s_i + s_j \neq 0, \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Решение уравнения (3.12) в комплексной области существует, единственно и имеет вид

$$(3.15) \quad L[P(t)] = \frac{1}{s} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \frac{-1}{(s_i + s_j^*)} \left[\operatorname{Res}(Is - A_d)^{-1}, s_i \right] b_{di} b_{dj} \times \right. \\ \left. \times \left[\operatorname{Res}(Is - A_d^*)^{-1}, s_j^* \right] \right\}_{Herm},$$

где b_{di} – элемент “ i ” вектора b_d , b_{dj} – элемент “ j ” вектора b_d .

2. Решение уравнения (3.12) в действительной области единственно и имеет вид

$$(3.16) \quad P(0, T) = \int_0^T \left\{ \sum_{i,j=1}^n \frac{-1}{(s_i + s_j^*)} b_d b_d^T e^{(s_i + s_j^*)\tau} e_j e_\eta^T d\tau \right\}_{Herm}.$$

3. Решение алгебраического уравнения (3.13) в действительной области существует, единственно и имеет вид

$$(3.17) \quad P(0, \infty) = \left\{ \sum_{i,j=1}^n \frac{-b_{di} b_{dj}}{(s_i + s_j^*)} e_j e_\eta^T \right\}_{Herm}.$$

Матрица $P^{-1}(0, \infty)$ в условиях теоремы существует и единственна

$$(3.18) \quad P^{-1}(0, \infty) = \frac{-P_0}{p_0},$$

где P_0 – свободный член матричного полинома Фаддеева, p_0 – свободный член характеристического полинома матрицы $P(0, T)$, определяемые с помощью рекуррентного алгоритма Фаддеева–Леверье [22, 23].

Доказательство. Применение преобразования Лапласа к матричным функциям времени имеет свои особенности. Рассмотрим диагональные матрицы размера $n \times n$

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \text{diag} [\dots \dots f_{1,\nu}(t) \dots \dots], \\ F_2(t) &= \text{diag} [\dots \dots f_{2,\eta}(t) \dots \dots], \end{aligned}$$

где функции $f_{1,\nu}(t), f_{2,\eta}(t)$ преобразуемы по Лапласу, а их изображения $f_{1,\nu}(s), f_{2,\eta}(s)$ являются рациональными дробями, имеющими только n полюсов и не имеющими нулей.

$$f_{1,i}(s) = \frac{1}{(s - s_{1,i})}, \quad f_{2,j}(s) = \frac{1}{(s - s_{2,j})}.$$

Покажем, что для каждого элемента “ ij ” изображения по Лапласу произведения матриц $F_1(t) b_{di} b_{dj} F_2(t)$ справедливы формулы

$$(3.19) \quad L[e_i F_1(t) b_{di} b_{dj} F_2(t) e_j^T] = \sum_{i,j=1}^n 1_{ii} b_{di} b_{dj} \frac{1}{(s - s_{1,i} - s_{2,j})} 1_{jj}, \quad 1_{ii} = e_i e_i^T, \\ f_{1,i}(t) = e^{s_i t}, \quad f_{2,j}(t) = e^{s_j^* t}.$$

Справедливы также тождества для вычетов резольвент:

$$\left[\text{Res}(Is - A_d)^{-1}, s_i \right] = 1_{ii}, \quad \left[\text{Res}(Is - A_d^*)^{-1}, s_j^* \right] = 1_{jj}.$$

Используя теорему о преобразовании Лапласа произведения вещественных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную алгебраическую функцию, получим (3.19). Как известно, решением дифференциального уравнения Ляпунова с нулевыми начальными условиями является интеграл Ляпунова вида

$$P(t) = \int_0^T e^{At} b_d b_d^T e^{A^*t} dt.$$

Применив (3.19), получим

$$(3.20) \quad P(0, T) = \int_0^T \left\{ \sum_{i,j=1}^n \frac{-1}{(s_i + s_j^*)} b_{di} b_{dj} e^{(s_i + s_j^*)\tau} e_j e_\eta^T d\tau \right\}_{Herm}.$$

Как показано в [13]

$$P(t) = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}(t), \quad P_{ij}(t) = \left\{ \frac{e^{(s_i + s_j^*)t}}{s_i + s_j^*} 1_{ii} b_{di} b_{dj} 1_{jj} \right\}_{Herm}.$$

Формула в утверждении 3) доказывается путем предельного перехода в (3.20). Существование и единственность решения уравнения (3.13) во временной области доказана во многих работах, например [3]. Докажем справедливость этого утверждения в комплексной области. Поскольку интеграл Ляпунова является решением уравнения (3.13), это утверждение достаточно доказать для его преобразования Лапласа. Заметим, что матрица $e^{At} b_d b_d^T e^{A^*t}$ является гладкой, не равной нулю функцией времени. Для любого “ ij ” элемента выполнено неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T e_j \left| e^{At} b_d b_d^T e^{A^*t} \right| e_\eta^T dt < \infty, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Отсюда вытекает, что для всех функций времени $e_j \left| e^{At} b_d b_d^T e^{A^*t} \right| e_\eta^T$, удовлетворяющих условиям теоремы, существует абсцисса абсолютной сходимости σ , что доказывает существование и единственность прямого преобразования Лапласа для решения (3.16). С другой стороны, если существует прямое преобразование Лапласа решения, то существует и обратное преобразование:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e_\nu \left| e^{At} b_d b_d^T e^{A^*t} \right| e_\mu^T e^{ts} ds, \quad c > \sigma, \quad \forall \nu, \mu = \overline{1, n}.$$

При этом обратное преобразование единственно в смысле Лебега. Справедливость утверждения 4) вытекает из полной управляемости системы [4]. Отсюда следует существование и единственность обратной матрицы $P^{-1}(0, T)$

при любом T . Запишем разложение резольвенты матрицы $P(0, T)$ в ряд Фаддеева–Леверье:

$$(3.21) \quad [Is - P(0, T)]^{-1} = \frac{P_{n-1}s^{n-1} + \dots + P_1s + P_0}{p_n s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0}.$$

Положив в (3.21) $s = 0$, получим формулу

$$(3.22) \quad P^{-1}(0, \infty) = \frac{-P_0}{p_0},$$

где P_0 – свободный член матричного полинома Фаддеева, p_0 – свободный член характеристического полинома матрицы $P(0, T)$. Они определяются с помощью рекуррентного алгоритма Фаддеева–Леверье [22, 23].

$$(3.23) \quad \begin{aligned} P_{n-1}s^{n-1} &= Ip_n s^{n-1}, \quad p_n = 1, \\ P_{n-2}s^{n-2} &= (Ip_{n-1} + p_{n-2}P(0, T))s^{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ P_0 &= \left(Ip_1 + p_2P(0, T) + \dots + p_nP(0, T)^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты p_i определяются формулами

$$p_{n-i} = \frac{-1}{i} \text{tr} (P(0, T) P_{n-i}).$$

Замечание 2. В работе [13] доказано, что результаты теоремы могут быть распространены на случай канонических форм Жордана уравнений состояния (2.1) для случая, когда характеристическое уравнение матрицы динамики SISO LTI системы (2.1) может быть представлено в виде

$$N(s) = \prod_{k=1}^n (s - s_k)^{m_k}, \quad \sum_{k=1}^n m_k = q.$$

Решение уравнения (2.3) в действительной области для кратных собственных чисел s_k матрицы A_d с кратностью m_k имеет вид

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{j\eta}(t), \\ P_{j\eta}(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} h_{j\eta}(t) b_d b_d^T e_j e_\eta^T, \\ h_{j\eta}(t) &= L^{-1} \left\{ s^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} L_{k,\nu j} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{s^\eta}{N(-s)} \right) \right]_{s=s-s_k} \right\}, \\ L_{k,\nu j} &= \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} \left(\frac{(s-s_k)^{m_k} s^j}{N(s)} \right) \right]_{s=s_k}. \end{aligned}$$

Пример 1. Рассмотрим простую базовую систему SISO LTI с размерностью $n = 3$, представленную уравнениями состояния в диагональной канонической форме вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= A_d x_d + b_d u, \\ A_d &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad b_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \\ N(s) &= a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_3 = 1, \quad a_2 = 6, \quad a_1 = 11, \quad a_0 = 6, \\ s_1 &= -1, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -3.\end{aligned}$$

Вычислим решение алгебраического уравнения Ляпунова. Поскольку в примере решается не дифференциальное, а алгебраическое уравнение Ляпунова для устойчивой системы, то формула (3.22) переходит в формулу

$$(3.24) \quad P(\infty) = [p_{ij}(\infty)], \quad p_{ij}(\infty) = \frac{-b_{di}b_{dj}}{s_i + s_j}.$$

Подставив в формулу параметры примера, получим

$$P(\infty) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,666 & 0,75 \\ 0,666 & 1 & 1,2 \\ 0,75 & 1,2 & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Положив в формуле (3.21) $s = 0$, получаем

$$(3.25) \quad P^{-1} = \frac{-P_0}{p_0}.$$

Первый шаг рекуррентного алгоритма. Задаем $P_2 = I_2$, $p_3 = 1$,

$$k = 0.$$

Второй шаг. Вычисляем P_1, p_2 .

$$\begin{aligned}k &= 1 \\ P_1 &= p_2 I_3 + P P_2 = \begin{bmatrix} -2,5 & 0,666 & 0,75 \\ 0,666 & -2 & 1,2 \\ 0,75 & 1,2 & -1,5 \end{bmatrix}, \\ p_2 &= \frac{-1}{1} \text{tr}(P P_2) = -3.\end{aligned}$$

Третий шаг. Вычисляем P_0, p_1 .

$$\begin{aligned}k &= 2 \\ P_0 &= p_2 I_3 + P P_2 = \begin{bmatrix} 0,06 & -0,099 & 0,0492 \\ -0,099 & 0,1875 & -0,1005 \\ 0,0492 & -0,1005 & 0,5844 \end{bmatrix}, \\ p_1 &= \frac{-1}{2} \text{tr}(P P_1) = -0,30394.\end{aligned}$$

Четвертый шаг. Вычисляем p_0 .

$$k = 3$$

$$p_0 = \frac{-1}{3} \text{tr}(PP_2) = -0,000966, \quad p_0^{-1} = -1035,19.$$

Подставляем полученные на последнем и предпоследнем шагах выражения в формулу (3.21)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 62,114 & -102,4838 & 50,9313 \\ -102,4838 & -194,0981 & -104,36 \\ 50,9313 & -104,36 & 58,426 \end{bmatrix}.$$

Не трудно убедиться, что полученная матрица является обратной матрицей грамиана управляемости.

Теорема 4. Рассмотрим МИМО LTI систему (2.1) в канонической форме управляемости и запишем дифференциальное уравнение Ляпунова

$$(3.26) \quad \frac{dP(t)}{dt} = A_c^F P(t) + P(t) (A_c^F)^T + B^F (B^F)^T, \\ P(0) = 0_{n \times n}, \quad t \in [0, T].$$

Предположим, что система (2.1) является полностью управляемой, существует невырожденное преобразование координат $x_c = Tx$, такое, что

$$A_c^F = TAT^{-1}.$$

Предположим, что все собственные числа матрицы A_c^F различны, не принадлежат мнимой оси и выполнены условия $s_i + s_j \neq 0, \forall i, j = \overline{1, n}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Решение уравнения (3.26) в комплексной области существует, единственно и имеет вид

$$(3.27) \quad [P(s)] = \frac{1}{s} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\text{Res} (Is - A_c^F)^{-1}, s_j \right] B^F (B^F)^T \times \right. \\ \left. \left\{ \left[[-Is - (A_c^F)^T]^{-1} \right] \right\} \right\}_{Herm},$$

где

$$A_{cj}^F = a_{j+1}I + a_{j+2}A_c^F + \dots + a_n (A_c^F)^{n-j-1}, \quad j = \overline{0, n-1}, \\ A_{c\eta}^F = a_{\eta+1}I + a_{\eta+2}A_c^F + \dots + a_n (A_c^F)^{n-\eta-1}, \quad \eta = \overline{0, n-1}.$$

2. Решение уравнения (3.26) в действительной области единственно и имеет вид

$$\begin{aligned}
 (3.28) \quad P_{j\eta}(t) &= \frac{\sum_{k=1}^n s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T = \\
 &= \Omega_{c,j\eta}^F(t) \circ \Psi_{c,j\eta}^F, \\
 \Omega_{c,j\eta}^F(t) &= \frac{\sum_{k=1}^n s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) e_j e_\eta^T, \\
 \Psi_{c,j\eta}^F &= A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T.
 \end{aligned}$$

3. Бесконечный грамиан управляемости имеет вид

$$\begin{aligned}
 (3.29) \quad P(0, \infty) &= \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\sum_{k=1}^n s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_\rho - s_\lambda)} e_j e_\eta^T \right\}_{Herm} \times \\
 &\times A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T.
 \end{aligned}$$

4. Матрица $P^{-1}(0, \infty)$ в условиях теоремы существует и единственна.

$$(3.30) \quad P^{-1}(0, \infty) = \frac{-P_0^F}{p_0},$$

в которой P_0^F – свободный член матричного полинома Фаддеева для уравнений состояния в канонической форме управляемости, p_0 – свободный член характеристического полинома грамиана, определяемые с помощью рекуррентного алгоритма Фаддеева–Леверье [22, 23].

5. Результаты теоремы могут быть распространены на случай канонических форм Жордана уравнений состояния (3.26) для случая, когда характеристическое уравнение матрицы динамики имеет “ k ” различных корней кратности m_k . Решение уравнения (3.26) в действительной области для кратных собственных чисел s_k матрицы A_c^F с кратностью m_k имеет вид

$$\begin{aligned}
 (3.31) \quad P(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{j\eta}(t), \\
 P_{j\eta}(t) &= h_{j\eta}(t) A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T, \\
 h_{j\eta}(t) &= L^{-1} \left\{ s^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} L_{k,j} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k - \nu)!} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{s^\eta}{N(-s)} \right) \right]_{s=s-s_k} \right\},
 \end{aligned}$$

$$(3.32) \quad L_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left(\frac{(s-s_k)^{m_k} s^j}{N(s)} \right) \right]_{s=k}.$$

Доказательство. Общий метод решения основан на спектральном разложении решения интеграла Ляпунова. Доказательство существования и единственности решений повторяет аналогичное доказательство теоремы 3. Точно так же доказывается справедливость утверждений 2–4 и рекуррентных формул (3.30). Сами формулы имеют другой вид, определяемый матрицей динамики в форме управляемости. Общее решение для случая различных корней характеристического уравнения в комплексной области имеет вид [13]

$$L[P(t)] = \frac{1}{s} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\text{Res} (Is - A_c^F)^{-1}, s_j \right] B^F (B^F)^T \times \right. \\ \left. \times \left\{ \left[[-Is - (A_c^F)^T]^{-1} \right] \right\} \right\}_{Herm}.$$

Введем матричную первообразную функцию $H_1(t)$ и скалярную матричную функцию $H(t)$ вида

$$H_1(t) = H(t) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T, \\ H(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1}.$$

$$A_{cj}^F = a_{j+1}I + a_{j+2}A_c^F + \dots + a_n (A_c^F)^{n-j-1}, \quad j = \overline{0, n-1}, \\ A_{c\eta}^F = a_{\eta+1}I + a_{\eta+2}A_c^F + \dots + a_n (A_c^F)^{n-\eta-1}, \quad \eta = \overline{0, n-1}.$$

В соответствии с (2.14) матрица $H(t)$ является матрицей Сяо. Отсюда следует, что матрицу $P_{j\eta}(t)$ можно представить в виде произведения Адамара [13]

$$P_{j\eta}(t) = \frac{\sum_{k=1}^n s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T = \\ = \Omega_{c,j\eta}^F(t) \circ \Psi_{c,j\eta}^F, \\ \Omega_{c,j\eta}^F(t) = \frac{\sum_{k=1}^n s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) e_j e_\eta^T, \\ \Psi_{c,j\eta}^F = A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T.$$

Из этих формул следует, что бесконечный грамиан управляемости для случая различных корней характеристического уравнения в действительной области имеет вид

$$P(0, \infty) = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\sum_{k=1}^n s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_\rho - s_\lambda)} e_j e_\eta^T \right\}_{Herm} \times \\ \times A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T.$$

Это доказывает справедливость утверждений 1–3. Справедливость утверждения 4 доказывается так же, как и теоремы 3. Для построения бесконечного грамиана управляемости используется рекуррентный алгоритм Фаддеева–Леверье (см. пример)

$$P^{-1}(0, \infty) = \frac{-P_0}{p_0},$$

в котором P_0 – свободный член матричного полинома Фаддеева, p_0 – свободный член характеристического полинома матрицы грамиана управляемости.

$$P(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{j\eta}(t), \\ P_{j\eta}(t) = h_{j\eta}(t) A_{cj}^F B^F (B^F)^T (A_{c\eta}^F)^T, \\ h_{j\eta}(t) = L^{-1} \left\{ s^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} L_{k,j} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k - \nu)!} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{s^\eta}{N(-s)} \right) \right]_{s=s-s_k} \right\}, \\ L_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left(\frac{(s-s_k)^{m_k} s^j}{N(s)} \right) \right]_{s=k}.$$

Следствие 3. Обобщим результаты теоремы 4 для непрерывных линейных SISO LTI систем. Предположим, что выполнены все условия теоремы 4 с заменой MIMO LTI систем на SISO LTI системы. Тогда справедливо следующее спектральное разложение грамиана управляемости SISO LTI системы в действительной области

$$P(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\eta=1}^n \frac{s_k^{j-1} (-s_k)^{\eta-1}}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) e_j e_\eta^T.$$

Доказательство. Для системы в канонической форме управляемости разложение резольвент матриц динамики A^F, A^{F*} имеет простой вид, поэто-

му справедливы формулы

$$(Is - A^F)^{-1}b^F = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N(s)^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ N(s)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} N(s)^{-1} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b^{FT}(-Is - A^{F*})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N(-s)^{-1} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ N(-s)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}^T + \dots + \begin{bmatrix} N(-s)^{-1} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Подставив их в (3.27), используя теорему о преобразовании Лапласа произведения комплексных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную дробь и теорему о смещении в комплексной области, доказываем формулу Следствия 3 [13].

Следствие 4 [13, Теорема 1]. Предположим, что выполнены условия теоремы 4 для SISO LTI системы. Кроме того, предположим, что система асимптотически устойчива. Тогда спектральное разложение обратного грамиана управляемости LTI системы в комплексной области является решением систем уравнений

$$(3.33) \quad \vec{X} = (I_n \otimes P_c^F)^{-1} \vec{I}_n.$$

$$(3.34) \quad P_c^F = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что решение системы (3.33)–(3.34) существует и единственно. В [13] был предложен следующий алгоритм вычисления матриц обратных грамианов в форме Сяо. Пусть X – матрица обратного грамиана управляемости, x_i – “ i -й” столбец матрицы X . Тогда обратный грамиан определяется формулой

$$P_c^F x_i = e_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где e_i – x_i – “ i -й” столбец матрицы I_n . Эти уравнения можно переписать в виде решения алгебраического уравнения Сильвестра

$$(I_n \otimes P_c^F) \vec{X} = \vec{I}_n, \quad X = (P_c^F)^{-1}.$$

Перепишем (2.14) в виде

$$P_c^F = \sum_{k=1}^n P_{ck}^F, \quad P_{ck}^F = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1},$$

где P_{ck}^F – матрица субграмиана управляемости, соответствующая полюсу s_k . Откуда

$$\vec{X} = (I_n \otimes P_c^F)^{-1} \vec{I}_n.$$

Окончательно получаем искомое спектральное разложение обратного грамиана управляемости по спектру матрицы динамики в канонической форме управляемости в виде (3.33), (3.34). Обратный грамиан имеет структуру нулевого плеча матрицы Сяо (zero plaid, [5, 6]). Такую же структуру будут иметь столбцы матрицы P_c^F . Незначимые элементы нулевого плеча определяются формулой

$$x_{ij} = 0, \quad \forall i, j = i + j \neq 2k, \quad k = \overline{1, n}.$$

С другой стороны конечный обратный грамиан определяется и виде решения дифференциального уравнения Сильвестра

$$X = - \int_0^t e^{P_c^F t} dt, \quad \text{или} \quad \frac{dX}{dt} = e^{P_c^F t},$$

которое можно решить в комплексной области

$$\mathcal{L} \left(\frac{dX}{dt} \right) = (Is - P_c^F)^{-1}.$$

Решение этого уравнения с помощью спектральных разложений резольвенты грамиана можно получить на основе применения алгоритма Фаддеева–Леверье.

Замечание 3. Анализ формул теорем 3 и 4 показывает, что они гораздо сложнее для вычислений грамианов, чем формулы энергетических метрик теоремы 2 J_1, J_2 . Однако последние инвариантны при любых преобразованиях подобия, в том числе и тех, которые приводят МИМО LTI систему (2.1) в новую систему, уравнения состояния которой отвечают одной из трех канонических форм: Жордана, модальной, управляемости.

4. Энергетические метрики устойчивости и критерий устойчивости Рауса–Гурвица

Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости базовой системы второго вида имеет форму ограниченности квадратов норм ПФ системы [1]

$$(4.1) \quad \|N^{-1}(s)\|_2^2 < \infty, \quad \|N^{-1}(s)\|_\infty^2 < \infty$$

или в соответствии с теоремой 2 ограниченности квадратов норм ПФ базовой системы для случая кратных корней

$$(4.2) \quad J_1 < \infty, \quad J_2 < \infty, \quad \max_{s_i} J_1 < \infty, \quad \max_{s_i} J_2 < \infty.$$

Определим энергетическую метрику устойчивости базовой системы в виде $J_1(s_1, \dots, s_n), J_2(s_1, \dots, s_n)$. Спектральные разложения энергетических метрик $J_1(s_1, \dots, s_n), J_2(s_1, \dots, s_n)$ по простым корням характеристического уравнения имеют вид (3.2), (3.3). Математическая корректность этих метрик вытекает из того, что метрики равны квадратам H_2 или H_∞ -норм передаточной функции базовой системы, которые являются инвариантами при преобразованиях подобия.

$$\|N^{-1}(s)\|_{inf}^2 = \max_{s_k} \|N^{-1}(s)\|_2^2, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Спектральные разложения энергетической метрики $J_2(s_1, \dots, s_n)$ по кратным корням характеристического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} J_2(s_1, \dots, s_n) = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{(m_k - \nu + m_\rho - \mu + 1)!}{(m_k - \nu)!} \times \\ \times \left[L_{k\nu} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s_k - s_\rho^*)^{m_k - \nu + m_\rho - \mu + 1}} \right]_{Herm}. \end{aligned}$$

Заметим, что метрики базовых систем не зависят от матриц Фаддеева в разложении грамианов управляемости. Из этих формул следует, что по мере приближения системы к границе устойчивости, вызванного приближением корней характеристического уравнения к мнимой оси, энергетические метрики устойчивости стремятся к бесконечности. Определим приемлемое значение энергетической метрики устойчивости в виде положительного достаточно большого числа N_{perm} :

$$(4.3) \quad J_1(s_1, \dots, s_n) = N_{1perm}, \quad J_2(s_1, \dots, s_n) = N_{2perm}.$$

Будем считать любую базовую систему условно неустойчивой, если все корни ее характеристического уравнения находятся в левой полуплоскости, но при этом энергетическая метрика устойчивости превышает установленное приемлемое значение.

Заметим, что именно слабоустойчивые и резонансные корни характеристического уравнения определяют степень близости системы к границе устойчивости. Анализ формул теоремы 2 показывает, что слабоустойчивыми являются две группы корней. Первая группа состоит из корней, близких мнимой оси. Вторая группа состоит из комплексных пар корней, которые близки друг другу по норме (резонансная группа корней). При приближении слабоустойчивых собственных чисел первой группы друг к другу соответствующие им слабые становятся положительно-определенными, а их значения становятся сколь угодно большими положительными числами. Аналогичные предельные соотношения имеют место для резонансной группы корней. В последнем случае степень колебательной неустойчивости будет гораздо выше, так как

модули вычетов $L_{kv}, L_{\rho\mu}$ обратно пропорциональны разности корней s_k, s_ρ . Оценка энергии слабоустойчивых составляющих разложений энергетических метрик устойчивости позволяет определить и оценить энергетический запас устойчивости в виде

$$(4.4) \quad R_{1stab} = 20lg \frac{N_{perm}}{J_1(s_1, \dots, s_n)},$$

$$(4.5) \quad R_{2stab} = 20lg \frac{N_{perm}}{J_2(s_1, \dots, s_n)}.$$

Введенные метрики устойчивости (4.2), (4.3) не отменяют классический критерий устойчивости, основанный на близости ближайшего корня характеристического уравнения к мнимой оси, а дополняют его с учетом энергии, аккумулированной в состояниях системы. То же относится к алгебраическому критерию устойчивости линейных стационарных систем Рауса–Гурвица [5, 6]. Можно ожидать, что совместное применение критерия Рауса–Гурвица и спектральных разложений грамианов в виде энергетических метрик устойчивости (4.4), (4.5) для анализа устойчивости создаст эффект синергии, усилив преимущества каждого подхода и ослабив их недостатки. Гибридный критерий включает формирование таблиц Рауса и матриц Сяо, вычисление спектра матрицы динамики, вычисление спектральных разложений энергетических метрик $J_1(s_1, \dots, s_n), J_2(s_1, \dots, s_n)$, формирование критерия устойчивости (4.4), (4.5), анализ устойчивости для различных сценариев функционирования системы. Очевидно, что полученные критерии справедливы не только для базовой системы, а и для непрерывной стационарной линейной системы со многими входами и многими выходами, характеристический многочлен которой совпадает с характеристическим многочленом базовой системы. В [9] предложен метод вычисления грамиана базовой системы в канонической форме управляемости, основанный на использовании таблицы Рауса и без необходимости вычислять спектр матрицы динамики. Диагональные элементы матриц Сяо связаны с элементами таблицы Рауса соотношениями

$$(4.6) \quad y_{j\eta} = \begin{cases} 0, & \text{если } j + \eta = 2k + 1, \quad k = 1, \dots, n; \\ y_n = \frac{1}{2Y_{n,1}}, \\ - \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i Y_{n-l, i+1} y_{n-l+i} \\ y_{n-l} = \frac{Y_{n-l,1}}{Y_{n-l,1}}, \\ \text{если } j + \eta = 2k, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

где $R_{j\eta}$ – элементы “ $j\eta$ ” таблицы Рауса, m – число элементов в “ j ” строке таблицы Рауса. Предположим, что наряду с таблицей Рауса предварительно вычислены все собственные числа матрицы динамики s_k , и они различны. В соответствии с (2.13), (2.14) грамиан управляемости базовой системы имеет

форму матриц Сяо, диагональные элементы которой имеют вид

$$(4.7) \quad y_i = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{i-1} (s_k)^{2i-2}}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1}^n (-s_k - s_\lambda)} > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Выражения (4.7) показывают, что энергетическая метрика устойчивости зависит от плотности распределения вещественных частей собственных чисел s_k, s_λ на вещественной оси: чем ближе s_λ к s_k , тем больше значение энергетической метрики [14, 16]. В этом состоит групповой эффект нелинейного взаимодействия мод, который усиливается при стремлении модуля вещественных частей корней характеристического уравнения друг к другу и их комбинаций к нулю. Достоинством алгоритма (4.6) является отсутствие необходимости вычислять собственные числа матрицы динамики. Это является одновременно и его недостатком, поскольку коэффициенты характеристического уравнения в большинстве случаев не имеют физического смысла, так как не связаны с конкретными физическими устройствами. Достоинством алгоритма (4.7) является то, что диагональные элементы матриц грамианов выражают энергию измеряемой физической переменной базовой системы y_i . Вместе с тем значения метрики обратно пропорциональны произведениям модулей разности всех собственных чисел, которые по норме близки друг другу. В этом смысле метрика (4.7) оценивает энергию совместного взаимодействия в группе слабоустойчивых колебательных мод. Критерий Рауса–Гурвица не обладает таким свойством. Кроме того, переменные y_i зависят от собственных чисел s_k каждое из которых связано с конкретным физическим устройством и имеет его метку. С их помощью можно вычислять квадраты H_2 - и H_∞ -норм передаточных функций в задачах оптимального синтеза робастных систем управления по критерию энергоэффективности. Для замкнутых систем управления применяются формулы (4.1), в которых $N^{-1}(s)$ является характеристическим полиномом замкнутой системы. Энергетические метрики позволяют также оценивать степень достижимости, объем эллипсоидов притяжения, среднюю минимальную энергию и индексы центральности динамических сетей [7, 10–12, 15]. Совместное использование алгоритмов (4.6), (4.7) в рассматриваемом гибридном критерии Рауса–Гурвица обеспечивает более глубокий анализ аperiodической и колебательной устойчивости системы с учетом кратности собственных чисел матрицы динамики системы.

5. Заключение

Метод спектральных и сингулярных разложений грамианов является развитием частотных методов анализа и синтеза систем управления. Основным инструментом для построения разложений являются теоремы преобразования Лапласа для спектральных и сингулярных разложений решений дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра, разложение резольвенты матрицы динамики и матрицы грамиана в ряд Фаддеева–Леверье и ре-

куррентные алгоритмы вычисления матриц Фаддеева. Эти разложения для канонических форм управляемости и наблюдаемости имеют явную физическую интерпретацию в виде мер энергии квадратичных форм, образованных переменными состояния базовой системы. В работе показано, что прямой и обратные грамианы управляемости можно вычислять с помощью одной общей эффективной рекуррентной процедуры. В статье предложен новый способ вычисления изображений по Лапласу конечных грамианов для простых и кратных собственных чисел на основе численно устойчивых рекуррентных алгоритмов для разложения изображения матричной резольвенты в ряд Фаддеева–Леверье [22, 23]. Использование разработанных спектральных разложений квадрата H_2 -нормы передаточных функций базовых систем позволяет упростить построение математических моделей низкого порядка в методе сбалансированного отсечения. Применение преобразований уравнений системы в канонические формы дает при вычислении спектральных разложений прямых и обратных грамианов следующие преимущества:

1. Матрицы грамианов вычисляют как решения дифференциальных уравнений Ляпунова в частотной и временной области, что позволяет одновременно вычислять решения алгебраических уравнений Ляпунова, как конечные, так и бесконечные грамианы, как прямые, так и обратные грамианы для непрерывных динамических систем, задаваемых уравнениями состояния в канонических формах: Жордана, модальной, управляемости, наблюдаемости.

2. Грамианы в канонических формах управляемости и наблюдаемости в форме матриц Сяо являются инвариантными при преобразовании подобия. При этом для их получения достаточно вычислить только n диагональных элементов матриц грамианов вместо n^2 элементов.

3. Энергетические метрики устойчивости базовых систем J_1 и J_2 позволяют вычислять степень устойчивости системы не только для различных, но и для кратных корней характеристического уравнения. Наличие кратных корней существенно усиливает угрозу потери устойчивости. Спектральные разложения энергетических метрик устойчивости базовых систем для динамических систем высокой размерности с кратным спектром матриц динамики позволяют избежать использования матриц Жордана.

4. Спектральные разложения грамианов управляемости устойчивой базовой системы в форме Коши зависят от вещественных частей простых и кратных собственных чисел матрицы динамики, от их плотности распределения на вещественной оси [25].

5. Рекуррентные алгоритмы спектральных разложений грамианов содержат только матричные операции сложения и умножения и не содержат операции инвертирования и возведения в степень. Они содержат только операции сложения, умножения, возведения в степень для скалярных функций, и не содержат операции деления на функции равные нулю. Вычеты передаточных функций базовых систем, которые используются при вычислении энергетических критериев, также можно вычислить с помощью ре-

куррентных алгоритмов. Все это является следствием разложения резольвент матриц динамики исходной устойчивой и дуальной антиустойчивой систем в ряд Фаддеева–Леверье и применения классических частотных методов анализа и синтеза динамических систем, что делает подобный подход новым эффективным инструментом для вычислений энергетических критериев устойчивости.

Определенным недостатком новых методов и алгоритмов, развиваемых в данной работе, являются проблемы их вычислительной реализации для систем высокой размерности. Однако именно применение рекуррентных версий разработанных алгоритмов вычисления грамианов и энергетических метрик делает эффективным их применение для динамических систем высокой размерности [26]. В статье получены результаты исследований, которые могут оказаться полезными в проектировании цифровых двойников, методов оптимизации затрат энергии в системах управления, анализа энергетических метрик устойчивости и достижимости, мониторинга состояния на основе анализа аномалий энергетического баланса, разработке энергетических метрик систем, задаваемых уравнениями состояния для динамических сетей в виде графов, в задачах вибрационного анализа технических объектов [13, 28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadelphia, 2005.
2. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. P. 686–711.
3. *Behr M., Benner P., Damm T.* Solution formulas for differential Sylvester and Lyapunov equations // Calcolo. 2019. V. 56. No. 51.
<https://doi.org/10.1007/s10092-019-0348-x>
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
5. *Hauksdottir A., Sigurdsson S., Adalgeirsson S., Porgilsson H., Herjolfsson G.* Closed form solutions of the Sylvester and the Lyapunov equations – closed form Gramians // 2008 American Control Conference, Seattle, WA, USA, 2008. P. 2585–2590.
<https://doi.org/10.1109/ACC.2008.4586881>
6. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA, 2009. P. 5345–5350.
<https://doi.org/10.1109/ACC.2009.5160123>
7. *Liu Y., Slotine J., Barabasi A.* Controllability of complex networks // Nature. 2011. V. 473. No. 7346. P. 167–173. <https://doi.org/10.1038/nature10011>
8. *Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M.* On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038>

9. *Sreeram V., Agathoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form // IEE Proc. D. Control. Theory Appl. 1991. V. 138. No. 6. P. 529–534. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1991.0074>
10. *Pasqualetti F., Zampieri S., Bullo F.* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2014. V. 1. No. 1. P. 40–52. <https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6858621>
11. *Lindmark G., Altafini C.* Minimum energy control for complex networks // Scientific Reports. 2018. V. 8. No. 3188. P. 1–14. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-21398-7>
12. *Бирюков Д.С., Слита О.В., Ушаков А.В.* Оценка затрат на управление в задаче обеспечения желаемой структуры мод и их робастности // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 11. С. 38–43.
13. *Ядыкин И.Б.* Спектральные разложения обратных матриц грамианов и энергетических метрик непрерывных динамических систем // АиТ. 2024. № 10. С. 80–107.
14. *Ядыкин И.Б., Галяев А.А.* О методах вычисления грамианов и использовании их в анализе линейных динамических систем // АиТ. 2013. № 2. С. 53–74.
15. *Zhao S., Pasqualetti F.* Networks with diagonal controllability Gramian: Analysis, graphical conditions, and design algorithms // Automatica. 2019. V. 102. P. 10–18.
16. *Iskakov A., Kutyaev E., Kataev D.* Locating the source of forced oscillations on the basis of Lyapunov modal analysis // IFAC-PapersOnLine. Rabat: Elsevier, 2024. V. 58. No. 13. P. 685–690.
17. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006. 272 с.
18. *Bakhtadze N., Yadykin I.* Discrete Predictive Models for Stability Analysis of Power Supply Systems // Mathematics. 2020. V. 8. No. 11. P. 1943. <https://doi.org/10.3390/math8111943>
19. *Ядыкин И.Б., Галяев И.А.* Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления // АиТ. 2023. № 10. С. 132–149.
20. *Ядыкин И.Б., Галяев И.А.* Структурные спектральные методы решения непрерывных уравнений Ляпунова // АиТ. 2023. № 12. С. 18–37.
21. *Fiedler M.* Notes on Hilbert and Cauchy matrices // Linear algebra and its Applications. 2010. V. 432. P. 351–356.
22. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник-М.: Изд-во Лань, 2009. 726 с.
23. *Hanson B., Peeters R.* A Faddeev Sequence Method for solving Lyapunov and Sylvester Equations // Linear Algebra and its Applications. 1996. V. 241–243. P. 401–430.
24. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж. Л.* Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными параметрами. М.: Физматлит, 1961.
Gardner M.F., Barnes J.L. Transients in linear systems studied by the Laplace transformation / V. 1. Lumped-constant systems. New York, London. Wiley, Chapman and Hall, 1942.
25. *Фуртат И.Б.* Плотностные системы. Анализ и управление // АиТ. 2023. № 11. С. 55–76.

26. Bekhiti B., Fragulis G., Maraslidis G., et al. A Novel Recursive Algorithm for Inverting Matrix Polynomials via a Generalized Leverrier-Faddeev Scheme: Application to FEM Modeling of Wing Vibrations in a 4th Generation Fighter Aircraft // Mathematics. 2025. V. 13. No. 2101. <https://doi.org/10.3390/math13132101>
27. Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н. Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // АиТ. 2013. № 4. С. 59–79.
28. Yazar E., Erturk A.T., Acikgez C., Karabay S. Experimental and numerical vibration analysis of surface mechanical attrition treatment // Journal of Vibration and Control. 2022. V. 29. No. 23–24. P. 5737–5749.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 14.10.2025

Принята к публикации 20.11.2025

© 2026 г. М.М. ВОЛЬНЫХ (volnykh.mm17@physics.msu.ru)
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова),
А.Г. КУШНЕР, д-р физ.-мат. наук (kushner@physics.msu.ru)
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПЕРЕМЕННОЙ ПОРИСТОСТЬЮ¹

Рассмотрена задача построения многозначного решения для уравнения Бакли–Леверетта, описывающего процесс двухфазной фильтрации в среде с переменным коэффициентом пористости. Такое уравнение используется для расчета эволюции поверхности разделения фаз “нефть–вода” при разработке нефтяных месторождений. Показано, как для заданных начальных условий построить каустику многозначных решений.

Ключевые слова: фильтрация, пористые среды, многозначное решение, каустика, джеты, контактная структура, контактные векторные поля.

DOI: 10.7868/S2413977726040034

1. Введение

В процессе освоения нефтяных месторождений для поддержания энергии пласта применяется нагнетание через специальные скважины вытесняющего агента, такого как вода или растворы с активными добавками. Перемещение нефти, вытесняемой этим агентом, и самого агента зависит от разницы давлений между зонами нагнетания и добычи. В однородных пластах движение жидкостей между чередующимися рядами добывающих и нагнетательных скважин часто рассматривается как одномерное. Это предположение оправдано, например, при осуществлении нагнетания и отбора через параллельно расположенные скважины [1].

Особенно отчетливо одномерная фильтрация жидкостей проявляется при применении горизонтальных скважин с параллельными стволами или вертикальных скважин с трещинами гидроразрыва. Вытесняющий агент подается через нагнетательные скважины и направляется в горизонтально ориентированные трещины, сформированные гидроразрывом. Под влиянием давления потоки жидкости из этих трещин устремляются к добывающим скважинам, откуда нефть извлекается на поверхность через вертикальные каналы.

Данный подход к добыче особенно результативен для месторождений с трудноизвлекаемыми запасами, где для успешного вытеснения нефти требуются физико-химические методы воздействия. Среди таких методов можно

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 25-21-00152).

выделить использование растворов активных компонентов (например, полимеров, поверхностно-активных веществ, углекислого газа и других), тепловые способы (такие как нагнетание горячей воды, пара или внутрипластовое горение), а также волновые воздействия (гидродинамические, электромагнитные, ультразвуковые) или их сочетания.

2. Описание модели

Уравнение Бакли–Левретта [2] описывает одномерную двухфазную фильтрацию в пористой среде. Оно основано на законе Дарси, согласно которому скорость фильтрации пропорциональна разности парциальных давлений фаз. В модели Бакли–Левретта эта разность считается постоянной. Также постоянной предполагается проницаемость порового пространства, которое считается недеформируемым.

Уравнение Бакли–Левретта имеет следующий вид:

$$(1) \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}(F(s)) = 0.$$

Здесь t – время, x – пространственная координата (ось Ox направлена в сторону движения флюидов), $s = s(t, x)$ – водонасыщенность (объемная доля пор, занятых водой), m – коэффициент пористости, $F(s)$ – функция Бакли–Левретта, указывающая объемную долю воды в суммарном потоке U , который считается постоянным. Примерный вид графика функции Бакли–Левретта и ее производной показаны на рис. 1. Штрих означает производную функции F по переменной s .

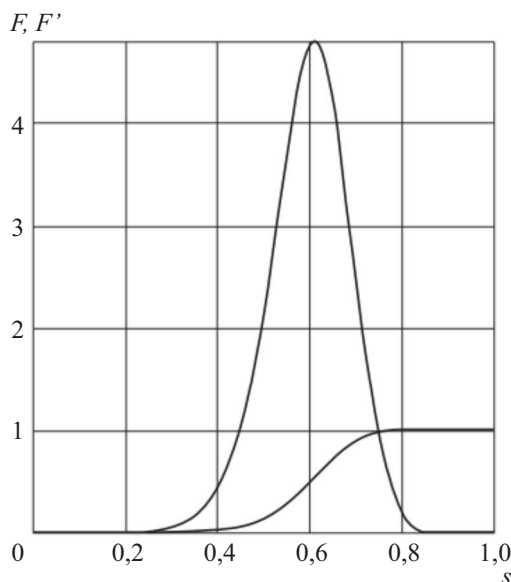


Рис. 1. Графики функций F и ее производной.

Обычно предполагается, что пористая среда однородна, т.е. в уравнении (1) коэффициент пористости m постоянный. Здесь откажемся от этого предположения и будем полагать, что функция m зависит от пространственной переменной, т.е. $m = m(x)$. Функцию $m(x)$ считаем дифференцируемой.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1):

$$(2) \quad s(0, x) = S(x),$$

где $S(x)$ – заданная функция, которую предполагаем дифференцируемой. Как известно, классическое решение этой задачи разрушается при достижении некоторого критического момента времени каким бы ни было начальное распределения водонасыщенности. У решения возникает разрыв, и граница раздела фаз движется подобно ударной волне.

Поэтому вместо классических решений будем рассматривать многозначные решения [3]. Этот подход позволяет обойти трудности, связанные с разрушением решений уравнений, и дает возможность описывать эволюцию ударных волн.

3. Характеристики уравнения Бакли–Леверетта

Будем использовать дифференциально-геометрический подход к уравнению (1). Применительно к рассматриваемой задаче этот метод описан в [4]. При таком подходе уравнение рассматривается как гиперповерхность в пространстве 1-джетов функций двух переменных.

Пространство 1-джетов $J^1 = J^1(\mathbb{R}^2)$ функций двух независимых переменных t и x – это пятимерное пространство с каноническими координатами $t, x, u_{00}, u_{10}, u_{01}$. Укажем координаты 1-джета $\theta = j_a^1(s)$ функции $s = s(t, x)$ в точке $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$t(a) = a_1, \quad x(\theta) = a_2, \quad u_{00}(\theta) = s(a), \quad u_{10}(\theta) = \frac{\partial s}{\partial t}(a), \quad u_{01}(\theta) = \frac{\partial s}{\partial x}(a).$$

Пространство J^1 наделено четырехмерным контактным распределением $\mathcal{C}$, порожденным дифференциальной 1-формой (формой Картана)

$$\varkappa = du_{00} - u_{10}dt - u_{01}dx.$$

Это означает, что в касательном расслоении TJ^1 определено поле подпространств

$$\mathcal{C} : J^1 \ni \theta \mapsto \mathcal{C} = \ker \varkappa_\theta \subset T_\theta J^1,$$

которое не является вполне интегрируемым.

Уравнению (1) отвечают функция $f = m(x)u_{10} + UF'(u_{00})u_{01}$ и гиперповерхность в пространстве 1-джетов: $\mathcal{E} = \{f = 0\}$. Для краткости введем следующее обозначение:

$$(3) \quad H(u_{00}) = UF'(u_{00}).$$

Тогда

$$(4) \quad f = m(x)u_{10} + H(u_{00})u_{01}.$$

Мнозначное решение уравнения (1) – это двумерная поверхность $L \subset \mathcal{E}$, которая является интегральным многообразием контактного распределения $\mathcal{C}$, т.е. ограничение формы Картана на него равно нулю: $\varkappa|_L = 0$.

Определим векторное поле

$$(5) \quad X = -m(x)\frac{\partial}{\partial t} - H(u_{00})\frac{\partial}{\partial x}$$

на пространстве 0-джетов J^0 . Значение формы Картана на этом поле совпадает с функцией f , а продолжение поля X в пространство 1-джетов – это контактное векторное поле с производящей функцией f :

$$\begin{aligned} X_f = -m(x)\frac{\partial}{\partial t} - H(u_{00})\frac{\partial}{\partial x} + H'(u_{00})u_{01}u_{10}\frac{\partial}{\partial u_{10}} + (m'(x)u_{10} + \\ + H'(u_{00})u_{01}^2)\frac{\partial}{\partial u_{01}}. \end{aligned}$$

Оно называется *характеристическим* векторным полем для уравнения (1), а его траектории – *характеристиками*.

Это векторное поле касается гиперповерхности $\mathcal{E}$ и, более того, касается каждого многозначного решения уравнения (1) (см. [5]). Его можно использовать для построения многозначного решения обобщенной задачи Коши. Остановимся на этом более подробно.

4. Задача Коши

Начальное условие (2) порождает кривую Коши в пространстве 1-джетов, которую зададим в виде системы четырех уравнений:

$$\mathcal{K} = \{t = 0, u_{00} = S(x), u_{01} = S'(x), m(x)u_{10} + H(u_{00})S'(x) = 0\} \subset \mathcal{E}.$$

Заметим, что так как $\varkappa|_{\mathcal{K}} = 0$, то эта кривая является интегральной для контактного распределения.

Так как коэффициент $m(x) \neq 0$, то в каждой точке $a \in \mathcal{K}$ касательный вектор поля X_f не лежит в касательном пространстве к этой кривой: $X_f|_a \notin T_a\mathcal{K}$. Сдвинув кривую Коши вдоль траекторий векторного поля X_f , получим двумерную поверхность

$$L = \Phi_\tau^{(1)}(\mathcal{K}).$$

Здесь τ – параметр сдвига вдоль траекторий, а $\Phi_\tau^{(1)}$ – преобразование сдвига (поток векторного поля X_f) от $\tau = 0$ до τ . Этот поток является продолжением в пространство 1-джетов потока Φ_τ векторного поля (5).

Так как поток $\Phi_\tau^{(1)}$ сохраняет контактное распределение $\mathcal{C}$, то поверхность L является многозначным решением.

Таким образом, многозначное решение L является дизъюнктивным объединением характеристик, проходящих через кривую $\mathcal{K}$. Это многозначное решение будем называть *многозначным решением задачи Коши*.

Проекция характеристик на плоскость независимых переменных t, x – это интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{H(u_{00})}{m(x)}.$$

Эти кривые также будем называть характеристиками.

Так как $X_f(u_{00}) = 0$, т.е. производная Ли функции u_{00} вдоль характеристического векторного поля равна нулю, то каждая характеристика уравнения (1) целиком лежит в слое $u_{00} = \text{const}$. Конечно, для каждой характеристики константа своя. Поэтому функция $H(u_{00})$ постоянна на характеристике.

Интегральные кривые уравнения (6) имеют вид

$$(7) \quad t = \frac{1}{H(u_{00})} \int m(x) dx + C.$$

В этой формуле параметр u_{00} является константой, значение которой определяется начальной точкой характеристики.

В отличие от случая постоянной пористости, когда проекции характеристик на плоскость независимых переменных являются прямыми, здесь получено семейство кривых.

5. Случай линейной пористости

Рассмотрим случай линейной пористости:

$$m(x) = \alpha x + \beta.$$

При этом должно выполняться условие $m(x) > 0$. В качестве функции (3) выберем функцию

$$H(u) = a \exp\left(-\frac{(u-b)^2}{2c^2}\right) + d,$$

которая хорошо приближает производную F' функции Бакли–Леверетта (см. рис. 1). Здесь $\alpha, \beta, a, b, c, d$ – некоторые действительные числа, причем β, a, c не равны нулю. В качестве начальной функции (2) выберем функцию

$$S(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

которая хорошо приближает функцию водонасыщенности вблизи нагнетательной скважины, расположенной в точке $x = 0$.

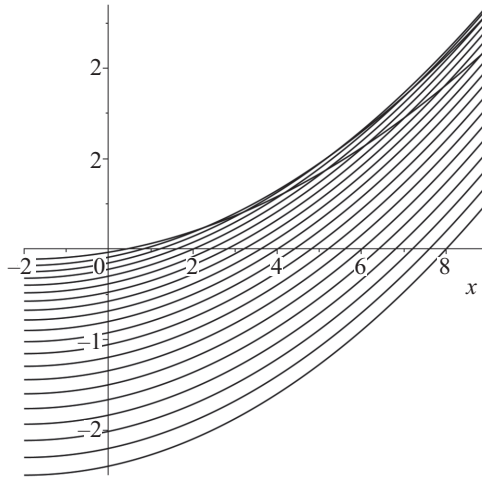


Рис. 2. Характеристики (9) для значений параметров (10).

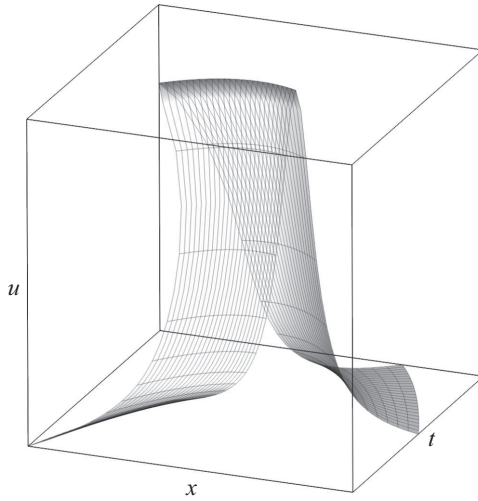


Рис. 3. Многозначное решение L .

Координатную функцию u_{00} для краткости обозначим через u , опуская нижние индексы. Тогда векторное поле (5) примет вид

$$(8) \quad X = -(\alpha x + \beta) \frac{\partial}{\partial t} - \left(a \exp \left(-\frac{(u-b)^2}{2c^2} \right) + d \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Его поток находится явно:

$$\Phi_\tau : \begin{cases} t \mapsto \alpha \left(a \exp \left(-\frac{(u-b)^2}{2c^2} \right) + d \right) \frac{\tau^2}{2} - (\alpha x + \beta)\tau + t, \\ x \mapsto - \left(a \exp \left(-\frac{(u-b)^2}{2c^2} \right) + d \right) \tau + x, \\ u \mapsto u. \end{cases}$$

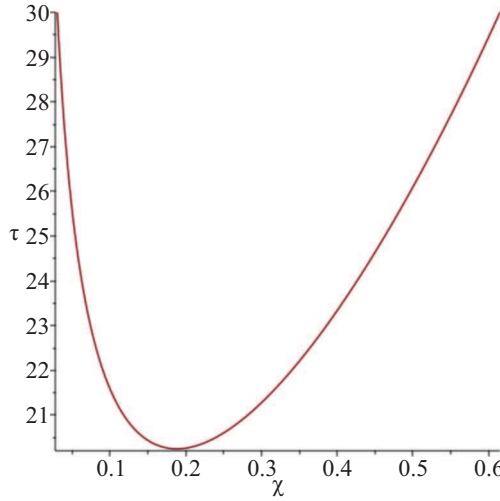


Рис. 4. Каустика Σ на многозначном решении.

Характеристика (7), проходящая через точку (t_0, x_0) , имеет вид параболы

$$(9) \quad \alpha(x^2 - x_0^2) + 2\beta(x - x_0) - 2(t - t_0) \left(a \exp \left(-\frac{(bx_0^2 + b - 1)^2}{2(x_0^2 + 1)^2 c^2} \right) + d \right) = 0.$$

Начиная с некоторого момента времени $t = T$ параболы (9) пересекаются, и при $t > T$ решение уравнения (1) становится многозначным. В точке $t = T$ возникает так называемая “градиентная катастрофа” – частная производная по переменной x классического однозначного решения становится бесконечной. Такое же явление наблюдается и для случая постоянной пористости, однако характеристиками там являются не парабола, а прямые.

Данная работа не касается вопроса преодоления этой трудности. Стандартный способ – построение разрывных решений из многозначных с помощью законов сохранения и условий Гюгонио–Ренкина [6].

Огибающая семейства характеристик (9) является проекцией каустики $\Sigma \subset L$ на плоскость независимых переменных. В точках каустики эта проекция

$$\pi_{1,0} : L \rightarrow \mathbb{R}^2(t, x)$$

имеет особенность: касательные плоскости к многозначному решению проектируются в прямые. На рис. 2 и 3 изображены характеристики (9) и многозначное решение соответственно для следующих значений параметров:

$$(10) \quad a = 0,8, \quad b = 2, \quad c = 0,5, \quad d = 0,2, \quad \alpha = -0,01, \quad \beta = 0,02.$$

На рис. 4 изображена каустика Σ на многозначном решении L .

Укажем проекцию многозначного решения на пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами t, x, u в параметрической форме:

$$L : \begin{cases} t = \frac{\tau}{2} \left(\tau \alpha a \exp \left(-\frac{(b\chi^2 + b - 1)^2}{2(\chi^2 + 1)^2 c^2} \right) + (d\tau - 2\chi)\alpha - 2\beta \right), \\ x = -a\tau \exp \left(-\frac{(b\chi^2 + b - 1)^2}{2(\chi^2 + 1)^2 c^2} \right) - d\tau + \chi, \\ u = \frac{1}{1 + \chi^2}. \end{cases}$$

6. Заключение

Отметим, что существуют другие модели двухфазной фильтрации, в которых учитываются капиллярные силы и которые приводят к дифференциальным уравнениям второго порядка. Таковым, например, является уравнение Рапопорта–Лиса [7]. Однако при их исследовании возникают трудности более высокого порядка, преодоление которых требует других методов, например, методов теории конечномерных динамик [8, 9].

Другие примеры применения методов контактной геометрии к задачам механики сплошных сред и термодинамики приведены в [10]. В частности, для некоторых классов функции Бакли–Леверетта удалось найти точные решения уравнений Баренблатта, описывающих процесс двухфазной фильтрации в пористых средах при наличии поверхностно активных реагентов, растворенных в воде и изменяющих вязкость флюидов [11].

В [12] построена и исследована модель Бакли–Леверетта, в которой коэффициент пористости в уравнении (1) является случайной величиной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ентов В.М., Зазовский А.Ф. Гидродинамическая теория методов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989.
2. Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands // Trans. AIME, SPE. 1942. No. 146. P. 107–116.
3. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
4. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Геометрическая теория особых режимов в системах управления с распределенными параметрами // АиТ. 2013. № 11. С. 20–38.
5. Симметрии и законы сохранения. Уравнения математической физики / А.В. Бочаров и др. Ред. А.М. Виноградов, И.С. Красильщик. М.: Факториал Пресс, 2005.
6. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Математические модели управления разработкой нефтяных месторождений. М.: ИПУ РАН, 2017.
7. Rapoport L.A., Leas W.J. Properties of linear waterflood // Trans. AIME. 1953. V. 198. P. 139–148.

8. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады АН. 2017. Т. 472. №. 6. С. 627–630.
9. *Kushner E.N.* Classification of Generalized Rapoport–Leas Equations // 2018 Eleventh International Conference on Management of large-scale system development (MLSD, Moscow, Russia, 2018. P. 1–3. <https://doi.org/10.1109/MLSD.2018.8551940>
10. *Kushner A., Mukhina S., Gavrilov V.* Contact Structures in Continuous Media Theory // 2024 17th International Conference on Management of Large-Scale System Development (MLSD), Moscow, Russia, 2024. P. 1–4.
11. *Mukhina S.* Symplectic geometry of the oil displacement Barenblatt equations // Journal of Geometry and Physics. 2024. V. 204. P. 105277.
12. *Исаева А.В., Сердобольская М.Л.* Решение уравнения Бакли–Левверетта со случайным коэффициентом пористости // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. Вып. 4. С. 517–524.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 10.11.2025

Принята к публикации 20.11.2025

© 2026 г. С.А. КОЧЕТКОВ, д-р техн. наук (kos@ipu.ru),
В.А. УТКИН, д-р техн. наук (vicutkin@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РОБАСТНЫЙ ПОДХОД К ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

В данной работе классическая постановка задачи подавления влияния внешних возмущений в линейных системах распространяется на случай нелинейных систем в робастной постановке на основе использования метода динамической компенсации. Робастные свойства замкнутых систем обеспечиваются за счет использования глубоких обратных связей и разрывных управляющих воздействий. В задачах управления по выходным переменным предложено рассматривать часть модели объекта управления в качестве генератора модельных неопределенностей, причем в этом случае, в отличие от генератора возмущений, появляется возможность влиять на динамику модельного генератора. В качестве примера использования предлагаемого подхода решена задача управления по высоте беспилотным летательным аппаратом с пружинным подвесом груза.

Ключевые слова: динамический компенсатор, скользящие режимы, внешние возмущения, декомпозиция.

DOI: 10.7868/S2413977726040044

1. Введение

В теории управления широко используется метод динамической компенсации возмущений в следующей постановке задачи. Если существует возможность описать поведение внешних возмущений некоторой известной математической моделью, то инвариантность можно обеспечить на основе метода динамической компенсации [1–3] или с использованием теории асимптотических наблюдателей [4–7]. При этом с помощью асимптотических наблюдателей вычисляются оценки неизвестных возмущений, которые затем используются при формировании обратной связи, а с помощью динамических компенсаторов синтезируется динамическая обратная связь в соответствии с моделью возмущений, за счет которой по каналам управления осуществляется компенсация влияния возмущений на выходные переменные. Синтез комбинированного управления при применении обоих подходов осуществляется на основе расширенной модели исходного объекта за счет введения динамической подсистемы, соответствующей пространству возмущений.

Одними из недостатков метода динамической компенсации являются, во-первых, чрезмерное расширение динамического порядка модели объекта

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 25-11-00067, <https://rscf.ru/project/25-11-00067/>.

управления за счет включения генератора задания и, во-вторых, чувствительность замкнутой системы к параметрическим неопределенностям как в собственно модели объекта управления, так и в генераторе возмущений. Последнее обстоятельство делает использование метода динамической компенсации неэффективным на практике.

Для решения проблемы динамической компенсации возмущений при высокой размерности математических моделей объектов управления эффективными оказываются декомпозиционные методы на основе попятного синтеза (back-stepping control), методов децентрализованного управления, а также блочного подхода, с помощью которых решение исходной задачи расщепляется на независимые этапы, на каждом из которых осуществляется синтез локальной обратной связи [8] в подсистеме пониженной размерности. С другой стороны, методы систем с разрывными управлениями на скользящих режимах [9] и с глубокими обратными связями [9, 10], ставшими уже классическими при синтезе робастных и инвариантных систем, позволяют обеспечить робастность замкнутых систем к параметрическим неопределенностям.

В разделе 2 приводится известный результат метода динамической компенсации возмущений применительно к линейным системам с использованием метода разделения движений, позволяющий разбить задачу синтеза на независимые подзадачи меньшей размерности при синтезе собственно объекта управления и независимого выбора компенсатора возмущений. В рамках описанных выше подходов в разделе 3 дается расширение задачи динамической компенсации возмущений на нелинейные системы. В разделе 4 рассмотрена задача динамической компенсации в случае параметрически неопределенного генератора возмущений.

В разделе 5 рассмотрена задача управления по горизонтальному положению беспилотного летательного аппарата (БПЛА), на котором осуществляется транспортировка полезного груза на тросовом подвесе. Особенность постановки задачи в данном примере состоит в том, что в качестве генератора возмущающего воздействия рассматривается модель поведения груза на невесомой нити, которая, вообще говоря, является составной частью модели объекта управления. В отличие от классического генератора возмущений, рассматриваемая в статье модель подвеса груза на невесомой нити является неавтономной, но при этом управляемой подсистемой. За счет обратной связи удастся влиять на динамику поведения груза и компенсацию внешних возмущений. По мнению авторов предложенный подход имеет большую перспективу в теории управления.

2. Предварительные сведения. Формулировка проблематики.

Ставится задача подавления влияния внешних возмущений по отношению к вектору выходных переменных линейной стационарной системы, описываемой уравнениями

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Q\eta, \quad y = Dx,$$

при условии, что вектор внешних возмущений η не измеряется и его поведение может быть описано с помощью следующей динамической модели:

$$(2) \quad \dot{\omega} = W\omega, \quad \eta = H\omega, \quad \omega \in R^r, \quad \dim W = (r \times r), \quad \dim H = (l \times r),$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния системы, $u \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, $y \in R^p$ – вектор выходных переменных, $\eta \in R^l$ – вектор внешних возмущений, A, B, Q, D, W, H – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Для объекта (1)–(2) делаются допущения, что выполняется так называемое условие согласования, при котором каналы действия вектора возмущения и управления совпадают:

$$\text{Im}Q \subset \text{Im}B \Rightarrow \exists \Lambda : Q = B\Lambda, \quad \dim \Lambda = (m \times l).$$

При этом уравнения (1) могут быть переписаны в виде

$$(3) \quad \dot{x} = Ax + B(u + \Lambda\eta), \quad y = Dx.$$

Следует отметить, что для объекта (3) выполняются условия полного подавления возмущений по отношению ко всему вектору состояния. В [11] предложен декомпозиционный подход к решению задачи обеспечения инвариантности в системе (2), (3), позволяющий разбить задачу синтеза размерности $n + r$ на независимо решаемые подзадачи размерности $n - m, m, r$.

С помощью неособой замены переменных система (2)–(3) приводится к регулярной форме управляемости [12]:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u + Q_2\omega, \\ \dot{\omega} &= W\omega, \end{aligned}$$

где $x_1 \in R^{n-m}, x_2 \in R^m, \text{rank} B_2 = m$.

Сформируем динамический компенсатор в виде

$$(5) \quad \dot{z} = Wz - v, \quad v, z \in R^r$$

и, выбирая управления в виде

$$(6) \quad u = -B_2^{-1}Q_2z + \bar{u},$$

перепишем выражения (4)–(6) относительно переменных $x_1, x_2, \varepsilon = \omega - z$:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2\bar{u} + Q_2\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= W\varepsilon + v. \end{aligned}$$

Рассмотрим преобразование координат $\bar{x}_2 = x_2 + F_1 x_1$ и $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + Lx_2$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (A_{11} - A_{12}F)x_1 + \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_{21}x_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + B_2\bar{u} + Q_2\bar{\varepsilon}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= (W + LQ_2)\bar{\varepsilon} + G_{11}x_1 + G_{12}\bar{x}_2 + LB_2\bar{u} + v.\end{aligned}$$

Выбирая управления динамического компенсатора и объекта управления как

$$(8) \quad \begin{aligned}v &= -G_{11}x_1 - G_{12}\bar{x}_2 - LB_2\bar{u}, \\ \bar{u} &= -B_2^{-1}(\bar{A}_{21}x_1 + (\bar{A}_{22} - Q_2L)\bar{x}_2 - F_2\bar{x}_2),\end{aligned}$$

запишем уравнения замкнутой системы

$$(9) \quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= (A_{11}x_1 - A_{12}F_1)x_1 + \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -F_2\bar{x}_2 + Q_2\bar{\varepsilon}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= (W + LQ_2)\bar{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Полагая, что исходная система управляема и наблюдаема, за счет выбора матриц L , F_1 , F_2 в системе (9) можно назначить желаемый спектр. Решение данной проблемы может быть разбито на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности $n - m$, m , r соответственно [11].

3. Метод динамической компенсации в нелинейных системах

Рассмотрим нелинейную систему

$$(10) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + B(x)u + Q(x)\eta, \quad \dot{\omega} = W\omega, \quad \eta = H\omega, \\ x &\in R^n, \quad u \in R^m, \quad \eta \in R^r, \quad f(0) = 0.\end{aligned}$$

В предположении, что условия согласования выполняются

$$\text{Im}Q(x) \subset \text{Im}B(x), \forall x \Rightarrow \exists \Lambda(x) : Q(x) = B(x)\Lambda(x),$$

представим (10) в регулярной форме управляемости [12]

$$(11) \quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + B_2(x_1, x_2)[u + \Lambda_2(x_1, x_2)\omega],\end{aligned}$$

где $x_1 \in R^{n-m}$, $x_2 \in R^m$, $u \in R^m$, $\det B_2 \neq 0$.

Следуя блочному подходу [8], приведем пошаговую процедуру решения задачи стабилизации системы (11).

1 шаг. Введем замену переменных $\bar{x}_2 = x_2 - \varphi(x_1)$ таким образом, чтобы в преобразованной системе

$$(12) \quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1[x_1, \bar{x}_2 + \varphi(x_1)], \\ \dot{\bar{x}}_2 &= f_2(\cdot) + B_2(\cdot)[u + \Lambda_2(\cdot)\omega] - \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_1} \dot{x}_1\end{aligned}$$

в первой подсистеме выбором $\varphi(x_1)$ обеспечивалась ее стабилизация $x_1 \rightarrow 0$ в предположении $\bar{x}_2 = 0$.

2 шаг. Решаем задачу стабилизации второй подсистемы (11) выбором управления в виде

$$(13) \quad B_2(\cdot)u = F_2\bar{x}_2 - \Lambda_2(\cdot)z_2 - f_2(\cdot) - \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1,$$

где

$$(14) \quad \dot{z}_2 = Wz_2 + v_2, \quad v_2, z_2 \in R^r.$$

Вторая подсистема (12), замкнутая обратной связью (13) с учетом (14) в переменных $\bar{x}_2$, $\varepsilon_2 = \omega - z_2 + L_2\bar{x}_2$ примет вид

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= F_2\bar{x}_2 + B_2(\cdot)[\Lambda_2(\cdot)\varepsilon_2], \\ \dot{\varepsilon}_2 &= W\varepsilon_2 + L_2F_2\bar{x}_2 + B_2(\cdot)[\Lambda_2(\cdot)\varepsilon_2] + v_2. \end{aligned}$$

3 шаг. Замыкая вторую подсистему (15) обратной связью $v_2 = -L_2F_2\bar{x}_2$ имеем

$$(16) \quad \dot{\varepsilon}_2 = [W + L_{20}\Lambda_2(\cdot)]\varepsilon_2$$

и выбором матрицы L_{20} решаем задачу стабилизации системы (16).

Таким образом, как и в линейном случае, задача стабилизации нелинейной системы (10) может быть решена на основе выбора локальных обратных связей в подсистемах меньшей размерности.

С помощью применения теории систем с разделяемыми движениями на основе использования глубоких обратных связей и/или скользящих режимов также возможно осуществить декомпозицию решения задачи стабилизации объекта (10), при этом задача стабилизации подсистемы (17) решается с использованием методов теории модального управления.

Рассмотрим решение задачи стабилизации объекта (11) на основе теории скользящих режимов [9].

Во второй подсистеме (12) выберем управляющее воздействие в форме

$$u = v - \Lambda_2(\cdot)\bar{z}_2, \quad v = -M(x)\text{sign}\bar{x}_2,$$

где переменная z описывается системой дифференциальных уравнений

$$(17) \quad \dot{\bar{z}}_2 = W\bar{z}_2 + Lv, \quad \bar{z}_2 \in R^r.$$

Для координат $\bar{x}_2$, $\bar{\varepsilon}_2 = \omega - \bar{z}_2 + L_2\bar{x}_2$ из системы (12), принимая во внимание (17), могут быть получены соотношения

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= f_2(\cdot) + B_2(\cdot)[u + \Lambda_2(\cdot)\bar{\varepsilon}_2] - \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_2 &= W\bar{\varepsilon}_2 + Lv. \end{aligned}$$

При возникновении скользящего режима вдоль многообразия

$$\bar{x}_2 = x_2 - \varphi(x_1) = 0$$

выбором стабилизирующей первое уравнение (12) вектор-функции $\varphi(x_1)$ решается задача стабилизации первой подсистемы (12).

В скользящем режиме $x_1 = x_2 = 0$ с помощью метода эквивалентного управления может быть получено равенство

$$v_{eq} = -\Lambda(0, 0)\bar{\varepsilon}_2, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \omega - \bar{z}_2.$$

При условии, что пара матриц $(\Lambda(0), W)$ наблюдаема, за счет назначения коэффициентов матрицы L обеспечивается спектр с отрицательными действительными частями собственных чисел для переменной $\bar{\varepsilon}_2$ из (18):

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = (W + L\Lambda(0))\bar{\varepsilon}_2.$$

4. Генератор возмущений с неизвестными параметрами

В данном разделе рассматривается один из вариантов объекта (1) с единичной размерностью вектора управления. При этом полагается, что поведение возмущений описывается линейным нестационарным динамическим уравнением и изменения параметров модели принадлежат некоторому интервалу:

$$(19) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2(u + \eta), \end{aligned}$$

где $x_1 \in R^{n-1}$, $x_2 \in R$, $u, \eta \in R^1$ и возмущение порождается динамической моделью вида

$$(20) \quad \dot{\omega} = W\omega, \quad \eta = q^T\omega, \quad \omega \in R^r, \quad \dim W = (r \times r).$$

Параметры матрицы W полагаются неизвестными, но ограниченными по модулю $|w_{ij}| \leq W_{ij} = \text{const}$.

В предыдущих разделах было указано что из управляемости пары (A_{11}, A_{12}) следует управляемость исходной системы. С помощью неособой замены переменных $\bar{x}_1 = x_2 - f_1^T x_1$ уравнения системы (20) могут быть переписаны в форме

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} + a_{12}f_1^T)x_1 + a_{12}\bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{a}_{21}^T x_1 + \bar{a}_{22}\bar{x}_1 + b_2 u + q^T \omega, \end{aligned}$$

за счет выбора вектора f_1^T назначаются собственные числа матрицы $A_{11} + a_{12}f_1^T$, при этом проблема стабилизации объекта (21) сводится к обеспечению устойчивости второй подсистемы.

Поскольку параметры генератора возмущений (20) неизвестны, постольку в решении поставленной задачи нельзя выбрать динамический компенсатор в виде (5). Без ограничения общности в предположении о наблюдаемости пары (q^T, W) для поставленной задачи преобразуем модель генератора возмущений (20) к канонической форме вида

$$(22) \quad \dot{\omega}_i = \omega_{i+1}, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \dot{\omega}_r = \sum_{i=1}^r g_i \omega_i, \quad |g_i| \leq G_i = \text{const}, \quad \omega_1 = q^T \omega.$$

Вторая подсистема (21) при управлении $b_2 u = -\bar{a}_{21}^T x_1 - \bar{a}_{22} \bar{x}_1 + \bar{u}$ может быть в форме

$$(23) \quad \dot{\bar{x}}_1 = \bar{u} + \omega_1.$$

Следовательно, исходная проблема трансформировалась к задаче динамической компенсации возмущений в объекте (23), в котором внешние возмущения описываются динамической моделью (22).

Данная задача может быть решена за счет выбора $\bar{u} = -z_1$, где z_1 есть выход динамической системы

$$(24) \quad \dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \dot{z}_r = \sum_{i=1}^r d_i z_i + v, \quad d_i = \text{const},$$

где v – новое управление.

Вводя обозначение $e_i = \omega_i - z_i$, $i = \overline{1, r}$, запишем систему (23) в виде

$$(25) \quad \dot{\bar{x}}_1 = e_1.$$

Дифференцируя переменную (25) r раз, получим расширенную систему в канонической форме [13]

$$(26) \quad \dot{\bar{x}}_i = \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \dot{\bar{x}}_r = \sum_{i=1}^r [g_i e_i + (g_i - d_i) z_i] + v,$$

где $\bar{x}_{i+1} = e_i$, $i = \overline{1, r-1}$.

При выборе достаточно большой амплитуды разрывных управляющих воздействий [9] с учетом ограничений $|g_i| \leq k_i$ система (26) может быть стабилизирована следующим управлением:

$$(27) \quad v = -M \text{sign}(s),$$

за счет которого организуется скользящий режим на многообразии

$$s = \bar{x}_r + \sum_{i=1}^{r-1} C_i \bar{x}_i = 0,$$

с движением по нему, описываемым с помощью метода эквивалентного управления

$$\dot{\bar{x}}_i = \bar{x}_{i-1}, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \dot{\bar{x}}_r = \sum_{i=1}^r C_i \bar{x}_i.$$

Если C_i выбраны как коэффициенты гурвицева полинома, то движение в скользящем режиме обеспечивает асимптотическую сходимость системы.

Предложенная схема построения инвариантных систем за счет использования канонического представления и методов теории скользящих режимов позволяет обеспечить свойства грубости систем как к параметрам модели объекта управления, так и к описанию модели возмущающих воздействий. Отметим, что в модели генератора возмущений (22) допускается предположение о переменных параметрах модели, ограниченных по модулю $|g_i(t)| \leq G_i = \text{const}$.

Для получения оценок вектора состояния системы (26), необходимых для формирования управления (27), требуется построение наблюдателя состояния. Для порядка r приведем процедуру синтеза наблюдателя-дифференциатора переменной (25).

1. Введем фильтр с устойчивыми собственными движениями

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= \xi_{i+1}(t) + \bar{x}_1, \quad i = \overline{1, r-1}, \\ \dot{\xi}_r(t) &= c^T \xi(t) + \bar{x}_1, \end{aligned}$$

где $\xi^T(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_r(t)) \in R^r$, $c \in R^r$ – вектор коэффициентов гурвицевого полинома.

2. Представим систему (28) в каноническом виде

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}_i(t) &= \bar{\xi}_{i+1}(t), \quad i = \overline{1, r-1}, \\ \dot{\bar{\xi}}_r(t) &= c^T \bar{\xi}(t) + \bar{\xi}_{r+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$(30) \quad \begin{aligned} \bar{\xi}_1(t) &= \xi_1(t), \\ \bar{\xi}_2(t) &= \xi_2(t) + \bar{x}_1, \\ \bar{\xi}_3(t) &= \xi_3(t) + \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \\ &\dots \\ \bar{\xi}_r(t) &= \xi_r(t) + \sum_{i=1}^{r-1} \bar{x}_i, \\ \bar{\xi}_{r+1}(t) &= \sum_{i=1}^r \bar{x}_i. \end{aligned}$$

3. Построим наблюдатель вектора состояния $\bar{\xi}^T(t) = (\bar{\xi}_1(t), \dots, \bar{\xi}_3(t))$ и сигнала $\bar{\xi}_{r+1}(t)$ применительно к системе (29):

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_i(t) &= \hat{\xi}_{i+1}(t) + \nu_i, \quad i = \overline{1, r-1}, \\ \dot{\hat{\xi}}_r(t) &= c^T \hat{\xi}(t) + \nu_r, \quad \hat{\xi}^T(t) = (\hat{\xi}_1(t), \dots, \hat{\xi}_r(t)). \end{aligned}$$

4. Запишем уравнения (29) и (31) в невязках $\bar{\varepsilon}_i(t) = \bar{\xi}_i(t) - \hat{\xi}_i(t)$:

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_i(t) &= \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) - \nu_i, \quad i = \overline{1, r-1}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_r(t) &= c^T \bar{\varepsilon}(t) + \bar{\xi}_{r+1}(t) - \nu_r, \end{aligned}$$

где $\bar{\varepsilon}^T(t) = (\bar{\varepsilon}_1(t), \dots, \bar{\varepsilon}_r(t))$.

В работах [14–16] показано, что выбор корректирующих воздействий в наблюдателе (32) в классе линейных функций с насыщением в соответствии с иерархией

$$\nu_1 = \text{sat}_{L_1}(l_1 \bar{\varepsilon}_1(t)), \quad \nu_i = \text{sat}_{L_i}(l_i \nu_{i-1}), \quad i = \overline{2, r}, \quad L_1, L_i, l_i = \text{const}$$

позволяет решить задачу стабилизации системы (32) с заданной точностью.

Определение. Для $M = \text{const} > 0$ и произвольной функции времени $s(t)$ по определению

$$\text{sat}_M(s) = \min(|s|, M)\text{sign}(s(t)).$$

Действительно, в предположениях

$$\begin{aligned} |\bar{\varepsilon}_i(t)| &\leq E_i, \quad |\dot{\bar{\varepsilon}}_i(t)| \leq \bar{E}_i; \quad E_i, \bar{E}_i = \text{const}, \\ |\bar{\xi}_{r+1}(t)| &\leq E_{r+1} = \text{const} \end{aligned}$$

опишем схематично процедуру стабилизации системы (32).

1. В первой подсистеме

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_1(t) = \bar{\varepsilon}_2(t) - \text{sat}_{L_1}(l_1 \bar{\varepsilon}_1(t)),$$

при выборе амплитуды

$$L_1 > |\bar{\varepsilon}_2(t)|$$

переменная $\bar{\varepsilon}_1(t)$ за конечное время оказывается в линейной зоне и имеет место равенство:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_1(t) = \bar{\varepsilon}_2(t) - l_1 \bar{\varepsilon}_1(t).$$

При этом выполняются соотношения $|\bar{\varepsilon}_1(t)| \leq E_2/l_1$, $|\bar{\varepsilon}_2(t) - l_1 \bar{\varepsilon}_1(t)| \leq \bar{E}_2/l_1$ и с увеличением коэффициента l_1 для переменной $\bar{\varepsilon}_1(t) \approx 0$ может быть обеспечена заданная степень стабилизации. В итоге имеем оценку с заданной точностью переменной $\bar{\varepsilon}_2(t) \approx l_1 \bar{\varepsilon}_1(t)$.

Опишем первый пункт логической схемой:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_1(t) &= \bar{\varepsilon}_2(t) - \text{sat}_{L_1}(l_1 \bar{\varepsilon}_1(t)), \quad L_1 > |\bar{\varepsilon}_2(t)| \Rightarrow \dot{\bar{\varepsilon}}_1(t) = \bar{\varepsilon}_2(t) - l_1 \bar{\varepsilon}_1(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\bar{\varepsilon}_1(t)| \leq \frac{E_2}{l_1}, \quad |\bar{\varepsilon}_2(t) - l_1 \bar{\varepsilon}_1(t)| \leq \frac{\bar{E}_2}{l_1} \Rightarrow l_1 \rightarrow \infty : \\ &\bar{\varepsilon}_1(t) \approx 0, \quad \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) \approx l_i \bar{\varepsilon}_i(t). \end{aligned}$$

2. В дальнейшем на последующих этапах $i = \overline{2, r-1}$ синтезируем корректирующие воздействия по следующей логической схеме:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_i(t) &= \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) - \text{sat}_{L_i}(l_i \bar{\varepsilon}_i(t)), \quad L_i > |\bar{\varepsilon}_{i+1}(t)| \Rightarrow \dot{\bar{\varepsilon}}_i(t) = \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) - l_i \bar{\varepsilon}_i(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\bar{\varepsilon}_i(t)| \leq \frac{E_{i+1}}{l_i}, \quad |\bar{\varepsilon}_{i+1}(t) - l_i \bar{\varepsilon}_i(t)| \leq \frac{\bar{E}_{i+1}}{l_i} \Rightarrow l_i \rightarrow \infty : \\ &\bar{\varepsilon}_i(t) \approx 0, \quad \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) \approx l_i \bar{\varepsilon}_i(t). \end{aligned}$$

3. Рассматриваем последнюю подсистему (32)

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_r(t) = c^T \bar{\varepsilon}(t) + \bar{\xi}_{r+1}(t) - \text{sat}_{L_r}(l_r \bar{\varepsilon}_r(t))$$

и с учетом $\bar{\varepsilon}_i(t) \approx 0$ выбором $L_r > |\bar{\xi}_{r+1}(t)|$ получим соотношение

$$\bar{\xi}_{r+1}(t) \approx l_r \bar{\varepsilon}_r(t).$$

Переменные $\bar{x}_i$, $i = \overline{1, r}$, соответствующие производным от сигнала $\bar{x}_1$, могут быть вычислены с использованием оценок $\bar{\xi}(t)$ и сигнала $\bar{\xi}_{r+1}(t)$ за счет последовательного решения уравнений (30) сверху вниз.

5. Пример использования разработанных алгоритмов к управлению БПЛА

В данном разделе рассматривается прикладная задача управления горизонтальным движением беспилотного летательного аппарата, транспортирующего подвешенный на невесомом тросе груз (см. рис. 1).

Динамические уравнения, описывающие поведение указанного объекта, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v, \\
 \dot{v} &= -\frac{J_{\text{eq}}\alpha_v}{\Delta}v - \frac{m^2l^2g}{\Delta}\varphi - \frac{ml\alpha_\omega}{\Delta}\omega + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta}F, \\
 \dot{\varphi} &= \omega, \\
 \dot{\omega} &= -\frac{mglM_{\text{eq}}}{\Delta}\varphi - \frac{M_{\text{eq}}\alpha_\omega}{\Delta}\omega - \frac{ml\alpha_v}{\Delta}v + \frac{ml}{\Delta}F,
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

где x – горизонтальная координата центра масс, v – горизонтальная скорость центра масс летательного аппарата, φ – угловое отклонение троса с грузом, ω – угловая скорость троса с грузом, $J_{\text{eq}} = J + ml^2$, J – момент инерции подвешенного груза при вращении его относительно его центра тяжести, $M_{\text{eq}} = m + M$, m , M – массы подвешенного тела и летательного аппарата соответственно, l – расстояние от точки подвеса груза до его центра тяжести, $\Delta = M_{\text{eq}}J_{\text{eq}} - m^2l^2$, AB – линия нулевого отклонения троса с грузом, OA – линия, вдоль которой осуществляется движение БПЛА с грузом (линия горизонтали), α_M – коэффициент вязкого трения среды для летательного ап-

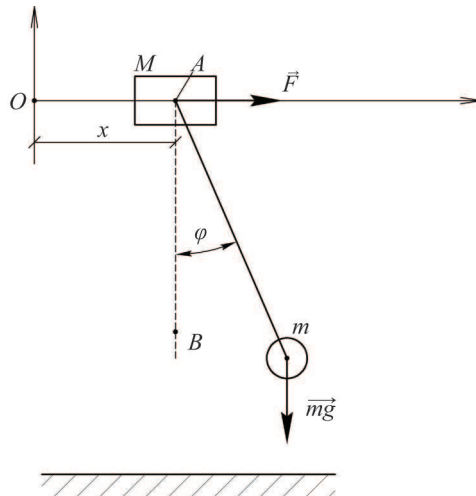


Рис. 1. К уравнениям движения БПЛА.

парата, α_m – коэффициент вязкого трения среды для подвешенного груза, α_r – коэффициент, учитывающий влияние потерь на трение в точке подвеса троса, $\alpha_v = \alpha_m + \alpha_M$, $\alpha_\omega = \alpha_m l + \alpha_r$, F – модуль вектора тяговой силы в горизонтальном направлении, трос полагается невесомым по сравнению с грузом.

Ставится задача стабилизации положения летательного аппарата на заданной точке горизонтали:

$$(34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_d| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t)| = 0, \quad \bar{x}(t) = x(t) - x_d, \quad x_d = \text{const} > 0$$

в предположении, что измерению доступны только положение и скорость летательного аппарата.

Используя замену переменных

$$\begin{pmatrix} y \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{J_{\text{eq}}} & 0 & \frac{1}{ml} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_{\text{eq}}} & 0 & \frac{1}{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \\ \varphi \\ \omega \end{pmatrix},$$

представим объект (33) в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} x - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} v - \frac{gl^3 m^3}{\Delta} y - \frac{\alpha_\omega l^2 m^2}{\Delta} v_y + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta} F, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_y &= -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}} y - \frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} v_y - \frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} x - \frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}^2} v. \end{aligned}$$

Эти уравнения с учетом (34) перепишем в виде

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \bar{x} - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} v - \frac{gl^3 m^3}{\Delta} y - \frac{\alpha_\omega l^2 m^2}{\Delta} v_y + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta} F - \frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} x_d, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_y &= -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}} y - \frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} v_y - \frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} \bar{x} - \frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}^2} v - \frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} x_d. \end{aligned}$$

В рамках предлагаемого подхода неизмеряемые переменные состояния y , v_y могут трактоваться как возмущения. Учитывая, что во втором и четвертом уравнении системы действуют постоянные слагаемые $-\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} x_d$ и $-\frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} x_d$, полная модель возмущений согласно (35) может быть представлена как

$$(36) \quad \dot{\omega} = W\omega + B_e e,$$

где $\omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T = (x_d \ y \ v_y)^T$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} & -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}} & -\frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} \end{pmatrix}$,

$$e = (\bar{x} \ v)^T, \quad B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} & -\frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} \end{pmatrix}.$$

Используя (35)–(36), перепишем уравнения (35) в форме

$$(37) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \bar{x} - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} v + Q\omega + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta} F, \\ \dot{\omega} &= W\omega + B_e e, \end{aligned}$$

где $Q = \begin{pmatrix} -\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} & -\frac{gl^3 m^3}{\Delta} & -\frac{\alpha_\omega l^2 m^2}{\Delta} \end{pmatrix}$.

Отличием системы (37) от представления (4) является то, что подсистема для возмущений неавтономна (присутствует слагаемое $B_e e$). Однако, как будет показано далее, это не меняет предлагаемого подхода к синтезу обратной связи.

Покажем непосредственными вычислениями, что пара (W, Q) ненаблюдаема. Для этого вычислим ранг матрицы наблюдаемости:

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} Q \\ QW \\ QW^2 \end{pmatrix} &= \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} -\frac{gm^3 l^3}{J_{\text{eq}} \Delta} & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} & -\frac{\alpha_\omega m^2 l^2}{\Delta} \\ \frac{\alpha_\omega gl^3 m^3}{\Delta J_{\text{eq}}^2} & \frac{\alpha_\omega gl^3 m^3}{\Delta J_{\text{eq}}} & \frac{m^2 l^2 (\alpha_\omega^2 - gml J_{\text{eq}})}{J_{\text{eq}} \Delta} \\ \frac{gm^3 l^3 (-\alpha_\omega^2 + gml J_{\text{eq}})}{J_{\text{eq}}^3 \Delta} & \frac{gm^3 l^3 (-\alpha_\omega^2 + gml J_{\text{eq}})}{J_{\text{eq}}^2 \Delta} & \frac{\alpha_\omega m^2 l^2 (-\alpha_\omega^2 + 2gml J_{\text{eq}})}{J_{\text{eq}}^2 \Delta} \end{pmatrix} = \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} -\frac{gm^3 l^3}{J_{\text{eq}} \Delta} & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} & -\frac{\alpha_\omega m^2 l^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} \\ 0 & 0 & \frac{gm^3 l^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{gm^3 l^3}{J_{\text{eq}} \Delta} & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} & -\frac{\alpha_\omega m^2 l^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Система(37) с помощью замены переменных

$$\xi = H\omega, \quad H = \begin{pmatrix} Q \\ QW \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}^T$$

преобразуется к представлению

$$(38) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{gl^3m^3}{J_{\text{eq}}\Delta}\bar{x} - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}}\Delta}v + \xi_1 + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta}F, \\ \dot{\xi} &= \widetilde{W}\xi + \widetilde{B}_e e, \end{aligned}$$

$$\text{где } \widetilde{W} = HWH^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{gml}{J_{\text{eq}}} & -\frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}_e = HB_e = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_\omega gm^3 l^3}{\Delta J_{\text{eq}}^2} & \frac{\alpha_\omega^2 m^2 l^2}{\Delta J_{\text{eq}}^2} \\ \frac{gm^3 l^3 (-\alpha_\omega^2 + gml J_{\text{eq}})}{\Delta J_{\text{eq}}^3} & \frac{\alpha_\omega m^2 l^2 (-\alpha_\omega^2 + gml J_{\text{eq}})}{\Delta J_{\text{eq}}^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В представлении (38) выделено ненаблюдаемое подпространство относительно переменной ξ_4 . При синтезе обратной связи на основе динамического компенсатора данная переменная не влияет на ошибку выходной переменной, поэтому динамический компенсатор строится относительно наблюдаемых компонент $\xi^* = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}^T$ вектора состояния возмущений ξ .

Наблюдаемость пары (W^*, Q^*) проверяется непосредственной подстановкой

$$\text{rank} \begin{pmatrix} Q^* \\ Q^* W^* \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

где

$$W^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{gml}{J_{\text{eq}}} & -\frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} \end{pmatrix}, \quad Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В принятых обозначениях

$$(39) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}^* &= W^* \xi^* + B_e^* e, \\ B_e^* &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha_\omega g m^3 l^3}{\Delta J_{\text{eq}}^2} & \frac{\alpha_\omega^2 m^2 l^2}{\Delta J_{\text{eq}}^2} \\ \frac{g m^3 l^3 (-\alpha_\omega^2 + g m l J_{\text{eq}})}{\Delta J_{\text{eq}}^3} & \frac{\alpha_\omega m^2 l^2 (-\alpha_\omega^2 + g m l J_{\text{eq}})}{\Delta J_{\text{eq}}^3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выберем управляющую горизонтальную силу в виде

$$(40) \quad F = -\frac{\Delta}{J_{\text{eq}}} Q^* s + \frac{\Delta}{J_{\text{eq}}} \bar{u}$$

с динамическим компенсатором согласно (5), (39)

$$(41) \quad \dot{s} = W^* s + B_e^* e - \bar{v}.$$

Уравнения замкнутой системы согласно (38), (40)–(41):

$$(42) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{g l^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \bar{x} - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} v + Q^* \varepsilon + \bar{u}, \\ \dot{\varepsilon} &= W \varepsilon + \bar{v}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \xi^* - s$.

Выбирая управления $\bar{u}$, $\bar{v}$ из выражения (8)

$$(43) \quad \begin{aligned} \bar{v} &= -L K e + W^* L v, \\ \bar{u} &= \frac{g l^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \bar{x} + \left(\frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} + Q^* L \right) v + K e, \end{aligned}$$

получим уравнения замкнутой системы согласно (42)–(43)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= K e + Q^* (\varepsilon + L v), \\ \dot{\varepsilon} &= W^* \varepsilon - L K e + W^* L v, \end{aligned}$$

где $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix}^T \in R^2$, $K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix}^T \in R^2$ – матрицы с постоянными коэффициентами.

Вводя новую переменную $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + L v$, перепишем последнюю систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= K e + Q^* \bar{\varepsilon}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= (W^* + L Q^*) \bar{\varepsilon}. \end{aligned}$$

В силу наблюдаемости пары (W^*, Q^*) сходимость переменной $\bar{\varepsilon}$ может быть назначена желаемым образом.

Для численного эксперимента выберем параметры, представленные в таблице.

Численные значения параметров объекта управления, принятые при моделировании

Параметр	Значение
l , [м]	5
J , [кг·м ²]	1,2
α_v , [кг/с]	10
α_ω , [м ² ·кг/с]	20
m , [кг]	3,5
M , [кг]	2
a_1	7,5
a_0	14
$x(t_0)$, [м]	10
$v(t_0)$, [м/с]	5
$\varphi(t_0)$, [рад]	−0,5
$\omega(t_0)$, [рад/с]	10
x_d , [м]	25

Характеристический полином матрицы $W^* + LQ^*$:

$$(44) \quad p^2 + \frac{-L_1 J_{\text{eq}} + \alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} p + \frac{-L_2 J_{\text{eq}} + gml - L_1 \alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} = 0.$$

Выберем матрицу L , чтобы назначить его коэффициенты в соответствии с эталонным уравнением

$$(45) \quad p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

с коэффициентами из таблицы и корнями уравнения

$$p_1 = -3,5, \quad p_2 = -4.$$

Согласно рассуждениям из (44)–(45) получаем

$$\frac{-L_1 J_{\text{eq}} + \alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} = a_1 = 7,5, \quad \frac{-L_2 J_{\text{eq}} + gml - L_1 \alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} = a_0 = 14.$$

Подставляя значения параметров из таблицы, вычислим коэффициенты обратной связи динамического компенсатора

$$L_1 = \frac{\alpha_\omega - a_1 J_{\text{eq}}}{J_{\text{eq}}} = -7,2745;$$

$$L_2 = \frac{-a_0 J_{\text{eq}}^2 - (\alpha_\omega - a_1 J_{\text{eq}}) \alpha_\omega + J_{\text{eq}} gml}{J_{\text{eq}}^2} = -10,4243.$$

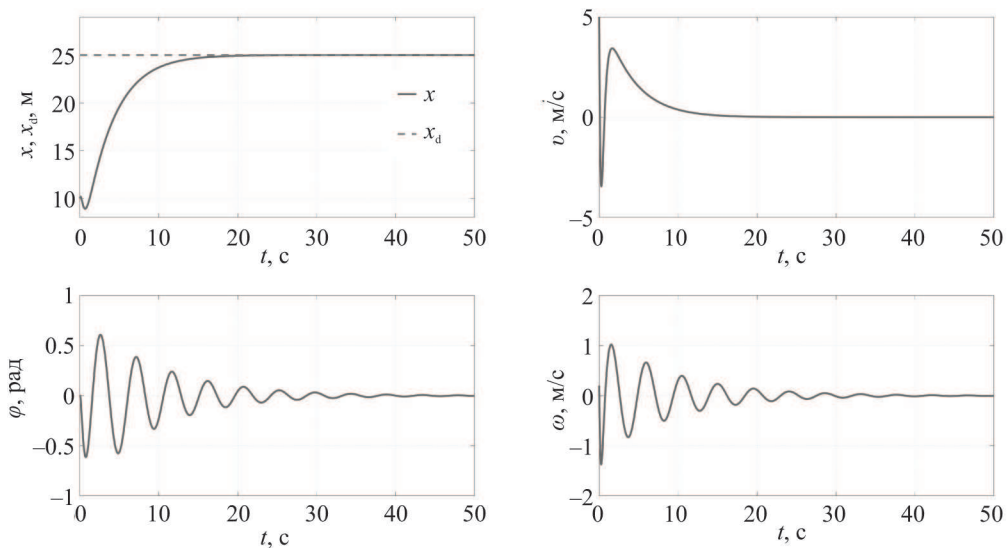


Рис. 2. Переходные процессы для переменных состояния системы (29).

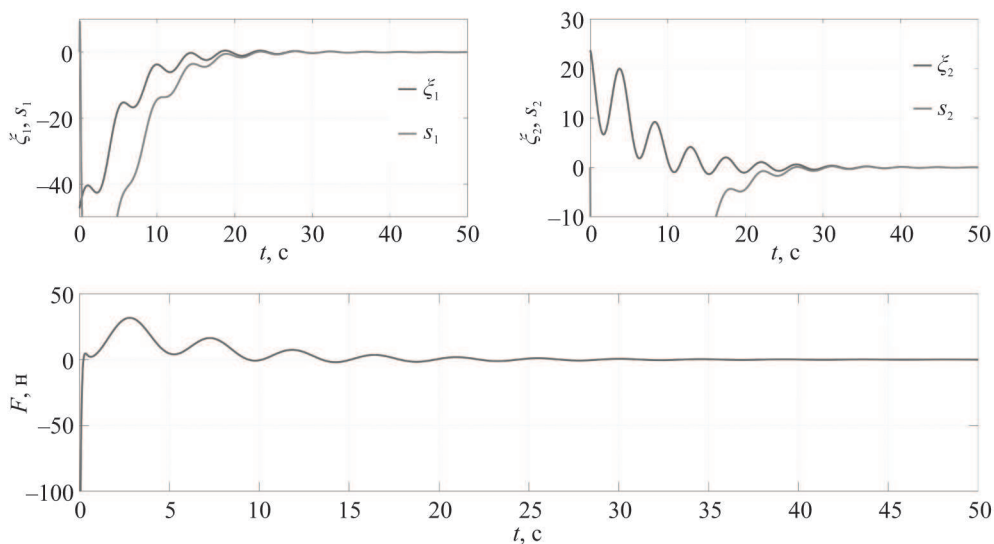


Рис. 3. Переходные процессы для компонент вектора возмущений (34) и динамического компенсатора (37).

Принимается следующая матрица обратной связи K в управлениях (43)

$$K = \begin{pmatrix} -0,12 & -0,7 \end{pmatrix},$$

чтобы обеспечить устойчивость и назначить постоянные времени

$$\tau_1 = 0,4 \text{ с}^{-1}, \quad \tau_2 = 0,3 \text{ с}^{-1}$$

в подсистеме относительно вектора e .

Результаты моделирования системы (29) с динамической обратной связью (40)–(41), (43) и начальными условиями из таблицы представлены на рис. 2, 3.

Как видно из рис. 3, текущая высота положения летательного аппарата сходится к желаемому значению, а компоненты вектора s динамического компенсатора к соответствующим компонентам вектора возмущений ξ^* . Отметим, что, несмотря на сходимости выходной переменной к нулю, управляющее воздействие F содержит затухающую колебательную составляющую (см. рис. 3). Обусловлено это тем, что с помощью управления компенсируются колебания переменных φ , ω , скорость затухания которых определяется коэффициентом α_ω .

Закон управления (40)–(41), (43) синтезировался без коррекции этого затухания, и по этой причине мы имеем “длинный хвост” в переходном процессе (см. рис. 2, 3). Однако в силу управляемости исходной системы (35) за счет коррекции с помощью компонент $\bar{x}, v$ (см. уравнения (35)) можно было бы скорректировать демпфирование компонент φ , ω , а, следовательно, и длину указанного “хвоста”.

6. Заключение

Предложены методы декомпозиции в задаче динамической компенсации внешних возмущений заданного класса. Использование методов синтеза систем с разделяемыми движениями в рамках теории скользящих режимов и глубоких обратных связей позволило расширить известные методы динамической компенсации на класс нелинейных систем и обеспечить робастные свойства как в условиях неопределенности модели объекта управления, так и генератора возмущений. Отметим, что рассмотренный пример управления БПЛА с колебательной нагрузкой, которую можно рассматривать как часть модели объекта управления, так и как внешнее возмущение, показывает возможности расширения проблем динамической компенсации внешних возмущений на задачи, где в качестве генератора заданий рассматривается часть модели объекта управления. Вместе с предложенными в данной работе декомпозиционными методами такой подход позволяет также декомпозировать процедуру синтеза обратной связи на подзадачи меньшей размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулебакин В.С. К теории автоматических вибрационных регуляторов электрических машин // Теоретическая и экспериментальная электротехника. 1932. № 4. С. 3–21.
2. Уонем У. М. Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
3. Francis B.A., Wonham W.M. The internal model principle of control theory // Automatica. 1979. V. 12. No. 5. P. 457–465.

4. *Khalil H.K.* Cascade high-gain observers in output feedback control // *Automatica*. 2017. V. 80. P. 110–118.
5. *Краснова С. А., Уткин В. А., Михеев Ю. В.* Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем // *АиТ*. 2001. № 2. С. 43–63.
6. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A.* An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations // *Automatica*. 2023. V. 147. P. 110677.
7. *Floquet T., Edwards C., Spurgeon S.K.* On sliding mode observers for systems with unknown inputs // *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2007. V. 21. No. 8–9. P. 638–656.
8. *Лукьянов А. Г., Уткин В. А., Изосимов Д. Б. и др.* Принцип блочного управления. Часть 1 // *АиТ*. 1990. № 5. С. 38–47.
9. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1987.
10. *Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.* Робастная коррекция в системах управления с большим коэффициентом усиления // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2014. Т. 12. С. 3–10.
11. *Уткин В. А., Уткин В. И.* Метод разделения в задачах инвариантности // *АиТ*. 1983. № 12. С. 39–48.
12. *Лукьянов А. Г., Уткин В. И.* Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // *АиТ*. 1981. № 4. С. 5–13.
13. *Floquet T., Barbot J.-P.* A canonical form for the design of unknown input sliding mode observers // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 2006. V. 334. P. 271–292.
14. *Krasnova S.A., Utkin A.V., Utkin V.A.* Synthesis of a Control System for a Waste Heat Boiler with Forced Circulation under Restrictions on Control Actions // *Mathematics*. 2022. V. 10. No. 14. P. 2397.
15. *Krasnova S.A., Utkin A.V., Utkin V.A.* Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // *Autom. and Rem. Control*. 2017. V. 78. No. 12. P. 2120–2140.
16. *Гулюкина С. И., Уткин В. А.* Управление реактором с непрерывным перемешиванием в условиях неопределенности и с учетом ограничений на фазовые переменные и управления // *Проблемы управления*. 2021. № 5. С. 48–59.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А. А. Галеевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 01.11.2025

Принята к публикации 20.11.2025

© 2026 г. А.Ф. ПАЩЕНКО, канд. техн. наук (a.paschenko@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Е.С. ДУВАНОВ, канд. техн. наук (evgenyduvanov@yandex.ru)
(Липецкий государственный технический университет)

ГИБРИДНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РЕАЛЬНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Работа продолжает исследования авторов по управлению сложными техническими объектами гибридными методами. Приводятся описание и анализ двух подходов: нейросетевых предиктивных и нечетких гибридных регуляторов. Рассматриваются вопросы адаптивной настройки, точности управления и практической реализации обоих методов. Приводятся теоретические и практические результаты применения разработанных алгоритмов в лабораторных и промышленных экспериментах.

Ключевые слова: гибридные методы управления, нейросетевой предиктивный регулятор, нечеткий квадратичный регулятор, управление биотехническими системами, MATLAB.

DOI: 10.7868/S2413977726040054

1. Введение

В современных системах управления все более активно внедряются гибридные подходы, объединяющие классические алгоритмы и методы искусственного интеллекта, с целью повышения адаптивности, точности и надежности. Два наиболее перспективных направления такого гибридного управления – нейросетевые предиктивные и нечеткие гибридные регуляторы. Первые позволяют предсказывать динамику сложных объектов и оптимизировать управляющие воздействия по горизонту прогнозирования, вторые – эффективно адаптироваться к неопределенностям и возмущениям на основе экспертных правил. Оба подхода демонстрируют превосходство над классическими ПИ регуляторами на практике, обеспечивая лучшие показатели качества управления в соответствующих прикладных задачах.

Искусственные нейронные сети, обладающие возможностью аппроксимации сложных нелинейных зависимостей, активно используются для построения прогностических моделей объектов управления. В традиционной схеме модель предварительно обучается на исторических данных, после чего нейросеть предсказывает будущие значения выходной величины на заданном горизонте прогнозирования. На основе этих прогнозов оптимизационный алгоритм формирует управляющее воздействие, минимизируя выбранный критерий качества. Так, в системе управления сложным механическим объектом нейросетевой предиктивный регулятор показал более высо-

кую точность и скорость реакции по сравнению с классическим ПИ регулятором [1]. Применение нейросетевой модели повышает чувствительность и быстроту реакции системы на внешние возмущения, что актуально в задачах с динамическими изменениями. Вместе с тем такие методы требуют значительных вычислительных ресурсов и объема данных для обучения сети, что осложняет их быструю практическую реализацию на промышленных объектах.

Нечеткие гибридные регуляторы представляют собой сочетание эвристических экспертных правил, формализованных в виде функций принадлежности и правил вывода, с методами оптимального управления. Гибридная структура объединяет устойчивость нечеткой логики к неопределенностям и нелинейностям с точностью и предсказуемостью классических алгоритмов, обеспечивая адаптивную корректировку управляющих уставок в реальном времени и улучшая реакцию системы на динамические возмущения.

Нечеткие гибридные регуляторы находят свое практическое применение благодаря способности учитывать сложные взаимосвязи между различными параметрами технологических процессов. Такой подход позволяет снижать колебания режимов и обеспечивать плавный и стабильный переход к требуемому значению по сравнению с традиционными ПИ регуляторами. Гибридные регуляторы в автоматических системах демонстрируют значительно более высокую точность поддержания заданных параметров, что приводит к улучшению качества продукции и снижению эксплуатационных рисков [2].

2. Разработка и настройка нейросетевого предиктивного регулятора

Нейросетевой предиктивный регулятор (*NNPC, Neural Network Predictive Control*) представляет собой метод предиктивного управления, адаптированный для нелинейных систем. В качестве модели используется нейронная сеть, обученная на данных экспериментов, которая на каждом такте оценки прогнозирует динамику выходных сигналов. Далее, исходя из этих прогнозов и горизонта планирования, формулируется и решается оптимизационная задача ошибки управления. Такой подход сочетает в себе преимущества предиктивного управления на основе модели и гибкость нейросетевых моделей. Целевая функция имеет вид:

$$(1) \quad J = \sum_{i=N_1}^{N_2} (y_r(t+j) - y_m(t+j))^2 + \rho \sum_{j=1}^{N_u} (u'(t+j-1) - u(t+j-2))^2,$$

где N_1 , N_2 – минимальный и максимальный горизонты прогнозирования (обычно $N_1 = 1$), N_u – горизонт управления, y_r – заданное эталонное значение выхода, y_m – предсказанное значение выхода сети, u' – вектор предполагаемых входных сигналов, ρ – весовой коэффициент штрафа при управлении.

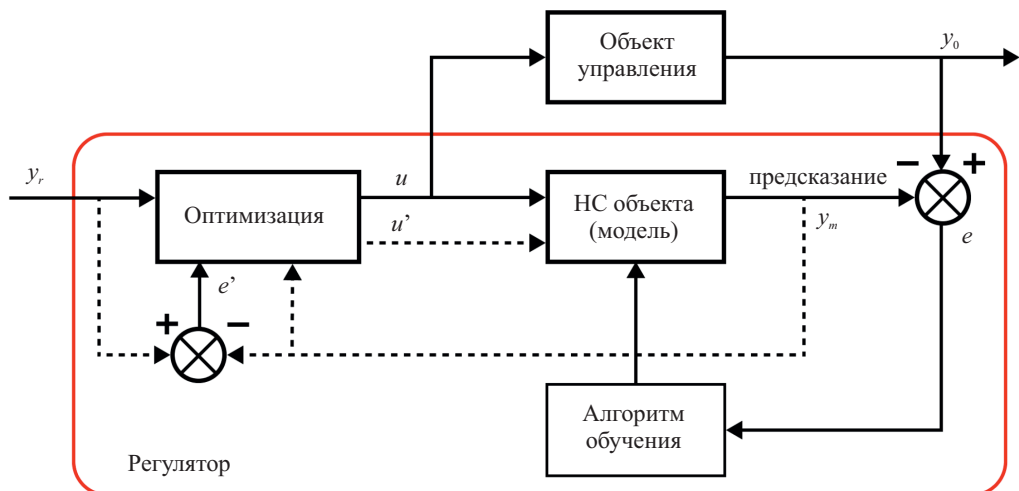


Рис. 1. Структура системы управления на основе нейросетевого предиктивного регулятора.

На рис. 1 представлена структура системы управления на основе нейросетевого предиктивного регулятора.

Сеть обучается заранее в пакетном режиме на экспериментальных данных работы реального объекта, при этом ошибка прогноза (разница между истинным выходом системы и предсказанием сети) минимизируется. Для идентификации обычно применяется двухслойная сеть *MLP* (*Multilayer Perceptron*). На вход сети подаются последние значения управлений и выходов системы (через звенья запаздывания).

Входной вектор сети включает $u(t), u(t-1), \dots$ и $y_p(t), y_p(t-1), \dots$ – текущие и запаздывающие значения входа и выхода системы. За этими входами следует один скрытый слой с нелинейной (сигмоидной) функцией активации. На выходе – линейная комбинация скрытого слоя, выдающая прогноз следующего выхода $y_m(t+1)$.

Такой подход опирается на теорему универсальной аппроксимации [3]: двухслойная нейросеть может аппроксимировать любую нелинейную функцию с достаточной точностью. После завершения обучения весовые коэффициенты нейросети сохраняются, модель интегрируется в состав регулятора для последовательного прогноза будущих откликов системы. При каждом временном шаге сеть прогоняет вход $u'(t)$ и предыдущее состояние, выдавая значение $y_m(t+1)$, затем этот выход при необходимости подается обратно на вход для моделирования поведения на несколько шагов вперед в зависимости от горизонта прогнозирования.

Предположим, что сеть обучена так, что на входы (моменты времени $t, t-1, \dots$) она подает одношаговый прогноз выхода $y_m(t+1)$. Многократное итеративное применение этой сети позволяет получить прогнозы

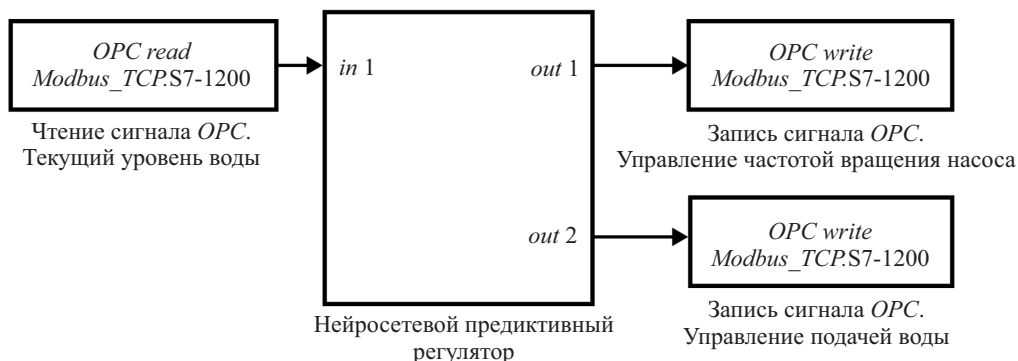


Рис. 2. Схема подключения к контроллеру с помощью OPC сервера.



Рис. 3. Блок подсистемы с нейросетевым предиктивным регулятором.

$y_m(t+2), y_m(t+3), \dots, y_m(t+N_2)$ при условии, что известны или предполагаются будущие входы $u'(t), u'(t+1)$.

Первая сумма в (1) накапливает квадраты ошибок слежения по горизонту $[t+N_1, t+N_2]$, вторая – штрафует за величину шагов управления (разницу между предполагаемыми новыми u' и последним примененным u).

При решении задачи оптимизации критерий J минимизируется по параметрам $u'(t), \dots, u'(t+N_u-1)$, причем при фактическом управлении учитывается только первый элемент этого найденного вектора.

В методологии NNPC обычно фиксируют $N=1$ (начинают учитывать ошибку сразу со следующего шага). Значение $\rho > 0$ подбирается, чтобы сбалансировать скорость реакции регулятора и плавность управления. Модель сети представляется в виде

$$(2) \quad y_m(t+1) = \int (u(t), u(t-1), \dots, y_p(t), y_p(t-1), \dots),$$

где $y_p(t)$ – действующий выход объекта. Например, модель описывается уравнением

$$(3) \quad y_m(t+1) = W^{(2)}\sigma\left(W^{(1)}[u(t), y_p(t)] + b^{(1)}\right) + b^{(2)},$$

где $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ – матрицы весов первого (входного) и второго (скрытого) слоев, $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ – смещения, σ – сигмоидная функция [4, 5].

В основе данного типа работы регулятора лежит решение задачи оптимизации на каждый такт дискретизации. Целевая функция J учитывает две составляющие: суммарную ошибку слежения по выходу за горизонт прогнозирования и штраф за изменение управляющего сигнала $\Delta u(t)$. При приближении к значению u' итеративный алгоритм оптимизации (метод Левенберга–Маркардта) рассчитывает градиент изменения J по параметрам управления и делает шаг к уменьшению ошибки [6].

В практической реализации на каждом шаге регулятор выполняет конечное число итераций поиска, после чего принимает текущее найденное оптимальное u и подает его на объект. Благодаря итеративной схеме и локальности аппроксимации оптимизируемой функции метод обеспечивает сходимость к локальному минимуму J , однако не гарантирует глобальный оптимум.

Возможна реализация нейросетевого предиктивного регулятора, взаимодействующего с объектом управления посредством протокола *OPC* (*Open Platform Communications*). На рис. 2 представлена схема такого подключения.

На рис. 3 представлена схема подсистемы с нейросетевым предиктивным регулятором.

3. Разработка и настройка нечеткого квадратичного регулятора

В 1960 г. Летовым А.М. и Калманом Р.Е. была сформулирована и успешно решена задача линейно-квадратичного управления, состоящая в нахождении оптимального управления для линейных систем с использованием квадратичных критериев. Летов А.М. разработал методику для стационарных линейных объектов, а Калман Р.Е. расширил этот подход на случай нестационарных систем [7, 8].

Линейно-квадратичный регулятор (*LQR*, *Linear Quadratic Regulator*) реализует метод оптимального управления линейными динамическими системами, основанный на минимизации квадратичной функции потерь $e^2(t)$ с использованием квадратичных критериев. Данный метод направлен на минимизацию квадратичной функции, с учетом изменения динамики системы, входных и выходных параметров управления путем поиска оптимальной матрицы обратной связи состояния с помощью решения дифференциального уравнения Риккати [9].

Пусть линейный непрерывный объект, для которого возможно представление в виде векторно-матричного уравнения, представлен как

$$(4) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – n -мерный вектор координат объекта, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица $[n \times n]$ параметров объекта, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица $[n \times m]$ управления, где $m \leq n$, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления.

Уравнения состояния линейной стационарной системы можно записать в следующем виде [9]:

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

где A – матрица системы $[n \times n]$, B – матрица входа $[n \times m]$, C – матрица управления $[k \times n]$, D – сквозная матрица $[k \times m]$.

Критерием оптимальности управления является следующее выражение:

$$(6) \quad J(u(t)) = \min \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt,$$

где матрицы Q и R – весовые матрицы для переменных состояния и входных переменных.

Целью синтеза является определение матрицы обратной связи по состоянию K с минимизацией функционала, сводящейся к решению уравнения Риккати. Функция Гамильтона имеет вид

$$(7) \quad H(t, x, u, \lambda) = -\frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu).$$

Выражение ее градиентов можно представить как

$$(8) \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax + Bu = \dot{x},$$

$$(9) \quad \frac{\partial H}{\partial x} = A^T \lambda - Qx = -\dot{\lambda},$$

$$(10) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = B^T \lambda - Ru = 0.$$

Используя градиенты линейной формы Gz и квадратичной формы $z^T G z$, запишем:

$$\frac{\partial}{\partial z}(Gz) = G^T, \quad \frac{\partial}{\partial z}(z^T S z) = 2Sz,$$

где G – строка, S – симметричная матрица.

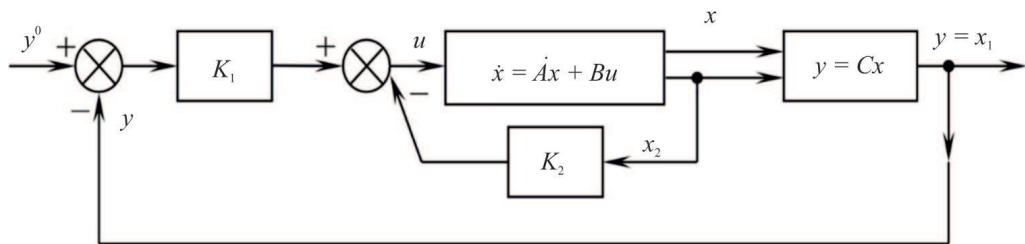


Рис. 4. Система с линейно-квадратичным алгоритмом управления.

Из уравнения (10) следует, что $u = R^{-1}B^T\lambda$. Исключая управление $u(t)$ из уравнения (8), получим:

$$(11) \quad \dot{x} = Ax + BR^{-1}B^T\lambda,$$

$$(12) \quad \dot{\lambda} = Qx + A^T\lambda.$$

Для нахождения оптимального управления решим систему, полагая, что существует такая матрица $P(t)$, что выполняется тождество $\lambda(t) = -P(t)x(t)$, следовательно:

$$(13) \quad u(t) = -R^{-1}B^TP(t)x(t).$$

Далее определим необходимое и достаточное условие существования матрицы $P(t)$, получив матричное алгебраическое уравнение Риккати относительно матрицы P :

$$(14) \quad PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0.$$

Следовательно, линейно-квадратичный алгоритм представляет собой метод, направленный на минимизацию критерия оптимальности при условии соблюдения ограничения в форме равенства, учитывающего модель объекта. Оптимальное управление может быть задано следующим образом:

$$(15) \quad u(t) = -Kx(t), \quad K = R^{-1}B^TS.$$

Отметим, что критерий качества может расширяться и для конечного горизонта или учета трекинга (с приближенными целевыми траекториями), однако в базовом варианте ставится задача стабилизации к равновесию.

К основным достоинствам классического линейно-квадратичного управления, схематичное представление которого приведено на рис. 4, относятся: гарантированная асимптотическая устойчивость замкнутой системы при наличии полного состояния, единственность решения при положительной определенности матриц и системный (структурированный) подход к синтезу управления. Данный алгоритм управления предполагает «гарантированную» устойчивость и устойчивость к малым возмущениям при адекватной моде-

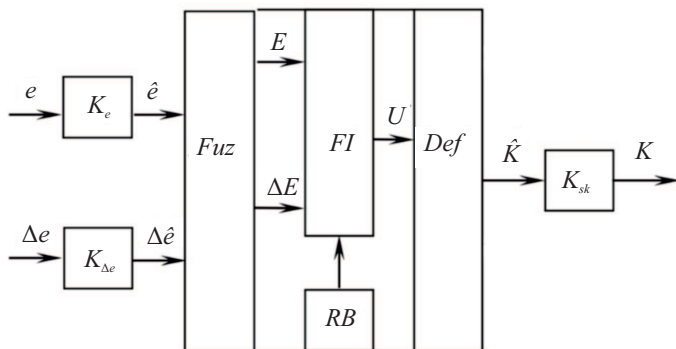


Рис. 5. Структура нечеткого квадратичного регулятора.

ли системы. Однако классический линейно-квадратичный регулятор имеет ограничения: он требует точного знания линейной модели объекта управления и допускает только квадратичную постановку задачи. В случае сильных нелинейностей или неопределенностей данный метод может оказаться неэффективным; изменение структуры или параметров системы влечет за собой пересчет регулятора.

Для расширения возможностей линейно-квадратичного регулятора используются методы на основе нечеткой логики. Нечеткий квадратичный регулятор (*FQR, Fuzzy Quadratic Regulator*) объединяет оптимальный закон с адаптивным механизмом нечеткого вывода [10]. В таких подходах структура управления дополняется блоком нечеткой логики, который на основе текущего состояния системы либо ошибки задает «поправки» к параметрам классического регулятора. Например, может вводиться «линейная функция слияния» (*Linear Fusion Function*), объединяющая выходы линейно-квадратичного регулятора и нечеткую корректировку.

Такая архитектура позволяет сочетать теоретически обоснованные свойства оптимального управления (минимизация квадратичного функционала) с гибкостью нечетких правил, обеспечивая улучшенную устойчивость, качество переходного процесса и отказоустойчивость при нелинейностях и внешних возмущениях.

В структуре нелинейной части нечеткого квадратичного регулятора имеются два входа: ошибка регулирования $e(k)$ и скорость ее изменения $\Delta e(k) = \Delta e(k)/\Delta t$, а также выход K (рис. 5). С использованием нормализующих коэффициентов K_e , $K_{\Delta e}$ фактические значения входов e , Δe преобразуются в нормализованные величины $\hat{e}$, $\Delta \hat{e}$ в пределах интервала $[-1, 1]$. В процессе фаззификации осуществляется преобразование нормализованных входных величин $\hat{e}$, $\Delta \hat{e}$ в нечеткие переменные E , ΔE [1, 11].

Методом Мамдани для нечеткого вывода находится нечеткий выход U на основе нечетких входов E и ΔE . Операция дефаззификации преобразует нечеткий выход U в нормализованное значение $\hat{u} \in [L, -L]$ на основе мето-

да центра тяжести. Затем это нормализованное значение $\hat{u}$ умножается на коэффициент K_{sk} для получения действительного значения K .

Настройка нечеткой составляющей квадратичного регулятора является сложной задачей, так как имеет грубую высокоуровневую настройку коэффициента, а также низкоуровневую для улучшения качества управления.

При построении нечеткой модели с двумя входами и одним выходом на этапе дефаззификации обычно применяется метод центра тяжести [1]:

$$(16) \quad \hat{y} = \frac{\int_Y y Y'(y) dy}{\int_Y Y'(y) dy}.$$

На следующем этапе установления связи между входом и выходом нечеткой модели используется база правил системы нечеткого вывода. Каждое правило в этой базе состоит из условия и заключения.

Запишем переменные в непрерывной форме: $\hat{e}(t)$, $\Delta\hat{e}(t)$, $u(t)$, $t \in [0, T]$. При непрерывном нечетком регуляторе правила выглядят следующим образом:

$$(17) \quad R^\theta: \text{если } \hat{e}(t) \text{ есть } E^\theta \text{ и } \Delta\hat{e}(t) \text{ есть } \Delta E^\theta, \text{ то } u(t) \text{ есть } U^\theta,$$

где E^θ , ΔE^θ и U^θ – нечеткие множества, характеризующие ошибку $\hat{e}(t)$, ее скорость изменения $\Delta\hat{e}(t)$ и управление $u(t)$ на $t \in [0, T]$, принадлежащие соответствующим терм-множествам $E \in T_e$, $\Delta E \in T_{\Delta e}$, $U \in T_u$ с элементами – лингвистическими значениями.

На основе анализа полученных переходных и фазовых процессов определим нечеткие правила для регулятора. Процесс формирования базы правил при нечетком квадратическом управлении включает в себя определение необходимых лингвистических переменных для входа и выхода, а также определение лингвистических терминов, описывающих значения этих переменных.

Однако стоит отметить, что если $\hat{e}$ есть E_Z и $\Delta\hat{e}$ есть DE_Z , то поддерживается текущее значение управления и K будет равно K_Z :

$$(18) \quad R: \text{если } \hat{e} \text{ есть } E_Z \text{ и } \Delta\hat{e} \text{ есть } DE_Z, \text{ то } K \text{ есть } K_Z.$$

Если ошибка $\hat{e}$ не уточняется, то правила должны увеличивать быстрое действие переходного процесса при наибольшей ошибке управления.

В процессе исследований был получен вывод, что на выходе блока нечеткой логики требуются одинаковые по своей природе, но разные по значению воздействия для каждой переменной состояния. Следовательно, на выходе блока нечеткой логики будет один коэффициент y , а масштабирующих коэффициентов несколько. Количество этих коэффициентов зависит от порядка модели. Кроме того, полученная модель нормированная, поэтому требуется определение масштабирующих коэффициентов.

В табл. 1 представлены лингвистические переменные для нечеткого квадратичного регулятора. Пояснения к сокращениям, которые часто используются для обозначения лингвистических переменных в нечеткой логике:

Таблица 1. Выбор нечетких правил для коэффициента K

$\hat{e} / \Delta \hat{e}$	NB	NS	Z	PS	PB
NB	NVB	NB	NM	NS	Z
NS	NB	NM	NS	Z	PS
Z	NM	NS	Z	PS	PM
PS	NS	Z	PS	PM	PB
PB	Z	PS	PM	PB	PVB

NVB (*Negative Very Big*) – «очень большое отрицательное», NB (*Negative Big*) – «большое отрицательное», NM (*Negative Medium*) – «среднее отрицательное», NS (*Negative Small*) – «малое отрицательное», Z (*Zero*) – «нулевое», PS (*Positive Small*) – «малое положительное», PM (*Positive Medium*) – «среднее положительное», PB (*Positive Big*) – «большое положительное», PVB (*Positive Very Big*) – «очень большое положительное» [1].

Ниже представлены нечеткие правила, основанные на табл. 1. Выбор данных нечетких правил обусловлен характером управления, ошибки и скорости ее изменения:

- R^1 : если $\hat{e}$ есть E_NB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NB , то K есть K_NVB ,
- R^2 : если $\hat{e}$ есть E_NB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NS , то K есть K_NB ,
- R^3 : если $\hat{e}$ есть E_NB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_Z , то K есть K_NM ,
- R^4 : если $\hat{e}$ есть E_NB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PS , то K есть K_NS ,
- R^5 : если $\hat{e}$ есть E_NB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PB , то K есть K_Z ,
- R^6 : если $\hat{e}$ есть E_NS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NB , то K есть K_NB ,
- R^7 : если $\hat{e}$ есть E_NS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NS , то K есть K_NM ,
- R^8 : если $\hat{e}$ есть E_NS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_Z , то K есть K_NS ,
- R^9 : если $\hat{e}$ есть E_NS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PS , то K есть K_Z ,
- R^{10} : если $\hat{e}$ есть E_NS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PB , то K есть K_PS ,
- R^{11} : если $\hat{e}$ есть E_Z и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NB , то K есть K_NM ,
- R^{12} : если $\hat{e}$ есть E_Z и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NS , то K есть K_NS ,
- R^{13} : если $\hat{e}$ есть E_Z и $\Delta \hat{e}$ есть DE_Z , то K есть K_Z ,
- R^{14} : если $\hat{e}$ есть E_Z и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PS , то K есть K_PS ,
- R^{15} : если $\hat{e}$ есть E_Z и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PB , то K есть K_PM ,
- R^{16} : если $\hat{e}$ есть E_PS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NB , то K есть K_NS ,
- R^{17} : если $\hat{e}$ есть E_PS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NS , то K есть K_Z ,
- R^{18} : если $\hat{e}$ есть E_PS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_Z , то K есть K_PS ,
- R^{19} : если $\hat{e}$ есть E_PS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PS , то K есть K_PM ,
- R^{20} : если $\hat{e}$ есть E_PS и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PB , то K есть K_PB ,
- R^{21} : если $\hat{e}$ есть E_PB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NB , то K есть K_Z ,
- R^{22} : если $\hat{e}$ есть E_PB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_NS , то K есть K_PS ,
- R^{23} : если $\hat{e}$ есть E_PB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_Z , то K есть K_PM ,
- R^{24} : если $\hat{e}$ есть E_PB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PS , то K есть K_PB ,
- R^{25} : если $\hat{e}$ есть E_PB и $\Delta \hat{e}$ есть DE_PB , то K есть K_PVB .

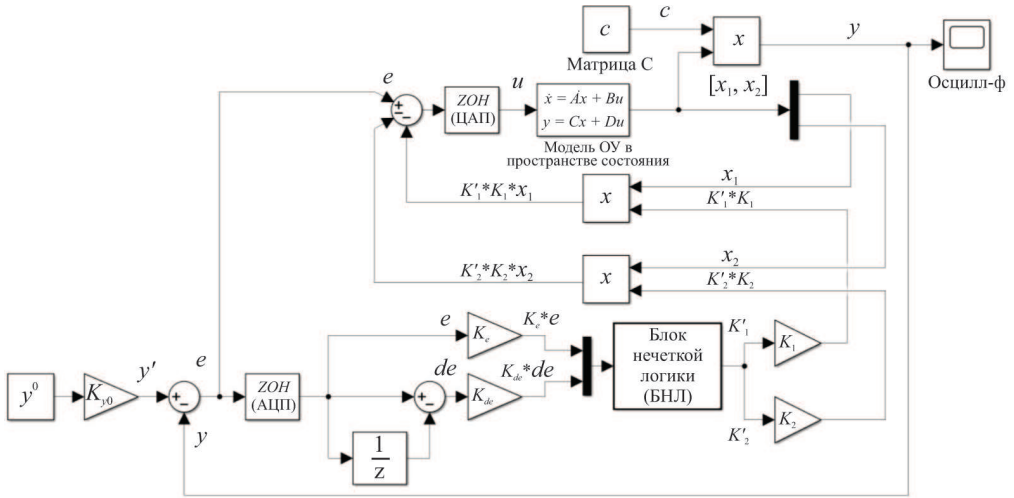


Рис. 6. Структурная схема замкнутой системы управления с нечетким квадратичным регулятором.

На рис. 6 представлена схема замкнутой системы управления с нечетким квадратичным регулятором в среде *MATLAB – Simulink*.

Задание с учетом масштабирующего коэффициента можно представить как

$$y'(t) = y^0 K_{y0}, \quad \text{ошибка управления } e(t) = y'(t) - y(t),$$

преобразование непрерывного сигнала в дискретный для работы блока нечеткой логики

$$e_{ZOH}(t) = ZOH(e(t), T),$$

дифференцирование дискретного сигнала и скорость изменения ошибки

$$de(nT) = e_{ZOH}(nT) - e_{ZOH}(nT - T).$$

Блок нечеткой логики описывается следующим образом

$$(19) \quad \begin{bmatrix} K'_1 \\ K'_2 \end{bmatrix} = \tilde{f}_{\text{БНЛ}}(K_e e_{ZOH}, K_{\Delta e} de).$$

Описание модели объекта управления в пространстве состояния

$$\dot{X}(t) = AX(t) + By(t), \quad X(t) = C \sum_t \dot{X}(t).$$

Тогда

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$U(t) = e(t) - X_1(t)K'_1(t)K_1 - X_2(t)K'_2(t)K_2.$$

Обратное преобразование дискретного сигнала в непрерывный

$$u(t) = ZOH(U(t)), \quad y(t) = CX(t)$$

преобразуется блоком «Zero-Order Hold».

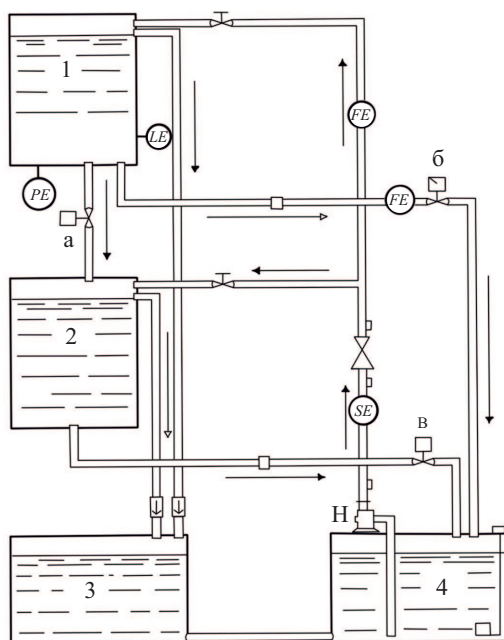


Рис. 8. Исследовательский стенд «Гидравлический объект».

Среда *MATLAB* с библиотекой *Deep Learning Toolbox* позволяет эффективно реализовать сложные системы управления на основе нейронных сетей. Блок *NN Predictive Controller* (рис. 3) выполняет функцию встроенного *NNPC* – регулятора, состоящего из входа целевого значения (*reference*), входа измеренного выхода системы (*feedback*) и выхода управляющего сигнала (*control*).

Данный блок настраивается через диалоговые окна, которые разбиты на две вкладки: *Controller Design* (параметры предиктора) и *Plant Identification* (параметры модели сети). Ключевые параметры блока следующие: горизонты предсказания и управления ($N_1, N_2 = 1$), коэффициент взвешивания ρ , параметр α оптимизации (определяет требуемую относительную редукцию J на каждом шаге поиска), алгоритм оптимизации и число итераций.

Вкладка *Plant Identification* задает параметры обучаемой сети-модели системы: число нейронов скрытого слоя, число задержек входных и выходных переменных, функцию обучения, а также считывания данных для обучения.

В *Simulink Plant Model* выбирается заранее подготовленная модель с передаточной функцией объекта, по которой нейросеть получит первичное представление о поведении объекта управления.

На основании серии исследований, основная задача которых заключалась в поддержании уровня жидкости в резервуаре 2 (рис. 8) на уровне 7 литров, можно сделать вывод о неустойчивости системы управления поддержанием уровня воды в резервуаре при использовании классического ПИ регулятора.

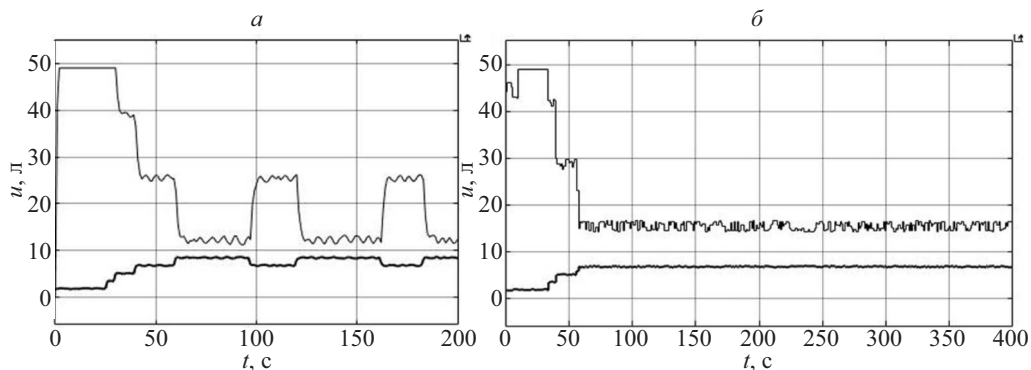


Рис. 9. Переходный процесс при использовании: *а* – классического ПИ регулятора, *б* – нейросетевого предиктивного регулятора.

Это обусловлено тем, что параметры классического ПИ регулятора не способны компенсировать минимальные накопления излишнего объема жидкости в резервуаре, приводящего к ложным реакциям на изменения (рис. 9).

Результаты экспериментальных исследований двух типов регуляторов приведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты эксперимента

Тип регулятора	Время нарастания, с	Время переходного процесса, с	Перерегулирование, л	Характер устойчивости
Нейросетевой предиктивный регулятор	54	57	0,04	Устойчива
ПИ регулятор	42	66	0,23	Неустойчива

Однако стоит отметить, что нейросетевые регуляторы могут уступать нечетким из-за своей сложности обучения и настройки, высоких вычислительных затрат, а также меньшей предсказуемости поведения в условиях помех и переходных режимов.

Нечеткие регуляторы, напротив, обеспечивают стабильность и быстродействие благодаря простым логическим правилам, минимальному времени вычислений и наглядности формирования алгоритмов управления, что делает их предпочтительными для задач с жесткими требованиями к стабильности, в частности в биотехнических системах управления, где необходимо соблюдать конкретные технологические регламенты.

В табл. 3 представлены типы и параметры функций принадлежности нечеткой составляющей квадратичного регулятора в блоке *Fuzzy Logic Toolbox* среды *MATLAB – Simulink* в задаче поддержания температурных режимов в инкубационном шкафу [9, 10, 14]. Синтез базы нечетких управляющих правил построен на методе фазовой плоскости.

Таблица 3. Функции принадлежности нечеткой части квадратичного регулятора

Нечеткая переменная	Функция принадлежности	Тип ФП	Параметры
E	E_NB	<i>trapmf</i>	$[-1,45 \ -1,05 \ -1 \ -0,493]$
	E_NS	<i>trimf</i>	$[-1 \ -0,5 \ 0]$
	E_Z	<i>trimf</i>	$[-0,5 \ 0 \ 0,5]$
	E_PS	<i>trimf</i>	$[0 \ 0,5 \ 1]$
	E_PB	<i>trapmf</i>	$[0,506 \ 0,999 \ 1,16 \ 1,34]$
dE	DE_NB	<i>trapmf</i>	$[-1,45 \ -1,05 \ -1 \ -0,493]$
	DE_NS	<i>trimf</i>	$[-1 \ -0,5 \ 0]$
	DE_Z	<i>trimf</i>	$[-0,5 \ 0 \ 0,5]$
	DE_PS	<i>trimf</i>	$[0 \ 0,5 \ 1]$
	DE_PB	<i>trapmf</i>	$[0,506 \ 0,999 \ 1,16 \ 1,34]$
K	K_NVB	<i>trapmf</i>	$[-1,23 \ -1,02 \ -0,987 \ -0,758]$
	K_NB	<i>trimf</i>	$[-1 \ -0,75 \ -0,5]$
	K_NM	<i>trimf</i>	$[-0,75 \ -0,5 \ -0,25]$
	K_NS	<i>trimf</i>	$[-0,5 \ -0,25 \ 0]$
	K_Z	<i>trimf</i>	$[-0,25 \ 0 \ 0,25]$
	K_PS	<i>trimf</i>	$[0,00408 \ 0,254 \ 0,504]$
	K_PM	<i>trimf</i>	$[0,25 \ 0,5 \ 0,75]$
	K_PB	<i>trimf</i>	$[0,5 \ 0,75 \ 1]$
	K_PVB	<i>trapmf</i>	$[0,762 \ 0,999 \ 1,03 \ 1,2]$

Начальные значения коэффициентов K_1 и K_2 (рис. 6–7) вычисляются с использованием функции $[K, S, e] = lqr(W_ss, q, r)$, что обеспечивает базовую настройку регулятора с учетом заданных весовых матриц W_ss , q и r и создает основу для последующей нечеткой коррекции согласно определенным лингвистическим правилам.

Преобразование передаточной функции объекта управления в систему в пространстве состояния осуществляется с помощью встроенной *MATLAB* функции **tf2ss/W_ss**.

На рис. 6 показана процедура формальной проверки свойств системы перед построением *LQR* регулятора с помощью функций *MATLAB* **ctrb** и **obsv**. Сначала формируется матрица управляемости $C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$, с помощью функции **ctrb** определяется ее ранг. Если он равен размерности вектора состояния n , система признается полностью управляемой. Аналогично с помощью **obsv** строится матрица наблюдаемости $Q = [C^T(CA)^T(CA^2)^T \ \dots (CA^{N-1})^T]^T$, и при ее полном ранге все состояния могут быть восстановлены, что обеспечивает корректность работы наблюдателя. В случае одного входа матрица R представится в виде скалярного

Таблица 4. Функции принадлежности нечеткой части квадратичного регулятора

Тип управления	Перерегулирование, °С	Время переходного процесса, с
	Встроенный ПИ регулятор	
	1,9	3055
	Оптимизированный ПИ регулятор	
	1,5	3000
	Нечеткий квадратичный регулятор	
	1,0	2730

параметра r , который в оптимизирующем функционале

$$J = \min \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

задается эмпирически и играет ключевую роль в балансе между энергозатратами управления и быстродействием системы: при увеличении r снижается амплитуда управляющего сигнала и повышается устойчивость, но замедляются динамические реакции, тогда как уменьшение r делает регулятор более агрессивным, сокращая время перехода, но увеличивая риск перерегулирования и износа исполнительных механизмов.

После первоначального расчета коэффициентов $K = lqr(A, B, Q, R)$ проверяют управляемость и наблюдаемость, затем в ходе серийных имитаций и экспериментальных испытаний параметр r корректируют до тех пор, пока не будут достигнуты требуемые критерии качества переходного процесса (время установления, перерегулирование) при сохранении полной управляемости и наблюдаемости. Эта итеративная оптимизация служит важным звеном, связывающим классический подход LQR и последующую нечеткую адаптацию, что позволяет добиться высокой точности и надежности управления в реальных условиях [9, 10].

Таким образом, описанный подход сочетает в себе жесткую оптимизацию через классический алгоритм LQR на этапах инициализации и гибкую адаптацию через нечеткую логику на этапе реального времени, что обеспечивает высокую точность и устойчивость управления в широком диапазоне рабочих режимов.

Активный эксперимент поддержания температурного режима в инкубационном шкафу проводился в два этапа: поиск оптимального алгоритма управления и управление полным циклом инкубации. Исследования проводились с целью изучения воздействия внешних факторов на процессы управления, осуществляемые системой, путем полного открытия двери инкубационного шкафа на промежуток времени, равный 1200 с, что имитирует краткосрочное присутствие персонала в инкубационном шкафу. Температура воздуха в инкубационном шкафу в течение часа до начала опыта – 38°С. Вентилятор принудительно включен. Результаты представлены в табл. 4.

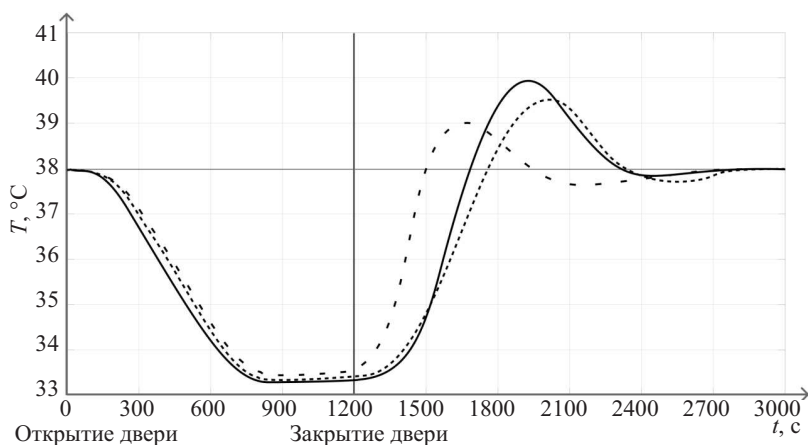


Рис. 10. График влияния внешних воздействий на объект управления в системе со встроенным (сплошная линия), оптимизированным (частая прерывистая линия), нечетким квадратичным (прерывистая линия) регуляторами.

На рис. 10 представлен график реакции внешнего воздействия на объект управления в системе.

Таблица 5. Основные факторы при выборе гибридного регулятора

Характеристика	Нейросетевой предиктивный регулятор	Нечеткий регулятор
Принцип работы	Использует модель объекта на основе ИНС; предсказывает будущее поведение системы и решает задачу оптимизации по целевому функционалу J .	Управление определяется набором экспертных правил ЕСЛИ-ТО; входные сигналы фаззифицируются, затем выводится нечеткое управление, которое дефаззифицируется для получения конкретного значения.
Модель объекта	Идентифицируется на данных: ИНС обучается аппроксимировать динамику бака по данным эксперимента. Способна представлять сложные нелинейные зависимости.	Нет явной математической модели; динамика задается правилами (все описано «на естественном языке» через термы).
Интерпретируемость	Низкая: модель «черного ящика», трудно объяснить, почему она дает именно такое управление.	Высокая: правила понятны человеку, можно легко изменять логику управления.
Вычислительная сложность	Высокая: на этапе управления требуется решать оптимизационную задачу в реальном времени. Обучение может быть ресурсоемким.	Низкая: операции проверки правил и дефаззификации выполняются быстро, подходят для быстродействующих контроллеров.

5. Заключение

Выбор между нейросетевым предиктивным и нечетким регуляторами должен определяться требованиями к точности, характером динамики объекта, доступностью обучающих данных и вычислительных ресурсов, а также технологическими особенностями.

В табл. 5 представлены основные решающие факторы при выборе гибридного регулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пащенко Ф.Ф., Кудинов Ю.И., Пащенко А.Ф. и др.* Нечеткие модели и системы управления. М.: Ленанд, 2026. 384 с.
2. *Ignatyev V.V., Finaev V.I.* The use of hybrid regulator in design of control systems // *World Applied Sciences Journal*. 2013. V. 23. No. 10. P. 1291–1297.
3. *Cybenko G.V.* Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function // *Mathematics of Control Signals and Systems*. 1989. V. 2. No. 4. P. 303–314.
4. *Akesson B.M., Toivonen H.T.* A neural network model predictive controller // *Journal of Process Control*. 2006. V. 16. No. 9. P. 937–946.
5. *Draeger A., Engell S., Ranke H.* Model predictive control using neural networks // *IEEE Control Systems Magazine*. 1995. V. 15. No. 5. P. 61–66.
6. *Vasickaninova A., Bakosova M., Oravec J., et al.* Neural network predictive controller design // *Chemical Engineering Transactions*. 2017. V. 61. P. 121–126.
7. *Лётов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов // *АиТ*. 1960. Т. 21. № 5. С. 436–441.
8. *Калман Р., Фалб П., Арbib М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
9. *Kudinov Y.I., Pashchenko F.F., Kelina A.Y., et al.* Analysis of control system models with conventional LQR and fuzzy LQR controller // *Procedia Computer Science*. 2019. V. 150. P. 737–742.
10. *Pashchenko F.F., Kudinov Y.I., Pashchenko A.F., et al.* Fuzzy quadratic control of thermal object // 2019 1st Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). IEEE, 2019. P. 288–293.
11. *Vassilyev S.N., Kudinov Yu.I., Pashchenko F.F., et al.* Intelligent Control Systems and Fuzzy Controllers II // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 80. P. 345–357.
12. *Duванov E.S., Fedyanin T.V., Pashchenko A.F.* The Feasibility of Using a Predictive Neural Network Controller // *Proc. 17th Int. Conf. on Management of Large-Scale System Development (MLSD)*. IEEE, 2024. P. 1–5.
13. *Duванov E.S., Batishchev R.V., Pashchenko A.F., et al.* Applying of Predictive Neural Network Controllers // *Proc. 4th Int. Conf. on Technology Enhanced Learning in Higher Education (TELE)*. IEEE, 2024. P. 422–427.
14. *Дуванов Е.С.* Анализ и синтез гибридных регуляторов для предиктивного управления тепловым процессом на основе нечеткой логики // Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Липецк: 2024. 24 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 15.10.2025

Принята к публикации 20.11.2025

© 2026 г. Е.Н. ХОБОТОВ, д-р техн. наук (e_khobotov@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН;
Российский технический университет МИРЭА, Москва)

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ И ОСОБЕННОСТИ РАСПИСАНИЙ РАБОТ ДЛЯ ПРЕДПРИЯТИЙ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Рассматриваются задачи и методы построения расписаний работ на машиностроительных предприятиях с большим количеством оборудования, изготавливающих большое количество комплектующих и изделий различных типов. Такие методы основаны на идее последовательного агрегирования и позволяют строить согласованные расписания работ для всех подразделений предприятия. В построенных расписаниях определяется время начала и завершения обработки каждой партии комплектующих на всем используемом оборудовании предприятия.

Ключевые слова: методы моделирования, расписание работ, обрабатывающее оборудование, комплектующие, сборка изделий, технология изготовления, подразделения предприятий, агрегирование.

DOI: 10.7868/S2413977726040064

1. Введение

Задачи теории расписаний обычно возникают, когда имеется возможность выбирать ту или иную последовательность выполнения работ или заданий [1–3]. Особенно эффективными и заметными оказались результаты их решения в промышленности. Построение расписаний работ для производственных систем и участков предприятий позволило заметно сокращать сроки выполнения заказов без вложения дополнительных средств.

Для построения таких расписаний был разработан ряд достаточно эффективных методов [1–3]. К сожалению, эти методы оказались непригодными для построения расписаний работ на предприятиях, имеющих в своем составе большое количество оборудования и изготавливающих значительное количество продукции. Непригодность таких методов вызвана размерностью расписаний на этих предприятиях, которая оказывается чрезвычайно большой. Однако именно на таких предприятиях может быть получен самый высокий экономический эффект от использования расписаний работы.

Для повышения эффективности предприятий с помощью средств теории расписаний следует планировать их работу, используя расписания, построенные для изготовления продукции на всем оборудовании предприятий. В таких расписаниях, которые в [4, 5] названы согласованными, должна обеспечиваться технология изготовления каждой партии комплектующих на всем

оборудовании предприятия. Кроме того, в них должны отсутствовать невынужденные простои оборудования и по возможности сокращены вынужденные простои оборудования.

Для построения согласованных расписаний на предприятиях в [4] был предложен подход, использующий принципы агрегирования. Такой подход был развит и использован в [5, 6] для формирования расписаний работ на машиностроительных предприятиях со ступенчатой и конвейерной сборкой выпускаемых изделий. Однако в тех случаях, когда требуется строить расписания по обработке большого количества комплектующих на предприятиях, имеющих значительное количество оборудования, возникают проблемы. Методы, предложенные в [4] и развитые в [5, 6], для построения расписаний работ в подобных случаях могут оказаться недостаточно эффективными, а в некоторых из таких случаев и совсем непригодными.

В данной работе предлагаются методы, с помощью которых удастся строить расписания работ на таких машиностроительных предприятиях. В предлагаемых методах для построения расписаний работ используются идеи и принципы последовательного агрегирования.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу по изготовлению комплектующих в производственных подразделениях предприятий для сборки из них выпускаемых изделий.

Пусть на предприятии имеется M механообрабатывающих подразделений. В этих подразделениях изготавливают комплектующие, из которых собирают выпускаемые изделия L типов. Изделия изготавливаются партиями, размеры которых N_l ($l = 1, \dots, L$) задаются в поступающем заказе.

Для каждого выпускаемого изделия известны количество и типы комплектующих его агрегатов, узлов и деталей. Кроме того, известны время и последовательность изготовления каждой партии комплектующих для выпускаемых изделий любого типа, а также время переналадки этого оборудования для их изготовления. Выпускаемые изделия собираются из изготовленных на предприятиях, а также из закупленных на стороне комплектующих деталей, узлов и агрегатов.

В задаче требуется построить такое расписание работ на предприятии, в котором обработка каждой партии комплектующих может начаться на любом используемом оборудовании только когда завершится обработка этой партии на предыдущем оборудовании по технологическому маршруту ее изготовления. Кроме того, выполнение поступившего заказа по такому расписанию должно завершиться за меньшее по возможности время.

3. Принципы построения расписаний обработки комплектующих на предприятиях

Рассмотрим принципы и особенности построения расписаний по изготовлению комплектующих на машиностроительных предприятиях.

Расписания работ на предприятиях с дискретным характером производства целесообразно строить на всем оборудовании предприятия. Только такие расписания работ позволят обеспечить выполнение технологии изготовления комплектующих на предприятиях и могут сократить время изготовления поступивших заказов.

Существующие методы, как уже отмечалось, оказались непригодными для построения расписаний на предприятиях, поскольку размерность расписания работ даже на небольших предприятиях оказывается слишком большой для этих методов.

В [4] был предложен подход, позволяющий разрабатывать методы, пригодные для построения расписаний на машиностроительных предприятиях. Идея предложенного подхода, в котором использованы принципы агрегирования информации, состоит в формировании специальных групп из комплектующих, подлежащих обработке. Наряду с группами комплектующих формируются также группы оборудования, в которых должны обрабатываться комплектующие из этих групп.

Здесь следует отметить, что формирование групп оборудования не предполагает изменений в административной структуре предприятий и используется только для построения расписания работ. Однако в качестве групп оборудования все же удобно выбирать подразделения предприятий. В каждую группу комплектующих включаются только те комплектующие, которые в соответствии с технологией их изготовления в процессе обработки на предприятии поступают в одни и те же производственные подразделения предприятия в одном порядке.

Тем не менее в подразделениях предприятий комплектующие каждой группы обрабатываются по «своим» технологическим маршрутам. Сформированные таким образом группы комплектующих можно рассматривать как «обобщенные детали», а группы из оборудования предприятия – как «обобщенные станки».

Действительно, группы комплектующих поступают в соответствии с технологией их изготовления в производственные подразделения предприятий для обработки, как и детали в механообработке доставляют к обрабатывающему их оборудованию. Для каждой группы комплектующих, как и для деталей в механообработке, известны последовательность обработки в подразделениях предприятий и могут быть определены времена обработки.

Предприятие с производственными подразделениями при подобном агрегировании можно рассматривать как «обобщенное подразделение», содержащее «обобщенные станки», на которых обрабатываются «обобщенные детали».

Поэтому для определения порядка обработки «обобщенных деталей» на «обобщенных станках» в таком «обобщенном подразделении» может быть построено расписание их обработки.

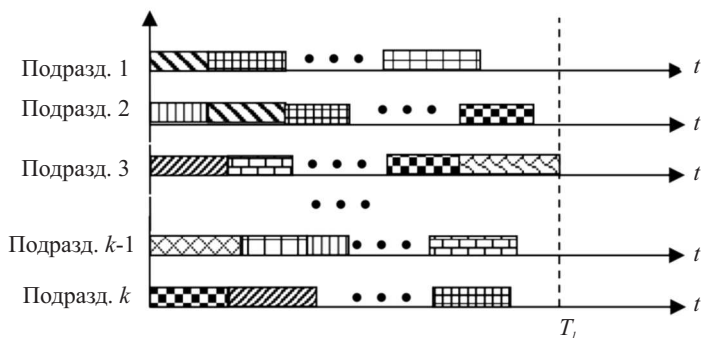


Рис. 1. Диаграмма Гантта «каркасного» расписания обработки групп комплектующих J -го изделия.

Порядок обработки, полученный в этом расписании, должен обеспечить выполнение технологического маршрута обработки «обобщенных деталей» на «обобщенных станках» или групп комплектующих в подразделениях предприятия, а также сокращение времени изготовления этих групп [1–3].

Для построения расписания обработки групп комплектующих в подразделениях предприятий необходимо знать время обработки каждой из этих групп в тех подразделениях, где они обрабатываются. Для определения времени обработки каждой группы в обрабатывающих ее подразделениях строятся расписания ее обработки в этих подразделениях. В качестве времени обработки группы комплектующих в подразделении принимается время завершения обработки последней комплектующей из этой группы на оборудовании подразделения.

Следует также отметить, что эти расписания в дальнейшем будут использоваться для формирования расписания изготовления комплектующих на предприятии. В [4] расписание изготовления групп комплектующих в подразделениях предприятия было названо «каркасным».

Размерность такого расписания оказывается существенно меньше размерности исходного расписания. Это связано с тем, что в «каркасном» расписании вместо нескольких десятков единиц оборудования в каждом подразделении рассматривается только одна единица – «обобщенный станок» или подразделение предприятия. Вместо нескольких десятков единиц комплектующих рассматривается только одна единица – «обобщенная деталь» или группа комплектующих.

Поэтому такое расписание также может быть построено с использованием традиционных методов построения расписаний, если после агрегирования размерность задачи построения «каркасного» расписания окажется не слишком большой для этих методов.

Расписания обработки деталей в производственных системах и участках обычно представляют с помощью диаграмм Гантта [1–3]. «Каркасные» расписания также могут быть представлены с помощью этих диаграмм. На рис. 1 изображена диаграмма Гантта, представляющая пример «каркасного» распи-

сания обработки групп комплектующих для l -го изделия в производственных подразделениях предприятия.

Диаграмма Ганта подобного расписания, как видно из рис. 1, имеет практически такой же вид, как и диаграмма Ганта для расписания обработки деталей в производственном подразделении [1–3]. Только в диаграмме Ганта, представляющей «каркасное» расписание, вместо станков по оси ординат откладываются производственные подразделения предприятия (производственные системы и участки, цеха). Кроме того, в такой диаграмме по каждой из осей абсцисс вместо времени обработки деталей откладываются времена обработки групп деталей в соответствующих подразделениях.

В «каркасных расписаниях» так же, как и при изготовлении комплектующих партиями, имеется возможность сокращать вынужденные простои производственных подразделений передачей части обработанных партий из обрабатываемой группы в подразделение, следующее по маршруту ее обработки, если оно уже освободилось.

Построенное «каркасное» расписание позволяет достаточно быстро сформировать предварительный вариант согласованного расписания работ для предприятия. Формирование этого расписания, которое в дальнейшем будем называть «развернутым каркасным» или «распакованным каркасным» расписанием, удобно пояснять в процессе построения для него диаграммы Ганта. В диаграмме Ганта, предназначенной для «развернутого каркасного» или «распакованного каркасного» расписания, выделяется отдельная ось абсцисс для каждого оборудования любого подразделения предприятия. По каждой из осей откладываются времена обработки комплектующих, изготавливаемых на оборудовании подразделения, соответствующем оси.

Здесь следует напомнить, что расписания обработки всех групп комплектующих уже строились для тех подразделений, в которых эти группы должны обрабатываться согласно технологии их изготовления, поскольку по ним определялись времена их обработки для построения «каркасного» расписания.

Поэтому «развернутое каркасное» или «распакованное каркасное» расписание формируется путем размещения в диаграмме Ганта на позициях каждого подразделения и на осях, соответствующих тому же оборудованию, уже построенных расписаний обработки групп комплектующих в этом подразделении. Построенные расписания обработки групп комплектующих размещаются на позициях каждого подразделения в том же порядке, который был получен при построении «каркасного» расписания. Размещение расписания обработки следующей группы комплектующих в каждом подразделении на диаграмме «развернутого каркасного» расписания возможно только после завершения обработки последней комплектующей из предыдущей группы.

В связи с этим времена завершения работ по «развернутому каркасному» и «каркасному» расписаниям будут совпадать. Сформированное по такой схеме «развернутое каркасное» расписание будет согласованным распи-

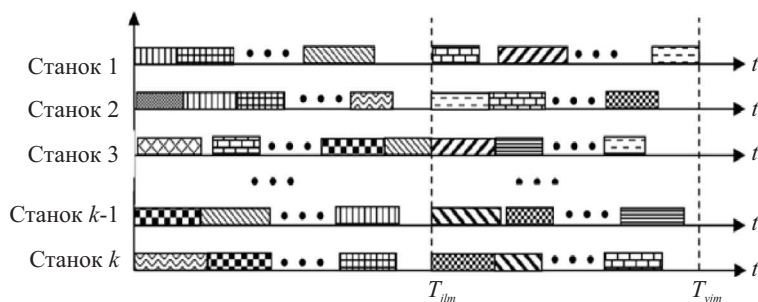


Рис. 2. Диаграмма Гантта «каркасного» расписания обработки i -й и v -й смежных групп комплектующих J -го изделия.

санием на уровне предприятия. Это справедливо, поскольку в данном расписании обработка каждой комплектующей начинается на любом используемом оборудовании предприятия только когда завершится ее обработка на предыдущем оборудовании по технологическому маршруту изготовления этой комплектующей.

Однако в таком расписании работ имеется много «невынужденных» простоев оборудования при обработке смежных групп комплектующих, что делает это расписание не совсем удачным.

Это видно, если построить диаграмму Гантта, содержащую фрагмент такого расписания (см. рис. 2, на котором показано расписание обработки i -й и v -й смежных групп комплектующих l -го изделия в m -м подразделении).

Простои оборудования в таких расписаниях возникают из-за правил построения «каркасных» расписаний. По этим правилам обработку в подразделении следующей группы комплектующих можно начать только после окончания обработки последней комплектующей из предыдущей группы, а освободившееся оборудование от обработки комплектующих из предыдущей группы будет простаивать. Поэтому длительность выполнения работ, полученная с помощью такого расписания, из-за подобных простоев будет увеличенной, и использовать его в качестве расписания работ предприятия, как уже отмечалось, нецелесообразно.

Подобные простои могут быть сокращены в результате выполнения операции «склеивания» расписаний. После ее выполнения оборудование, освободившееся от обработки комплектующих обрабатываемой группы в каждом подразделении, по возможности сразу начинает использоваться для обработки комплектующих следующей группы.

Как уже отмечалось, размерность «каркасного» расписания будет значительно меньше размерности исходного расписания. Поэтому во многих случаях такое расписание в отличие от исходного расписания может быть построено с помощью существующих методов за приемлемое время.

Кроме того, как уже отмечалось ранее, на основе «каркасного» расписания может быть построено «развернутое каркасное» расписание, которое яв-

ляется согласованным расписанием на уровне предприятия. После операции «склеивания» из «развернутого каркасного» расписания может быть получено согласованное расписание для предприятия, определяющее последовательность, не нарушающую технологию обработки комплектующих на всем оборудовании предприятия.

В связи с тем, что здесь рассматривалось использование идей агрегирования для построения расписаний работ на предприятиях машиностроения, то предполагалось возможным построение всех необходимых расписаний работ.

Однако в некоторых случаях, особенно когда расписания требуется строить на предприятиях, имеющих в своем составе большое количество подразделений и оборудования в них, а также обрабатывающих большое количество комплектующих, могут возникать значительные проблемы. Одна из этих проблем связана со слишком большой размерностью возникающих расписаний работ, что может приводить к недопустимо большому времени построения расписаний.

4. Построение расписаний обработки большой размерности

Рассмотрим принципы и особенности построения расписаний работ большой размерности, которые возникают на предприятиях, имеющих в своем составе большое количество подразделений и оборудования в них, а также обрабатывающих большое количество комплектующих.

Размерность расписаний работ на таких предприятиях, как уже отмечалось, оказывается чрезвычайно большой. Поэтому существующие методы непригодны для построения подобных расписаний работ.

Для их построения необходима разработка специальных методов. Методы, позволяющие формировать такие расписания, предлагается строить с использованием идей и принципов описанного выше метода построения «каркасных» расписаний. В создаваемых методах предусматривается возможность в случае, когда размерность «каркасного» расписания остается слишком большой, выполнять дополнительные итерации. На каждой из таких итераций выполняется новый этап агрегирования.

На каждом этапе агрегирования производят объединение выбранных подразделений с предыдущего этапа и формирование групп комплектующих, которые будут обрабатываться в них. Рекомендуется объединять от двух до 7–10 подразделений. Подразделениям, полученным в результате объединения подразделений с предыдущего этапа, и формируемым группам комплектующих, которые в них будут обрабатываться, присваивается номер текущего этапа. Более подробно формирование групп комплектующих будет рассмотрено в следующем разделе.

После формирования подразделений на новом этапе агрегирования формируются группы комплектующих, которые должны обрабатываться в этих подразделениях. В каждую группу комплектующих нового этапа включа-

ются группы комплектующих предыдущего этапа, которые в соответствии с технологией изготовления должны поступать на обработку в одни и те же подразделения нового этапа.

В связи с этим количество групп комплектующих нового этапа не может превышать количество групп комплектующих предыдущего этапа. Если же в некоторые группы комплектующих нового этапа будет включено хотя бы несколько групп комплектующих предыдущего этапа, то количество групп комплектующих нового этапа будет заметно меньше количества групп комплектующих предыдущего этапа. Кроме того, из-за объединения подразделений, которое производится на каждом этапе агрегирования, их количество на новом этапе будет меньше, чем на предыдущем этапе.

Поэтому размерность «каркасного» расписания по обработке групп комплектующих в подразделениях после выполнения этапа агрегирования может быть только меньше размерности «каркасного» расписания до выполнения этого этапа и во многих случаях значительно меньше. В процессе реализации этапов агрегирования целесообразно в качестве объединенных подразделений выбирать подразделения предприятия следующего уровня, в состав которых входит несколько объединяемых подразделений предыдущего этапа. Например, для таких подразделений, как производственные участки, подразделениями следующего уровня являются производственные цеха, содержащие несколько участков, которые предполагается объединить.

Для более четкого и ясного описания подхода к построению «каркасных» расписаний большой размерности удобно ввести следующие обозначения.

Первоначально сформированные подразделения или группы оборудования будем называть подразделениями или группами оборудования 1-го этапа. Группы комплектующих, обрабатываемых в этих подразделениях или группах оборудования, будем называть группами комплектующих 1-го этапа.

Сформированные на втором этапе агрегирования подразделения будем называть подразделениями 2-го этапа. Группы комплектующих, обрабатываемые в этих подразделениях, будем называть группами комплектующих 2-го этапа. Каждая группа комплектующих 2-го этапа формируется по тому же правилу, что и группа комплектующих 1-го этапа. По этому правилу все комплектующие группы комплектующих 2-го этапа доставляются в одном порядке для обработки в одни и те же подразделения или группы оборудования 2-го этапа.

По аналогии с этим, сформированные на n -м этапе агрегирования подразделения будем называть подразделениями n -го этапа, каждую группу комплектующих, сформированную на n -м этапе, – группой комплектующих n -го этапа. Каждая группа комплектующих n -го этапа формируется по тому же правилу, что и группа комплектующих 1-го и 2-го этапов.

Подразделения на каждом этапе агрегирования, начиная со второго, формируются из подразделений предыдущего этапа. Группы комплектующих на

каждом этапе агрегирования, начиная со второго, также формируются из групп комплектовующих предыдущего этапа.

Принципы создания и использования подобных методов удобно рассмотреть на примере, когда большая размерность строящегося расписания работ на предприятии приводит к непреодолимым затруднениям.

Пусть расписания обработки групп комплектовующих в подразделениях предприятия могут быть построены с помощью существующих методов за приемлемое время. Однако размерность «каркасного» расписания оказывается слишком большой, и для его построения с помощью существующих методов потребуется недопустимо большое время.

После объединения некоторых подразделений и формирования групп комплектовующих, которые будут обрабатываться в них, в процессе выполнения этапа агрегирования можно оценить возможность построения «каркасного» расписания на предприятии. Такая оценка может производиться по количествам подразделений и групп комплектовующих, которые после их формирования будут известны.

Здесь следует отметить, что предварительная оценка возможности построения «каркасного» расписания является весьма важной, и ее целесообразно использовать для принятия решения о построении расписаний. Дело в том, что существующие методы построения расписаний позволяют достаточно быстро и устойчиво строить хорошие расписания работ [1–3], когда количество деталей и единиц оборудования не является значительным. При увеличении количества деталей и единиц оборудования время построения расписания работ будет расти. Однако начиная с некоторых значений этих величин рост времени построения расписаний будет почти экспоненциальным. Для построения расписания при больших значениях таких величин может потребоваться недопустимо большое время.

Для каждого метода построения расписаний значения величин, с которых начнется резкий рост времени построения расписаний, будут разными. Понять и оценить в процессе построения расписания время, которое еще потребуется затратить, очень сложно.

Поэтому использование имеющихся методов без предварительных оценок возможности построения расписания может привести к весьма значительным затратам времени, и очень часто завершить построение требуемого расписания за приемлемое время не удастся.

Продолжим рассмотрение примера, в котором могут быть построены расписания и определены времена обработки всех групп комплектовующих в подразделениях предприятия, где они обрабатываются. Однако чрезвычайно большая размерность «каркасного» расписания не позволяет его построить с помощью существующих методов.

В этом случае предлагается выполнять следующий этап агрегирования, который будет вторым. На этом этапе производится объединение подразделений 1-го этапа и формирование подразделений 2-го этапа.

Затем из групп комплектующих 1-го этапа производится формирование групп комплектующих 2-го этапа. Более подробно процесс формирования групп комплектующих будет описан в следующем разделе.

После формирования групп комплектующих производится проверка возможности построения «каркасного» расписания, поскольку размерность «каркасного» расписания после выполнения каждого этапа агрегирования может только сократиться.

Если проверка не подтвердит возможность построения «каркасного» расписания, то выполняется следующий этап агрегирования. В противном случае строится «каркасное» расписание, и после его построения формируется «развернутое каркасное» расписание. На основе этого расписания, после выполнения операции «склеивания», формируется расписание, которое может использоваться для планирования и управления работой предприятия.

Однако и для построения «каркасного» расписания, и для выполнения следующего этапа агрегирования приходится строить расписания, а также определять времена обработки сформированных групп комплектующих в тех сформированных подразделениях, где они должны обрабатываться.

Для определения времени обработки сформированной группы комплектующих 1-го этапа в подразделении 1-го этапа, в котором эта группа должна обрабатываться, строится ее расписание обработки в этом подразделении.

На этапах агрегирования, начиная со второго, для построения расписания работ групп комплектующих в сформированных подразделениях предлагается сначала построить «каркасные» расписания.

Целесообразность построения «каркасного» расписания обусловлена следующими обстоятельствами.

Во-первых, существующие методы могут оказаться непригодными для построения расписаний обработки комплектующих из сформированных групп в подразделениях нового этапа, состоящих из многих подразделений предыдущего этапа.

С использованием «каркасных» расписаний могут быть построены расписания очень большой размерности.

Во-вторых, для всех групп комплектующих предыдущего этапа уже были построены расписания, а также известны времена их обработки в подразделениях предыдущего этапа, в которых они обрабатываются.

Вряд ли целесообразно многократно строить расписания одних и тех же комплектующих в одних и тех же подразделениях. Для построения «каркасных» расписаний повторного построения уже построенных расписаний не требуется. В тех случаях, когда для части обрабатываемых в подразделении комплектующих уже были построены фрагменты расписаний, такие фрагменты расписаний и времена их выполнения используются при построении «каркасных» расписаний и не строятся заново.

Действительно, на каждом этапе агрегирования, начиная со второго, производится формирование новых подразделений и групп комплектующих этого этапа. Такие подразделения, как уже отмечалось, формируются путем объединения подразделений предыдущего этапа, состав которых известен для каждого сформированного подразделения.

Каждая группа комплектующих нового этапа также состоит из групп комплектующих предыдущего этапа, которые поступают на обработку в одном порядке в одни и те же подразделения данного этапа. Состав этих групп предыдущего этапа также известен для каждой сформированной группы комплектующих этого этапа. Для каждой группы комплектующих предыдущего этапа известны времена и последовательность обработки в подразделениях предыдущего этапа.

Поэтому для определения времени обработки сформированной группы комплектующих нового этапа в сформированном подразделении нового этапа, в котором эта группа обрабатывается, можно строить «каркасное» расписание.

Такое «каркасное» расписание является расписанием обработки групп комплектующих предыдущего этапа, которые включены в состав сформированной группы комплектующих нового этапа, в подразделениях предыдущего этапа, объединенных в таком подразделении нового этапа.

После построения «каркасного» расписания на его основе по описанной выше схеме может быть сформировано «развернутое каркасное» расписание, из которого с помощью операции «склеивания» получается достаточно хорошее расписание работ в соответствующем подразделении. В качестве времени обработки комплектующих в этом подразделении выбирается время завершения обработки последней комплектующей на оборудовании подразделения.

Кроме того, для построения «каркасных» расписаний в сформированных подразделениях могут использоваться существующие методы, поскольку при формировании подразделений рекомендуется объединять весьма ограниченное количество подразделений предыдущего этапа.

Как уже отмечалось, после каждого этапа агрегирования количество групп комплектующих не может возрастать, что с уменьшением количества подразделений приводит к сокращению размерности «каркасного» расписания. Поэтому после выполнения ряда этапов агрегирования количество групп комплектующих и количество сформированных подразделений может настолько сократиться, что появится возможность с использованием имеющихся методов построить «каркасное» расписание практически для любого машиностроительного предприятия.

После построения «каркасного» расписания на его основе без принципиальных затруднений может быть получено достаточно хорошее расписание работ на этом предприятии. Такое расписание может использоваться для управления и планирования работы предприятия, а также позволит опреде-

лять последовательность обработки и времена начала и окончания обработки всех комплектующих на любом оборудовании предприятия.

Если после выполнения этапа агрегирования полученные оценки показали, что построение «каркасного» расписания может вызвать затруднения или построить его за допустимое время не удалось, то выполняется следующий этап агрегирования. Этот этап выполняется по аналогии с описанным выше предыдущим этапом агрегирования.

Рассмотрим теперь другую ситуацию, которая может возникать при построении расписаний обработки групп комплектующих в некоторых подразделениях на первом этапе агрегирования.

В этой ситуации полученные оценки показывают, что построение расписаний работ в этих подразделениях с помощью имеющихся методов может вызвать затруднения. Такая ситуация обычно возникает при неудачном выборе некоторых подразделений со слишком большим количеством оборудования. Кроме того, подобная ситуация может возникать из-за слишком большого количества комплектующих, для которых надо строить расписания обработки, а также из-за одновременного наличия этих факторов.

При возникновении этой ситуации оборудование каждого подразделения, в котором для построения расписания работ требуется слишком большое время, предлагается разделить на подгруппы.

Количество подгрупп, на которые предлагается разделять такие подразделения, желательно выбирать так, чтобы в разные подгруппы разделяемого подразделения не попадало оборудование одного типа. В противном случае возникнут проблемы при формировании подгрупп комплектующих, направляемых в такие подгруппы разделяемого подразделения для обработки.

Кроме того, подгруппы и их количество желательно выбирать так, чтобы в них можно было за приемлемое время с помощью имеющихся методов строить расписания работ направляемых на обработку подгрупп комплектующих.

Для каждой подгруппы разделяемого подразделения формируют подгруппы комплектующих, которые будут обрабатывать на оборудовании этой подгруппы. Такие подгруппы комплектующих формируются из комплектующих, которые были направлены для обработки в разделяемое подразделение. Подгруппы комплектующих формируются по правилу, использованному ранее. Согласно этому правилу, все комплектующие каждой подгруппы в одном порядке должны поступать на обработку в эти подгруппы оборудования и в остальные подразделения предприятия согласно технологии их изготовления. В такие подгруппы должны быть включены все комплектующие, направленные для обработки в разделяемое подразделение.

После этого должно строиться расписание обработки подгрупп комплектующих в тех подгруппах подразделений, в которых они должны обрабатываться по технологии изготовления. Проверку возможности построения таких расписаний в сформированных подгруппах, как и ранее, предлагается про-

изводить с использованием граничных значений используемых методов по описанной выше схеме.

В тех случаях, когда превышений граничных значений нет, целесообразно с использованием имеющихся методов построить такие расписания и из них определить времена завершения обработки.

Если удалось построить все эти расписания, то проверяется возможность построения «каркасного» расписания обработки подгрупп комплекующих в подгруппах разделяемого подразделения.

Если превышений граничных значений нет, то целесообразно построить такое «каркасное» расписание. В случае удачного построения «каркасного» расписания на его основе формируется «развернутое» расписание. После операции «склеивания» из «развернутого» расписания может быть получено согласованное расписание работ в разделяемом подразделении и из него определено время завершения этих работ. Если в каких-либо подгруппах разделяемого подразделения при обработке соответствующих подгрупп комплекующих имеется превышение граничных значений, то такие подгруппы разделяются на более мелкие подгруппы, и для них повторяется описанная выше процедура.

Если при проверке возможности построения с помощью имеющихся методов «каркасного» расписания обработки подгрупп комплекующих в разделяемом подразделении оказалось, что могут возникнуть затруднения, то по описанной выше схеме выполняется этап агрегирования.

5. Принципы и особенности формирования групп комплекующих

Рассмотрим кратко основные принципы и особенности формирования групп комплекующих.

Формирование групп комплекующих рассмотрим сначала на группах комплекующих 1-го этапа. Эти комплекующие при формировании групп комплекующих предварительно распределяют по уровням и нумеруют. Каждый уровень соответствует количеству подразделений, в которых изготавливаются комплекующие, распределенные на этот уровень. На первый уровень попадают комплекующие, которые обрабатываются в одном подразделении. На последний k_1 -й уровень попадают комплекующие, которые обрабатываются в наибольшем количестве подразделений предприятия. С комплекующих последнего k_1 -го уровня начинается их нумерация, которая последовательно производится по уровням комплекующих и заканчивается на комплекующих низшего уровня.

Группы комплекующих обычно начинают формировать с выбора базовой комплекующей для первой группы. В качестве первой базовой комплекующей для первой формируемой группы обычно выбирается комплекующая последнего k_1 -го уровня, которой при нумерации присвоен первый номер. Затем в качестве проверяемой выбирается следующая комплекующая последнего k_1 -го уровня. После этого начинается сравнение последовательности

подразделений предприятия, в которых обрабатываются проверяемая комплектующая и базовая комплектующая формируемой группы.

Если последовательности доставки на обработку в подразделения предприятия базовой и проверяемой комплектующих совпадают, то проверяемая комплектующая может быть включена в группу, определяемую этой базовой комплектующей.

Если эти последовательности различаются, то сравниваются между собой последовательности доставки на обработку в подразделения базовой и следующей по номеру проверяемой комплектующих. Ранее проверяемая комплектующая в этом случае будет базовой комплектующей для следующей группы комплектующих.

Затем производится сравнение первой базовой комплектующей и следующей по номеру проверяемой комплектующей.

Если при сравнении последовательности доставки на обработку в подразделения этих комплектующих совпадают, то проверяемая комплектующая включается в группу, определяемую этой базовой комплектующей.

В противном случае производится сравнение последовательности доставки на обработку в подразделения этой проверяемой и ранее полученной другой базовой комплектующих.

Если эти последовательности совпадут, то проверяемая комплектующая включается в группу комплектующих, определяемых этой базовой комплектующей, и выбирается следующая по номеру проверяемая комплектующая.

Последовательность доставки на обработку в подразделения каждой проверяемой комплектующей поочередно сравнивается с последовательностью доставки на обработку в подразделения ранее полученных базовых комплектующих.

Если последовательности доставки на обработку в подразделения проверяемой комплектующей совпадут с последовательностью доставки какой-либо из ранее полученных базовых комплектующих, то проверяемая комплектующая включается в группу, определяемую этой базовой комплектующей. В противном случае проверяемая комплектующая будет базовой комплектующей для следующей группы.

Такой процесс продолжается до завершения распределения комплектующих k_1 -го уровня по формируемым группам.

После завершения распределения комплектующих k_1 -го уровня по формируемым группам почти по аналогии производится распределение по созданным и новым группам комплектующих $(k_1 - 1)$ -го, $(k_1 - 2)$ -го, ..., 2-го и 1-го уровней.

Однако последовательности доставки на обработку в подразделения предприятия комплектующих меньших уровней не могут совпадать с аналогичными последовательностями базовых комплектующих, поскольку уровень последних выше.

Поэтому предлагается рассматривать следующие возможности включения проверяемой комплектующей в формируемую группу комплектующих.

Одна из возможностей включения проверяемой комплектующей заключается в том, что последовательность подразделений ее обработки является фрагментом в подобной последовательности базовой комплектующей.

Под фрагментом в последовательности подразделений базовой комплектующей здесь понимается часть этой последовательности от подразделения, с которого начинается фрагмент, и до подразделения, его завершающего, без пропуска подразделений последовательности.

Другая возможность включения заключается в том, что последовательность доставки на обработку в подразделения предприятия проверяемой комплектующей является подпоследовательностью подобной последовательности базовой комплектующей. В этом случае между подразделениями, в которых обрабатываются проверяемая и базовая комплектующие, могут быть подразделения, в которых обрабатывается базовая, но не обрабатывается проверяемая комплектующая.

При использовании первого принципа формирования групп комплектующих создается большее количество таких групп, что может затруднить построение «каркасного» расписания обработки комплектующих на предприятиях. В ряде случаев такие затруднения могут оказаться весьма значительными.

При использовании второго принципа формирования групп комплектующих удастся получать меньшее количество групп комплектующих, что упрощает построение «каркасного» расписания обработки комплектующих на предприятиях.

Весьма полезным бывает подход, в котором сначала используется первый принцип формирования групп комплектующих. Затем, если будет получено очень большое количество сформированных групп комплектующих, объединить часть групп, чтобы сократить их количество до приемлемой величины. Объединение групп целесообразно производить с использованием базовых комплектующих этих групп.

При формировании групп комплектующих целесообразно принимать во внимание то, что многие комплектующие, особенно обрабатываемые в небольшом количестве подразделений, могут быть включены в различные группы. Если такие комплектующие включать в группы, в которых их требуется обрабатывать на оборудовании подразделений, наиболее загруженном обработкой уже включенных в эти группы комплектующих, то время обработки групп после их включения может заметно увеличиться.

Рассмотрим особенности формирования групп комплектующих на втором и последующих этапах агрегирования.

Группы комплектующих нового этапа агрегирования формируются после формирования подразделений, в которых они будут обрабатываться, и формируются из групп комплектующих предыдущего этапа.

Однако на новом этапе агрегирования из-за объединения ряда подразделений уровень базовых комплектующих предыдущего этапа и определяемых ими групп комплектующих может заметно измениться.

Такое изменение может произойти, например, в случае, когда базовая комплектующая одной группы обрабатывалась в подразделениях некоторого этапа, которые после агрегирования вошли в состав разных подразделений следующего этапа. В то время как базовая комплектующая другой группы обрабатывалась в большем количестве подразделений того же этапа, которые вошли группами в существенно меньшее количество подразделений или вообще в одно подразделение следующего этапа.

Поэтому эти комплектующие для формирования групп комплектующих нового этапа должны быть распределены по новым уровням с учетом состава и количества подразделений на данном этапе, а также пронумерованы.

В этом случае, как и ранее, каждый уровень соответствует количеству подразделений данного этапа, в которых изготавливаются базовые комплектующие, распределенные на этот уровень. На первый уровень попадают группы комплектующих, которые обрабатывают в одном подразделении этого этапа. На последний k_r -й уровень, где r указывает этап агрегирования, попадают комплектующие, которые обрабатывают в наибольшем количестве подразделений предприятия, сформированных на этом этапе агрегирования.

Нумерация базовых комплектующих начинается с комплектующих последнего k_r -го уровня, последовательно производится по меньшим уровням комплектующих и заканчивается на комплектующих низшего уровня. После этого в соответствии с описанной выше схемой производится формирование групп комплектующих нового этапа.

6. Некоторые особенности и свойства «каркасных» расписаний на предприятиях машиностроения

Отметим и кратко обсудим назначение и основные свойства «каркасных» расписаний по обработке групп комплектующих в подразделениях предприятий и на предприятиях с дискретным характером производства.

«Каркасные» расписания целесообразно строить на предприятиях и в больших подразделениях предприятий в тех случаях, когда для них требуется построить расписания работ, но существующие методы оказываются непригодными для этого. Такая ситуация возникает из-за значительной размерности расписаний, которые требуется построить.

В подобных случаях с помощью предложенного метода, в котором используются принципы последовательного агрегирования, удастся строить «каркасные» расписания. Возможность построения «каркасных» расписаний практически для любых предприятий с дискретным характером производства обусловлена тем, что построение таких расписаний производится по этапам.

На первом этапе выбираются или формируются подразделения первого этапа. Эти подразделения желательно выбирать или формировать так, чтобы с помощью имеющихся методов в них могло быть построено расписание работ. Проверка возможности построения расписания работ в этих подразделениях может быть проведена по схеме, описанной в разделе 4.

Если с помощью имеющихся методов во всех сформированных подразделениях удастся построить расписание работ, то по той же схеме производится проверка возможности построения «каркасного» расписания.

Если расписание в подразделении может быть построено, то оно строится. В противном случае оборудование каждого подразделения, в котором проведенная проверка выявила затруднения при построении расписания, разделяют на подгруппы. Затем по описанной в разделе 4 схеме в этом подразделении строится «каркасное» расписание, после ряда преобразований которого получается хорошее расписание работ в этом подразделении.

После построения расписаний работ во всех сформированных подразделениях производится проверка возможности построения «каркасного» расписания на предприятии.

Если с помощью имеющихся методов «каркасное» расписание может быть построено, то оно строится. В противном случае по описанной в разделе 4 схеме выполняется следующий этап агрегирования, в результате выполнения которого размерность «каркасного» расписания снижается. После этого производится проверка возможности построения «каркасного» расписания, и весь описанный выше процесс повторяется до тех пор, пока размерность такого расписания не окажется подходящей для имеющихся методов, и оно будет построено.

Таким образом, «каркасное» расписание может быть построено практически для любых предприятий с дискретным характером производства. На основе построенного «каркасного» расписания без каких-либо принципиальных затруднений формируется «развернутое каркасное» или «распакованное каркасное» расписание работ. Из этого расписания после операции «склеивания» получается хорошее расписание работ также для любых предприятий с дискретным характером производства.

«Каркасное» расписание», построенное для предприятия, является согласованным расписанием, в котором обеспечено выполнение технологии изготовления каждой обрабатываемой партии комплектующих.

Действительно, по правилам формирования «каркасных» расписаний комплектующие каждой сформированной группы доставляются на обработку в подразделения согласно маршруту обработки группы. Поэтому все обрабатываемые комплектующие в составе сформированных групп доставляются на обработку в те подразделения, в которых их должны обрабатывать по технологии изготовления.

В каждом подразделении, в которое доставляется группа комплектующих, строится расписание ее обработки. Расписание в подразделении строится в

соответствии с технологическим маршрутом обработки каждой комплектующей этой группы. Поэтому в построенном «каркасном» расписании будет выполняться технология обработки каждой изготавливаемой партии комплектующих.

Построенное «каркасное» расписание позволяет получать очень неплохие оценки «сверху» на время завершения работ на предприятии, что весьма полезно для планирования деятельности предприятий.

«Каркасные» расписания, как и обычные расписания обработки деталей в производственных системах и участках, можно представлять с помощью диаграмм Ганта.

Для построения «каркасных» расписаний работ необходимо определять времена обработки групп комплектующих в подразделениях предприятий, где эти группы обрабатываются. Эти времена определяются из расписаний обработки групп комплектующих в соответствующих подразделениях предприятий. Построение таких расписаний можно производить независимо друг от друга и в любом порядке. Поэтому имеется возможность распараллеливать их построение, что позволяет заметно сократить время определения длительности обработки групп комплектующих в подразделениях предприятий. Это приведет к сокращению времени построения «каркасного» расписания.

7. Заключение

В работе предлагается метод, в котором используются принципы последовательного агрегирования, позволяющие строить расписания работ очень большой размерности для предприятий машиностроения. В предлагаемом методе достаточно просто может быть организовано распараллеливание вычислений. Это позволит значительно сократить время построения расписаний.

Построение расписаний работ для предприятий, имеющих в своем составе большое количество оборудования и обрабатывающих значительное количество комплектующих, позволит:

- использовать возможности методов теории расписаний для повышения эффективности работы и сокращения сроков изготовления поступающих заказов;
- строить согласованные планы и расписания работ, в которых определены время начала и завершения всех операций на всем оборудовании подразделений предприятия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinedo M.L.* Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems. Sixth Edition. Leipzig: Springer, 2022.
2. *Bruker P.* Scheduling Algorithms. Leipzig: Springer, 2007. 371 p.
3. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019.

4. *Хоботов Е.Н.* О некоторых моделях и методах решения задач планирования в дискретных производственных системах // *АиТ.* 2007. № 12. С. 85–100.
5. *Хоботов Е.Н.* Модели выбора оборудования для модернизации предприятий с конвейерной сборкой изделий // *АиТ.* 2024. № 10. С. 40–57.
6. *Хоботов Е.Н.* Задачи и методы построения расписаний работ для предприятий со стапельной сборкой выпускаемых изделий // *АиТ.* 2023. № 12. С. 80–95.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 08.09.2025

Принята к публикации 20.11.2025

СОДЕРЖАНИЕ

Тематический Выпуск

Васильев С.Н. Вступительное слово к специальному выпуску по материалам 17-й международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем»	3
Богомолов А.С., Дранко О.И., Кушников В.А., Резчиков А.Ф., Степановская И.А. Математическая модель увеличения производительности труда научного коллектива	7
Ядыкин И.Б. Энергетические метрики устойчивости линейных непрерывных систем	30
Вольных М.М., Кушнер А.Г. Задача Коши для уравнения Бакли–Леверетта двухфазной фильтрации с переменной пористостью	59
Кочетков С.А., Уткин В.А. Робастный подход к динамической компенсации возмущений	68
Пашенко А.Ф., Дуванов Е.С. Гибридные регуляторы в задачах управления реальными системами	86
Хоботов Е.Н. Методы построения и особенности расписаний работ для предприятий машиностроения	104

C O N T E N T S

Topical issue

Vassilyev S.N.	Introductory Remarks to the Special Issue Devoted to MLSD 2024...	3
Bogomolov A.S., Dranko O.I., Kushnikov V.A., Rezchikov A.F., Stepanovskaya I.A.	A Mathematical Model for Increasing the Productivity of a Scientific Team	7
Yadykin I.B.	Energy Metrics of Linear Continuous Systems Stability	30
Volnykh M.M., Kushner A.G.	Cauchy Problem for the Buckley–Leverett Equation of Two-Phase Filtration with Variable Porosity	59
Kochetkov S.A., Utkin V.A.	Robust Approach to Dynamic Compensation of Disturbant	68
Pashchenko A.F., Duvanov E.S.	Hybrid Controllers in Control Problems of Real Objects	86
Khobotov E.N.	Methods of Construction and Features of Work Schedules for Mechanical Engineering Enterprises	104