



Российская Академия Наук

ISSN 0005-2310 (Print)

ISSN 2413-9777 (Online)

**А
Т
АВТОМАТИКА
И ДАЛЕКОМЕРИКА
AUTOMATION AND REMOTE CONTROL**

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

6

И Ю Н Ъ

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилиякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2026 г. А.В. ЮРЧЕНКОВ, канд. физ.-мат. наук
(alexander.yurchenkov@yandex.ru),

Р.Р. РЯХИМОВ (ryakhimov.rinat@gmail.com)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНИВАТЕЛЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМИЗАЦИИ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ¹

Рассмотрена стационарная система с набором неидеальных измерений, полезная составляющая которых в отдельные моменты времени может быть недоступна. Вводятся виртуальные объекты, дублирующие состояние исходного объекта наблюдения, и для каждого из таких объектов строится оценка выхода. С помощью векторизации выводится расширенная модель системы в виде линейной дискретной стационарной системы с мультипликативными шумами. Внешнее возмущение выбрано из класса последовательностей случайных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии. Для системы, описывающей динамику ошибок оценивания, получены условия ограниченности анизотропийной нормы, при выполнении которых выбранный вид оценщика существует. Указана обратимая линеаризующая замена переменных, позволяющая свести задачу поиска матриц оценщика к проверке разрешимости специальной системы линейных матричных неравенств с выпуклым ограничением.

Ключевые слова: анизотропийная теория, системы с мультипликативными шумами, сеть датчиков с отказами, выпуклая оптимизация.

DOI: 10.7868/S2413977726060016

1. Введение

Задачи подавления внешних возмущений, рассматриваемые в теории управления, были сформулированы еще в первой половине прошлого века [1] и постепенно переходили от детерминированных [2] и ограниченных возмущений [3] к стохастическим [4, 5], интерес к которым сохраняется до сих пор [6]. Стоит отметить, что наиболее часто описываемыми классами возмущений являются гауссовские возмущения [7] или квадратично интегрируемые (суммируемые в случае выбора дискретного времени) [8]. Связанные с указанными классами возмущений задачи подавления возмущения с \mathcal{H}_2 - или \mathcal{H}_∞ -оптимальным критерием имеют как преимущества, так и недостатки. С одной стороны, при известных стохастических характеристиках возмущения \mathcal{H}_2 -оптимальные оценщики и регуляторы хорошо себя зарекомендовали, однако решения таких задач не обладают свойствами робастности, присущими \mathcal{H}_∞ -оптимальной теории управления. С другой стороны,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-21-20055).

\mathcal{H}_∞ -оптимальная теория требует большой ресурс для решения задач синтеза управления и оценивания, поскольку ориентирована на парирование так называемого «наихудшего случая», который зачастую не может быть реализован.

Анизотропийная теория управления предлагает посмотреть на задачу подавления влияния внешнего возмущения как на стохастическую модификацию \mathcal{H}_∞ -оптимальной теории, поскольку внешнее возмущение уже выбирается из класса случайных, а не квадратично суммируемых [9–11], что расширяет границы применения анизотропийной теории по сравнению с \mathcal{H}_∞ -теорией, поскольку для детерминированных и ограниченных по норме возмущений средняя анизотропия будет стремиться к бесконечности, а предельное значение анизотропийной нормы стремиться к \mathcal{H}_∞ -норме. При случайных внешних возмущениях анизотропийная теория будет давать промежуточные результаты между \mathcal{H}_∞ - и \mathcal{H}_2 -теориями с точки зрения значения функционала качества, в зависимости от значения информационного критерия. Результаты, полученные за тридцать лет существования анизотропийной теории, охватывают задачи анализа робастной устойчивости стационарных и нестационарных систем, синтеза управления и фильтрации [11–13]. Позднее появились работы, посвященные системам, состояние которых не может быть описано детерминированными уравнениями [14–16]. В частности, системы с мультипликативными шумами являются удачной формой записи динамики для систем, описывающих механические, биологические, экологические, финансовые и гибридные объекты [17]. В рамках текущей работы будет рассмотрена задача построения оценки выхода для системы с неидеальными измерениями. Под неидеальным измерением понимается такой измеряемый выход системы, который в произвольный момент времени может не содержать полезной информации об объекте наблюдения, а быть полностью случайным. Оказывается, что система с одним или сразу несколькими (возможно, дублирующими друг друга) неидеальными измеряемыми выходами может описываться разностными уравнениями с мультипликативными шумами, для которых в анизотропийной теории уже получены некоторые результаты для нестационарных систем.

Анизотропийная теория позволяет сочетать в себе особенности как \mathcal{H}_2 -, так и \mathcal{H}_∞ -оптимальных теорий управления, а в предельных случаях даже обеспечивать идентичные результаты, являясь с этой точки зрения обобщающей теорией. Поэтому при построении оценки выхода или формировании управления имеет смысл выбирать анизотропийный подход в том случае, когда стохастические характеристики внешнего возмущения не заданы. Если же матожидание и ковариационная матрица внешнего возмущения известны, то стоит остановиться на \mathcal{H}_2 -оптимальных законах синтеза оценок состояния и управления, поскольку применение более сложного с точки зрения вычислений анизотропийного подхода не будет гарантировать более высокого качества. По сравнению с \mathcal{H}_∞ -оптимальной теорией анизотропийная теория

обладает меньшим консерватизмом, поскольку не рассчитана на так называемый «наихудший случай» возмущения.

Статья устроена следующим образом: раздел 2 содержит предварительные сведения – необходимый минимум понятий из анизотропийной теории, раздел 3 – постановку задачи, в разделе 4 выводится основной результат, в разделе 5 приведены результаты моделирования, в разделе 6 – краткое заключение.

2. Предварительные сведения

Перечислим основные определения из анизотропийной теории, касающиеся непосредственно рассматриваемой задачи. Более подробный материал можно найти в [18, 19].

2.1. Анизотропия случайного вектора

Определение 1 [19]. Анизотропией случайного вектора w со значениями из \mathbb{R}^m называют величину, равную

$$(1) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f || p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \mathbf{E} [|W|^2] \right) - h(W),$$

где f – плотность распределения вероятностей вектора w относительно лебеговой меры в \mathbb{R}^m , $h(w) = -\mathbf{E} [\ln f(w)] = -\int_{\mathbb{R}^m} f(u) \ln f(u) du$ – дифференциальная энтропия, λ – положительный параметр, определяющий плотность

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp \left(-\frac{|x|^2}{2\lambda} \right), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

изотропного гауссовского распределения в \mathbb{R}^m с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m , где I_m – единичная матрица порядка m , $\mathbf{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

Это определение связано с относительной энтропией и характеризует минимальную меру отличия случайного вектора от множества центрированных гауссовских векторов со скалярной ковариационной матрицей.

2.2. Средняя анизотропия последовательности случайных векторов

Определение 2 [9]. Для стационарной эргодической последовательности $W = \{w_k\}$ гауссовских векторов вводится понятие средней анизотропии, равное величине

$$(2) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{0:N-1} = [w_0^T, \dots, w_{N-1}^T]^T$ – расширенный вектор.

Средняя анизотропия используется для описания свойств внешнего возмущения в рамках неопределенности в стохастических параметрах при анализе робастной устойчивости линейных дискретных стационарных систем,

поскольку расширенный вектор любого распределения, отличающегося от эталонного – центрированного гауссовского со скалярной ковариационной матрицей, будет иметь растущую анизотропию при увеличении временного горизонта.

2.3. Анизотропийная норма стационарной системы

Рассмотрим линейную систему F с входом $W \in \mathbb{L}_2^m$ и выходом $Z \in \mathbb{L}_2^p$, где \mathbb{L}_2^* обозначает пространство Лебега векторов с конечной нормой. Последовательность W сгенерирована при помощи формирующего фильтра G из стандартного гауссовского белого шума V :

$$w_j = \sum_{k=0}^{\infty} g_k v_{j-k}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $g_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Обозначим через $G(z)$ передаточную функцию формирующего фильтра:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k, \quad |z| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть множество формирующих фильтров, генерирующих последовательности случайных векторов с ограниченной средней анизотропией, обозначается следующим образом [20]:

$$\mathcal{G}_a = \{G \in \mathcal{H}_2^{m \times m} : W = GV, \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a\},$$

где $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – стандартный гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей.

Определение 3 [10]. *Анизотропийной нормой $\|F\|_a$ линейной системы F называют величину*

$$(3) \quad \|F\|_a = \sup_G \left\{ \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2} : G \in \mathcal{G}_a \right\},$$

где

$$\|G\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(g_k g_k^T) \right)^{1/2}$$

– \mathcal{H}_2 -норма передаточной функции $G(z)$.

3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему с набором неидеальных измерителей

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_w w_k, \\ z_k &= C_z x_k + D_z w_k, \\ y_{j,k} &= \lambda_{j,k} C_j x_k + D_j w_k, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{m_u}$, $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$, $z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$, $y_{j,k} \in \mathbb{R}^{p_y}$, $\lambda_{j,k}$ – случайные величины, имеющие распределение Бернулли с заданными параметрами

$$P(\lambda_{j,k} = 1) = p_j, \quad j = \overline{1, n},$$

характеризующие вероятность содержания в текущем измерении $y_{j,k}$ информации о векторе состояния. В случае $\lambda_{j,k} = 1$ в измеряемом выходе содержатся полезные данные, в противном случае $\lambda_{j,k} = 0$ – только вектор возмущения $D_j w_k$. Матрицы A , B_w , C_z , D_z , C_j , D_j , $j = \overline{1, n}$, системы (4) известны и имеют согласованные с векторами x_k , w_k , z_k , $y_{j,k}$ размерности. Внешнее возмущение представляет собой стационарную гауссовскую последовательность случайных векторов $W = \{w_k\}_{k \geq 0}$, для которой известно ограничение на среднюю анизотропию всей последовательности $\mathbf{A}(W) \leq a$, $a \geq 0$. При этом считается, что все элементы последовательности W и случайные величины $\lambda_{j,k}$ независимы между собой.

Задача 1. Для выбранной модели оценителя

$$(5) \quad \begin{aligned} \hat{x}_{j,k+1} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} (A \hat{x}_{i,k} + H_{ji} (y_{i,k} - \hat{y}_{i,k})), \\ \hat{z}_{j,k} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} C_z \hat{x}_{i,k}, \\ \hat{y}_{j,k} &= p_j C_j \hat{x}_{j,k}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{a}_{ji} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица смежности, характеризующая обмен информации между измерителями, требуется найти такие значения параметров H_{ji} , для которых анизотропийная норма системы F от внешнего возмущения к вектору ошибок оценивания была бы ограничена минимальным значением γ :

$$\|F\|_a \leq \gamma.$$

Здесь стоит оговориться, что матрица смежности \mathbf{a} не обязательно является симметричной. Эта матрица описывает ориентированный граф, вершинами которого служат измерители (датчики/сенсоры или любые доступные измерения), а направленным ребрам соответствует обмен данными между вершинами, связанными этими ребрами. В результате этого оценку можно строить не на основе каждого отдельного измерителя, а собирать консенсусный вариант оценки, где вклад каждого измерителя учтен с помощью поправочного коэффициента матрицы \mathbf{a} . Таким образом, коэффициенты матрицы смежности имеют простой физический смысл, заключающийся в уровне «доверия» информации, поступающей с других измерителей к тому, который формирует оценку. Естественным требованием является поэлементная неотрицательность и равенство единице суммы элементов каждой строки:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} = 1, \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

4. Основной результат

В этом разделе приводится решение задачи 1. Идея заключается в преобразовании модели объекта к виду системы с мультипликативными шумами и последующей проверке достаточного условия ограниченности анизотропийной нормы такой системы в терминах решения задачи выпуклой оптимизации.

4.1. Построение моделей в терминах ошибок оценивания

На первом этапе определим виртуальные модели следующим образом: для каждого существующего оцениваемого выхода $y_{j,k}$ введем состояние $x_{j,k} \in \mathbb{R}^{n_x}$, дублирующее состояние x_k объекта (4):

$$(6) \quad \begin{aligned} x_{j,k+1} &= Ax_{j,k} + B_w w_k, \\ z_{j,k} &= C_z x_{j,k} + D_z w_k, \\ y_{j,k} &= \lambda_{j,k} C_j x_{j,k} + D_j w_k, \end{aligned}$$

где $j = \overline{1, n}$. В моделях вида (6) каждый объект имеет только один измеряемый выход. Для состояний $x_{j,k}$ и выходов $z_{j,k}$ введем векторы ошибок

$$\tilde{x}_{j,k} = x_{j,k} - \hat{x}_{j,k}, \quad \tilde{z}_{j,k} = z_{j,k} - \hat{z}_{j,k},$$

которые будут иметь следующие уравнения динамики:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j,k+1} &= Ax_{j,k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} Ax_{i,k} + \left(B_w - \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} H_{ji} D_i \right) w_k - \\ &- \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} H_{ji} (\lambda_{j,k} - p_i) C_i x_{i,k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} (A - p_i H_{ji} C_i) \tilde{x}_{i,k}, \\ \tilde{z}_{j,k} &= C_z \left(x_{j,k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} x_{i,k} \right) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} C_z \tilde{x}_{i,k} + D_z w_k. \end{aligned}$$

4.2. Преобразование модели к виду системы с мультипликативными шумами

Составим расширенные векторы состояния, ошибок состояния и оценки из всех векторов $x_{j,k}, \tilde{x}_{j,k}, \tilde{z}_{j,k}, j = \overline{1, n}$:

$$\bar{x}_k = (x_{1,k}^T, \dots, x_{n,k}^T)^T, \quad \tilde{x}_k = (\tilde{x}_{1,k}^T, \dots, \tilde{x}_{n,k}^T)^T, \quad \tilde{z}_k = (\tilde{z}_{1,k}^T, \dots, \tilde{z}_{n,k}^T)^T.$$

Определим комбинированное состояние из векторов \bar{x}_k и \tilde{x}_k :

$$\zeta_k = (\bar{x}_k^T, \tilde{x}_k^T)^T.$$

Теперь возможно выписать уравнение динамики в терминах ошибок в зависимости от внешнего возмущения:

$$(7) \quad \begin{aligned} \zeta_{k+1} &= \left(\mathcal{A}_0 + \sum_{i=1}^n \xi_{i,k} \mathcal{A}_i \right) \zeta_k + \mathcal{B} w_k, \\ \tilde{z}_k &= \mathcal{M} \zeta_k + \mathcal{N} w_k, \end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \begin{bmatrix} \overline{A} & 0_{nn_x \times nn_x} \\ \overline{A} - \overline{A}^\alpha & \overline{A}^\alpha - \overline{H}^\alpha \overline{C}^p \end{bmatrix}, & \mathcal{A}_i &= \begin{bmatrix} 0_{nn_x \times nn_x} & 0_{nn_x \times nn_x} \\ \overline{H}^\alpha \overline{C}_i & 0_{nn_x \times nn_x} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} \overline{B} \\ \overline{B} - \overline{H}^\alpha \overline{D} \end{bmatrix}, & \mathcal{M} &= [\overline{M} - \overline{M}^\alpha \quad \overline{M}^\alpha], & \mathcal{N} &= \overline{N}, \end{aligned}$$

причем случайные величины $\xi_{i,k} = \lambda_{i,k} - p_i$, $i = \overline{1, n}$, уже центрированы, а матрицы, входящие в выражения (8), имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= I_n \otimes A, & \overline{A}^\alpha &= \mathbf{a} \otimes A, \\ \overline{B} &= \text{col}(n) \otimes B, & \overline{H}^\alpha &= \text{block}_{j,i=\overline{1,n}}(\mathbf{a}_{ji} H_{ji}), \\ \overline{C}^p &= \text{diag}_{i=\overline{1,n}}(p_i C_i), & \overline{C}_j &= \text{diag}_{i=\overline{1,n}}(\delta_{ij} C_i), \\ \overline{D} &= \text{col}_{j=\overline{1,n}}(D_j), & \overline{M} &= I_n \otimes C_z, \\ \overline{M}^\alpha &= \mathbf{a} \otimes C_z, & \overline{N} &= \text{col}(n) \otimes D_z, \end{aligned}$$

здесь и далее выражение $\text{col}(n)$ обозначает вектор-столбец длины n , состоящий из единиц; $\text{col}_{j=\overline{1,n}}(X_j)$ – матрица, полученная из матриц X_j , $j = \overline{1, n}$, записанных в столбец; матрица $\text{block}_{j,i=\overline{1,n}}(X_{ji})$ – блочная и состоит из соответствующих блоков; $\text{diag}_{i=\overline{1,n}}(X_i)$ является диагональной матрицей с блоками в виде матриц X_i , $i = \overline{1, n}$, на главной диагонали, все внедиагональные блоки – нулевые; \otimes – кронекерово произведение.

4.3. Условие ограниченности анизотропийной нормы

Теорема 1 [15]. Для системы F вида (7) при известном ограничении уровня a на среднюю анизотропию последовательности внешнего возмущения $\{w_k\}$ и выполнении условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho \left(\left(E \left[\mathcal{A}^k \right] \right)^{\frac{1}{k}} \right) < 1,$$

где $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \sum_{i=1}^n \xi_{i,k} \mathcal{A}_i$, анизотропийная норма будет ограничена числом γ , если для системы неравенств

$$(9) \quad R \succ \sum_{i=0}^n \sigma_i^2 \mathcal{A}_i^\top R \mathcal{A}_i + q \mathcal{M}^\top \mathcal{M} + L^\top S^{-1} L,$$

$$(10) \quad \begin{aligned} S &= (I_{m_w} - q \mathcal{N}^\top \mathcal{N} - \mathcal{B}^\top R \mathcal{B})^{-1}, \\ L &= S(\mathcal{B}^\top R \mathcal{A} + q \mathcal{N}^\top \mathcal{M}) \end{aligned}$$

с выпуклым ограничением

$$(11) \quad -\frac{1}{2} \ln \det \left((1 - q\gamma^2)S \right) \geq a$$

существует решение относительно матриц R , S и скалярного параметра $q \in \left[0, \|F\|_\infty^{-2} \right)$, $\sigma_i = p_i(1 - p_i)$; выражение $X \succ 0$ следует понимать в смысле положительной определенности матрицы X .

Теорема 1 содержит достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы в виде неравенств для системы с мультипликативными шумами (7). Однако неравенство (9) является нелинейным вследствие зависимости матриц \mathcal{B} , \mathcal{A}_i , $i = \overline{1, n}$, от матриц оценщика H_{ji} , $j = \overline{1, n}$, и их умножения на матрицу R решения этого неравенства. Для того чтобы уйти от этой проблемы и остаться в рамках ограничений в виде линейных матричных неравенств, сформулируем решение поставленной задачи как условия разрешимости системы неравенств специального вида.

Теорема 2. Пусть для системы (4) известно ограничение a на уровень средней анизотропии возмущающей последовательности $W = \{w_k\}_{k \geq 0}$. Оценщик вида (5) будет гарантировать ограничение сверху числом γ для анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания, если следующая система неравенств

$$(12) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{R} - \mathcal{M}^T \mathcal{M} & * & * & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{N}^T \mathcal{M} & \eta I_{m_w} - \mathcal{N}^T \mathcal{N} & * & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{R} \mathcal{A}_{00} + X \mathcal{A}_{01} & -\mathcal{R} \mathcal{B}_{00} - X \mathcal{B}_{01} & \mathcal{R} & * & * & \cdots & * \\ \sigma_1 X \mathcal{A}_{11} & 0 & 0 & \mathcal{R} & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_n X \mathcal{A}_{1n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{R} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi - \mathcal{N}^T \mathcal{N} & * \\ \mathcal{R} \mathcal{B}_{00} + X \mathcal{B}_{01} & \mathcal{R} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(14) \quad \ln \det \Psi \geq 2a + m_w \ln(\eta - \gamma^2)$$

имеет решение относительно матриц $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T \succ 0$, $X \in \mathcal{R}^{4n_x \times 4n_p}$ и скалярного параметра $\eta > 0$, где $\sigma_i = p_i(1 - p_i)$,

$$\mathcal{A}_{00} = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 \\ \overline{A} - \overline{A}^a & \overline{A}^a \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\overline{C}^p \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\overline{C}_j & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\mathcal{B}_{00} = \begin{bmatrix} \overline{B} \\ \overline{B} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\overline{N} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Применим лемму Шура [21] к неравенству (9), это приводит к появлению неравенства следующего вида:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R} - \mathcal{M}^T \mathcal{M} & * & * & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{N}^T \mathcal{M} & \eta I_{m_w} - \mathcal{N}^T \mathcal{N} & * & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{R} \mathcal{A}_0 & -\mathcal{R} \mathcal{B} & \mathcal{R} & * & * & \cdots & * \\ \sigma_1 \mathcal{R} \mathcal{A}_1 & 0 & 0 & \mathcal{R} & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_n \mathcal{R} \mathcal{A}_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{R} \end{bmatrix} \succ 0,$$

где учтена замена $\mathcal{R} = q^{-1}R$. Как можно видеть, последнее неравенство пока является нелинейным. Для приведения его к линейному виду введем следующую замену переменных:

$$X = \mathcal{R}U = \mathcal{R} \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & \overline{H}^a \end{bmatrix},$$

где Y – некоторая матрица (заранее стоит оговориться, что эта матрица не влияет на решение поставленной задачи, а именно на значения матриц оценителя H_{ji} , $j, i = \overline{1, n}$). Учитывая последнюю замену матричных переменных, получаем неравенство (12).

Для вывода неравенства (10) определим дополнительную положительно определенную матрицу Ψ , связанную с матрицей S следующим образом:

$$0 \prec \frac{1}{\eta} \Psi \prec S^{-1},$$

где $\eta^{-1} = q$. Учитывая положительную определенность матрицы Ψ , замену переменных $X = \mathcal{R}U$ и применяя лемму Шура, получаем неравенство (13). Выпуклое ограничение (14) следует из неравенства (11) после соответствующих замен переменных. Теорема доказана.

Здесь стоит упомянуть, что среди всего множества матриц решений \mathcal{R} системы (12)–(14) будем выбирать только блочно-диагональные, поскольку это будет необходимо для реализации численного решения поставленной задачи стандартными средствами.

4.4. Вычисление параметров матрицы оценителя

В случае успешного поиска решения матричных неравенств (12)–(14) набор матриц оценителя H_{ji} , $j, i = \overline{1, n}$, можно вычислить согласно обратной замене

$$(15) \quad \overline{H}^a = [0_{2nn_x \times 2nn_x} \ I_{2nn_x}] \mathcal{R}^{-1} X \begin{bmatrix} 0_{2np_y \times 2np_y} \\ I_{2np_y} \end{bmatrix}.$$

Кроме того, можно поставить задачу оптимизации по параметру γ^2 , что будет обеспечивать поиск наименьшей верхней границы анизотропийной нормы для системы в ошибках оценивания:

$$(16) \quad \gamma^2 \xrightarrow{(12)-(14), \mathcal{R}, \Psi, \eta, \gamma^2} \min.$$

Вычисление матриц H_{ji} , $j, i = \overline{1, n}$, напрямую производить не обязательно, поскольку пространственная реализация оценщика (5) зависит от блоков матрицы (15). Решение выпуклой задачи оптимизации (16) будет соответствовать минимальному ограничению на анизотропийную норму системы в ошибках оценивания.

5. Моделирование

В качестве примера рассмотрим модель, состоящую из четырехвинтового летального объекта, фиксированного на гироскопическом стенде. Объект может свободно вращаться вокруг трех осей. Необходимо оценить угол его крена с помощью имеющихся на объекте гироскопа и камеры, расположенной фронтально перед объектом. Считаем, что объект замкнут стабилизирующим управлением на основе LQG-регулятора. Дискретная модель такой системы, согласно уравнениям динамики (4), в пространстве состояний имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0,9988 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0095 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,9999 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0099 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0100 \\ -0,2411 & 0,0000 & 0,0000 & 0,8926 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0141 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9763 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0009 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9957 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0028 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0027 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0008 \end{bmatrix}, \quad C_z = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_z = 0,$$

$$C_1 = [I_3 \ 0_{3 \times 3}], \quad C_2 = C_z, \quad D_1 = D_2 = 0,05 \cdot I_3,$$

параметры $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,95$. Первый измеряемый выход соответствует данным с бортового гироскопа, второй – с фронтальной камеры. Считается, что значения углов восстанавливаются из измерений угловых скоростей путем интегрирования, в начальный момент оценки считаются нулевыми.

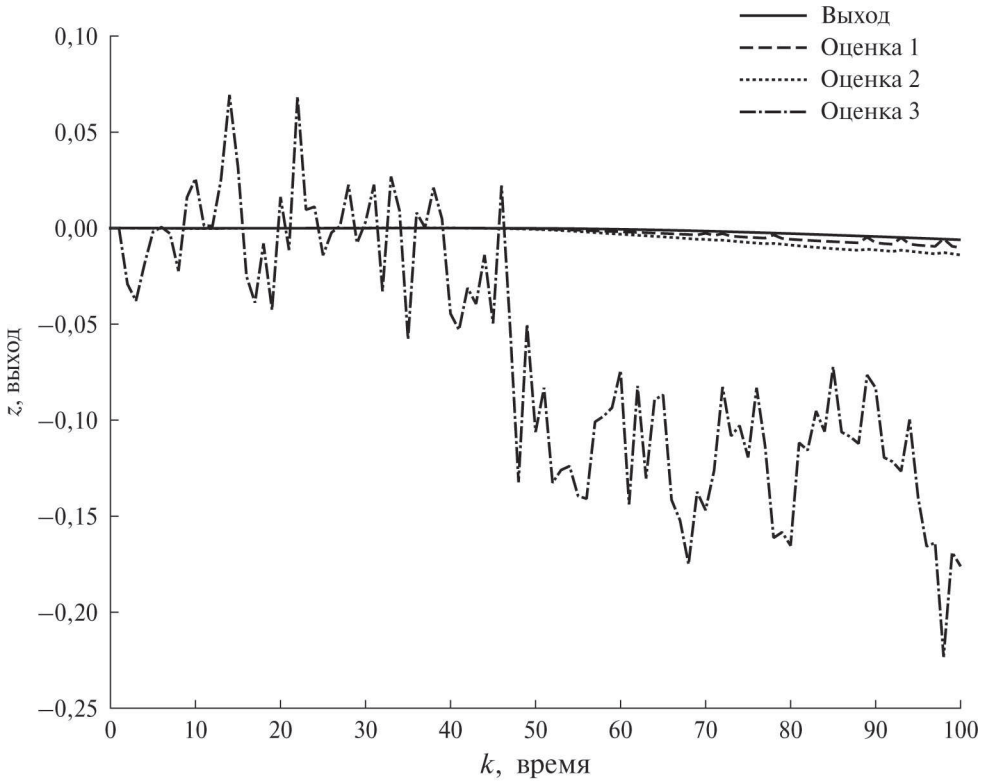


Рис. 1. Оцениваемый выход.

На рис. 1 представлены результаты моделирования для уровня средней анизотропии, равной 30. Сплошная линия соответствует оцениваемому выходу. Оценки 1 и 2 соответствуют случаю, когда при построении результирующей оценки использовались показания с другого измеряемого выхода с весовым коэффициентом, равным 0,2, в этом случае матрица смежности имеет следующий вид:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Оценка 3 соответствует случаю, когда для построения оценки использовался только первый измеряемый выход.

Для сравнения приведем значения евклидовых норм оцениваемого выхода $\|z\| = 0,0221$ и трех полученных оценок: $\|\hat{z}_1\| = 0,0385$, $\|\hat{z}_2\| = 0,0598$, $\|\hat{z}_3\| = 1,0222$.

На рис. 2 представлены результаты моделирования под воздействием внешнего возмущения с фиксированным уровнем средней анизотропии, равным 30. В данном случае сравним только консенсусную оценку, полученную на основе двух измерений. Штрих-пунктирная линия обозначает оценку угла крена на основе оценивателя, использующего анизотропный подход, сплошная — \mathcal{H}_∞ -оптимальную оценку. Хотя значения евклидовых норм анизо-

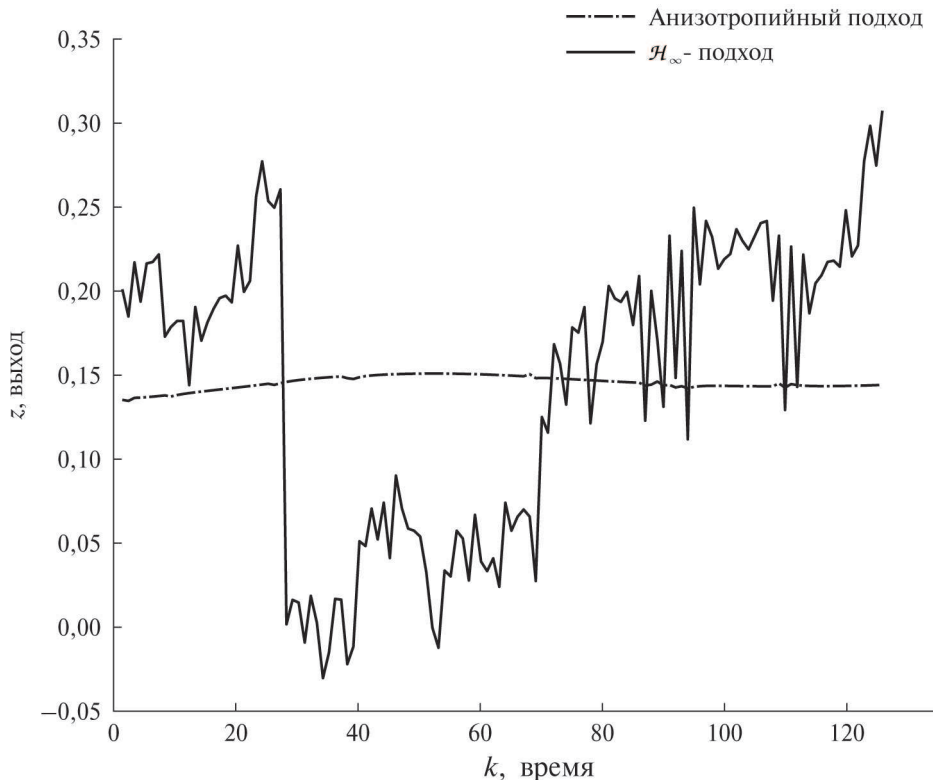


Рис. 2. Оцениваемый выход.

тропийной оценки $\|\hat{z}_{AB}\| = 1,6308$ и \mathcal{H}_∞ -оценки $\|\hat{z}_{\mathcal{H}_\infty}\| = 1,9165$ различаются на 15%, по графикам заметно, что в рассмотренном примере с неидеальными измерениями характер полученных оценок существенно отличается, что говорит о преимуществе использования анизотропийного оценщика в данном случае.

6. Заключение

В статье решена задача построения оценки для системы, измеряемые выходы которой в произвольный момент времени могут быть недоступны. Для этого предлагается дублировать такие выходы и строить консенсусную оценку для выхода объекта наблюдения. Поскольку решение поставленной задачи может быть получено с помощью стандартных пакетов прикладных программ для вычислений, возможным представляется использование синтезируемого оценщика, например, для построения управления по выходу для динамических объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгаков Б.В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. С. 339–342.

2. *Vidyasagar M.* Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. P. 527–535.
3. *Якубович Е.Д.* Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // АиТ. 1975. № 9. С. 73–79.
4. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space Solutions to Standard \mathcal{H}_2 - and \mathcal{H}_∞ -Control Problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
5. *Saberi A., Sanutti P., Chen B.M.* \mathcal{H}_2 -optimal control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
6. *Lee H., Park J.* Quantitative Controllability Metric for Disturbance Rejection in Linear Unstable Systems // Mathematics. 2025. V. 13. No. 6. P. 1–24.
7. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic Engineering. 1960. V. 82. No. 1. P. 35–45.
8. *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No. 2. P. 301–320.
9. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады РАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 583–585.
10. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 179–184.
11. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space Solution to Anisotropy-based Stochastic \mathcal{H}_∞ -Optimization Problem // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 427–432.
12. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Субоптимальная анизотропийная фильтрация на конечном горизонте // АиТ. 2016. № 1. С. 5–29.
13. *Чайковский М.М., Тимин В.Н., Кустов А.Ю., Курдюков А.П.* Численные процедуры анизотропийного анализа стационарных систем и синтез субоптимальных регуляторов и фильтров // АиТ. 2018. № 1. С. 162–182.
14. *Kustov A.Yu.* State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System // Proc. of the 15th Int. Conf. on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. 2018. P. 1–6.
15. *Юрченков А.В.* Условие ограниченности анизотропийной нормы для стационарных систем с мультипликативными шумами // Проблемы управления. 2022. № 5. С. 16–24.
16. *Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu., Timin V.N.* The sensor network estimation with dropouts: Anisotropy-based approach // Automatica. 2023. V. 151. P. 110924 (1–8).
17. *Shen B., Wang Z., Hung Y.S.* Distributed \mathcal{H}_∞ -consensus Filtering in Sensor Networks with Multiple Missing Measurements: The Finite-horizon Case // Automatica. 2010. V. 46. P. 1682–1688.
18. *Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems // Int. J. Control. 2001. V. 74. No. 1. P. 28–42.

19. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // *АиТ.* 2006. № 8. С. 92–111.
20. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization // *Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control.* 1994. V. 3. P. 2249–2250.
21. *Boyd, S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 730 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньым.

Поступила в редакцию 29.04.2025

После доработки 30.10.2025

Принята к публикации 05.11.2025

© 2026 г. Я.Г. САПУНКОВ, канд. физ.-мат. наук (iptmuran@san.ru),
А.В. МОЛОДЕНКОВ, д-р техн. наук (molalexei@yandex.ru)
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов)

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО ЭНЕРГИИ УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ПОЛУЧЕННОЕ В РАМКАХ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПУАНСО

Рассматривается кинематическая задача поиска оптимального по энергии программного углового ускорения космического аппарата при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата. В рамках классической кинематической интерпретации Пуансо углового движения твердого тела как обобщенного конического движения и на основе принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи, которое доведено до алгоритма. Приводятся подтверждающие аналитические и числовые примеры, показывающие в зависимости от граничных условий либо близость квазиоптимального решения к оптимальному решению, либо их полное совпадение.

Ключевые слова: космический аппарат, твердое тело, угловое ускорение, кинематическая интерпретация Пуансо, оптимальное и квазиоптимальное управление, аналитическое решение, алгоритм.

DOI: 10.7868/S2413977726060026

1. Введение

При решении многих задач наведения и управления космическими аппаратами требуется знать оптимальное в том или ином смысле программное угловое ускорение космического аппарата (КА) при произвольных заданных граничных условиях [1–5]. Как правило, в литературе такое ускорение ищется либо численно, либо строится аналитически (например, [5]) на основе полиномов (сплайнов) посредством представления кватерниона ориентации КА полиномами и выражения вектора угловой скорости через этот кватернион. Однако никаких обоснований (доказанных теорем или соображений из теоретической механики), что на всей совокупности угловых движений КА, при любых граничных условиях эти аналитические решения будут достаточно хорошо аппроксимировать оптимальную траекторию углового движения КА, не приводится.

В настоящей статье рассматривается кинематическая задача поиска оптимального в смысле энергетических затрат программного углового ускорения КА при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА. Получить оптимальное аналитическое решение этой

задачи при произвольных граничных условиях затруднительно, так как точное решение задачи нахождения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости (задачи Дарбу) в общем случае не известно [6, 7]. Соответственно классической кинематической интерпретации Пуансо углового движения твердого тела как обобщенного конического движения задача поиска оптимального углового ускорения КА переформулирована в этом классе движений. Траектория КА задана явными выражениями, которые содержат произвольные кватернионные и скалярные постоянные и две произвольные скалярные функции, которые являются параметрами обобщенного конического движения. Применительно к этим параметрам и их производным ставится и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих параметров. При этом общность исходной задачи практически не нарушается, так как известное точное решение классической задачи поиска оптимального углового ускорения в случае плоского поворота КА [4] или в новом частном случае регулярной прецессии, который приводится в статье, и аналогичные решения задачи в рамках рассматриваемой концепции полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах решения исходной задачи и предлагаемого аналитического решения относительная погрешность между значениями функционала оптимизации, который является определяющей характеристикой задачи, составляет не более одного процента, включая повороты КА на большие углы. В связи с этим предлагаемое аналитическое решение задачи может интерпретироваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче поиска оптимального углового ускорения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, посредством дифференцирования выражения вектора угловой скорости получена явная формула углового ускорения КА; записан аналитический алгоритм решения задачи, который может быть использован на борту КА.

Предлагаемый в статье аналитический метод решения ранее был успешно применен в динамических задачах оптимальных разворотов КА произвольной конфигурации с различными критериями оптимизации [8, 9], а также при построении квазиоптимального по быстродействию углового ускорения КА при произвольных граничных условиях [10].

2. Постановка классической задачи

Угловое движение КА как твердого тела вокруг центра масс описывается системой дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме:

$$(2.1) \quad 2 \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix},$$

$$(2.2) \quad [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T,$$

которой эквивалентна краткая запись [4]:

$$(2.3) \quad 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega},$$

$$(2.4) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{\Lambda}(t) = [\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]^T$ или $\mathbf{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ – нормированный кватернион, описывающий угловое положение КА ($\|\mathbf{\Lambda}\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$); $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]^T$ или $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ – вектор его угловой скорости, который может рассматриваться как кватернион с нулевой скалярной частью $\boldsymbol{\omega}(t) = [0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]^T$; $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T$ – вектор углового ускорения КА; мнимые единицы Гамильтона i_1, i_2, i_3 соответствуют ортам трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, символ “ \circ ” означает произведение кватернионов; “ T ” – знак транспонирования векторов. Фазовые координаты $\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\omega}$ положены непрерывными функциями, а угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ (рассматриваемое как управление) – кусочно-непрерывной функцией КА [11].

Произвольные начальное и конечное состояния КА:

$$(2.5) \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T,$$

$$(2.6) \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T.$$

Необходимо найти оптимальное управление $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)$, доставляющее минимум функционалу энергозатрат с фиксированным временем T :

$$(2.7) \quad J = \int_0^T \|\boldsymbol{\varepsilon}\| dt,$$

где время T произвольно и зафиксировано.

Постановка задачи (2.1)–(2.7) является кинематической, так как не учитывает динамическую конфигурацию КА. Следует отметить, что оптимальное угловое ускорение КА можно искать как производную от оптимальной угловой скорости КА и в полной динамической задаче оптимального разворота КА, где вместо векторного уравнения (2.4) используются динамические уравнения Эйлера, а функцией управления является приложенный к КА вектор внешнего управляющего момента [8, 9].

3. Безразмерные переменные

Переформулируем задачу, заменяя исходные размерные переменные на безразмерные:

$$t^{\text{безраз}} = t^{\text{раз}}/T, \quad \boldsymbol{\omega}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\omega}^{\text{раз}}T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{раз}}T^2, \quad J^{\text{безраз}} = J^{\text{раз}}T^3;$$

при этом все выражения постановки задачи, кроме функционала оптимизации

$$(3.1) \quad J = \int_0^1 \|\boldsymbol{\varepsilon}\| dt,$$

не изменятся. Ниже будем решать задачу (2.3)–(2.6), (3.1) в безразмерных переменных при $T = 1$, где верхние индексы в постановке задачи убраны.

4. Переход к краевой задаче оптимизации

Следуя принципу максимума Л.С. Понтрягина [4, 11], введем кватернион $\Psi(t)$, сопряженный кватерниону ориентации КА $\Lambda(t)$, и вектор $\varphi(t)$, сопряженный вектору угловой скорости КА $\omega(t)$. Функция Гамильтона–Понтрягина равна

$$(4.1) \quad H = -(\varepsilon, \varepsilon) + (\Psi, \Lambda \circ \omega) / 2 + (\varphi, \varepsilon),$$

где “ (\cdot, \cdot) ” – скалярное произведение векторов.

Сопряженная система уравнений имеет вид

$$(4.2) \quad \begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega, \\ \dot{\varphi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) / 2, \end{cases}$$

где “ $\text{vect}(\cdot)$ ” – векторная часть кватерниона, а символ “ \sim ” означает сопряжение кватерниона. Линейные дифференциальные системы уравнений для переменных Ψ и Λ совпадают, следовательно, их решения различаются на кватернионную константу \mathbf{C} :

$$(4.3) \quad \Psi = \mathbf{C} \circ \Lambda.$$

В силу этого и с учетом обозначения [4]

$$(4.4) \quad \mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda,$$

где \mathbf{c}_v – векторная часть кватерниона \mathbf{C} , выражения (4.2) примут вид:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p} / 2. \end{cases}$$

Таким образом, в силу самосопряженности линейной дифференциальной системы уравнений (2.1) (или (2.3)) размерность краевой задачи принципа максимума понижается на четыре [4]. Из условия максимума (3.1) получим непрерывную структуру оптимального управления:

$$(4.6) \quad \varepsilon^{\text{опт}} = \varphi / 2.$$

Из формул (2.3), (2.4), (4.4), (4.5) следует, что $\dot{\omega} = \varphi / 2$, $\ddot{\omega} = -\mathbf{p} / 4$, $\ddot{\omega} = -\dot{\mathbf{p}} / 4 = \ddot{\omega} \times \omega$, где знак “ \times ” есть векторное произведение, или, записывая одним уравнением,

$$(4.7) \quad \ddot{\omega} = \ddot{\omega} \times \omega.$$

В итоге нахождение оптимального углового ускорения КА приведено к решению краевой задачи (2.3), (4.7), (2.5), (2.6).

Используя выражение (4.4), функцию Гамильтона–Понтрягина (4.1) можно записать так:

$$(4.8) \quad H = -(\varepsilon, \varepsilon) + (\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})/2 + (\varphi, \varepsilon).$$

На основе формул (2.3), (2.4), (4.5) также укажем векторный первый интеграл [12], связывающий фазовые и сопряженные переменные задачи: $\mathbf{p}/4 + \varphi \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{const}, \forall t \in [0, T]$.

Несмотря на то, что в статье рассматривается задача без ограничения на управление (ограничение на величину углового ускорения в задаче косвенно реализуется при минимизации интегрального квадратичного по управлению функционала), на основе выражений (4.4)–(4.6) можно получить оценку модуля вектора оптимального углового ускорения. Для непрерывно дифференцируемой вектор–функции оптимального управления $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}$ имеем:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)| &= \left| \int_0^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{опт}}(\tau) d\tau + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0) \right| \leq \int_0^t |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{опт}}(\tau)| d\tau + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)| = \\ &= \int_0^t |\mathbf{p}(\tau)| d\tau/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)| = |\mathbf{c}_v| t/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)|, \end{aligned}$$

т.е. величина вектор–функции $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)$ в любой момент времени $\forall t \in [0, 1]$ должна находиться внутри шара переменного радиуса

$$(4.9) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)\| \leq (|\mathbf{c}_v| t/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)|)^2, \forall t \in [0, 1].$$

Аналогично с другой стороны получим:

$$(4.10) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)\| \leq (|\mathbf{c}_v| (1-t)/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(1)|)^2, \forall t \in [0, 1].$$

Следовательно, значение оптимального вектора углового ускорения должно принадлежать пересечению множеств, определяемых неравенствами (4.9), (4.10), т.е.

$$(4.11) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)\| \leq \gamma^2(t), \forall t \in [0, 1],$$

$$\gamma^2(t) = \min_t \left\{ (|\mathbf{c}_v| t/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)|)^2, (|\mathbf{c}_v| (1-t)/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(1)|)^2 \right\},$$

где векторная неопределенная постоянная \mathbf{c}_v находится из заданных постоянных условия задачи.

Следует отметить, что в частном случае граничных условий по угловой скорости (2.6), соответствующих плоскому эйлерову повороту, когда известно точное решение задачи, $|\mathbf{c}_v|$ в (4.11) явно выражается через заданные граничные условия по угловому положению КА (2.5)

$$(4.12) \quad |\mathbf{c}_v| = |\text{vect}(\mathbf{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0) / \sin(\arccos(\text{scal}(\mathbf{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0)))|,$$

где “scal(.)” – скалярная часть кватерниона, а величина вектор–функции $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)$ может выходить на границу области (4.11), (4.12).

5. Частное решение задачи в элементарных функциях

В классе регулярных конических движений получим новое аналитическое частное решение задачи поиска оптимального углового ускорения КА, выраженное в элементарных функциях. Оптимальная угловая скорость КА в этом классе движений имеет вид

$$(5.1) \quad \omega(t) = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \beta \sin \gamma t + \mathbf{i}_2 \beta \cos \gamma t + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q},$$

где \mathbf{Q} (кватернион) и β, γ – произвольные постоянные; при этом

$$(5.2) \quad \|\mathbf{K}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Кватернион \mathbf{Q} задает поворот вектора $\mathbf{i}_1 \beta \sin \gamma t + \mathbf{i}_2 \beta \cos \gamma t + \mathbf{i}_3 \gamma$ вокруг некоторой постоянной оси, проходящей через неподвижную точку КА. Покажем, что угловая скорость (5.1) удовлетворяет уравнению (4.7). Последовательно дифференцируя выражение (5.1) три раза по переменной t , получим: $\dot{\omega}(t) = \beta \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \gamma t - \mathbf{i}_2 \sin \gamma t) \circ \mathbf{Q}$, $\ddot{\omega}(t) = -\beta \gamma^2 \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \sin \gamma t + \mathbf{i}_2 \cos \gamma t) \circ \mathbf{Q}$, $\ddot{\omega}(t) = \beta \gamma^3 \tilde{\mathbf{Q}} \circ (-\mathbf{i}_1 \cos \gamma t + \mathbf{i}_2 \sin \gamma t) \circ \mathbf{Q}$. Подставляя (5.1) и полученные выражения производных в (4.7), можно убедиться в выполнении равенства, при этом $\ddot{\omega} = \ddot{\omega} \times \omega = (\ddot{\omega} \circ \omega - \omega \circ \ddot{\omega}) / 2$.

Исходя из (2.3), (5.1), получим явное выражение траектории КА в виде регулярной прецессии:

$$(5.3) \quad \Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 \beta t / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \gamma t / 2\} \circ \mathbf{Q},$$

где “ $\exp\{\cdot\}$ ” обозначает кватернионную экспоненту [4].

В выражения (5.1)–(5.3) входят пять произвольных постоянных $\beta, \gamma, q_i, i = 0, 1, 2$ (константа q_3 связана с условием (5.2)). Выполним граничные условия (2.5), (2.6). Из-за недостаточного количества произвольных констант в (5.1) на величины $|\omega_0|$ и ω_T наложим требования по ходу решения задачи, при этом единичный вектор $\omega_0^e = \omega_0 / |\omega_0|$ произволен и задан. В точке $t = 0$ по формуле (5.1):

$$(5.4) \quad \omega_0 = |\omega_0| \omega_0^e = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_2 \beta + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q},$$

$$(5.5) \quad \|\omega_0\| = \left\| \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_2 \beta + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q} \right\| = \left\| \tilde{\mathbf{Q}} \right\| \|\mathbf{i}_2 \beta + \mathbf{i}_3 \gamma\| \|\mathbf{Q}\| = \beta^2 + \gamma^2,$$

на правом конце траектории КА при $t = T = 1$ из (5.3) имеем

$$(5.6) \quad \Lambda_T = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 \beta / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \gamma / 2\} \circ \mathbf{Q},$$

при этом

$$(5.7) \quad \text{scal}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T) = \text{scal}(\exp\{\mathbf{i}_2 \beta / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \gamma / 2\}),$$

где “ $\text{scal}(\cdot)$ ” обозначает скалярную часть кватерниона. Исходя из (5.2), (5.4)–(5.6), найдем $|\omega_0|, \beta, \gamma, \mathbf{Q}$.

Представим (5.4), (5.6) в виде

$$\begin{aligned} & (\mathbf{i}_2\beta + \mathbf{i}_3\gamma) \circ \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \circ \gamma_0 = 0, \\ & \exp\{\mathbf{i}_2\beta/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\gamma/2\} \circ \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T = 0, \end{aligned}$$

или та же запись на основе \mathbf{m} - и \mathbf{n} -матриц, изоморфных кватернионам [13]:

$$(5.8) \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & \beta \\ \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \gamma & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{01} & -\omega_{02} & -\omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & \omega_{03} & -\omega_{02} \\ \omega_{02} & -\omega_{03} & 0 & \omega_{01} \\ \omega_{03} & \omega_{02} & -\omega_{01} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.9) \quad \left(\begin{bmatrix} \mu_0 & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 \\ \mu_1 & \mu_0 & -\mu_3 & \mu_2 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_0 & -\mu_1 \\ \mu_3 & -\mu_2 & \mu_1 & \mu_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_0 & -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 \\ \nu_1 & \nu_0 & \nu_3 & -\nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_3 & \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_3 & \nu_2 & -\nu_1 & \nu_0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где матрица коэффициентов линейной алгебраической системы (5.9) определяется компонентами кватернионов $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$:

$$(5.10) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\mu} = \exp\{\mathbf{i}_2\beta/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\gamma/2\}, \\ \mu_0 = \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2), \quad \mu_1 = \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2), \\ \mu_2 = \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2), \quad \mu_3 = \cos(\beta/2) \sin(\gamma/2), \end{cases}$$

$$(5.11) \quad \boldsymbol{\nu} = \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T,$$

нормы которых равны $\|\boldsymbol{\mu}\| = 1$, $\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$; при этом ранги матриц коэффициентов систем (5.8), (5.9) равны 2. Выбирая в (5.8), (5.9) по два линейно независимых уравнения, получим однородную систему

$$(5.12) \quad \begin{bmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} - \beta & \omega_{03} - \gamma \\ -\omega_{01} & 0 & -(\omega_{03} + \gamma) & \omega_{02} + \beta \\ \mu_1 - \nu_1 & 0 & -(\mu_3 + \nu_3) & \mu_2 + \nu_2 \\ 0 & \nu_1 - \mu_1 & \nu_2 - \mu_2 & \nu_3 - \mu_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривиальное решение системы уравнений (5.12) обуславливается равенством 0 определителя ее матрицы коэффициентов. Используя это и формулы (5.4), (5.5), (5.10), (5.11), получим

$$(5.13) \quad |\boldsymbol{\omega}_0| = (\mu_2\beta + \mu_3\gamma)/(\nu_1\omega_{01}^e + \nu_2\omega_{02}^e + \nu_3\omega_{03}^e).$$

На основе (5.5), (5.7), (5.10), (5.13) запишем систему из двух нелинейных уравнений для определения постоянных β , γ :

$$(5.14) \quad \begin{cases} (\beta^2 + \gamma^2) (\nu_1\omega_{01}^e + \nu_2\omega_{02}^e + \nu_3\omega_{03}^e)^2 - (\mu_2\beta + \mu_3\gamma)^2 = 0, \\ \text{scal}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T) - \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) = 0. \end{cases}$$

Из (5.3) и на основе решения системы (5.4) находится величина $|\boldsymbol{\omega}_0|$.

Компоненты кватерниона \mathbf{Q} определяются по формулам:

$$(5.15) \quad \begin{aligned} q_3 &= \pm \left[1 + (B_0/G)^2 + (B_1/G)^2 + (B_2/G)^2 \right]^{-1/2}, & q_0 &= B_0 q_3 / G, \\ q_1 &= B_1 q_3 / G, & q_2 &= B_2 q_3 / G, \end{aligned}$$

где

$$(5.16) \quad \begin{cases} B_0 = -(\mu_2 + \nu_2)(\omega_{03} + \gamma) + (\mu_3 + \nu_3)(\omega_{02} + \beta), \\ B_1 = (\mu_1 - \nu_1)\omega_{01} + (\mu_3 + \nu_3)(\gamma - \omega_{03}) + (\mu_2 + \nu_2)(\beta - \omega_{02}), \\ B_2 = (\mu_1 - \nu_1)(\omega_{02} + \beta) + (\mu_2 + \nu_2)\omega_{01}, \\ G = (\mu_1 - \nu_1)(\omega_{03} + \gamma) + (\mu_3 + \nu_3)\omega_{01}. \end{cases}$$

Краевое условие по угловой скорости КА при $t = T = 1$ должно выглядеть так:

$$(5.17) \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \beta \sin \gamma + \mathbf{i}_2 \beta \cos \gamma + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q}.$$

В итоге, если краевые условия по угловой скорости КА $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяют требованиям (5.13), (5.17), траектория углового движения КА находится в классе регулярных конических движений и определяется явными выражениями (5.1), (5.2) ($\boldsymbol{\omega}(t) \forall t \in [0, T]$) принадлежит конической поверхности, которая определяется в пространстве произвольными заданными граничными условиями по положению $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_T$ и произвольным заданным направлением вектора своего начального значения $\boldsymbol{\omega}_0^e$.

Оптимальное угловое ускорение из (2.4), (5.1) будет

$$(5.18) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \beta \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \gamma t - \mathbf{i}_2 \sin \gamma t) \circ \mathbf{Q},$$

$$(5.19) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \beta^2 \gamma^2 = \text{const}.$$

Оптимальная величина безразмерного функционала оптимизации (3.1):

$$(5.20) \quad J = \int_0^1 \|\boldsymbol{\varepsilon}\| dt = \beta^2 \gamma^2.$$

По формулам (5.18), (4.5) определяются сопряженные переменные $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{p} . Задача при введенных ограничениях полностью решена.

Приведем алгоритм построения оптимального по энергии углового ускорения КА в классе регулярных конических движений:

1) по заданным постоянным условиям задачи $T = 1$, $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_T$ (2.5), $\boldsymbol{\omega}_0^e = \boldsymbol{\omega}_0 / |\boldsymbol{\omega}_0|$ и формулам (2.6), (5.10), (5.11), (5.15), (5.16) определяются неизвестные $\beta, \gamma, |\boldsymbol{\omega}_0|$;

2) $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_T, \beta, \gamma, T = 1, |\boldsymbol{\omega}_0|$ по формулам (5.15), (5.16) находится кватернион \mathbf{Q} ;

3) с использованием выражений $\boldsymbol{\omega}_0^{\text{выч}} = |\boldsymbol{\omega}_0| \boldsymbol{\omega}_0^e$, $\boldsymbol{\omega}_T^{\text{выч}} = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \beta \sin \gamma + \mathbf{i}_2 \beta \cos \gamma + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q}$ находятся условия на концах траектории $\boldsymbol{\omega}_0^{\text{выч}}, \boldsymbol{\omega}_T^{\text{выч}}$;

4) найденные величины $\boldsymbol{\omega}_0^{\text{выч}}, \boldsymbol{\omega}_T^{\text{выч}}$ сравниваются с заданными (2.6);

5) если в п. 4 алгоритма выполняется равенство, то оптимальное решение задачи находится в классе регулярных конических движений; угловая

скорость КА, траектория и вектор углового ускорения КА вычисляются по формулам (5.1), (5.3), (5.18) и п. 1, оптимальное значение функционала определяется на основе (5.10);

б) с использованием (4.4), (4.5), (5.18) определяются сопряженные переменные φ и \mathbf{p} .

Полученное в классе регулярных конических движений оптимальное решение задачи и известное ранее [4] точное решение в классе плоских эйлеровых разворотов (при условии $\omega_0 \omega_T \parallel \text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$) для частных случаев граничных условий по угловой скорости КА будут использованы как аналитические подтверждения при построении квазиоптимального решения задачи поиска углового ускорения КА в классе обобщенных конических движений. Также приведем наводящие соображения, которые получены на основе численного решения задачи поиска оптимального углового ускорения КА при произвольных граничных условиях.

6. Обоснование предлагаемого подхода исходя из числовых решений задачи

Численно решается краевая задача принципа максимума, полученная в разделе 4 статьи для исходной кинематической задачи поиска оптимального ускорения КА (2.3)–(2.6), (3.1):

$$(6.1) \quad \begin{cases} 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \\ \dot{\omega} = \varepsilon, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2, \\ \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad \mathbf{c}_v = \text{const}, \end{cases}$$

$$(6.2) \quad \Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \omega(0) = \omega_0,$$

$$(6.3) \quad \Lambda(T) = \Lambda_T, \quad \omega(T) = \omega_T,$$

$$(6.4) \quad \varepsilon^{\text{опт}} = \varphi/2,$$

откуда необходимо найти $\varepsilon^{\text{опт}}$, $T^{\text{опт}}$, $\Lambda^{\text{опт}}$, $\omega^{\text{опт}}$, \mathbf{c}_v . Условия в конечный момент времени (6.3) целесообразно записать в фазовом пространстве $\Lambda \times \omega$ размерности 7 [8, 9]:

$$(6.5) \quad \text{vect}(\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T) = 0, \quad \omega(T) = \omega_T.$$

Метод численного решения подобных задач описан в [8, 9]. Также для сравнения приводятся кинематические характеристики по результатам расчетов в полной динамической задаче оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота КА как твердого тела различных динамических конфигураций [9] в безразмерных переменных ($T = 1$) при тех же граничных условиях:

$$(6.6) \quad \Lambda_0 = (0,7951, 0,2981, -0,3975, 0,3478), \quad \omega_0 = (0,2739, -0,2388, -0,3),$$

$$(6.7) \quad \Lambda_T = (0,8443, 0,3984, -0,3260, 0,1485), \quad \omega_T = (0,0, 0,0, -0,59).$$

Задача 1. Произвольный КА $I_1 = 0,9869$, $I_2 = 1,1843$, $I_3 = 0,7895$.

Задача 2. Произвольный КА $I_1 = 0,9506$, $I_2 = 1,3308$, $I_3 = 0,5704$.

Задача 3. Международная космическая станция (МКС) в своей ранней версии [14] $I_1 = 4\,853\,000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 23\,601\,000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 26\,278\,000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ или безразмерные величины $I_1 = 0,2358$, $I_2 = 1,1466$, $I_3 = 1,2766$.

Задача 4. КА “Спейс Шаттл”, у которого характеристики, почти как у динамически-симметричного твердого тела: $I_1 = 3\,400\,648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ или $I_1 = 0,1967$, $I_2 = 1,2168$, $I_3 \approx I_2$.

Задача 5. Произвольный КА $I_1 = 0,9116$, $I_2 = 1,3674$, $I_3 = 0,5470$.

В табл. 1 показаны значения кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, полученные при решении задачи поиска оптимального углового ускорения (6.1)–(6.5) и при решении динамической задачи оптимального разворота [9] для задач 1–4 в середине отрезка времени $t = 0,5$. При этом для сравнения в нижней строке табл. 1 приводятся данные, которые получены при решении квазиоптимальной задачи поиска углового ускорения КА, рассматриваемой в разделах 6–7 статьи.

Таблица 1. Величины кватерниона ориентации и вектора угловой скорости

Задача	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	0,8095	0,3628	-0,3766	0,2670	-0,0499	-0,0115	-0,4941
2	0,8093	0,3631	-0,3765	0,2674	-0,0496	-0,0116	-0,4949
3	0,8077	0,3654	-0,3773	0,2678	-0,0506	-0,0159	-0,4949
4	0,8086	0,3634	-0,3780	0,2668	-0,0519	-0,0137	-0,4948
Краевая задача (6.1)–(6.5)	0,8096	0,3625	-0,3768	0,2668	0,0502	-0,0114	-0,4937
Модифицирован- ная задача	0,8099	0,3627	-0,3756	0,2673	-0,0488	-0,0098	-0,4938

В табл. 2 для тех же задач показаны компоненты векторов углового ускорения $\varepsilon = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T$ для каждого из случаев в точках $t = 0$, $t = 0,5$, $t = T = 1$ процесса оптимального управления КА.

Таблица 2. Величины углового ускорения

Задача	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0,5)$	$\varepsilon_2(0,5)$	$\varepsilon_3(0,5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
2	-0,9649	0,7262	-0,4736	-0,3051	0,2053	-0,2902	0,5357	-0,1154	-0,0965
3	-0,9399	0,7235	-0,4449	-0,3207	0,2039	-0,2942	0,5681	-0,1076	-0,0940
4	-0,9262	0,6536	-0,4422	-0,3182	0,2586	-0,2978	0,5591	-0,2446	-0,0886
5	-0,7914	0,6537	-0,4345	-0,3968	0,2549	-0,3002	0,7341	-0,2381	-0,0875
Краевая задача (6.1)–(6.5)	-0,9854	0,7259	-0,4892	-0,2917	0,2087	-0,2878	0,5077	-0,1272	-0,0985
Модифиц. задача	-0,9647	0,7634	-0,4932	-0,3103	0,1687	-0,2847	0,5350	-0,0220	0,1024

Также опишем кинематические характеристики оптимального движения для случая, когда начальное состояние КА определяется соотношением (6.6), а конечное состояние – соотношением

$$(6.8) \quad \Lambda_T = (0,79368, 0,49375, -0,26823, 0,23309), \quad \omega_T = (0,2, 0,3, -0,2).$$

В табл. 3 применительно к задаче (6.1)–(6.5) и при решении динамической задачи оптимального разворота [9] для КА 3–5 представлены компоненты кватерниона положения и вектора угловой скорости при $t = 0,5$, а в табл. 4 приводятся компоненты векторов углового ускорения при $t = 0, t = 0,5, t = T = 1$.

Таблица 3. Кватернион ориентации и вектор угловой скорости

Задача	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
3	0,79080	0,41371	-0,35618	0,27679	0,31768	-0,01578	-0,52304
4	0,79103	0,41317	-0,35664	0,27635	0,31932	-0,01491	-0,52314
5	0,78999	0,41442	-0,35860	0,27492	0,32414	-0,01453	-0,52402
Краевая задача (6.1)–(6.5)	0,78995	0,41434	-0,35808	0,28583	0,32168	-0,01522	-0,52451

Таблица 4. Угловое ускорение

Задача	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0,5)$	$\varepsilon_2(0,5)$	$\varepsilon_3(0,5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
3	0,36496	0,53821	-1,00244	-0,07017	0,44837	0,10585	-0,54722	0,88317	1,18497
4	0,28551	0,51819	-1,00680	-0,04259	0,45769	0,10771	-0,55803	0,86381	1,18517
5	0,19271	0,34271	-1,05149	-0,05270	0,54857	0,12304	-0,41047	0,70409	1,16712
Краевая задача (6.1)–(6.5)	0,26547	0,38677	-1,00250	-0,06733	0,52385	0,10458	-0,43888	0,74958	1,18404

Такие же вычисления проводились и для других граничных условий. Из табл. 1–4 и других расчетов следует, что в динамической задаче оптимального разворота кинематические характеристики оптимального движения КА существенно зависят от его начального и конечного состояний, менее существенно зависят от его конфигурации и достаточно близки к результатам кинематической задачи поиска оптимального углового ускорения КА. Отсюда следует, что кинематическая задача поиска оптимального углового ускорения (2.3)–(2.7), вообще говоря, носит общий характер для КА произвольных конфигураций. При этом в кинематической задаче выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости можно построить аналитически в явном виде на основе решения так называемой модифицированной задачи оптимальной переориентации КА в классе обобщенных конических движений. Управляющее угловое ускорение КА определяется посредством дифференцирования вектора его угловой скорости. Изложим это более подробно.

7. Модифицированная задача поиска оптимального углового ускорения КА

Общее решение фундаментальной задачи определения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости (2.1), (2.3), называемой задачей Дарбу, не известно. Поэтому получим решение задачи в классе обобщенных конических движений, для этого определим вектор угловой скорости $\omega(t)$ как

$$(7.1) \quad \omega(t) = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{B}(t) \sin \Gamma(t) + \mathbf{i}_2 \dot{B}(t) \cos \Gamma(t) + \mathbf{i}_3 \dot{\Gamma}(t)) \circ \mathbf{Q},$$

где функции $B(t)$ и $\Gamma(t)$ (параметры обобщенного конического движения) произвольны. В этом случае уравнение (2.3) имеет точное решение [8, 9], удовлетворяющее начальному условию (2.5):

$$(7.2) \quad \Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 \Gamma(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (B(t) - B(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Gamma(t)/2\} \circ \mathbf{Q}.$$

Как видно, формулы (7.1), (7.2) включают в себя выражения для угловой скорости и траектории КА во всех известных точных решениях задачи поиска оптимального углового ускорения КА, когда вектор его угловой скорости сохраняет постоянное направление на всем интервале времени движения (плоский эйлеров разворот КА [4]) или совершает регулярную прецессию (раздел 5 настоящей статьи). При этом формулы (7.1), (7.2), содержащие произвольные функции $B(t)$, $\Gamma(t)$, являются прямым обобщением формул (5.1), (5.3), которые содержат линейные функции βt , γt соответственно. Также следует отметить, что с помощью взаимно однозначных замен переменных (описано в [8, 9]) задачу Дарбу в общем случае можно свести к решению уравнения типа (2.3), где угловая скорость примет вид $\omega^*(t) = -\omega(t)$ и находится в классе подобных движений (кватернионное дифференциальное уравнение (2.3) с угловой скоростью $\omega^*(t)$ по-прежнему не имеет явного решения). Таким образом, вид вектора угловой скорости типа (7.1) соответствует классической кинематической интерпретации Пуансо углового движения твердого тела как обобщенного конического движения [7].

Пусть вторые производные от функций B и Γ рассматриваются как управления. Вводя обозначения

$$(7.3) \quad \dot{B} = B_1, \quad \dot{\Gamma} = \Gamma_1,$$

можно составить управляемую систему:

$$(7.4) \quad \dot{B} = B_1, \quad \dot{\Gamma} = \Gamma_1, \quad \dot{B}_1 = u_1, \quad \dot{\Gamma}_1 = u_2,$$

где B, B_1, Γ, Γ_1 есть фазовые координаты этой задачи, а u_1, u_2 – управления. Кватернион \mathbf{Q} зададим так:

$$(7.5) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{Q}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{Q}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\},$$

где α_1, α_2 – произвольные константы. Следует отметить, кватернионы \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 поворачивают вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (7.1) вокруг осей $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. За счет аддитивной постоянной, входящей в функцию $\Gamma(t)$, поворот вокруг оси \mathbf{i}_3 уже учтен в выражении (7.1). Спряжение кватерниона $\tilde{\mathbf{Q}}$ выглядит так:

$$(7.6) \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}.$$

Удовлетворение краевым условиям (2.5), (2.6) функций $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Lambda}$ (7.1), (7.2) с учетом (7.5), (7.6) запишется так:

$$(7.7) \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 B_1(0) \sin \Gamma(0) + \mathbf{i}_2 B_1(0) \cos \Gamma(0) + \mathbf{i}_3 \Gamma_1(0)) \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{\omega}_0,$$

$$(7.8) \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 B_1(T) \sin \Gamma(T) + \mathbf{i}_2 B_1(T) \cos \Gamma(T) + \mathbf{i}_3 \Gamma_1(T)) \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{\omega}_T,$$

$$(7.9) \quad \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 \Gamma(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (B(T) - B(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Gamma(T)/2\} \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_T.$$

Оптимизационная задача для управляемой системы (7.4) выглядит так: найти оптимальные управления $u_1(t), u_2(t)$, переводящие систему (7.4) из состояния

$$(7.10) \quad B = B(0), \quad B_1 = B_1(0), \quad \Gamma = \Gamma(0), \quad \Gamma_1 = \Gamma_1(0)$$

в состояние

$$(7.11) \quad B = B(T), \quad B_1 = B_1(T), \quad \Gamma = \Gamma(T), \quad \Gamma_1 = \Gamma_1(T),$$

которые удовлетворяют соотношениям (7.7)–(7.9), где параметры α_1, α_2 подлежат определению, и исполняют критерий оптимальности

$$(7.12) \quad J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt.$$

Выражения (7.7)–(7.9) запишем так:

$$(7.13) \quad (\mathbf{i}_1 B_1(0) \sin \Gamma(0) + \mathbf{i}_2 B_1(0) \cos \Gamma(0) + \mathbf{i}_3 \Gamma_1(0)) = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2,$$

$$(7.14) \quad (\mathbf{i}_1 B_1(T) \sin \Gamma(T) + \mathbf{i}_2 B_1(T) \cos \Gamma(T) + \mathbf{i}_3 \Gamma_1(T)) = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2,$$

$$(7.15) \quad \exp\{-\mathbf{i}_3 \Gamma(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (B(T) - B(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Gamma(T)/2\} = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2.$$

Из уравнения (2.4) путем дифференцирования определяется управляющее угловое ускорение КА

$$(7.16) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Поставленную задачу назовем модифицированной задачей поиска оптимального углового ускорения КА, ее точное решение допустимо как приближенное или квазиоптимальное решение классической оптимальной задачи (2.3)–(2.6), (3.1).

8. Решение модифицированной задачи поиска углового ускорения КА

Функция Гамильтона–Понтрягина задачи (7.4)–(7.12):

$$(8.1) \quad H = -(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 B_1 + \psi_2 \Gamma_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2,$$

где сопряженные переменные удовлетворяют дифференциальной системе

$$(8.2) \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2.$$

Система (8.2) имеет общее решение

$$(8.3) \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4,$$

где c_1, \dots, c_4 – неопределенные константы.

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (8.2) дает структуру оптимальных управлений:

$$(8.4) \quad u_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad u_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2.$$

Подставляя формулы (8.4) в уравнения (7.4), находим их общее решение, которое содержит 8 неопределенных констант c_1, \dots, c_8 :

$$(8.5) \quad \begin{aligned} B &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_6, & \Gamma &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_7 t + c_8, \\ B_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5, & \Gamma_1 &= -c_2 t^2/4 + c_4 t/2 + c_7. \end{aligned}$$

Исходя из (8.4) в выражении для функции В (8.5) положим константу c_6 равной 0. Для определения девяти неизвестных постоянных задачи $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 служат 9 уравнений системы (7.13)–(7.15) (из-за требования $\|\mathbf{\Lambda}\| = 1$ 3 скалярных уравнения независимы в кватернионной записи (7.15)). Следует отметить, что эти уравнения можно решать модифицированным методом Ньютона, где в качестве начальных приближений будут выступать значения констант $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 из точного решения задачи в частном случае по разделу 5 статьи.

На основе (7.1), (7.2), (8.5) получим явные зависимости, определяющие законы изменения угловой скорости и траектории КА в задаче поиска оптимального углового ускорения в классе обобщенных конических движений. Формула (7.16) с учетом (7.1), (8.4) и (8.5) дает аналитическое выражение для вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1(u_1 \sin \Gamma + B_1 \Gamma_1 \cos \Gamma) + \\ &+ \mathbf{i}_2(u_1 \cos \Gamma - B_1 \Gamma_1 \sin \Gamma) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

С учетом (7.3), (7.5), (7.6) компоненты векторов ω и ε (7.1), (8.6) имеют явный вид:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= B_1 \sin \Gamma \cos \alpha_2 - \Gamma_1 \sin \alpha_2, \\
 \omega_2 &= B_1 (\sin \Gamma \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \Gamma \cos \alpha_1) + \Gamma_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\
 \omega_3 &= B_1 (\sin \Gamma \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \Gamma \sin \alpha_1) + \Gamma_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2, \\
 \varepsilon_1 &= u_1 (\sin \Gamma + B_1 \Gamma_1 \cos \Gamma) \cos \alpha_2 - u_2 \sin \alpha_2, \\
 \varepsilon_2 &= u_1 (\sin \Gamma \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \Gamma \cos \alpha_1) + \\
 &\quad + B_1 \Gamma_1 (\cos \Gamma \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \Gamma \cos \alpha_1) + u_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\
 \varepsilon_3 &= u_1 (\sin \Gamma \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \Gamma \sin \alpha_1) + \\
 &\quad + f_1 \Gamma_1 (\cos \Gamma \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \Gamma \sin \alpha_1) + u_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2.
 \end{aligned}$$

Норма вектора управляющего углового ускорения КА, входящая в функционал (2.7) (или (3.1)) исходной задачи, выражается через элементы модифицированной задачи так:

$$(8.7) \quad \|\varepsilon\| = u_1^2 + B_1^2 \Gamma_1^2 + u_2^2.$$

Модифицированная задача поиска оптимального углового ускорения КА полностью решена.

Если в классической и модифицированной задаче поиска оптимального углового ускорения КА граничные условия по угловой скорости КА положить такими же, как в разделе 5, то решения этих задач полностью совпадут. То же самое можно сказать, когда $\omega_0 \ \omega_T \parallel \text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$ (плоский эйлеров поворот КА [4]), в этом случае $B_1^2 \Gamma_1^2 = 0$ в (8.7) и критерий (7.12) соответствует критерию оптимизации (2.7) (или (3.1)) классической задачи. Для произвольных граничных условий, полагая, что $\int_0^1 B_1^2 \Gamma_1^2 dt$ мало по сравнению с величиной $\int_0^1 \|\varepsilon\| dt$, в (8.7) можно опустить последнее слагаемое. Тогда модифицированная задача оптимального управления в переменных $B, \Gamma, B_1, \Gamma_1, u_1, u_2$ с функционалом (7.12) и выражениями (7.1), (7.2), (7.13)–(7.15), (8.4)–(8.6) будет соответствовать классической задаче поиска оптимального углового ускорения КА в классе обобщенных конических движений. На основании рассуждений разделов 5, 6 статьи модифицированная задача может рассматриваться в качестве квазиоптимальной задачи поиска углового ускорения КА при произвольных граничных условиях.

Подобно классической задаче (формулы (4.11), (4.12)) величина $\|\varepsilon\|$ в модифицированной задаче в любой момент времени находится внутри переменной области ограничения, определяемой постоянными условия задачи. На основе (8.4), (8.7) при сделанных выше допущениях получим:

$$(8.8) \quad \|\varepsilon(t)\| \leq ((c_1^2 + c_2^2)t^2 + 2 |c_1 c_3 + c_2 c_4| t + c_3^2 c_4^2) / 4, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Приведем квазиоптимальный алгоритм решения задачи поиска минимального по энергии углового ускорения КА.

1. По имеющимся краевым условиям Λ_0, Λ_T (2.5), ω_0, ω_T (2.6) и $T = 1$ по формулам (7.5), (7.6), девяти скалярным уравнениям из (7.13)–(7.15), принимая во внимание (8.3)–(8.5), находятся 9 произвольных констант $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 и определяются функции $B(t), B_1(t), \Gamma(t), \Gamma_1(t)$;

2. Вычисляется кватернион \mathbf{Q} по формуле (7.5);

3. Закон изменения угловой скорости КА по (7.1):

$$\omega(t) = \tilde{\mathbf{Q}} \circ \left(\mathbf{i}_1 \dot{B}(t) \sin \Gamma(t) + \mathbf{i}_2 \dot{B}(t) \cos \Gamma(t) + \mathbf{i}_3 \dot{\Gamma}(t) \right) \circ \mathbf{Q};$$

4. Закон изменения траектории углового движения КА по (7.2):

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 \Gamma(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (B(t) - B(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Gamma(t)/2\} \circ \mathbf{Q};$$

5. Вектор углового ускорения КА строится по формуле (8.6):

$$\varepsilon = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 (u_1 \sin \Gamma + B_1 \Gamma_1 \cos \Gamma) + \mathbf{i}_2 (u_1 \cos \Gamma - B_1 \Gamma_1 \sin \Gamma) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{Q}.$$

9. Числовые примеры

Сравниваются результаты численного решения исходной (классической) задачи поиска оптимального углового ускорения КА и квазиоптимального решения этой задачи по аналитическому алгоритму раздела 8 статьи. Величины $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ в квазиоптимальном решении задачи при развороте КА с граничными условиями (6.6), (6.7):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0,0421, & \alpha_2 &= -0,2226, & c_1 &= 3,2902, & c_2 &= -1,4885, & c_3 &= 2,2113, \\ c_4 &= -1,45, & c_5 &= -0,4156, & c_6 &= 0, & c_7 &= -0,2221, & c_8 &= -0,9216. \end{aligned}$$

Результаты решений двух задач оказались близки. Значение функционала (3.1) исходной задачи в рассматриваемом примере составляет 0,4782. Значение (3.1), вычисленное на основе решения модифицированной задачи, составляет 0,4797. Таким образом, в рассматриваемом примере относительная погрешность между значениями функционала (3.1) для классической и модифицированной задачи составляет 0,3%. На рис. 1, 2 приведены графики изменения в зависимости от t проекций вектора угловой скорости КА $\omega_i(t)$, компонент кватерниона поворота КА $\Lambda_i(t)$ и проекций вектора углового ускорения КА $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, которые для двух задач достаточно похожи.

Также проводились численные решения задачи поиска оптимального по энергии углового ускорения КА для случаев, когда начальное состояние КА определялось соотношениями (6.6). Конечное положение КА задавалось поворотом КА из начального положения на некоторый угол вокруг эйлеровой оси, единичный вектор которой определялся координатами

$$(9.1) \quad (0,04500, -0,07519, -0,99615).$$

$T = 1$

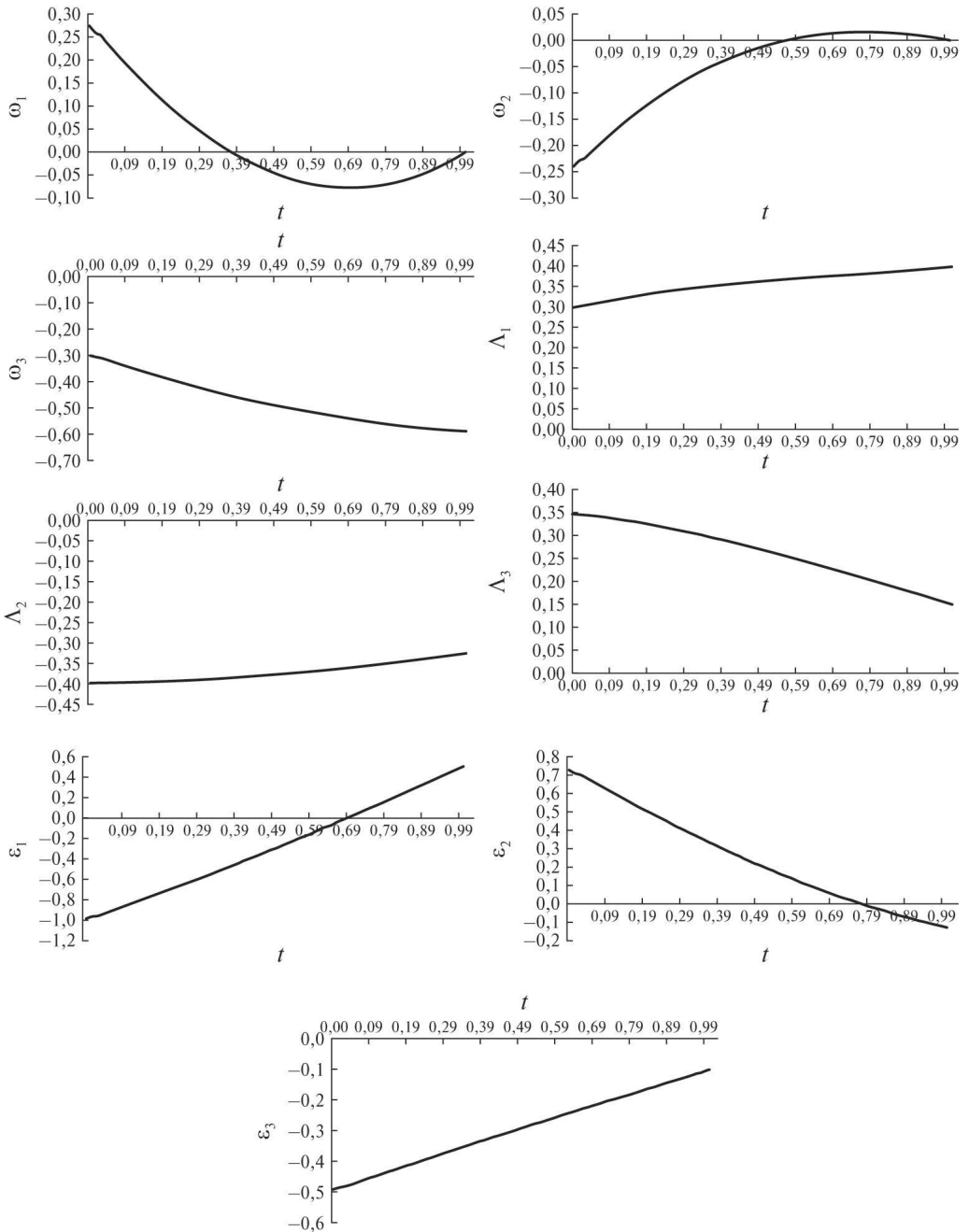


Рис. 1. Результаты решения классической задачи при произвольных граничных условиях.

В табл. 5 приводятся компоненты кватернионов конечного положения твердого тела (КА) для поворотов на различные величины эйлера угла φ в градусах вокруг вектора (9.1).

$$T = 1$$

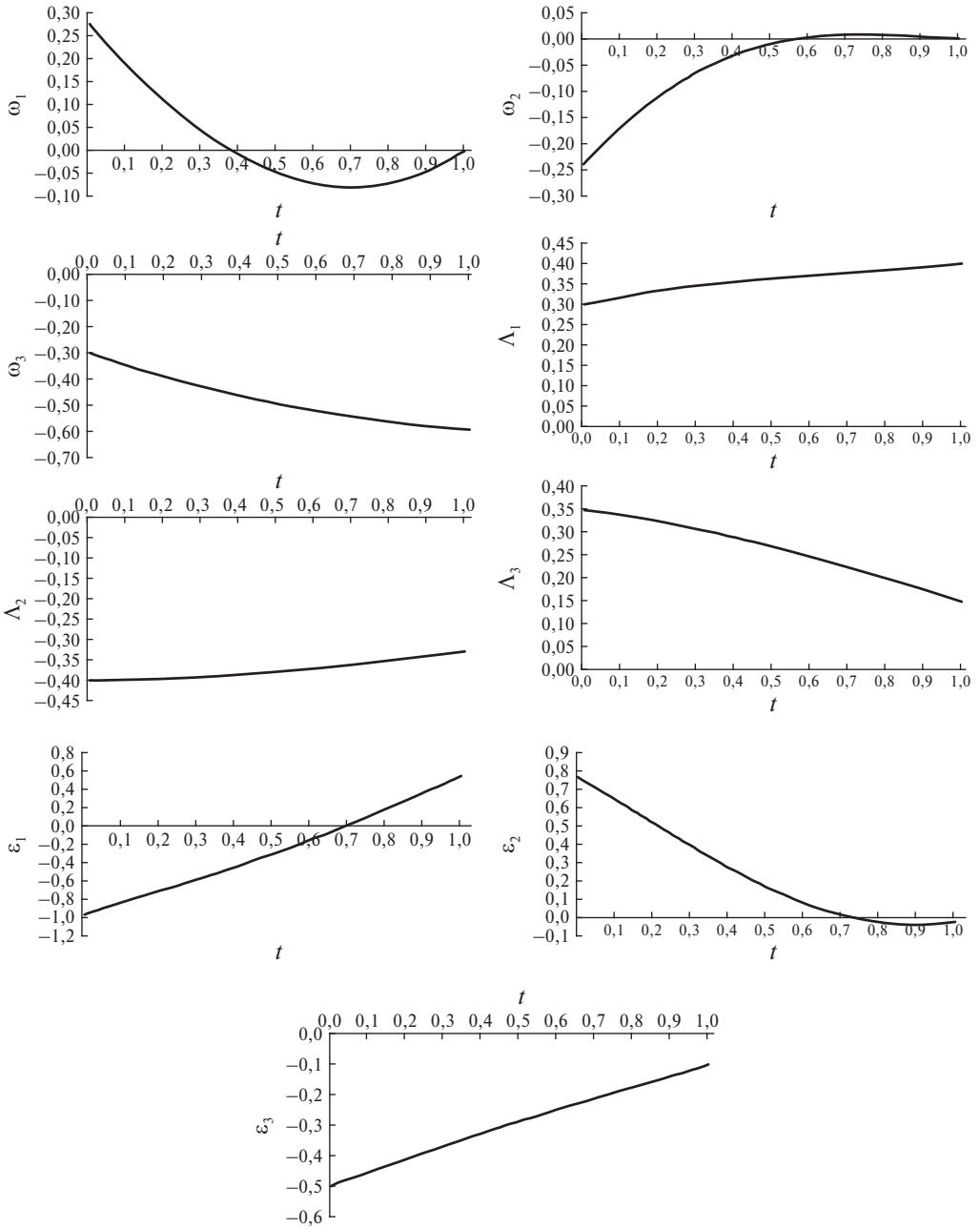


Рис. 2. Результаты решения модифицированной задачи при произвольных граничных условиях.

В табл. 6 представлены значения функционала (3.1) в классической и модифицированной задачах поиска оптимального углового ускорения при переводе КА из начального состояния (6.6) в конечные состояния Λ_T

Таблица 5. Формирование кватернионов конечной ориентации КА

φ°	$\lambda_0(T)$	$\lambda_1(T)$	$\lambda_2(T)$	$\lambda_3(T)$
30,0	0,84643	0,40650	-0,31853	0,12982
60,0	0,84013	0,48716	-0,21783	-0,09703
90,0	0,77657	0,53461	-0,10229	-0,31727
120,0	0,66009	0,54564	0,02023	-0,51589
150,0	0,49863	0,51948	0,14136	-0,67935
180,0	0,30318	0,45792	0,25286	-0,79652

по табл. 5 и при $\omega_T = (0,0, 0,0, -0,59)$ с указанием разности между значениями этих функционалов $\Delta J = J_{\text{модиф}} - J_{\text{классич}}$ и процентного расхождения $(\Delta J / J_{\text{классич}}) \cdot 100\%$.

Таблица 6. Величины функционалов и их расхождения

Функционалы и расхождения их величин	$\varphi = 30,0^\circ$	$\varphi = 60,0^\circ$	$\varphi = 90,0^\circ$	$\varphi = 150,0^\circ$	$\varphi = 180,0^\circ$
$J_{\text{классич}}$	0,52385	4,63277	15,31437	56,39081	86,78094
$J_{\text{модиф}}$	0,52510	4,63724	15,32882	56,52086	87,51533
ΔJ	0,00125	0,00447	0,01445	0,13005	0,73439
%	0,24	0,10	0,09	0,23	0,85

В табл. 7 приводятся такие же данные для случаев, когда конечная угловая скорость КА определяется вектором $\omega_T = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, т.е. при переводе КА в состояние покоя.

Таблица 7. Величины функционалов и их расхождения

Функционалы и расхождения их величин	$\varphi = 90,0^\circ$	$\varphi = 120,0^\circ$	$\varphi = 150,0^\circ$	$\varphi = 180,0^\circ$
$J_{\text{классич}}$	24,25074	45,17597	72,66431	106,71186
$J_{\text{модиф}}$	24,28745	45,19513	72,77169	107,40843
ΔJ	0,03672	0,01916	0,10738	0,69657
%	0,15	0,04	0,15	0,65

Из других расчетов для различных краевых условий следует близость решений классической и модифицированной задач поиска углового ускорения КА; это позволяет рассматривать решение модифицированной задачи как квазиоптимальное по отношению к классической задаче поиска оптимального углового ускорения КА.

10. Заключение

Аналитический квазиоптимальный алгоритм решения кинематической задачи поиска программного оптимального по энергии углового ускорения КА при произвольных краевых условиях достаточно теоретически обоснован и с допустимой точностью решает оптимальную кинематическую задачу определения углового ускорения КА. Предложенный алгоритм не требует численного решения краевой задачи принципа максимума или иного сложного численного решения и является готовыми аналитическими законами квазиоптимального программного управления и изменения программной траектории, которые могут быть установлены на борт КА. В связи с этим полученные результаты могут быть применены для КА нанокласса, имеющих ограничения на вычислительные мощности. Кроме этого, на основе полученных результатов с использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди [13], позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на бикватернионные формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, может быть получен аналитический квазиоптимальный по энергии алгоритм программного управления пространственным движением (маневрированием) КА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // *J. Guidance, Control Dynam.* 1994. V. 17. No. 2. P. 225–233.
2. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. N. Y.: Elsevier, 1986.
3. *Crassidis J.L., Markley F.L.* Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. N.Y.: Springer, 2014.
4. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
5. *Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сомова Т.Е.* Автономное наведение и управление миниспутниками в низкоорбитальной группировке при площадной сканирующей съемке // Сб. тр. XXX Юбил. С.-Петербург. междунар. конф. по интегрир. навигац. сист. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2023.
6. *Иванова Е.А.* Об одном подходе к решению задачи Дарбу // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 1. С. 45–52.
7. *Molodenkov A.V., Pereleyaev S.E.* Solution of Approximate Equation for Modified Rodrigues Vector and Attitude Algorithm Design // *J. Guidance, Control Dynam.* 2021. V. 44. No. 6. P. 1224–1227.
8. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи минимального по времени поворота космического аппарата // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2021. № 4. С. 142–156.
9. *Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.* Quasioptimal Spacecraft Attitude Control Constructed According to the Poincot Concept // *Aerospace.* 2023. V. 10. No. 5. P. 402–417.

10. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Квазиоптимальное по быстрдействию угловое ускорение космического аппарата, полученное на основе концепции Пуансо // *АиТ*. 2025. № 3. С. 38–59.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
12. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Решение задачи оптимальной переориентации сферически симметричного вращающегося космического аппарата с импульсным управлением // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2007. № 10. С. 78–84.
13. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006.
14. Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А. и др. Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации // *Препринт № 57*. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 27.12.2024

После доработки 17.10.2025

Принята к публикации 27.10.2025

Управление в технических системах

© 2026 г. В.С. ВЕРБА, чл.-корр. РАН (vvs.msk@gmail.com),
В.И. МЕРКУЛОВ, д-р техн. наук (ilya-zagrebnyi@mail.ru)
(АО Концерн «Вега», Москва),
Д.В. ЗАКОМОЛДИН, д-р техн. наук (denjuga68@yandex.ru)
(Военная академия воздушно-космической обороны
им. Маршала Советского Союза Г.К. Жукова, Тверь)

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРЕХВАТА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО МАНЕВРЕННОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ИНЕРЦИОННЫМ ПЕРЕХВАТЧИКОМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ЗАКОНЕ УПРАВЛЕНИЯ

Представлены результаты синтеза нестационарного закона управления перехватчиком при его наведении на высокоманевренную воздушную цель, учитывающего несоответствие динамических свойств перехватчика и цели. Приведены результаты моделирования, свидетельствующие о потенциальной возможности перехвата воздушной цели и повышении точности наведения.

Ключевые слова: закон управления перехватчиком, маневрирующая воздушная цель, несоответствие динамических свойств, промах.

DOI: 10.7868/S2413977726060036

1. Введение

Необходимость эффективного решения задачи перехвата средств воздушно-космического нападения (СВКН) определяется требованием защиты важных объектов обороняющейся стороны от их потенциального уничтожения.

С учетом тенденции постоянного совершенствования СВКН в направлении увеличения их скоростных и маневренных характеристик [1–7] инерционность средств перехвата может оказать существенную роль в снижении их потенциально возможной эффективности при решении задачи наведения на высокоманевренные высокоскоростные летательные аппараты (ВСЛА) [8].

В [8] рассмотрено два возможных варианта учета инерционности перехватчика. Первый подход основан на формировании сигнала управления не по текущим, а по прогнозным значениям координат состояния ВСЛА. Второй подход базируется на трансформации входных воздействий, что позволяет за счет использования в сигнале управления корректирующих поправок, учитывающих высокие производные координат состояния, скомпенсировать инерционность перехватчика. Однако предложенные подходы предопределяют усложнение системы информационного обеспечения за счет необходимости оценивания высоких производных угловой скорости линии визирования [8].

Вышеизложенное определяет необходимость поиска альтернативных вариантов синтеза сигналов управления перехватчиком при решении задачи наведения на ВСЛА. При этом предпочтительно, чтобы данный сигнал управления перехватчиком удовлетворял следующим требованиям [9]:

- учитывал несоответствия динамических свойств перехватчика и ВСЛА;
- был нестационарным, обеспечивая возможность перераспределения приоритетов управления от устранения ошибок наведения по углу на начальном этапе наведения к устранению ошибок по угловой скорости линии визирования по мере приближения к ВСЛА.

Цель статьи – синтез нестационарного сигнала управления инерционным перехватчиком, обеспечивающего потенциальную возможность перехвата ВСЛА.

2. Постановка задачи и синтез сигнала управления

Синтез выполнен на основе локального варианта оптимизации статистической теории оптимального управления. Этот аппарат позволяет в рамках решения линейно-квадратично-гауссовской задачи для системы с заданной частью [9]

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \xi(t),$$

в состав которой входит подсистема (воздушная цель)

$$(2) \quad \dot{\mathbf{x}}_T(t) = \mathbf{F}_T(t)\mathbf{x}_T(t) + \xi_T(t),$$

формирующая входные воздействия для подсистемы (перехватчика)

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}}_y(t) = \mathbf{F}_y\mathbf{x}_y(t) + \mathbf{B}_y\mathbf{u}(t) + \xi_y(t),$$

при наличии измерений

$$(4) \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \xi_z(t),$$

найти управление

$$(5) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}_y^T [\mathbf{Q}\Delta\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{G}\hat{\mathbf{s}}_y(t)],$$

оптимальное по минимуму функционала

$$(6) \quad I = M \left\{ (\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_y(t))^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_y(t)) + 2(\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_y(t))^T \mathbf{G} \mathbf{s}_y(t) + \mathbf{s}_y^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{s}_y(t) + \int_0^t \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{u}(t) dt \right\},$$

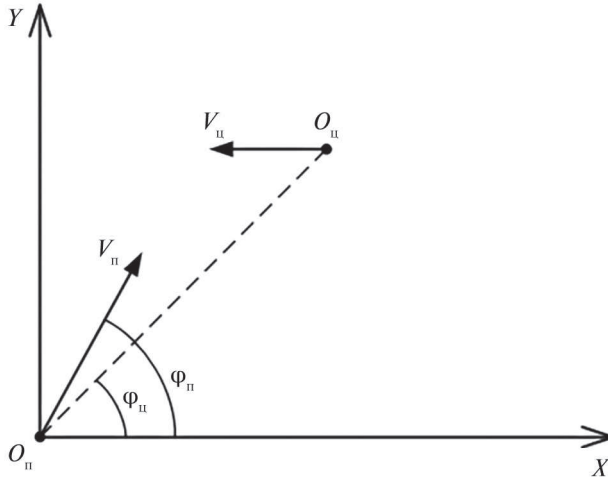


Рис. 1. Геометрия взаимного расположения перехватчика и цели.

где

$$(7) \quad \mathbf{x} = [\mathbf{x}_T^T \quad \mathbf{x}_y^T]^T, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_T & \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{F}_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{O}_3 \mathbf{B}_y], \quad \mathbf{s}_y = (\mathbf{F}_T - \mathbf{F}_y) \mathbf{x}_T, \\ \xi = [\xi_T^T \quad \xi_y^T]^T, \quad \Delta \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_T - \hat{\mathbf{x}}_y,$$

\mathbf{x}_y и \mathbf{x}_T – n -мерные векторы состояния; \mathbf{F}_y и \mathbf{F}_T – матрицы внутренних связей процессов (2) и (3), характеризующие их динамичность; \mathbf{u} – вектор управления; \mathbf{B}_y – матрица эффективности сигналов управления; \mathbf{z} – вектор измерений; ξ – вектор шумов; ξ_T , ξ_y и ξ_z – векторы шумов состояния (2), (3) и измерений (4); \mathbf{H} – матрица связи \mathbf{z} и \mathbf{x} ; \mathbf{Q} и \mathbf{K} – матрицы штрафов за точность и экономичность функционирования; \mathbf{G} – матрица взаимных связей $\Delta \mathbf{x}$ и \mathbf{s}_y ; \mathbf{s}_y – вектор, характеризующий несоответствие динамических свойств систем (процессов); t – текущее время; \mathbf{O}_1 – \mathbf{O}_3 – нулевые матрицы соответствующих размеров; $M\{\bullet\}$ – знак математического ожидания.

Для сокращения математических выкладок далее в представлениях (1)–(7) опущена зависимость от времени.

Геометрия взаимного расположения перехватчика и цели приведена на рис. 1, где представлено: O_{Π} и $O_{\text{Ц}}$ – положения перехватчика и цели; $\mathbf{V}_{\text{Ц}}$ и \mathbf{V}_{Π} – векторы скорости цели и перехватчика; φ_{Π} – угол визирования перехватчика (угол между вектором скорости перехватчика и горизонтальной осью); $\varphi_{\text{Ц}}$ – угол визирования ВСЛА (угол между линией визирования системы «перехватчик–цель» и горизонтальной осью).

Задача синтеза требуемого управления формулируется следующим образом.

Пусть ВСЛА как цель определяется системой уравнений вида:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_{\Pi} &= \omega_{\Pi}, & \varphi_{\Pi}(0) &= \varphi_{\Pi 0}, \\ \dot{\omega}_{\Pi} &= -\frac{2\dot{D}}{D}\omega_{\Pi} + \frac{1}{D}(j_{\Pi} - \dot{j}_{\Pi}) + \xi_{\Pi}, & \omega_{\Pi}(0) &= \omega_{\Pi 0}. \end{aligned}$$

Необходимо для инерционного перехватчика, соответствующего модели:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_{\Pi} &= \omega_{\Pi}, & \varphi_{\Pi}(0) &= \varphi_{\Pi 0}, \\ \dot{\omega}_{\Pi} &= -\frac{1}{T_{\Pi}}\omega_{\Pi} + \frac{b}{T_{\Pi}}j_{\Pi} + \xi_{\Pi}, & \omega_{\Pi}(0) &= \omega_{\Pi 0}, \end{aligned}$$

при наличии измерений

$$(10) \quad \varphi_z = \varphi_{\Pi} + \xi_z$$

найти сигнал управления j_{Π} , минимизирующий функционал

$$(11) \quad \begin{aligned} I = M \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \varphi_{\Pi} - \varphi_{\Pi} \\ \omega_{\Pi} - \omega_{\Pi} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} \frac{q_{11}}{D} & q_{12} \\ q_{21} & \frac{q_{22}}{D} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \varphi_{\Pi} - \varphi_{\Pi} \\ \omega_{\Pi} - \omega_{\Pi} \end{array} \right] + \\ & + 2 \left[\begin{array}{c} \varphi_{\Pi} - \varphi_{\Pi} \\ \omega_{\Pi} - \omega_{\Pi} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \left(\frac{1}{T_{\Pi}} - \frac{2\dot{D}}{D} \right) \omega_{\Pi} \end{array} \right] + \\ & + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \left(\frac{1}{T_{\Pi}} - \frac{2\dot{D}}{D} \right) \omega_{\Pi} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} \frac{q_{11}}{D} & q_{12} \\ q_{21} & \frac{q_{22}}{D} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \left(\frac{1}{T_{\Pi}} - \frac{2\dot{D}}{D} \right) \omega_{\Pi} \end{array} \right] + \int_0^t j_{\Pi}^2 k_j dt \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

В (8)–(11) принято: φ_{Π} и φ_{Π} – соответственно углы визирования ВСЛА и перехватчика в системе координат, связанной с центром массы перехватчика; ω_{Π} и ω_{Π} – соответственно скорости изменения углов визирования; $\varphi_{\Pi 0}$, $\varphi_{\Pi 0}$ и $\omega_{\Pi 0}$, $\omega_{\Pi 0}$ – соответственно начальные значения углов визирования и их скоростей; b и T_{Π} – коэффициент передачи и постоянная времени перехватчика; j_{Π} и \dot{j}_{Π} – соответственно поперечные ускорения ВСЛА и перехватчика; D и \dot{D} – соответственно дальность от перехватчика до ВСЛА и скорость ее изменения; ξ_{Π} и ξ_{Π} – центрированные гауссовские возмущения траекторий ВСЛА и перехватчика; $\frac{q_{11}}{D}$, q_{12} , q_{21} , $\frac{q_{22}}{D}$ – неотрицательные элементы матрицы \mathbf{Q} ; g_{11} , g_{12} , g_{21} , g_{22} – неотрицательные элементы матрицы \mathbf{G} . При этом следует отметить, что на практике нахождение элементов матриц \mathbf{Q} , \mathbf{G} и \mathbf{K} является наиболее сложной задачей, решение которой в большинстве своем базируется на эмпирических способах. Наиболее известный способ основан на принципе равнопрочности. Смысл этого способа состоит в том, что

произведения квадратов максимально допустимых ошибок на соответствующие коэффициенты штрафов полагаются одинаковыми для всех координат. Задаваясь максимально допустимыми ошибками (дисперсиями) и одним из коэффициентов штрафов, можно предварительно оценить значения коэффициентов штрафов по другим координатам. Далее полученные значения коэффициентов уточняются на основе моделирования.

Спецификой нестационарной модели цели (8) является ее высокая универсальность, обусловленная учетом влияния на угловые координаты дальности и скорости сближения и возможность, манипулируя законами изменения $\dot{J}_Ц$, реализовать маневры практически любой сложности.

Кинематические модели (8) и (9) наряду с тем, что являются достаточно простыми, позволяют описать геометрию взаимного расположения перехватчика и ВСЛА и скорость ее (геометрии) изменения с достаточной для решаемой задачи точностью [8].

Особенностью функционала (11) является то, что наряду с возможностью учета требований к точности и экономичности управления (первое и четвертое слагаемые функционала), он позволяет учесть требование к снижению взаимного влияния ошибок управления и несоответствия динамических свойств перехватчика и ВСЛА (второе слагаемое функционала), а также требование к компенсации несоответствия динамических свойств перехватчика и ВСЛА (третье слагаемое). Кроме того, в первом и третьем слагаемых функционала (11) содержатся нестационарные коэффициенты матрицы штрафов за точность управления $\frac{q_{11}}{\mathcal{D}}$, $\frac{q_{22}}{\mathcal{D}}$, введение которых позволяет получить нестационарный сигнал управления даже при использовании упрощенной стационарной модели перехватчика (9) [9].

Поскольку модели (8) и (9) линейные, шумы гауссовские, а функционал (11) квадратичный, то на основании теоремы разделения и статистической эквивалентности синтез сигналов управления будет выполняться на основе детерминированных моделей (8) и (9) при условии $\xi_Ц = 0$, $\xi_П = 0$, а координаты (8) и (9) заменены их оптимальными оценками.

Поставив в соответствие (8) с (2), (9) с (3), а (11) с (6) и (7), получим:

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_T &= \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_Ц \\ \hat{\omega}_Ц \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_y = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_П \\ \hat{\omega}_П \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ T_П \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \hat{J}_П, \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \frac{q_{11}}{\mathcal{D}} & q_{12} \\ q_{21} & \frac{q_{22}}{\mathcal{D}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_П} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\hat{\mathcal{D}}}{\hat{\mathcal{D}}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{T_П} - \frac{2\hat{\mathcal{D}}}{\hat{\mathcal{D}}} \right) \hat{\omega}_Ц \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = k_j. \end{aligned}$$

Анализ \mathbf{s}_y позволяет прийти к заключению, что на больших расстояниях ($\hat{\omega}_\Pi \rightarrow 0$) несоответствие динамических свойств ВСЛА и перехватчика практически не оказывает никакого влияния, в то время как на малых расстояниях, характеризуемых возрастающим значением $\hat{\omega}_\Pi$, значимость \mathbf{s}_y увеличивается.

Подставив (12) в (5), получим

$$j_\Pi = \frac{1}{k_j} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ T_\Pi \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} \frac{q_{11}}{\hat{D}} & q_{12} \\ q_{21} & \frac{q_{22}}{\hat{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_\Pi - \hat{\varphi}_\Pi \\ \hat{\omega}_\Pi - \hat{\omega}_\Pi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{T_\Pi} - \frac{2\hat{D}}{\hat{D}} \right) \hat{\omega}_\Pi \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & b \\ k_j T_\Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q_{11}}{\hat{D}} \Delta\hat{\varphi} + q_{12} \Delta\hat{\omega} - g_{12} \left(\frac{1}{T_\Pi} - \frac{2\hat{D}}{\hat{D}} \right) \hat{\omega}_\Pi \\ q_{21} \Delta\hat{\varphi} + \frac{q_{22}}{\hat{D}} \Delta\hat{\omega} - g_{22} \left(\frac{1}{T_\Pi} - \frac{2\hat{D}}{\hat{D}} \right) \hat{\omega}_\Pi \end{bmatrix},$$

тогда

$$(13) \quad j_\Pi = \frac{bq_{21}}{k_j T_\Pi} \Delta\hat{\varphi} + \frac{bq_{22}}{k_j T_\Pi \hat{D}} \Delta\hat{\omega} - \frac{bg_{22}}{k_j T_\Pi} \left(\frac{1}{T_\Pi} - \frac{2\hat{D}}{\hat{D}} \right) \hat{\omega}_\Pi,$$

$$\Delta\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_\Pi - \hat{\varphi}_\Pi; \quad \Delta\hat{\omega} = \hat{\omega}_\Pi - \hat{\omega}_\Pi.$$

Анализ (13) позволяет заключить следующее:

1. Сигнал управления (13) всевысотный. Всевысотность определяется использованием в качестве сигнала управления поперечного ускорения перехватчика, а не угла отклонения рулей, эффективность которых определяется различной плотностью воздуха на различных высотах.

2. Сигнал управления состоит из трех компонент, при этом первое слагаемое $\frac{bq_{21}}{k_j T_\Pi} \Delta\hat{\varphi}$ представляет собой разновидность прямого метода, сумма первого и второго слагаемых $\frac{bq_{21}}{k_j T_\Pi} \Delta\hat{\varphi} + \frac{bq_{22}}{k_j T_\Pi \hat{D}} \Delta\hat{\omega}$ — метода последовательных упреждений. На больших дальностях при $\hat{\omega}_\Pi \rightarrow 0$, $\frac{bq_{22}}{k_j T_\Pi \hat{D}} \rightarrow 0$ наибольшую значимость приобретает требование устранения ошибок по углу $\Delta\varphi$. На малых дальностях наряду с возрастанием влияния второго слагаемого ввиду возрастания $\frac{bq_{22}}{k_j T_\Pi \hat{D}}$ при уменьшении \hat{D} возрастает значимость третьего слагаемого по причине возрастающего значения $\hat{\omega}_\Pi$. Вышеизложенное определяет нестационарность полученного сигнала управления. Наличие в третьем слагаемом (13) множителя $\frac{1}{T_\Pi} - \frac{2\hat{D}}{\hat{D}}$, характеризующего несоответствие динамических свойств перехватчика и ВСЛА, определяет удовлетворение требованию учета в сигнале управления данного несоответствия, которое возрастает с уменьшением дальности, предопределяя возрастание влияния маневра

цели. Учет несоответствия динамических свойств перехватчика и ВСЛА в сигнале управления позволит данное несоответствие скомпенсировать за счет формирования должного управляющего воздействия.

3. Для формирования требуемого сигнала управления (13) необходимо оценивать дальность, скорость сближения, бортовой пеленг ВСЛА и угловую скорость линии визирования, что не накладывает ограничений на его практическую реализацию.

4. Вес ошибок в сигнале управления (13) определяется не абсолютными значениями коэффициентов штрафов, а их отношениями $\frac{q_{21}}{k_j}$; $\frac{q_{22}}{k_j}$; $\frac{q_{22}}{k_j}$.

3. Исследование эффективности сигнала управления

Целью исследований является проверка потенциальной возможности осуществлять перехват ВСЛА, совершающего сложный маневр со сменой знака производной угловой скорости, используя инерционный перехватчик, управляемый по закону (13).

Исследования проводились при перехвате ВСЛА на встречно-пересекающихся курсах при условии, что скорость цели превышает скорость перехватчика, при наличии ограничения на величину сигнала управления и отсутствии ошибок оценивания, т.е. $\hat{D} = D$, $\hat{\dot{D}} = \dot{D}$, $\hat{\varphi}_Ц = \varphi_Ц$, $\hat{\varphi}_П = \varphi_П$, $\hat{\omega}_Ц = \omega_Ц$, $\hat{\omega}_П = \omega_П$. Данное допущение справедливо с учетом поставленной цели работы, состоящей в получении сигнала управления, обеспечивающего потенциальный (без учета шумов и возмущений) перехват. При реализации данного подхода по результатам моделирования могут быть получены предварительные оценки динамических ошибок системы наведения в виде величин текущих и конечных промахов. Оценка флуктуационных ошибок, когда шумы отличны от нуля, требует дополнительных исследований.

При этом для оценки возможности упрощения закона (13) при исследовании проверялись три варианта закона наведения:

I – определяется соотношением (13);

II – определяется соотношением

$$(14) \quad \hat{j}_П = \frac{bq_{21}}{k_j T_П} \Delta \hat{\varphi} + \frac{bq_{22}}{k_j T_П \hat{D}} \Delta \hat{\omega};$$

III – определяется соотношением

$$(15) \quad \hat{j}_П = \frac{bq_{21}}{k_j T_П} \Delta \hat{\varphi}$$

при различных значениях постоянной времени перехватчика $T_П$.

В качестве показателя эффективности использовались величины текущего и конечного промахов, а также значения боковых ускорений перехватчика, реализуемых в процессе перехвата.

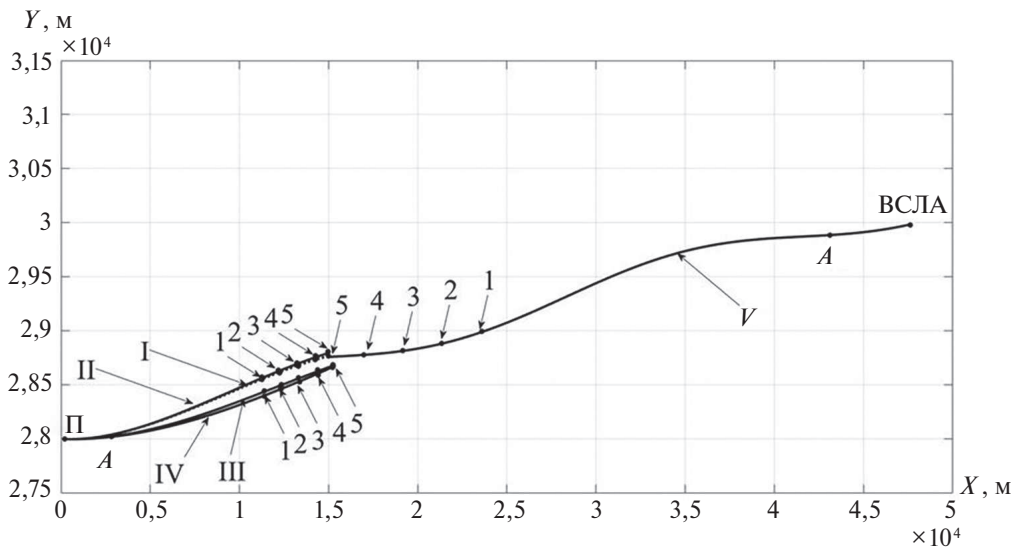


Рис. 2. Траектории движения ВСЛА и перехватчика в процессе перехвата.

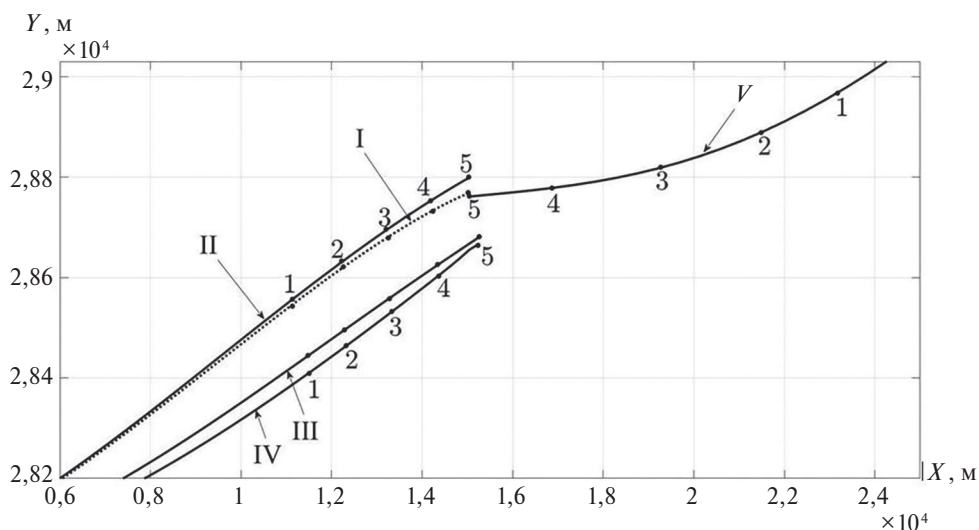


Рис. 3. Траектории ВСЛА и перехватчика на конечном участке наведения.

На рис. 2–5 представлены результаты моделирования:

- рис. 2 иллюстрирует движение ВСЛА и перехватчика на всей траектории перехвата в вертикальной плоскости;
- рис. 3 отображает траектории ВСЛА и перехватчика на конечном участке наведения;
- рис. 4 характеризует текущие h и конечные $h_{к}$ значения промахов, реализуемых при наведении в соответствии с j_1 , j_2 и j_3 ;
- рис. 5 характеризует значения реализуемых боковых ускорений.

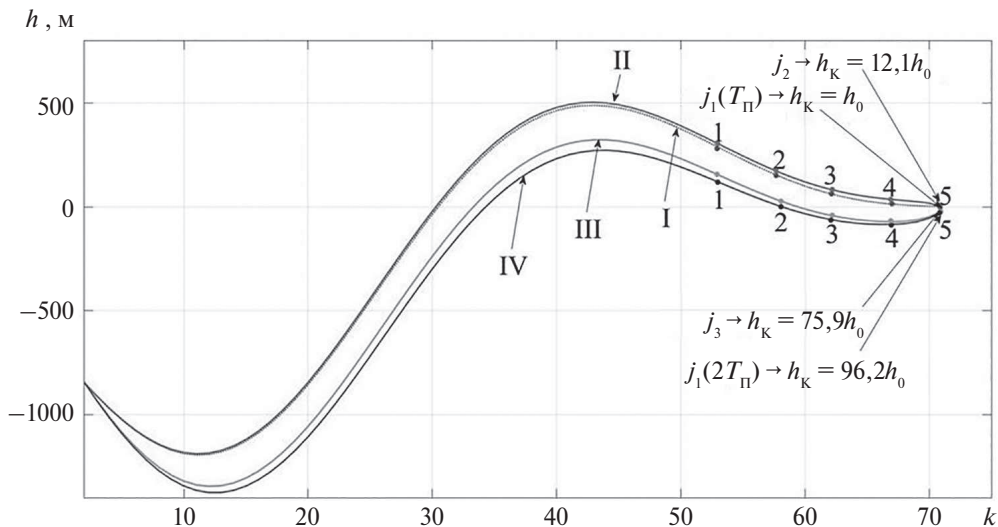


Рис. 4. Значения текущих и конечных промахов перехватчика при реализации различных законов наведения.

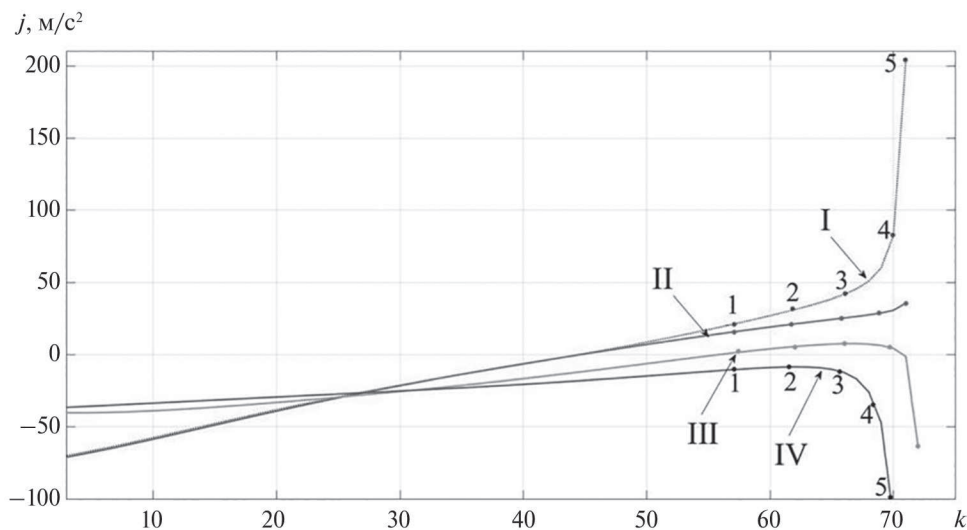


Рис. 5. Значения боковых ускорений перехватчика при реализации различных законов наведения.

На рис. 2 и 3 для вертикальной плоскости XOY цифрами I, II и III обозначены траектории перехватчика при реализации соответственно j_1 , j_2 и j_3 для постоянной времени $T_{\Pi} = 2$, при этом $b = 2$; IV – траектория перехватчика при реализации j_1 для постоянной времени $2T_{\Pi}$; V – траектория ВСЛА, осуществляющего маневрирование со сменой знака производных координат состояния; точки «ВСЛА» и «П» – соответственно начальные позиции ВСЛА

и перехватчика; точки $A, 1, 2, 3, 4, 5$ – текущие положения ВСЛА и перехватчика в одинаковые моменты времени.

На рис. 4 представлено: кривые I–IV – соответственно текущие промахи h при реализации j_1, j_2 и j_3 ; h_k – конечный промах; h_0 – значение конечного промаха при реализации синтезированного закона управления j_1 при постоянной времени T_{Π} .

На рис. 5 представлены кривые I–IV, соответствующие текущим значениям боковых ускорений, возникающих в процессе перехвата.

Анализ результатов моделирования позволил заключить следующее:

1. Использование нестационарного закона управления j_1 (13), учитывающего несоответствие динамических свойств цели и перехватчика, позволяет повысить точность наведения инерционного перехватчика. При этом попытка упростить закон управления, используя для расчета боковых ускорений выражения (14) и (15), приводит к снижению точности наведения, характеризуемой конечным промахом перехватчика h_k , что показывает совместный анализ кривых I–IV на рис. 4.

2. Учет нестационарности в законе наведения оказывает существенную роль в эффективности наведения. Это подтверждается совместным анализом кривых I–III на рис. 2. Анализ показывает, что при принятых начальных условиях наведение в соответствии с нестационарными законами наведения по траекториям I и II после преодоления перехватчиком первых 3 км (точка A на рис. 2), что соответствует удалению до цели порядка 40 км, отделяется от кривой III, являющейся результатом перехвата в соответствии со стационарным законом наведения.

3. Дополнительный учет в j_1 несоответствия динамических свойств перехватчика и цели оказывает влияние на конечном этапе перехвата. Когда перехватчик преодолел отметку порядка 7 км, наблюдается разделение траекторий I и II на рис. 3. Этой позиции перехватчика соответствует расстояние до цели порядка 25 км. Вышеизложенное определяет кардинальную роль учета несоответствия динамических свойств перехватчика и цели в законе наведения.

4. Текущие значения промахов имеют сходящуюся тенденцию для всех законов управления j_1 – j_3 перехватчиков, чему свидетельствует совместный анализ кривых I–IV на рис. 4.

5. Увеличение инерционности перехватчика, характеризуемой постоянной времени T_{Π} , в два раза снижает эффективность перехвата, чему свидетельствует совместный анализ кривых I и IV на всех рисунках.

6. Отсутствуют какие-либо ограничения на практическую реализацию закона управления (13). Это определяется тем, что, с одной стороны, для информационного обеспечения (13) могут быть задействованы существующие измерители дальности, скорости и угловых координат, с другой – наведение выполняется в рамках реализуемых боковых ускорений (кривые I–IV на рис. 5).

4. Заключение

В работе на основе локального варианта оптимизации синтезирован нестационарный закон управления инерционным перехватчиком при наведении его на маневрирующую воздушную цель, учитывающий несоответствие динамических свойств перехватчика и цели.

Нестационарность закона управления и учет несоответствия динамических свойств перехватчика и цели позволяют уменьшить величину конечного промаха перехватчика. При этом нестационарность закона управления для приведенных условий моделирования начинает оказывать влияние с расстояния до цели порядка 40 км, а учет несоответствия динамических свойств перехватчика и цели с расстояния до цели порядка 25 км.

Нестационарность закона наведения обеспечена путем введения в функционал, лежащий в основе синтеза, нестационарных (зависящих от условия применения) коэффициентов штрафов за точность управления. Учет несоответствия динамических свойств перехватчика и ВСЛА обеспечен посредством использования различных математических моделей, описывающих данные объекты, и введением в функционал матрицы измеряемых возмущений, характеризующей несоответствие динамических свойств.

В результате проведенного исследования установлено, что синтезированный нестационарный закон управления перехватчиком, учитывающий несоответствие динамических свойств перехватчика и цели, потенциально обеспечивает перехват цели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верба В.С., Меркулов В.И., Закомолдин Д.В.* Проблемы перехвата высокоскоростных летательных аппаратов, маневрирующих по сложным законам. Ч. 1. // *Успехи современной радиоэлектроники*. 2024. № 3. С. 5–12.
2. *Верба В.С., Меркулов В.И., Закомолдин Д.В., Лихачев В.П.* Проблемы перехвата высокоскоростных летательных аппаратов, маневрирующих по сложным законам. Ч. 2. // *Успехи современной радиоэлектроники*. 2024. № 4. С. 5–14.
3. *Yibo D., Yue X., Chen G., et al.* Review of control and guidance technology on hypersonic vehicle // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2022. V. 35. No. 7. P. 1–18.
4. *Grant M., Antony T.* Rapid indirect trajectory optimization of a hypothetical long range weapon system // In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. 2016. P. 1–19.
5. *Besser H., Shaffer A., Zimper D., et al.* Hypersonic Vehicles: Game Changers for Future Warfare // *Transforming Joint Air Power: J. JAPCC*. 2017. No. 24. P. 11–27.
6. *Shen H., Liu Y., Chen B., et al.* Control-relevant modeling and performance limitation analysis for flexible air-breathing hyper-sonic vehicles // *Aerospace Science Technology*. 2018. No.76. P. 340–349.
7. *Karako T., Dahlgren M.* Complex Air Defense Countering the Hypersonic Missile Threat. A Report of the CSIS Missile Defense Project. 2022. 69 p.

8. *Верба В.С., Меркулов В.И., Ильчук А.Р.* Подходы к оптимизации методов наведения на высокоскоростные интенсивно маневрирующие цели. Ч. 3. // *АиТ.* 2025. № 2. С. 71–85.
9. *Меркулов В.И., Верба В.С.* Синтез и анализ авиационных радиоэлектронных систем управления. Кн. 1. Теоретические основы построения и разработки. М.: Радиотехника, 2023.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 30.07.2025

После доработки 10.10.2025

Принята к публикации 15.10.2025

Управление в технических системах

© 2026 г. А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (agolubin@hse.ru)

(Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Москва;

Центр информационных технологий в проектировании РАН,

Московская обл., Одинцово)

В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (info@ditc.ras.ru)

(Центр информационных технологий в проектировании РАН,

Московская обл., Одинцово)

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ СТРАХОВАНИЯ И ИНВЕСТИРОВАНИЯ В МОДЕЛИ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА С ФОНОВЫМИ РИСКАМИ¹

Изучена одношаговая задача оптимального выбора страховщиком дележа риска между ним и группой клиентов при одновременном выборе портфеля инвестиций на рынке из n рисковых активов, имеющих случайные доходности, и одного безрискового актива. Предполагается наличие «фоновых рисков» (background risks), т.е. внешних случайных факторов, влияющих на ущербы страхователей, и систематических рисков, влияющих на доходности активов. Целевой функционал есть функционал типа Марковица, т.е. зависящий лишь от первых двух моментов финального капитала страховщика. Показано, что оптимальное страхование принадлежит классу stop-loss страхований. Найдены уравнения для определения значений параметров в функции дележа риска и в оптимальном инвестиционном портфеле. Решен численный пример.

Ключевые слова: оптимальное страхование, оптимальное инвестирование, функционал Марковица, фоновый риск.

DOI: 10.7868/S241397726060046

1. Введение

Один из первых результатов [1] исследования моделей с фоновыми рисками показал, что без предположения о наличии фоновых рисков возникает расхождение между теоретическими и эмпирическими данными при решении различных задач финансовой математики. Позже появился целый ряд работ по выбору инвестиционного портфеля, максимизирующего ожидаемую полезность финального капитала при наличии фоновых рисков. В качестве примера можно привести статью [2], где показано, что «несправедливый» (unfair) внешний риск (с отрицательным средним) увеличивает неприятие риска в функции полезности инвестора. Характерная черта таких постановок задач – отсутствие зависимости между фоновыми рисками и доходностями активов.

¹ Исследование выполнено в рамках государственного задания, (проект FFNR-2024-0003).

Однако в [3] показано наличие существенной корреляции доходностей активов и определенных фоновых рисков.² Авторы [4] исследовали влияние фонового риска на выбор портфеля и эффективную границу в рамках критериев «среднее-дисперсия». В обзоре [5] описаны существующие результаты в рамках подходов: «среднее-дисперсия» и ожидаемая полезность при наличии аддитивных внешних рисков.

Страхование как инструмент уменьшения ущерба от фоновых рисков было использовано в динамических моделях с непрерывным временем. В [6] изучены решения по формированию портфеля из рискованных активов и управлению потреблением при фоновом риске. С помощью метода динамического программирования было найдено, что оптимальное страхование хеджирует риски инвестирования и устанавливает баланс между ростом и волатильностью потребления. В [7] была исследована задача выбора страхования, уменьшающего ущерб от внешнего кусочно-постоянного процесса фонового риска; найдена характеристика функции, двойственной к функции Беллмана, как решения уравнения Гамильтона–Беллмана–Якоби. В близкой постановке авторы [8] изучали с использованием метода динамического программирования задачу выбора фирмой стратегии страхования от скачкообразного процесса сбоя в продуктивности и от природных бедствий, но без возможности инвестирования.

В представленной статье исследуется одношаговая задача выбора страховщиком оптимального страхования для группы страхователей (клиентов) – так называемая модель индивидуального риска. При этом одновременно страховщик выбирает инвестиционный портфель для рынка ценных бумаг с имеющимся безрисковым активом. Максимизируемым функционалом является функционал типа Марковица [9], т.е. зависящий лишь от первых двух моментов финального капитала, который складывается из капитала, полученного от страховой сделки, и капитала, заработанного на инвестициях. Предполагается наличие фонового риска, влияющего на размер ущерба клиентов, и фонового риска, влияющего на общую доходность инвестиций. Полученные результаты отличаются от предыдущих в нескольких отношениях. Во-первых, вместо страхования только фоновых рисков здесь найдена оптимальная функция дележа риска для группы клиентов. Во-вторых, исследована задача выбора как страхования, так и инвестиционного портфеля. В-третьих, широко используемая в финансовой математике нормальная аппроксимация риска здесь не используется, и, таким образом, полученные результаты являются в этом смысле «точными».

В разделе 2 описаны рынки страхования и инвестирования без фоновых рисков и при наличии фоновых рисков. Сформулирована оптимизационная задача с дисперсией в качестве меры риска. Раздел 3 посвящен нахождению

² Применительно к портфельной теории термин «систематические риски активов» более уместен, чем «фоновые риски». Но следуя сложившейся в большинстве статей практике, ниже будем использовать прилагательное «фондовый» для страховых и систематических инвестиционных рисков.

ее решения, причем оптимальное страхование и оптимальный портфель находятся как решения отдельных задач в силу особенностей целевого функционала. В разделе 4 дана формулировка аналогичной оптимизационной задачи, но с использованием стандартного отклонения как меры риска. Получены необходимые условия оптимальности. Разделы 5 и 6 содержат соответственно численный пример и заключительные замечания.

2. Формулировка задачи

2.1. Описание рынков инвестирования и страхования

Сначала рассмотрим инвестиционный рынок из $n + 1$ активов (см., например, [10]), где вектор доходностей равен $\bar{R} = (R_0, \dots, R_n)$ и фоновый риск отсутствует. Пусть $R_0 = m_0$ почти наверное (п.н.), т.е. это безрисковый актив. Отметим, что наличие такого актива позволяет не тратить весь начальный капитал $w > 0$ на рискованные инвестиции, например, при $m_0 = 1$ можно не инвестировать сумму wa_0 , а положить ее «в карман» (без учета инфляции). Обозначим через $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ инвестиционный портфель, где a_i – доля в процентах от начального капитала $w > 0$, вкладываемая в i -ый актив. Типичным бюджетным ограничением является $\sum_{i=0}^n a_i = 1$. Это означает самофинансирование инвестора-страховщика и его возможность «коротких продаж», т.е. заимствование одних активов по текущим ценам с целью вложить деньги в другие с возмещением затем по ценам следующей котировки. Общая доходность есть $X_{\bar{a}} = w \sum_{i=0}^n a_i R_i \equiv w(\sum_{i=1}^n a_i (R_i - m_0) + m_0)$, где $w > 0$ – начальный капитал. После подстановки $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^n a_i$ имеем среднюю общую доходность и дисперсию

$$\mu(a) = w \left(\sum_{i=1}^n a_i \Delta m_i + m_0 \right), \quad \text{где } \Delta m_i = m_i - m_0, \quad m_i = E R_i, \quad a \in R^n,$$

$$\sigma^2(a) = w^2 a C a^T,$$

где a^T обозначает транспонированную вектор-строку a . Введем естественные ограничения:

$$0 < m_0 < \min_{i=1, \dots, n} m_i,$$

ковариационная матрица рисков доходностей C размерности $n \times n$ положительно определена.

Перейдем к описанию рынка страхования. Пусть группа из l клиентов однородна, т.е. их ущербы X_1, \dots, X_l – независимые неотрицательные одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с функцией распределения $F_1(x)$. Страховщик выбирает измеримую по Борелю функцию дележа $I(x) : 0 \leq I(x) \leq x, x \in [0, \infty)$, тогда доля ущерба i -го клиента, оплачиваемая страховщиком, равна $I(X_i)$. Начальный капитал страховщика $w > 0$; премия, т.е. взнос от клиента, определяется (см., например, [11]) по известному принципу среднего значения $d = (1 + \alpha)E I(X_1)$, где $\alpha > 0$ – заданный коэффициент накрутки.

2.2. Модель с фоновыми рисками

Теперь рассмотрим модель страхования и инвестирования с учетом фоновых рисков. Страховщик направляет свой начальный капитал w на инвестиции,³ и его финальный капитал складывается из дохода от страхования $S_1 = l(1 + \alpha)E I(X_1 + Z) - \sum_1^l I(X_j + Z)$ и дохода от инвестиций $S_2 = w(\sum_1^n a_i(R_i - m_0) + m_0) + V$. Здесь: Z – фоновый страховой риск такой, что $X_j^Z \stackrel{\text{def}}{=} X_j + Z \geq 0$ п.н.; V – инвестиционный фоновый риск, $0 < \sigma^2(V) < \infty$.

Замечание 1. В этой постановке ущербы клиентов X_j^Z , $j = 1, \dots, l$, оказываются одинаково распределенными, но не являются независимыми, поскольку с.в. Z входит в выражение для каждого ущерба. Более того, X_j и Z считаются, вообще говоря, зависимыми. Такая модель является нетипичной для задач «классической» актуарной математики (см., например, [11]), в которых предполагается независимость ущербов. Отметим, что одинаковые распределения с.в. X_j^Z , $j = 1, \dots, l$, предполагают одинаковые ковариации $\text{cov}(X_j, Z)$ для всех $j = 1, \dots, l$, поскольку $\sigma^2(X_j + Z) = \sigma^2(X_j) + \sigma^2(Z) + 2\text{cov}(X_j, Z)$. Следовательно, $\text{cov}(X_j^Z, X_i^Z) = \text{cov}(X_1^Z, X_2^Z)$ для всех $j \neq i$. Фоновые риски Z и V , влияющие соответственно на ущербы страхователей и общую доходность от инвестирования рискованных активов, рассматриваются как независимые. Это условие представляется обоснованным, поскольку здесь рынки страхования и инвестирования имеют разную природу и не связаны между собой.

Исследуемая задача максимизации функционала Марковица имеет вид

$$(1) \quad J[I, a] \equiv E(S_1 + S_2) - \beta\sigma^2(S_1 + S_2) \rightarrow \max_{I, a}, \quad 0 \leq I(x) \leq x, \quad a \in R^n.$$

Здесь $\beta > 0$ имеет смысл коэффициента осторожности инвестора-страховщика: чем больше β , тем осторожнее страховщик. Подставляя выражения для S_1 и S_2 , получаем

$$(2) \quad \begin{aligned} J[I, a] = & l\alpha E I(X_1^Z) + w(a\Delta m^T + m_0) + EV - \beta(l\sigma^2[I(X_1^Z)] + \\ & + l(l-1)\text{cov}(I(X_1^Z), I(X_2^Z))) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V), \end{aligned}$$

где $Q^T = \text{cov}(R, V)$ – вектор-столбец с компонентами $\text{cov}(R_i, V)$, $i = 1, \dots, n$.

3. Основные результаты

Вернемся к задаче (1) и рассмотрим вспомогательную задачу

$$(3) \quad J[I, a] \rightarrow \max_I, \quad 0 \leq I(x) \leq x,$$

³ Здесь допускается возможность выплаты суммарного взноса ld частями вплоть до окончания страхового периода, поэтому доступный для инвестирования капитал в начале периода, т.е. в момент принятия решения на страхование и инвестирование, равен w .

при фиксированном $a \in R^n$, выражение для $J[I, a]$ приведено в (2). Следующее утверждение дает необходимые условия оптимальности в (3), устанавливая: вид оптимальной $I^*(x) = x \wedge k^*$ (stop loss страхование с так называемым уровнем удержания страховщика k^*), где $x \wedge y \stackrel{def}{=} \min\{x, y\}$, и уравнение для нахождения параметра k^* .

Утверждение 1. Задача (3) имеет решение, $I^(x) = x \wedge k^*$, где $0 < k^* < \infty$ – единственный корень уравнения оптимальности*

$$(4) \quad \xi(k) = 0, \quad \text{где} \quad \xi(k) = \alpha - 2l\beta \left(k - \int_0^k (1 - F_1^Z(x)) dx \right).$$

Доказательство.

Лемма 1. Существует решение задачи (3).

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Обозначим через $I_\rho(x) = \rho I^*(x) + (1 - \rho)I(x)$, где $\rho \in [0, 1]$, функция I^* есть решение (3) и I – произвольная функция дележа. Найдём производную $\left. \frac{d}{d\rho} J[I_\rho, a] \right|_{\rho=1}$. Учтём, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} E I_\rho(X_1^Z) \right|_{\rho=1} &= \int_0^\infty (I^*(x) - I(x)) dF_1^Z(x), \\ \left. \frac{d}{d\rho} \sigma^2(I_\rho(X_1^Z)) \right|_{\rho=1} &= 2 \int_0^\infty (I^*(x) - E I^*(X_1^Z))(I^*(x) - I(x)) dF_1^Z(x) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} cov(I_\rho(X_1^Z), I_\rho(X_2^Z)) \right|_{\rho=1} &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty I^*(y)(I^*(x) - I(x)) dG(x, y) - \\ &\quad - 2 \int_0^\infty E I^*(X_1^Z)(I^*(x) - I(x)) dF_1^Z(x), \end{aligned}$$

где $F_1^Z(x) = P(X_1^Z \leq x)$ и $G(x, y) = P(X_1^Z \leq x, X_2^Z \leq y)$ – функции распределения, последняя очевидно симметрична по аргументам. Поскольку множество функций дележа выпукло, необходимое условие оптимальности I^* в (3) есть неравенство

$$\left. \frac{d}{d\rho} J[I_\rho, a] \right|_{\rho=1} \geq 0$$

для любой функции дележа I . Принимая во внимание выражение (2), переформулируем это условие: I^* максимизирует интеграл

$$(5) \quad \max_I \int_0^\infty \int_0^\infty I(x) \phi(x, y) dG(x, y),$$

где $\phi(x, y) = \alpha - 2\beta[I^*(x) - EI^*(X_1^Z) + (l-1)(I^*(y) - EI^*(X_1^Z))]$. Согласно лемме Неймана–Пирсона (см., например, [12]) функция дележа I^* доставляет максимум в (5) тогда и только тогда, когда

$$(6) \quad I^*(x) = \begin{cases} x, & \phi(x, y) > 0, \\ 0, & \phi(x, y) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры G . Рассмотрим (6) не для всех $(x, y) \in R_+^2$, а лишь на подмножестве $\{(x, y) : x = y, x \geq 0, y \geq 0\}$, причем интеграл в (5) берется, как и прежде, по функции распределения $G(x, y)$, при этом $\int_0^\infty \int_0^\infty I(x)\phi(x, x)dG(x, y) = \int_0^\infty I(x)\phi(x, x)dF_1^Z(x)$. Тогда необходимое условие выполнения (6) есть

$$(7) \quad I^*(x) = \begin{cases} x, & \psi(x) > 0, \\ 0, & \psi(x) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры F_1^Z .

$$(8) \quad \text{Здесь } \psi(x) \stackrel{def}{=} \phi(x, x) = \alpha - 2l\beta[I^*(x) - EI^*(X_1^Z)].$$

Значение $\psi(0) = \alpha + 2l\beta EI^*(X_1^Z) > 0$. При возрастании x от 0 функция $I^*(x) = x$ согласно (7), поэтому $\psi(x)$ убывает (см. (8)) вплоть до точки $x = k^*$ касания оси абсцисс. При увеличении x от k^* функция $\psi(x)$ не может ни убывать, ни возрастать. Действительно, при убывании $\psi(x)$ от нуля получаем противоречие с (7), поскольку $I^*(x) = 0$ для таких x . Предположим, что $\psi(x)$ возрастает от нуля, тогда (см. (7)) $I^*(x) = x$ и $\psi(x)$ должна убывать. Таким образом, $I^*(x) = x \wedge k^*$, $k^* \in (0, \infty)$. Получим уравнение для нахождения k^* , для этого подставим в выражение (8) вместо $I^*(x)$ переменную k и $E X_1^Z \wedge k = \int_0^k (1 - F_1^Z(x))dx$ вместо $E I^*(X_1^Z)$. В результате получаем уравнение оптимальности (4) в утверждении 1.

Отметим, что найденное оптимальное stop loss страхование отлично от франшизы (deductible), полученной в [13] для модели страхования от фоновых рисков с непрерывным временем и случайным горизонтом.

Замечание 2. Обозначим через $0 < IS \leq \infty$ максимально возможное значение X_1^Z или, более точно, $IS = \sup \text{supp} F_1^Z$ – верхняя грань носителя распределения F_1^Z . Случай, когда уровень удержания $k^* \geq IS$, означает полное возмещение ущерба клиенту.

В завершение анализа (1) изучим задачу

$$(9) \quad \max_a J[I, a], \quad a \in R^n$$

при фиксированной функции дележа $I(x)$. Целевая функция имеет вид

$$E S_1 + w(a\Delta m^T + m_0) + EV - \beta[\sigma^2(S_1) + w^2 a C a^T + 2waQ^T + \sigma^2(V)].$$

Найдем градиент и приравняем его к нулю, $J'_a[I, a] = w\Delta m - 2w^2\beta aC - 2w\beta Q = 0$. Отсюда

$$(10) \quad a^* = w^{-1} \left(\frac{\Delta m}{2\beta} - Q \right) C^{-1}.$$

В силу положительной определенности матрицы C функция $J[I, a]$ строго вогнута по a . Поэтому найденный вектор a^* является единственным решением (9). Таким образом, доказано

Утверждение 2. Единственным решением задачи (9) является портфель a^ , определенный в (10).*

Учитывая, что доход от страхования S_1 зависит только от I и доход от инвестирования S_2 зависит только от a , получаем из утверждений 1–2: оптимальными в задаче (1) максимизации функционала Марковица с фоновыми рисками являются: stop loss страхование $I^*(x) = x \wedge k^*$, где k^* определено в (4), и портфель $\bar{a}^* = (a_0^*, a^*) \in R^{n+1}$, в котором $a_0^* = 1 - \sum_{i=1}^n a_i^*$.

4. Оптимальные страхование и инвестирование в модели со стандартным отклонением доходности

Пусть в качестве меры риска в функционале Марковица используется не дисперсия $\sigma^2(S_1+S_2)$, а стандартное отклонение $\sigma(S_1+S_2)$ (его использование в финансовых моделях см., например, в [10, 11]). Выражения для $S_1 = S_1^I$ и $S_2 = S_2^a$ приведены в разделе 2.2. Исследуемая задача:

$$(11) \quad J[I, a] \equiv E(S_1 + S_2) - \beta\sigma(S_1 + S_2) \rightarrow \max_{I, a}, \quad 0 \leq I(x) \leq x, \quad a \in R^n.$$

Преимущество такого подхода заключается в том, что оба слагаемых в (11) имеют одинаковую размерность, например рубли. Детальное выражение для целевого функционала имеет вид (см. (2))

$$(12) \quad J[I, a] = l\alpha E I(X_1^Z) + w(a\Delta m^T + m_0) + EV - \beta \sqrt{l\sigma^2[I(X_1^Z)] + l(l-1)cov(I(X_1^Z), I(X_2^Z)) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V)}.$$

Близкие по постановке задачи, но без фонового риска, были исследованы в [14].

Изучим вспомогательную задачу

$$(13) \quad J[I, a] \rightarrow \max_I, \quad 0 \leq I(x) \leq x.$$

Утверждение 3. Задача (13) имеет решение $I_a^(x) = x \wedge k_a^*$, где $0 < k_a^*$ – минимальный корень уравнения*

$$(14) \quad \xi_a(k) = 0, \quad \text{где } \xi_a(k) = \alpha - l\beta[k - E I^k(X_1^Z)] / (\sigma^2(S_1^{I^k}) + \sigma^2(S_2^a))^{1/2}$$

с функцией дележа $I^k(x) = x \wedge k$.

Доказательство. Доказательство существования решения (13) дословно повторяет рассуждения в доказательстве леммы 1.

Как и ранее, обозначим: $I_\rho(x) = \rho I^*(x) + (1 - \rho)I(x)$, где $\rho \in [0, 1]$ и $I^*(x) = I_a^*(x)$ максимизирует $J[I, a]$. Необходимое условие оптимальности I^* в (13)

$$\left. \frac{d}{d\rho} J[I_\rho, a] \right|_{\rho=1} \geq 0 \text{ для любой функции дележа } I.$$

Это неравенство можно переписать, учитывая уже найденные выражения для производных $E I_\rho(X_1^Z)$, $\sigma^2(I_\rho(X_1^Z))$ и $cov(I_\rho(X_1^Z), I_\rho(X_2^Z))$ в точке $\rho = 1$ (см. доказательство утверждения 1): $I^*(x) = I_a^*(x)$ есть решение задачи максимизации интеграла

$$\max_I \int_0^\infty \int_0^\infty I(x) \phi_a(x, y) dG(x, y),$$

где $\phi_a(x, y) = \alpha - \beta[I^*(x) - E I^*(X_1^Z) + (l - 1)(I^*(y) - E I^*(X_1^Z))]/(\sigma^2(S_1^{I^*} + \sigma^2(S_2^a))^{1/2}$. Согласно лемме Неймана–Пирсона функция дележа $I^*(x)$ доставляет максимум тогда и только тогда, когда

$$(15) \quad I^*(x) = \begin{cases} x, & \phi_a(x, y) > 0, \\ 0, & \phi_a(x, y) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры G . Как и в доказательстве утверждения 1, рассмотрим (15) не для всех $(x, y) \in R_+^2$, а лишь на подмножестве $\{(x, y) : x = y, x \geq 0, y \geq 0\}$, тогда необходимое условие выполнения (15) будет

$$(16) \quad I^*(x) = \begin{cases} x, & \psi_a(x) > 0, \\ 0, & \psi_a(x) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры F_1^Z . Здесь

$$(17) \quad \psi_a(x) \stackrel{def}{=} \phi_a(x, x) = \alpha - l\beta[I^*(x) - E I^*(X_1^Z)]/(\sigma^2(S_1^{I^*}) + \sigma^2(S_2^a))^{1/2}.$$

Отметим, что знаменатель в (17) всегда положителен, так как $\sigma^2(S_2^a) > 0$. Значение $\psi_a(0) > 0$, и при увеличении x от 0 выполнено $I^*(x) = x$ согласно (16), поэтому $\psi_a(x)$ убывает (см. (17)) вплоть до точки $x = k_a^*$ касания оси абсцисс. При возрастании x от k_a^* функция $\psi_a(x)$ не убывает и не возрастает. Действительно, при убывании $\psi_a(x)$ от нуля получаем противоречие с (16), поскольку $I^*(x) = 0$ для таких x . Предположим, что $\psi_a(x)$ возрастает от нуля, тогда (см. (16)) $I^*(x) = x$ и $\psi_a(x)$ должна убывать, а не возрастать. Таким образом, $I^*(x) = x \wedge k_a^*$, где $k_a^* > 0$.

Получим уравнение для нахождения уровня удержания k_a^* , для этого подставим в (17) вместо $I^*(x)$ переменную k , а в выражения для $E I^*(X_1^Z)$ и $\sigma^2(S_1^{I^*})$ подставим вместо $I^*(x)$ функцию $I^k(x) = x \wedge k$. В результате получаем уравнение оптимальности (14) в утверждении 3.

Заметим, что не исключен случай, когда $k_a^* = \infty$, т.е. (см. (14)) функция $\xi(k) > 0$ на $[0, \infty)$. Это означает, что страховщик погашает весь ущерб клиента.

Изучим теперь задачу оптимального инвестирования при фиксированной функции дележа риска I ,

$$(18) \quad \max_a J[I, a], \quad a \in R^n.$$

Утверждение 4. Пусть a_I^* есть решение задачи (18). Тогда этот вектор является корнем уравнения

$$(19) \quad \Delta m - \beta[waC + Q] / (\sigma^2(S_1^I) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V))^{1/2} = 0.$$

Доказательство. Целевая функция имеет вид

$$E S_1^I + w(a\Delta m^T + m_0) + EV - \beta\sqrt{\sigma^2(S_1^I) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V)}.$$

Найдем градиент по a и приравняем его к нулю:

$$J'_a[I, a] = w\Delta m - \beta(w^2aC + wQ) / (\sigma^2(S_1^I) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V))^{1/2} = 0.$$

Это уравнение очевидно эквивалентно (19). Если a_I^* – решение (18), то, принимая во внимание отсутствие ограничений на a , получаем, что a_I^* удовлетворяет (19).

Учитывая результаты, полученные в утверждениях 3–4, имеем следующие условия оптимальности в исходной задаче $J[I, a] \rightarrow \max$, где максимум берется по I, a .

Утверждение 5. Пусть (I^{**}, a^{**}) есть решение задачи (11). Тогда $I^{**}(x) = x \wedge k^{**}$, где (k^{**}, a^{**}) является решением системы $n + 1$ нелинейных уравнений: (19), где вместо $I(x)$ подставлена функция $I^k(x) = x \wedge k$, и (14).

5. Примеры

Пример 1

Приведем иллюстративный численный пример решения задачи (1) с дисперсией как мерой риска, который не претендует на практическую значимость. Пусть численность группы клиентов страховщика $l = 10$, количество рисков активов $n = 2$, вектор средних доходностей $E \bar{R} = (m_0; m_1; m_2) = (1; 1,1; 1,15)$, вектор ковариаций доходностей рисков активов и фонового риска $Q = (-0,3; -0,25)$ и матрица ковариаций

$$C = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

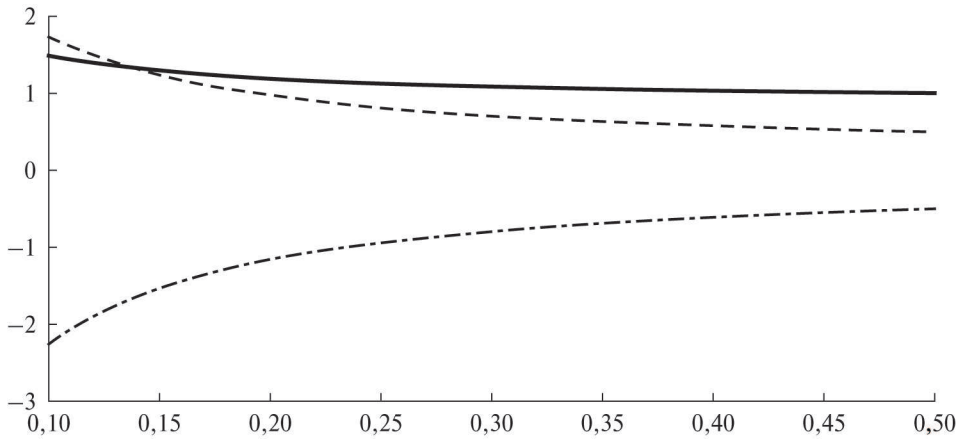


Рис. 1. Графики зависимостей компонент оптимального портфеля от β : a_1^* – сплошная линия, a_2^* – пунктирная линия, вложение в безрисковый актив $a_0^* = 1 - a_1^* - a_2^*$ – штрихпунктирная линия.

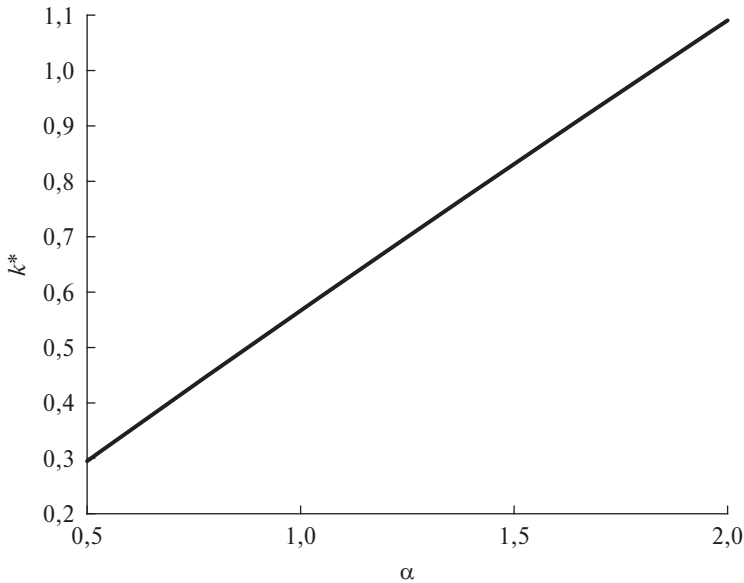


Рис. 2. График зависимости уровня k^* от α .

Начальный капитал $w = 1$, функция распределения ущерба клиента с учетом фонового риска равна $F_1^Z(x) = 1 - p + p(1 - \exp(-2x))$, $x \geq 0$, где вероятность страхового случая $p = P(X_1^Z > 0) = 0,2$. Коэффициент осторожности β и коэффициент нагрузки α – варьируемые параметры. Найдем параметр k^* в функции дележа $I^*(x) = x \wedge k^*$ и портфель вложений в рисковые активы $a^* = (a_1^*; a_2^*)$, применяя утверждения 1–2. Результаты численных расчетов приведены на рис. 1 (при фиксированном $\alpha = 0,5$) и рис. 2 (при фиксированном $\beta = 0,1$).

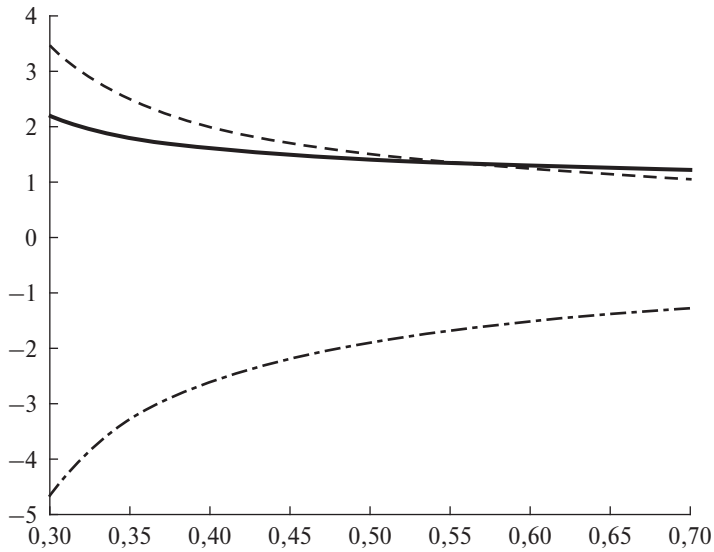


Рис. 3. Графики зависимостей компонент оптимального портфеля от β : a_1^* – сплошная линия, a_2^* – пунктирная линия, вложение в безрисковый актив $a_0^* = 1 - a_1^* - a_2^*$ – штрихпунктирная линия.

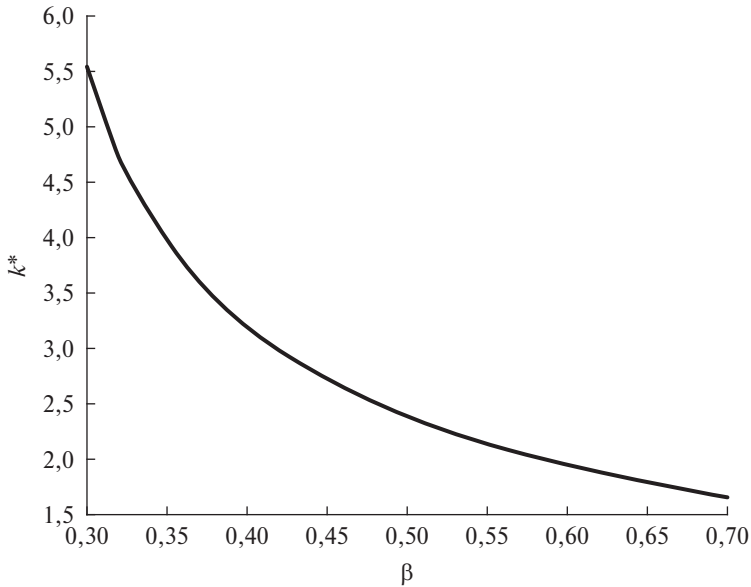


Рис. 4. График зависимости уровня k^* от β .

Из рис. 1 видно, что с ростом коэффициента осторожности β вложения в рисковые активы $a_1^*(\beta)$ и $a_2^*(\beta)$ убывают, а функция $a_0^*(\beta)$ возрастает, оставаясь отрицательной. Последнее означает, что инвестор заимствует средства из безрискового актива, но эта сумма убывает с увеличением β .

Рисунок 2 показывает, что уровень k^* в stop loss страховании $I^*(x) = x \wedge k^*$ возрастает с увеличением коэффициента нагрузки α – при возрастании стоимости полиса страховщик увеличивает долю покрытия риска клиента. Функция $k^*(\alpha)$ близка к линейной, что объясняется малостью нелинейной части в уравнении (4), определяющем k^* .

Пример 2

В отличие от предыдущего примера, приведем численный пример решения задачи (11) со стандартным отклонением как мерой риска, используя утверждение 5. Входные параметры те же, что и в примере 1, но здесь приходится учитывать и дисперсию инвестиционного фонового риска $\sigma^2(V) = 1,2$, входящую под знак квадратного корня. Коэффициент нагрузки фиксирован $\alpha = 0,5$, а коэффициент осторожности $\beta \in [0,3; 0,7]$ – варьируемый параметр. Численные результаты приведены на рис. 3 и рис. 4.

Как и на рис. 1, инвестор заимствует средства из безрискового актива, и эта сумма убывает вместе с вложениями в рисковые активы при увеличении β . Здесь имеет место более высокая сумма заимствования, как и суммы вложений в рисковые активы, что объясняется относительно медленным возрастанием стандартного отклонения по сравнению с другой мерой риска – дисперсией финального капитала.

Согласно рис. 4 при возрастании коэффициента осторожности β уровень собственного удержания страховщика k^* падает, т.е. страховщик не соглашается брать на себя большие риски.

6. Заключение

В данной статье исследована одношаговая задача выбора страховщиком инвестором оптимального страхования, т.е. функции дележа риска, для группы клиентов и оптимального инвестиционного портфеля при наличии аддитивных фоновых рисков. Рассмотрены два типа максимизируемых функционалов Марковица: с дисперсией и стандартным отклонением в качестве меры риска. В первом случае найдены явные выражения для функции дележа и портфеля, во втором случае найдены необходимые условия оптимальности в виде системы нелинейных уравнений. Решены численные примеры, показывающие применение полученных теоретических результатов. Представляются перспективными следующие направления исследований по этой тематике: использование в качестве начального инвестиционного капитала не только начального капитала страховщика, но также и полученных от клиентов страховых премий; применение иных целевых функционалов, например ожидаемой полезности финального капитала; изучение оптимизационной многошаговой задачи с аддитивными и мультипликативными фоновыми рисками.

Доказательство леммы 1. Пусть $\{I_m\}$ – максимизирующая последовательность дележей риска в задаче (3), т.е.

$$J[I_m, a] \rightarrow J^* = \sup_I J[I, a].$$

Применяя теорему Хэлли к последовательности случайных векторов $\{I_m(X_1^Z), I_m(X_2^Z)\}$ (см. выражение в (2) для $J[I, a]$), получаем, что существует подпоследовательность $\{I_s(X_1^Z), I_s(X_2^Z)\}$, слабо сходящаяся к некоторому пределу (ξ, η) . Для доказательства того, что ξ и η есть собственные случайные величины, т.е. $P(\xi < \infty) = 1$ и $P(\eta < \infty) = 1$, достаточно заметить, что в силу определения функций дележа выполняется $I_m(X_i^Z) \leq X_i^Z$ п.н., $i = 1, 2$. Поскольку X_1^Z и X_2^Z одинаково распределены и измеримы относительно борелевской сигма-алгебры, то предел может быть представлен как $(\xi, \eta) = (I^*(X_1^Z), I^*(X_2^Z))$ для некоторой измеримой функции $I^*(x)$, причем $0 \leq I^*(x) \leq x$.

Равенство $J^* = J[I^*, a]$ теперь следует из слабой сходимости $\{I_s(X_1^Z), I_s(X_2^Z)\}$ к $\{I^*(X_1^Z), I^*(X_2^Z)\}$ и непрерывности целевого функционала в (2) по $E I(X_1^Z)$, $E I^2(X_1^Z)$ и $cov(I(X_1^Z), I(X_2^Z))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bodie Z., Merton R.C., Samuelson W.F.* Labour supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1992. No. 16. P. 427–449.
2. *Gollier C., Pratt J.W.* Risk vulnerability and the tempering effect of background risk // *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. 1996. V. 64. No. 5. P. 1109–1123.
3. *Heaton J., Lucas D.* Portfolio choice in the presence of background risk // *The Economic Journal*. 2000. V. 110. No. 460. P. 1–26.
4. *Jiang C.H., Ma Y.K., An Y.B.* An analysis of portfolio selection with background risk // *Journal of Banking and Finance*. 2010. V. 34. P. 3055–3060.
5. *Guo X., Wagener A., Wong W.K., Zhu L.X.* The two-moment decision model with additive risks // *Risk Management*. 2018. V. 20. No. 1. P. 77–94.
6. *Lin W., Lu J.* Risky asset allocation and consumption rule in the presence of background risk and insurance markets // *Insurance: Mathematics and Economics*. 2012. V. 50. No. 1. P. 150–158.
7. *Mnif M.* Optimal risk control under marked point processes shocks: A dynamic programming duality approach // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2013. V. 16. No. 7. P. 350–360.
8. *Hong H., Wang N., Yang J.* Mitigating disaster risks in the age of climate change // Technical report, National Bureau of Economic Research. 2020.
9. *Markowitz H.* Portfolio Selection // *Journal of Finance*. 1952. V. 7. P. 77–91.

10. *Alexander G.J., Baptista A.M.* Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2002. V. 26. P. 1159–1193.
11. *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., et al.* *Actuarial Mathematics*. Itaca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986.
12. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.
13. *Moore K.S., Young V.R.* Optimal insurance in a continuous-time model // *Insurance: Mathematics and Economics*. 2006. V. 39. No. 1. P. 47–68.
14. *Голубин А.Ю., Гридин В.Н.* Оптимальная стратегия страхования в модели индивидуального риска при вероятностном ограничении на величину финального капитала // *АиТ*. 2019. № 4. С. 144–155. <https://doi.org/10.1134/S0005231019040081>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 10.08.2025

После доработки 25.09.2025

Принята к публикации 05.11.2025

Управление в медико-биологических системах

© 2026 г. М.Ю. ЛАЗУТОВ (marklazutov@gmail.com)

(Университет ИТМО, Санкт-Петербург),

В.Н. ЛЕОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук (vnleonenko@yandex.ru)

(Университет ИТМО, Санкт-Петербург;

НИИ гриппа им. А.А. Смородинцева, Санкт-Петербург)

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИЙ ОСТРЫХ РЕСПИРАТОРНЫХ ИНФЕКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИГНАЛОВ РАННЕГО ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ И МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ¹

Прогнозирование критических переходов в динамике заболеваемости эпидемическими инфекциями – важная задача эпидемиологического надзора, влияющая на эффективность работы системы здравоохранения. Рассматривается использование методов детекции аномалий во временных рядах заболеваемости на основе искусственного интеллекта и сигналов раннего предупреждения (СРП) для предсказания моментов перехода от сезонных инфекций к эпидемическим вспышкам. Рассматриваются два основных подхода: метод на основе классификации, определяющий близость к критическому переходу, и метод на основе регрессии для прогнозирования будущей динамики инфекции. Различные модели машинного обучения, включая ансамблевые методы (Easy Ensemble, RUSBoost, Balanced Bagging), архитектуры глубокого обучения (Early Warning Signal Network (EWSNet), LSTM, GRU), применяются к данным двух типов: заболеваемости гриппом с маркировкой временных отрезков, соответствующих эпидемическим периодам согласно экспертным критериям, и заболеваемости COVID-19 без маркировки. Результаты показывают, что Easy Ensemble и EWSNet обеспечивают наилучший баланс между значениями метрик precision и recall. Рекуррентные нейронные сети эффективно моделируют динамику средних значений, но прогнозирование дисперсии показателей остается сложной задачей. Приведенные в статье результаты демонстрируют потенциал сочетания классических методов СРП с машинным обучением для улучшения прогнозирования эпидемий и поддержки принятия решений в здравоохранении.

Ключевые слова: прогнозирование эпидемий, сигналы раннего предупреждения, машинное обучение, анализ временных рядов, критические переходы.

DOI: 10.7868/S2413977726060056

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в соответствии с Соглашением № 24-25-20104 от 12.04.2024 г. и Санкт-Петербургского государственного автономного учреждения «Фонд поддержки научной, научно-технической, инновационной деятельности» о предоставлении регионального гранта для софинансирования проекта в рамках соглашения № 24-25-20104 от 22.05.2024 г. от 03.06.2024 г. № 169.

1. Введение

Задача раннего обнаружения и прогнозирования критических явлений в сложных системах является актуальной проблемой для многих научных областей [1], в том числе для эпидемиологии [2]. Ее можно также рассматривать как частный случай более общей темы распознавания совокупности сигналов из заданного ансамбля [3] – например, в контексте появления циркулирующих штаммов респираторных инфекций нового типа, которые малоотличимы от сезонных ОРВИ в общей собираемой статистике эпиднадзора. В силу важности проблематики для детектирования критических явлений и моментов смены состояний в сложных системах наряду с более общими методами разрабатываются специальные статистические методы и индикаторы. В частности, близость к точке перехода между состояниями (критической точке) можно определить расчетом так называемых сигналов раннего предупреждения (СРП, в англоязычной литературе – Early Warning Signals, EWS). К настоящему моменту разработано большое количество вариантов СРП, например спектральные СРП (основанные на расчете спектра временного ряда) или СРП, основанные на явлении критического замедления [4]. К последним относятся, например, методы, детектирующие увеличение дисперсии, автокорреляционной функции, перекоса (skew) и т.д. В контексте эпидемических процессов, на которые делается акцент в данной работе, существует достаточно много исследований, посвященных анализу использования СРП как на синтетических, так и на реальных данных [5].

Целью настоящего исследования является сравнительный анализ методов раннего детектирования вспышек заболеваемости, связанных с пандемическими ОРВИ, на данных заболеваемости ОРВИ, включая сезонный грипп и COVID-19. Важной задачей является сравнение специализированных СРП на основе явления критического замедления (critical slowing down) с более общими статистическими подходами и оценка их эффективности для задач управления и контроля эпидпроцессов. Рассмотрены два варианта решения задачи прогнозирования критических явлений на основе СРП: на данных с обозначенным эпидемическим порогом и без него. В данных, содержащих уровень эпидемического порога, возможна постановка задачи бинарной классификации: критическая точка перехода либо «близка», либо нет (близость выбирается исходя из требований эпиднадзора – например, один месяц до критической точки). В противном случае, когда маркировка эпидпорогов отсутствует (как в случае рассмотрения COVID-19, где с момента появления заболевания прошло недостаточно времени, чтобы оценить многолетний базовый уровень), задачу детектирования эпидвспышек предлагается решать сведением к задаче прогнозирования динамики выбранных СРП (предсказание абсолютных показателей индикаторов) с оценкой времени до критической точки на основе прогнозной заболеваемости. Такой метод можно считать частным случаем использования предсказательных статистических методов многолетней заболеваемости (см., например, [6]), которые наряду с SIR-моделями являются одними из самых популярных видов прогностических моделей в эпидемиологии.

2. История проблемы и современные подходы

Прогнозирование эпидемий с использованием методов машинного обучения в настоящее время активно развивается, следуя общим тенденциям развития технологий машинного обучения и искусственного интеллекта. Это обусловлено тем, что традиционные методы моделирования (SIR, SEIR и т.д.) часто недостаточно гибки для учета нелинейных факторов и мало подходят для анализа заболеваемости на ранних стадиях пандемии вирусов нового типа [2]. Как подчеркивается в [7], классические алгоритмы машинного обучения (в частности, Random Forest, Support vector machine) демонстрируют высокую эффективность в задачах раннего обнаружения вспышек эпидемий. Кроме того, во многих публикуемых исследованиях (см., например, [8]), относящихся к теме прогнозирования заболеваний, демонстрируется эффективное применение рекуррентных сетей. В то же время в научных группах не пропадает интерес к направлению, относящемуся к теории сложных систем и фокусирующемуся на использовании сигналов раннего предупреждения – задаваемых как статистическими индикаторами, так и объясняющими моделями (например, индекс риска, зависящий от действующих мер социального дистанцирования в популяции [28]). В табл. 1 приведен список работ, использующих различные подходы прогнозирования эпидемий на базе СРП. В некоторых из указанных исследований применяется гибридный подход к прогнозированию, т.е. совместное использование методов машинного обучения и СРП. Несмотря на значительный прогресс в области прогнозирования эпидемий с использованием СРП, наблюдается недостаток исследований со сравнительным анализом эффективности методов машинного обучения

Таблица 1. Список аналогичных работ

	2025 Zhao et al. [9]	2024 Bizzotto et al. [10]	2025 Gao et al. [11]	2024 Drake et al. [12]	2021 O'Brien [13]
Контекст	31 болезнь, 134 региона	COVID-19, Италия	COVID-19, Сингапур, Канада, ГонКонг	SARS-CoV-2, UK	COVID-19, 24 страны
Метод	Critical-slowing-down resilience indicators + time-to-event analysis	Nowcasting reproduction number method (R_e)	Feature-based time-series classification (ML)	Phylogenetic logistic growth rate (LGR) analysis	Sequential EWS assessment using GAMs
Наиболее результативные СРП	Дисперсия, АКФ	Nowcasted R_e	Дисперсия, АКФ, коэффициент асимметрии	Maximum LGR of dominant clusters	Конкатенация дисперсии, АКФ, коэффициента асимметрии
Горизонт прогнозирования	18–21 дней	6–23 дней	14 дней	6–7 дней	10–14 дней

в комбинации с СРП. Для восполнения данного пробела в текущем исследовании рассматривается применение гибридного подхода с использованием разных моделей и двух вариантов постановки задачи (классификация и регрессия).

3. Данные

В настоящем исследовании было использовано два массива входных данных. Первый массив был получен из базы данных НИИ гриппа и содержит недельную заболеваемость ОРВИ в г. Санкт-Петербурге за период с января 1990 г. по октябрь 2020 г. включительно. Помимо абсолютного числа случаев заболевших, массив содержит расчетную численность населения города на рассматриваемый период с шагом в один год, что позволяет пересчитать за-

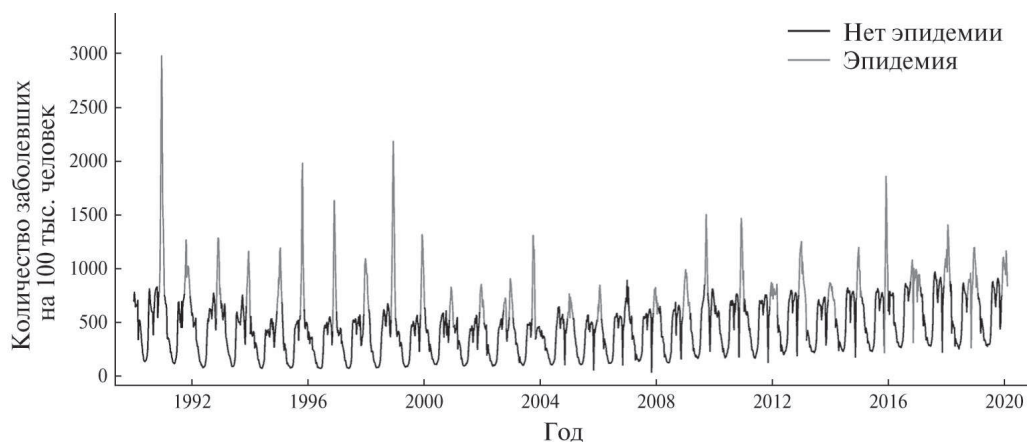


Рис. 1. Временной ряд с отмеченными эпидемиями.

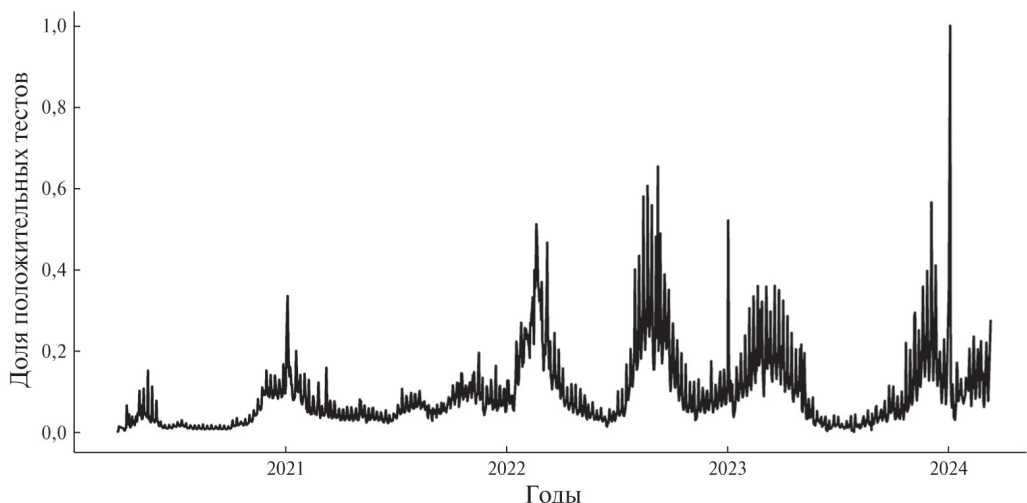


Рис. 2. Временной ряд без отмеченных эпидемий.

болеваемость в относительные показатели, а также индикатор превышения сезонного эпидпорога по методике расчета НИИ гриппа, что позволяет различать отрезки данных, соответствующие официально объявленной эпидемической ситуации. Общий вид временного ряда представлен на рис. 1. Исходя из наличия меток в данных, разделяющих заболеваемость на эпидемическую и неэпидемическую (сезонные простуды, не связанные с эпидемией), целесообразно решить задачу классификации на основе СРП.

Второй временной ряд был получен с использованием открытых данных по заболеваемости COVID-19 в Санкт-Петербурге за период с марта 2020 по март 2024 г. [14]. Общий вид временного ряда показан на рис. 2. Данные заболеваемости собирались ежедневно. Дать определение «эпидемической вспышке» в контексте COVID-19 сложнее, чем в случае сезонного и пандемического гриппа, в силу отсутствия четко выраженной сезонности для коронавирусной инфекции. В настоящем исследовании полагаем вспышками выделяемые в данных продолжительные подъемы заболеваемости с последующим спадом (эпидемические волны), связанные с появлением новых коронавирусных штаммов.

4. Теоретические сведения

Для работы с эпидемическими временными рядами среди всевозможных СРП были выбраны индикаторы с наилучшими показателями эффективности в данной предметной области. Исходя из данных в приведенной выше табл. 1, а также из источника [15] наиболее распространенным горизонтом прогнозирования является около 1–2 недель, а наиболее подходящими характеристиками для определения близости к критической точке оказались дисперсия и среднее значение, которые демонстрировали устойчивое повышение при приближении к моменту эпидемического старта. Примеры расчетов значений СРП в двух случаях (вблизи и вдали от точки старта эпидемии гриппа) для временного ряда заболеваемости ОРВИ показаны на рис. 3. Как видно по графикам, в данном примере наиболее информативным показателем можно считать дисперсию с окном, равным 30: значение показателя в первом случае монотонно возрастает (признак эффекта критического замедления, которое может служить индикацией скорого фазового перехода [4]), а во втором – монотонно убывает (эффекта нет), что соответствует корректному поведению СРП. Дисперсии с окнами 15 и 20 не демонстрируют аналогичное поведение, что говорит о чувствительности показателя дисперсии к выбору окна и, следовательно, о необходимости эмпирического подбора параметра окна перед применением в практике эпиднадзора. В настоящей работе для задачи классификации было решено оценить сравнительную эффективность в роли СРП дисперсии и коэффициента асимметрии, а в задачах регрессии – прогнозировать дисперсию и среднее значение заболеваемости для предсказания с их помощью эпидемических подъемов. В качестве горизонта принятия решения выбраны увеличенные по сравнению с работами из обзора временные диапазоны – 4 и 5 недель для классификации, 14 и 28 дней для регрессии.

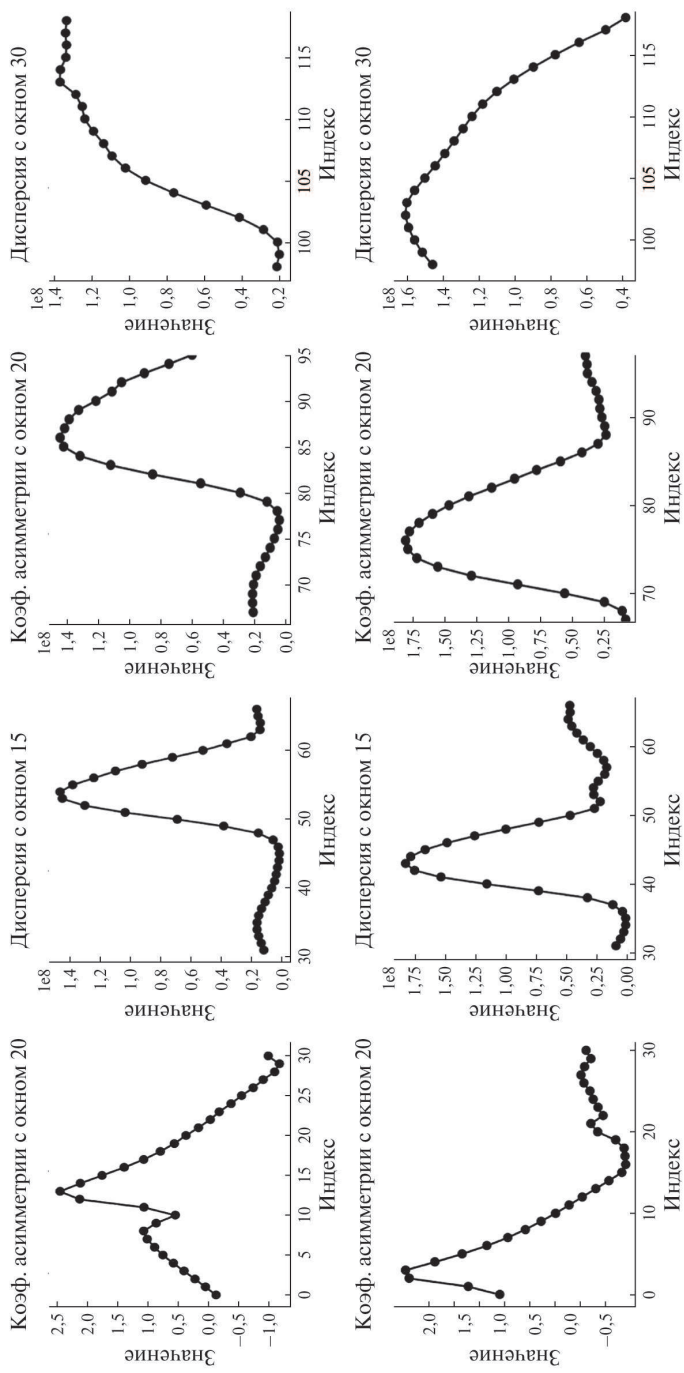


Рис. 3. СРП вблизи (верхний ряд) и вдали (нижний ряд) от критического перехода.

В следующем разделе описаны методы, на основе которых решались задачи классификации и регрессии. Для расчета СРП использовался пакет `ewstools` [16] языка программирования Python.

4.1. Классификационный подход

Для решения поставленной задачи был выполнен ряд шагов по предобработке данных для обучения и тестирования моделей. Во-первых, временной ряд был разбит на сегменты без эпидемий, во-вторых, установлен временной интервал t до момента наступления эпидемии, который определяет срок прогноза о приближении эпидемии. Далее была сформирована выборка для обучения.

Предобработка данных происходила следующим образом. Временной ряд с численностью случаев заболеваемости задается в виде вектора $X = \{x_k\}$, $k = \overline{1, |X|}$ и дополняется временным рядом бинарных меток Y :

$$(1) \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{эпидемия,} \\ 0, & \text{нет эпидемии.} \end{cases}$$

Выделяются все сегменты без эпидемии:

$X' = \{X_i \mid \forall j \in [0, |X_i| - 1] Y_j = 0\}$, $i = \overline{0, M-1}$, где X_i – подмножество X , M – число сегментов без эпидемии.

Далее полученные сегменты преобразовываются по правилу скользящего окна:

$$(2) \quad X'' = \begin{pmatrix} X_0^{(0)} & X_0^{(1)} & \cdots & X_0^{(w-1)} \\ X_0^{(1)} & X_0^{(2)} & \cdots & X_0^{(w)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{M-1}^{N-w} & X_{M-1}^{N-w+1} & \cdots & X_{M-1}^{N-1} \end{pmatrix},$$

где $N = |X_{M-1}|$, w – размер окна. В настоящем исследовании предполагалось $w = 30$.

Важным вопросом является определение порогового значения t , при достижении которого модель должна сообщать о приближающейся эпидемии. Согласно постановке задачи исследования со стороны специалистов эпидемиологического надзора, оповещение желательно получать не позже чем за месяц до эпидемиологического старта, что соответствует $t = 4$ или $t = 5$. Поскольку данные во временном ряду по заболеваемости сезонным ОРВИ даются с шагом в одну неделю, $t = 4$ и $t = 5$ соответствуют интервалам времени в 28 и 35 дней. Был задан следующий бинарный массив, характеризующий близость данной точки временного ряда к эпидемиологическому старту:

$$(3) \quad Y'_l = \begin{cases} 1, & \text{if } E_l - I_l \leq t \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

где $l = \overline{0, K}$, K – число строк в матрице X'' , I_l – индекс последнего элемента l -го временного ряда в X'' , E_l – первый индекс значения заболеваемости ближайшей эпидемии ($E_l \in [0, |X|]$), соответствующей рассматриваемому временному ряду.

Далее для каждой строки в полученной матрице необходимо рассчитать СРП с определенными значениями окна w_{ews} . В данной работе было решено рассчитать дисперсию при $w_{ews} = \{15, 20, 30\}$ и коэффициент асимметрии при $w_{ews} = 20$. Затем необходимо объединить рассчитанные значения СРП и составить итоговую матрицу:

$$(4) \quad X''' = \begin{pmatrix} S_0^{(0)} & S_0^{(1)} & \cdots & V_0^{\prime(0)} & V_0^{\prime(1)} & \cdots & V_0^{\prime\prime(0)} & \cdots & V_0^{\prime\prime\prime(29)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{M-1}^{(0)} & S_{M-1}^{(1)} & \cdots & V_{M-1}^{\prime(0)} & V_{M-1}^{\prime(1)} & \cdots & V_{M-1}^{\prime\prime(0)} & \cdots & V_{M-1}^{\prime\prime\prime(29)} \end{pmatrix},$$

где $S_i^{(j)}$ – значение из массива коэффициентов асимметрии с индексом j , соответствующее временному ряду i ; $V_i^{\prime(j)}$ – значение из массива дисперсий с $w_{ews} = 15$ и индексом j , соответствующее временному ряду i ; $V_i^{\prime\prime(j)}$, $V_i^{\prime\prime\prime(j)}$ – также значения дисперсий, но с $w_{ews} = 20$ и $w_{ews} = 30$ соответственно.

Таким образом, получаем итоговый массив данных:

$$(5) \quad D_c = \{X_i''', Y_i'\}, \quad i = \overline{1, K}.$$

Полученный набор данных необходимо разделить на обучающую, валидационную и тестовую выборки. В данной работе было принято решение разделить их в пропорции 70, 10 и 20 соответственно. Элементы выборок не должны смешиваться, поскольку работаем с упорядоченными данными временных рядов. Следует отметить, что полученный набор данных несбалансирован, поскольку выборок из класса 0 больше, чем из класса 1 для всех значений t . Так как в данной задаче гораздо важнее минимизировать количество ложноотрицательных результатов (неверных предположений об отсутствии угрозы эпидемии), то в связи с этим играет первостепенную роль метрика полноты (recall):

$$(6) \quad Recall = \frac{TP}{TP + FN},$$

где TP – доля истинно положительных результатов, FN – доля ложноотрицательных результатов. Необходимо поддерживать адекватное значение точности, т.е. выше 0,5, чтобы убедиться, что модели не классифицируются случайным образом:

$$(7) \quad Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FN + FP},$$

где FP – доля ложноотрицательных результатов, TN – доля истинно отрицательных результатов. Также важно измерять баланс между FN и FP , поэтому следует использовать, например, оценку $F1$:

$$(8) \quad F1 = 2 \frac{Precision \cdot Recall}{Precision + Recall}.$$

Площадь под PR -кривой (PR-AUC) также может быть полезной метрикой для оценки моделей, поскольку она не зависит от количества истинно отрицательных результатов. Кроме того, она суммирует эффективность модели в диапазоне пороговых значений, поэтому может быть более информативной, чем оценка $F1$.

Для классификации использовались следующие модели: EWSNet, Easy Ensemble [19], RUSBoost [20], Balanced bagging classifier [21], Decision Tree и Random Forest [22]. При наличии большого количества данных для обучения использование глубоких нейронных сетей с конволюционными и рекуррентными слоями оказывается очень эффективным для классификации предстоящих критических точек перехода [17, 18]. Поэтому в контексте эпидемических временных рядов на фоне более универсальных методов было решено также протестировать более специализированный метод EWSNet [18]. Эта модель представляет собой комбинацию двух независимо работающих сетей: сети с долговременной и кратковременной памятью (LSTM) и полностью сверточные сети (FCNN). Авторы обучили EWSNet на большом синтетическом наборе данных, состоящем из динамики показателей нескольких динамических систем. Модель демонстрирует хорошую точность на эмпирических тестовых данных, но не лишена проблемы частых ложных срабатываний. Точность модели на тестовых данных из упомянутой статьи составила около 75%. Ее главное преимущество по сравнению с классическими моделями машинного обучения – инвариантность к длине входящих временных рядов. Результаты сравнения эффективности указанных методов приведены в следующем разделе.

4.2. Регрессионный подход

Для постановки задачи предсказания эпидемического подъема заболеваемости COVID-19 по немаркированным данным временной ряд доли положительных тестов на COVID-19 был представлен как массив $X = \{x_k\}$, $k = \overline{1, |X|}$. В данном случае было решено разделить временной ряд в соотношении 70% на обучающий набор, 10% на валидационный (проверочный) набор и 20% на тестовый набор.

Пусть $T = [0,7 \cdot |X|]$ и $V = [0,1 \cdot |X|]$, тогда:

$$(9) \quad X_{train} = \{x_k\}, \quad k = \overline{1, T},$$

$$(10) \quad X_{val} = \{x_k\}, \quad k = \overline{T+1, T+V},$$

$$(11) \quad X_{test} = X \setminus (X_{train} \cup X_{val}).$$

Можно вычислить множество СРП, т.е. дополнительных временных рядов, в скользящем окне $w_{ews} = 14$. Таким образом, каждая точка x_k множества X сопоставляется точке e_X^k временного ряда СРП E_X , вычисляемого внутри отрезка $[x_{k-w_{ews}}, x_{k-1}]$. Тогда задача моделирования формулируется как вычисление $\{e_X^{T+V+1}, e_X^{T+V+2}, \dots\}$. В этой задаче было решено ограничиться рядом средних значений $E_{X_{mean}}$ и рядом дисперсий $E_{X_{var}}$.

Для обучения моделей полученные ряды необходимо преобразовать в матрицы с использованием некоторого скользящего окна m . Этот параметр можно определить, оценив метрики на проверочной выборке. Информация о метриках приведена ниже.

Для оценки качества моделирования будем использовать пять метрик. Это MSE , $RMSE$, MAE , $NRMSE$, $NMAE$, R^2 :

$$(12) \quad MSE = \frac{1}{|X_{test}|} \sum_{k=1}^{|X_{test}|} \left(e_X^{T+V+k} - x_{T+V+k} \right)^2,$$

$$(13) \quad RMSE = \sqrt{MSE},$$

$$(14) \quad MAE = \frac{1}{|X_{test}|} \sum_{k=1}^{|X_{test}|} |e_X^{T+V+k} - x_{T+V+k}|,$$

$$(15) \quad NRMSE = \frac{RMSE}{\max(X_{test}) - \min(X_{test})},$$

$$(16) \quad NMAE = \frac{MAE}{\max(X_{test}) - \min(X_{test})},$$

$$(17) \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_k \left(x_{T+V+k} - e_X^{T+V+k} \right)^2}{\sum_k \left(x_{T+V+k} - \text{mean}(X_{test}) \right)^2}.$$

В качестве функции потерь в моделях был выбран показатель MSE , при этом также производился расчет MAE , так как данный показатель лучше подходит для интерпретации величины отклонения с точки зрения предметной области. $RMSE$ – более строгая метрика, поскольку она более чувствительна к выбросам, чем MAE . Поскольку в исследовании анализировались ряды с разными масштабами (среднее и дисперсия), было решено использовать нормализованные метрики, такие как $NRMSE$ и $NMAE$, поскольку они инвариантны к изменению масштаба. Для определения величины линейной корреляции между истинными и прогнозируемыми значениями применялся коэффициент детерминации R^2 .

Во многих работах авторы применяют резервуарные вычисления для выполнения краткосрочного прогноза [23–25]. Прогноз является краткосрочным, поскольку авторы обучают модели только на сегментах, где нет критических переходов. В противном случае моделирование динамики некорректно. Так, например, в [30] авторы попытались использовать рекуррентные нейронные сети для прогнозирования критических переходов в экологических системах. Для обучения сетей использовались «сырые» временные ряды, т.е. без использования СПП, и не всем моделям удалось сформировать корректную оценку. Однако в нашем случае имеется информация о некоторых произошедших критических переходах, которая может быть использована для моделирования долгосрочного прогноза. Поэтому было решено использовать сеть LSTM, а также GRU, которая является упрощенной версией

LSTM (в ячейке этой сети на один элемент меньше). Стоит отметить, что LSTM-сети считаются наиболее устойчивыми и точными для прогнозирования хаотических динамических систем [31]. В экспериментах использовались LSTM- и GRU-сети со 128 ячейками, выбранная ширина скользящего окна m равна 20, т.е. 20 дней (или 20 входных нейронов). Во всех случаях было решено задать 100 эпох и использовать оптимизатор ADAM.

5. Результаты экспериментов

5.1. Результаты классификации

В табл. 2 и 3 представлены результаты вычисления метрик на тестовом множестве на основе оптимальных гиперпараметров для значений порога $t = 4$ и $t = 5$ соответственно. Аналогичным образом были рассчитаны матрицы ошибок (рис. 4).

Таблица 2. Результаты вычисления метрик для временного горизонта в четыре недели ($t = 4$)

Классификатор	Accuracy	Recall	F1 score	PR-AUC
Decision Tree	0,79	0,55	0,65	0,75
Easy Ensemble	0,72	0,93	0,70	0,87
RUSBoost	0,70	0,89	0,67	0,78
Balanced Bagging	0,80	0,89	0,76	0,84
EWSNet	0,71	0,96	0,7	0,86
Random Forest	0,77	0,89	0,73	0,85

Таблица 3. Результаты вычисления метрик для временного горизонта в пять недель ($t = 5$)

Classifier	Accuracy	Recall	F1 score	PR-AUC
Decision Tree	0,85	0,78	0,82	0,89
Easy Ensemble	0,78	0,89	0,78	0,92
RUSBoost	0,75	0,90	0,73	0,90
Balanced Bagging	0,77	0,81	0,75	0,86
EWSNet	0,80	0,86	0,80	0,88
Random Forest	0,77	0,81	0,75	0,90

По результатам экспериментов можно сделать следующие выводы:

- В случае решающих деревьев (Decision Trees) показатель accuracy меняется от средних до высоких значений (около 0,75–0,85), однако recall и F1 score сильно варьируют в зависимости от порогового значения. Данный метод показывает неудовлетворительные значения recall при низких пороговых значениях времени ($t = 4$). Более низкий PR-AUC по сравнению с другими ансамблевыми методами предполагает более слабую эффективность ранжирования положительных образцов.

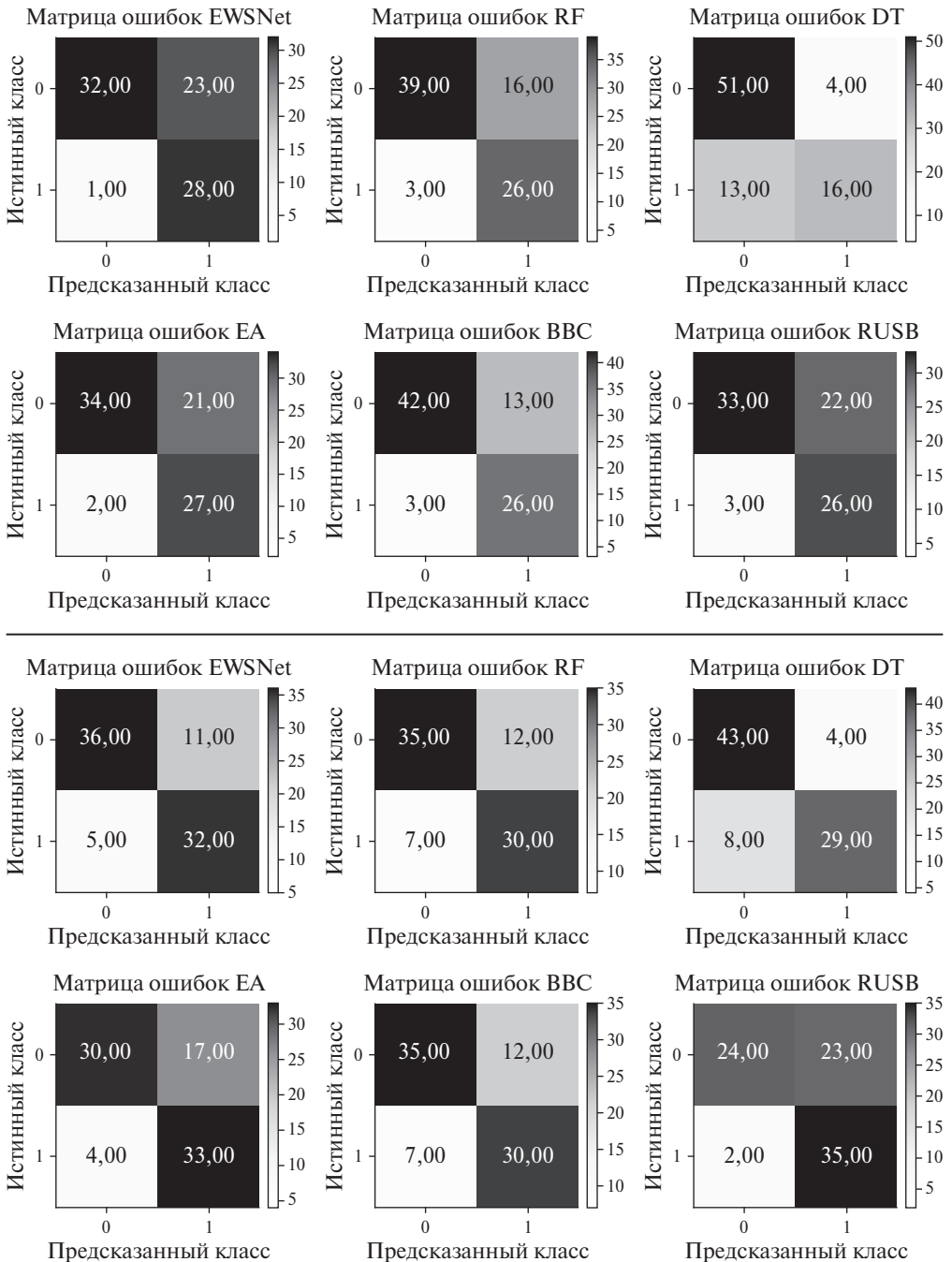


Рис. 4. Матрицы ошибок при $t = 4$ (два верхних ряда) и при $t = 5$ (два нижних ряда).

- Easy Ensemble стабильно демонстрирует хорошие результаты при разных пороговых значениях полноты, PR-AUC и оценки F1. Методология адаптивного бустинга в сочетании с сэмплением эффективно справляется

с дисбалансом. Высокие значения показателя полноты указывают на четкую идентификацию классов с малыми характеризующими выборками, но иногда за счет несколько более низкой точности (что отражается в не самом высоком значении F1).

- RUSBoost обеспечивает сбалансированные результаты с хорошими значениями recall и PR-AUC. Платой за простоту и надежность метода в условиях несбалансированных классов является немного более низкая accuracy при низких пороговых значениях ($t = 4$) по сравнению с Easy Ensemble.
- Метод Balanced Bagging можно считать надежным инструментом классификации со средними показателями recall, PR-AUC и F1 score. Использование методов оверсэмплинга, таких как SMOTE, при $t = 4$ улучшает обнаружение классов с малыми выборками.
- Специализированный метод EWSNet демонстрирует высокие значения recall, но немного уступает по accuracy и показателю F1 score. Надежно работает при $t = 4$, достигая максимального в эксперименте значения recall в 0,965, но снижение точности ограничивает его конкурентоспособность по показателю F1 score.
- Случайный лес (Random Forest) демонстрирует стабильные результаты при меньшей структурной сложности и сложности использования по сравнению с конкурентами (минимальное количество признаков и деревьев). При этом значение показателя PR-AUC, как правило, отстает от ансамблевых методов, таких как Easy Ensemble и RUSBoost.

5.2. Регрессионный подход

Вычисленные метрики на тестовом множестве по заболеваемости COVID-19 (второй временной ряд) для различных горизонтов прогнозирования (14 и 28 дней) представлены в табл. 4 и табл. 5 для сетей GRU и LSTM соответственно. Графическое представление прогнозов приведено на рис. 5.

Таблица 4. Результаты для GRU

	14 дней		28 дней	
	Среднее	Дисперсия	Среднее	Дисперсия
<i>NMAE</i>	0,038	0,058	0,074	0,077
<i>NRMSE</i>	0,057	0,125	0,113	0,139
R^2	0,960	0,697	0,838	0,494

Таблица 5. Результаты для LSTM

	14 дней		28 дней	
	Среднее	Дисперсия	Среднее	Дисперсия
<i>NMAE</i>	0,032	0,063	0,054	0,077
<i>NRMSE</i>	0,055	0,131	0,094	0,123
R^2	0,961	0,652	0,899	0,578

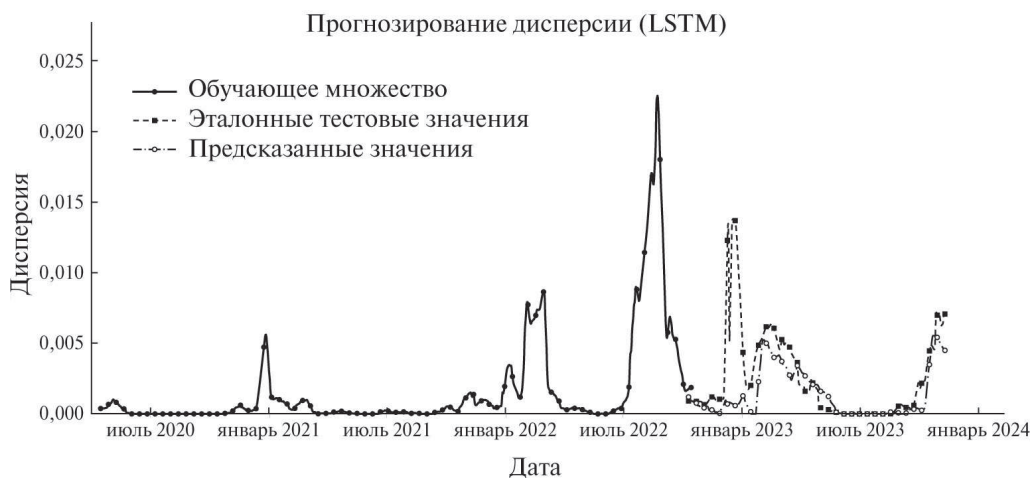


Рис. 5. Результаты предсказания среднего и дисперсии для временного ряда заболеваемости COVID-19.

Как видно из табл. 4 и 5, результаты LSTM лучше, чем у модели GRU, однако разница между ними невелика, что позволяет применять оба подхода. Среднее значение прогнозируется лучше, чем дисперсия. Как и ожидалось, результаты для длинного горизонта прогнозирования (28 дней) хуже, но их по-прежнему можно считать удовлетворительными в случае предсказания средних значений.

6. Заключение

В статье рассматриваются методы прогнозирования критических переходов в эпидемических временных рядах с использованием сигналов раннего предупреждения и методов машинного обучения. Выделены два основных

подхода: бинарная классификация для определения близости к критическим точкам перехода и предсказательное моделирование среднего и дисперсии показателей заболеваемости. При внедрении описанных методов в системы эпиднадзора предсказательное моделирование предполагается использовать на ранних стадиях циркуляции пандемических штаммов вирусов нового типа. Когда сезонность изучаемой инфекции не установлена и сложно различать отдельные эпидемические волны, очередной подъем заболеваемости может выводиться непосредственно из интервальных прогнозных оценок, полученных через предсказанные значения среднего и дисперсии числа новых случаев инфекции. После перехода нового заболевания в сезонное, с выраженными периодами эпидемических подъемов и спадов, становится возможной оценка пороговой заболеваемости, выделяющая эпидемические волны, и, как следствие, соответствующая маркировка сегментов временных рядов на основе ретроспективных данных. В этом случае предполагается переход к более простым в использовании алгоритмам обнаружения эпидвспышек на основе постановки задачи классификации.

Согласно результатам экспериментов для решения задачи классификации наиболее эффективными моделями являются Easy Ensemble и EWSNet. Метрики эффективности для этих методов изменяются незначительно при всех рассмотренных пороговых значениях, демонстрируя высокое значение показателя recall и удовлетворительное значение точности (precision). Для решения задач прогноза заболеваемости рекуррентные нейронные сети, включая архитектуры LSTM и GRU, эффективно моделировали динамику среднего значения, но испытывали трудности с предсказанием дисперсии. Дисперсия, будучи по своей природе менее гладкой и более чувствительной к флуктуациям, представляла собой более сложную задачу для этих моделей. Значения метрик NRMSE и R^2 указывают на удовлетворительные предсказательные способности для динамики среднего значения, при этом LSTM немного превосходит GRU.

Данное исследование демонстрирует жизнеспособность сочетания расчета СРП и использования методов машинного обучения для прогнозирования критических переходов в эпидемических системах. Полученные результаты могут быть использованы не только для здравоохранения, но и для других областей, где понимание и прогнозирование критических явлений имеет большое значение. Продолжение представленной работы предполагается в направлении расширения тестовых наборов данных и изучения усовершенствованных архитектур для повышения надежности и применимости упомянутых методов в других сценариях. В качестве перспективных подходов, могущих улучшить качество раннего детектирования эпидемических вспышек, планируется рассмотреть комбинированные многофакторные подходы машинного обучения, в том числе на основе мультимодальных данных. В частности, модели могут учитывать температурные показатели и влажность [29], число запросов пользователей в поисковых системах, связанных с заболеваемостью [26], а также данные ретроспективной заболеваемости, до-

полненные данными обращений в телемедицинские сервисы с кашлем и посещение отделений неотложной помощи с бронхиолитом [27]. Несмотря на то что внедрение таких подходов в эпиднадзор РФ лимитировано ограниченной доступностью и низким качеством подобных данных, подобные модели могут быть уже сейчас реализованы и протестированы на синтетических данных для будущего их использования по мере улучшения сбора и открытия доступа к новым массивам данных по демографическим и эпидемическим показателям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ramadevi B., Bingi K.* Chaotic time series forecasting approaches using machine learning techniques: A Review // *Symmetry*. 2022. V. 14. No. 5. Article No. 955.
2. *Leonenko V.N.* When a Pandemic Comes to Town: Combating Propagation of Novel Viruses in Russian Cities Using Statistical and Mathematical Modeling // In 2024 IEEE 3rd International Conference on Problems of Informatics, Electronics and Radio Engineering (PIERE). IEEE, 2024, November. P. 990–995.
3. *Бульчев Ю.Г.* Распознавание сигналов без расширения пространства состояний по результатам наблюдений, содержащих сингулярную помеху, с учетом нелинейности // *АиТ*. 2024. № 2. С. 81–102.
4. *Bury T., Bauch C.T., Anand M.* Detecting and distinguishing tipping points using spectral early warning signals // *Journal of the Royal Society*. 2020. V. 17. No. 170. Article No. 20200482.
5. *Southall E., Brett T.S., Tildesley M.J., et al.* Early warning signals of infectious disease transitions: a review // *Journal of the Royal Society*. 2021. V. 18. No. 182. Article No. 20210555.
6. *Zhang X., Yang L., Chenet T., et al.* Predicting influenza-like illness trends based on sentinel surveillance data in China from 2011 to 2019: A modelling and comparative study // *Infectious Disease Modelling*. 2024. V. 9. No. 3. P. 816–827.
7. *Alfred R., Obit J. H.* The roles of machine learning methods in limiting the spread of deadly diseases: A systematic review // *Heliyon*. 2021. V. 7. Is. 6. Article No. e07371.
8. *Adugna A., Abebaw D., Abebaw A., Jemal M.* Deep learning architectures for influenza dynamics and treatment optimization: a comprehensive review // *Frontiers in Artificial Intelligence*. 2025. V. 8. No. 8. Article No. 1521886.
9. *Zhao Q., Moniz N., Korotasz A., et al.* Early warning signals of emerging infectious diseases // *bioRxiv*. 2025. Article No. 2025.03.03.641350.
10. *Bizzotto A., Guzzetta G., Marziano V., et al.* Increasing situational awareness through nowcasting of the reproduction number // *Frontiers in Public Health*. 2024. V. 12. Article No. 1430920.
11. *Gao S., Chakraborty A.K., Greiner R., et al.* Early detection of disease outbreaks and non-outbreaks using incidence data: A framework using feature-based time series classification and machine learning // *PLOS Computational Biology*. 2025. V. 21. No. 2. Article No. e1012782.

12. *Drake K., Boyd O., Franceschi V.B., et al.* Phylogenomic early warning signals for SARS-CoV-2 epidemic waves // *EBioMedicine*. 2024. V. 100. Article No. 10493.
13. *O'Brien D.A., Clements C.F.* Early warning signals predict emergence of COVID-19 waves // *medRxiv*. 2021. Article No. 2021.06.24.21259444.
14. *Kouprianov A.* COVID-19.SPb.monitoring. Monitoring COVID-19 epidemic in St. Petersburg, Russia: Data and scripts. 2021.
URL <https://github.com/alexei-kouprianov/COVID-19.SPb.monitoring>.
15. *Brett T., Ajelli M., Liu QH., et al.* Detecting critical slowing down in high-dimensional epidemiological systems // *PLoS Computational Biology*. 2020. V. 16. No. 3. Article No. e1007679.
16. *Bury T.* A Python package for early warning signals of bifurcations in time series data // *The Journal of Open Source Software*. 2022. V. 8. No. 82. Article No. 5038.
17. *Bury T., Sujith RI., Pavithran I., et al.* Deep learning for early warning signals of tipping points // *PNAS*. 2021. V. 118. No. 39. Article No. e2106140118.
18. *Smita D., Sidheekh S., Clements CF., et al.* Machine learning methods trained on simple models can predict critical transitions in complex natural systems // *Royal Society Open Science*. 2022. V. 9. No. 2. Article No. 211475.
19. *Liu X.Y., Wu J., Zhou ZH.* Exploratory Undersampling for Class-Imbalance Learning // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. 2009. V. 39. No. 2. P. 539–550.
20. *Seiffert C., Khoshgoftaar T.M., Van Hulse J., Napolitano A.* RUSBoost: A hybrid approach to alleviating class imbalance // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*. 2010. V. 40. No. 1. P. 185–197.
21. *Maclin R., Opitz D.* An empirical evaluation of bagging and boosting // *Proceedings of the Fourteenth National Conference on Artificial Intelligence*. 1997. P. 546–551.
22. *Bishop C.* Pattern recognition and machine learning. Berlin, Germany: Springer. 2006. 778 p.
23. *Deb S., Sidheekh S., Clements C.F., Krishnan N.C., Dutta P.S.* Machine learning methods trained on simple models can predict critical transitions in complex natural systems // *Royal Society Open Science*. 2022. V. 9. No. 2. Article No. 211475.
24. *Lim S., Giorgini L., Moon W., Wettlaufer J.S.* Predicting Critical Transitions in Multiscale Dynamical Systems Using Reservoir Computing // *Chaos*. 2020. V. 30. Is. 12. Article No. 123126.
25. *Kong L.-W., Fan HW., Grebogi C., Lai YC.* Machine learning prediction of critical transition and system collapse // *Physical Review Research*. 2021. V. 3. No. 1. Article No. 013090.
26. *Su K., Xu L., Li G., et al.* Forecasting influenza activity using self-adaptive AI model and multi-source data in Chongqing, China // *EBioMedicine*. 2019. V. 47. P. 284–292.
27. *Morbey R.A., Todkill D., Moura P., et al.* Using machine learning to forecast peak health care service demand in real-time during the 2022-23 winter season: A pilot in England, UK // *PloS One*. 2025. V. 20. No. 1. Article No. e0292829.
28. *Cho G., Park J.R., Choi Y., et al.* Detection of COVID-19 epidemic outbreak using machine learning // *Frontiers in Public Health*. 2023. V. 11. Article No. 1252357.

29. *Amendolara A.B., Sant D., Rotstein H.G., Fortune E.* LSTM-based recurrent neural network provides effective short term flu forecasting // *BMC Public Health*. 2023. V. 23. No. 1. Article No. 1788.
30. *Lapeyrolerie M., Boettiger C.* Limits to ecological forecasting: Estimating uncertainty for critical transitions with deep learning // *Methods in Ecology and Evolution*. 2022. V. 14. Is. 3. P. 785–798.
31. *Sangiorgio M., Dercole F.* Robustness of LSTM neural networks for multi-step forecasting of chaotic time series // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. V. 139. Article No. 110045.

Статъя представена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 20.04.2025

После доработки 20.10.2025

Принята к публикации 06.11.2025

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2026 г. И.В. ПЕТРОВ (ivpetrov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

ИГРЫ НА СЕТЯХ С ЛИНЕЙНЫМ НАИЛУЧШИМ ОТВЕТОМ: МОДЕЛИ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ

Системам связанных агентов и сетевому управлению посвящено большое число отечественных и зарубежных исследований. Исторически, наибольший интерес в теории управления возникал к усредняющим системам и, в частности, к задаче консенсуса. Однако сетевое взаимодействие может характеризоваться более специфическими функциями, отражающими зависимость от действий соседей по сети, что особенно явно проявляется в моделях стратегического взаимодействия на сети, которое является предметом теории игр. В данной работе проводится обзор теоретико-игровых моделей сетевого взаимодействия из класса игр с линейным наилучшим ответом. Представлено формальное описание моделей, рассматриваются постановки задач управления в данном классе игр. Особое внимание уделено связи с моделями консенсуса и известными для них задачами управления, которые могут быть сформулированы в терминах стратегического взаимодействия агентов. Несмотря на общую схожесть с известными в теории управления моделями линейных систем, данный класс игр позволяет отразить качественные аспекты стратегического взаимодействия связанных агентов и подчеркнуть роль структурных характеристик.

Ключевые слова: сетевые эффекты, игры на сетях, линейные системы, сетевое управление.

DOI: 10.7868/S2413977726060066

1. Введение

Научный интерес к вопросам управления сетевым взаимодействием агентов разной природы начал возникать в середине XX в. с появлением концепции сетей. Сети были призваны описывать системы взаимодействующих агентов, при этом – в отличие от графа как математического объекта, строго формализующего характер связи – не конкретизируя механизмы взаимодействия. В работах исследователей в области социологии [1, 2], экономики [3, 4] и права [5, 6] сетевой характер взаимодействия подразумевает наличие формальных и неформальных связей между агентами, которые не всегда возможно описать математически, но которые приводят к взаимозависимости

в процессах принятия решений, распространения (например, информации, активности, заболеваний) и др.

Спецификой многих социальных систем является наличие индивидуальных стимулов участников взаимодействия, что нашло отражение в возникновении – в примерно то же время – теории игр как инструмента описания конфликтных ситуаций. С конца XX в. эти два подхода – сетевой и теоретико-игровой – начали использоваться совместно. Игры, в которых агенты связаны между собой сетевой структурой (или сетевая структура является результатом их взаимодействия), используют результаты теории графов и сетевого анализа для определения влияния структуры сети на стратегическое поведение.

Одновременно с этим развивались и формальные методы анализа и управления сетевыми системами. В теории автоматического управления и ее приложениях огромную популярность среди исследователей получили так называемые усредняющие системы и модели консенсуса [7–11], в особенности, классическая модель ДеГроота [12], в которой изучается динамика формирования мнений в сетевой структуре. При этом математические методы описания систем агентов, взаимодействующих стратегически, обладают специфическими особенностями, а результат взаимодействия зачастую отличен от консенсуса. Решения, принимаемые агентами под влиянием взаимодействия с другими, порождают неэффективность, что делает актуальными разработку и исследование различных методов управления.

С начала 2000-х гг. было предложено несколько подходов к управлению, основанных на сетевых характеристиках агентов в социально-экономических системах. Особую популярность обрели подходы к управлению взаимодействием агентов в экономике: модели конкуренции и сотрудничества компаний, межбанковское взаимодействие, модели потребления общественных благ. Возник ряд теоретико-игровых моделей, тесно связанных с эконометрическими моделями идентификации влияния окружения агента на его поведение, в которых исследователи моделируют взаимосвязь между выбором агента и выбором его соседей. Наибольший интерес исследователей вызвали игры, в которых наилучший ответ игрока зависит от действий его соседей линейно; возникли формальные постановки задач управления в таких моделях. Именно этим моделям и методам управления в них посвящен данный обзор.

1.1. Терминология

Отправной точкой в математических моделях взаимосвязи действий агентов между собой является концепция «эндогенных социальных эффектов» (англ. *endogenous social effects*)¹ [13]. В зависимости от контекста в работах по социологии и социальной психологии в качестве примеров употребляются

¹ Для многих терминов в литературе на русском языке не возникло устоявшихся переводов – в этом случае термины взяты в кавычки.

«влияние окружения» (англ. peer influences), социальные нормы (англ. social norms), «эффект соседей» (англ. neighborhood effects), «социальное взаимодействие» (англ. social interactions), «стадное поведение» (англ. herd behavior), конформность (англ. conformity) и др. Иными словами, агенты (люди, организации и др.) под влиянием взаимодействия друг с другом начинают учиться, подражать или имитировать поведение своего окружения.

В исследованиях в области микроэкономики и эконометрики влияние такого взаимодействия на индивидуальное поведение принято называть «эффектами окружения» (англ. peer effects)² [16]. Эффекты окружения определяются как корреляция действий среди представителей одной референтной группы. Для идентификации таких эффектов была предложена модель Linear-in-Means (LIM) [13], изучающая влияние социальных взаимодействий на поведение и результаты индивидов в группе. Модель используется для анализа того, как поведение или характеристики группы (в исходной постановке – средние значения) влияют на поведение отдельного ее члена.

Исторически под группами понимали части одной популяции (например, жители одной общины, одноклассники, коллеги, компании, конкурирующие на одном рынке), что в эконометрических моделях эффектов окружения отражалось в объясняющей переменной, характеризующей поведение одной из непересекающихся групп. С появлением и развитием концепции сетей возникла возможность учитывать индивидуальные связи между людьми – «сетевые эффекты»³, что позволило уточнить существующие модели, а также разрешить ряд технических проблем их идентификации [16]. Вопросы идентификации таких моделей рассмотрены в [13, 16, 22, 23], в обзорах [24, 25], посвященных результатам эконометрических исследований, а также в [26, 27], посвященных идентификации эффектов окружения в полевых и лабораторных экспериментах.

Игры с линейным наилучшим ответом можно рассматривать как генеративные модели эффектов окружения/сетевых эффектов: если в центре внимания авторов эконометрических моделей находится задача идентификации этих эффектов и выявления причинно-следственных связей на основе реальных данных, то игры на сетях предоставляют теоретическую основу для объяснения того, как формируются эффекты окружения, моделируя страте-

² Несмотря на обилие прикладных исследований (например, [14, 15]), в литературе встречаются разрозненные варианты перевода, такие как «эффекты сообучения/сверстников», реже – «эффекты окружения/среды».

³ В работе [17], посвященной теории отраслевых рынков, авторы предложили использовать термин «сетевые эффекты» к рынкам с возрастающей отдачей от масштаба (см., например, [18]), а термин «сетевые экстерналии» – к рынкам, на которых действия агентов порождают неэффективные равновесия. Некоторые из приведенных ниже моделей действительно отражают взаимодействие фирм на рынках [19, 20], тем не менее в понимании [17] термины не всегда уместны. Принимая это во внимание, ниже термин «сетевые эффекты» будет применяться и как синоним «peer effects», и в более широком смысле: к ситуациям зависимости действий одного участника от действий тех, с кем он связан сетью, как, например, в [21].

гическое поведение агентов. В теоретико-игровых моделях фокус внимания направлен на роль структуры взаимодействия: как структура влияет на равновесие в игре; к чему, с точки зрения агрегированных характеристик, приводят локальные эффекты взаимодействия узлов; какие узлы и связи играют ключевую роль. А интерес к линейным моделям главным образом мотивирован ключевой ролью сети в анализе влияния узлов друг на друга, равновесия и задач управления.

1.2. Сетевые интервенции

За последние десятилетия было получено множество результатов в рамках изучения структуры реальных сетей, механизмов их формирования и того, как сети влияют на поведение их участников. Появились примеры использования структуры сетей для разработки экономической политики [28]; предложены инструменты для оценки эффектов воздействия (англ. treatment) для случаев взаимосвязанных индивидов [29].

В исследованиях сетевых моделей стратегического взаимодействия авторы изучают, каким образом следует учитывать информацию о сети при решении задач управления в таких моделях.

Сетевые эффекты являются примерами «внешних эффектов» или «экстерналий» (англ. externalities) – ситуации, в которой благополучие человека зависит от действий других людей без взаимно согласованной компенсации [30]. В этом ключе можно сказать, что игры с линейным наилучшим ответом описывают влияние линейных внешних эффектов в действиях игроков, связанных с их окружением. С точки зрения теоретико-игровых моделей взаимодействия это означает, что равновесие при наличии экстерналий неэффективно (см. раздел 2.1).

В экономической науке внешние эффекты всегда рассматривались как источник неэффективности, а классическим способом использования или противодействия внешним эффектам является прямое вмешательство в экономический процесс (или экономический интервенционизм). Аналогично, возникло понятие «сетевых интервенций» или « сетевого вмешательства» (англ. network interventions) – процесс использования данных сетей социального взаимодействия для изменения результатов деятельности участников сети⁴. В англоязычной литературе термин «сетевые интервенции» обрел особую популярность после публикации статьи [31] с одноименным названием, в которой формулировался скорее в контексте социологических исследований. Существуют различные стратегии сетевых интервенций, и интерес представляет оценка применимости и эффективности этих методов. Как будет показано ниже, в рассмотренных теоретико-игровых моделях равновесие всегда неэффективно, что мотивирует исследователей к разработке методов управления.

⁴ Сетевые интервенции можно рассматривать в качестве аналога термина «сетевое управление», используемого для технических систем.

В методах статистического причинно-следственного вывода (англ. causal inference) оценка среднего эффекта воздействия (англ. average treatment effect) традиционно предполагает независимость влияния воздействия на разных индивидов [32]. В условиях сетевого взаимодействия агенты могут влиять друг на друга, нарушая это предположение. В практических ситуациях исходы взаимодействия акторов зависят от поведения их соседей в сети, наличие взаимосвязей влияет на средний эффект воздействия, что принято описывать термином «сетевая интерференция» (англ. network interference): при наличии эффектов сетевого взаимодействия средний эффект для подвергшихся воздействию и общий эффект расходятся, а игнорирование этих факторов занижает итоговую оценку воздействия [29].

1.3. Приложения

Существует множество примеров количественной оценки влияния группового поведения на индивидуальные результаты. Всюду далее решение, принимаемое агентом i , будет обозначаться переменной x_i . В большинстве случаев под x_i понимается усилие или действие агента (англ. effort или action), которые он совершает в интересующем исследователей процессе. Стандартными примерами в литературе служат следующие:

- образовательные процессы – наверное, наиболее популярная область приложений [14, 15, 33, 34]. В качестве переменной x_i могут использоваться средний балл студента или результаты социологических опросов. Если эконометрические модели изучают, как успеваемость студентов зависит от их окружения, то теоретико-игровая постановка формализует стратегический характер усилий: например, студенты выбирают затрачиваемое на обучение время или участие в дополнительных активностях, при этом учитывая выбор своих одноклассников и друзей.
- социальные нормы и девиантное поведение – существует множество ситуаций, в которых неэтичное поведение распространяется в социальных сетях. Например, некоторые корпоративные культуры поощряют слабые этические нормы [35], а наличие неэтичных одноклассников в академическом контексте повышает соблазн студентов к мошенничеству [36, 37]. В этом случае модели теоретико-игрового взаимодействия позволяют исследовать, какую роль социальные нормы играют в выборе усилий отдельных участников и их позицию в структуре сети. В этом случае в качестве переменной x_i используют индикаторную функцию, характеризующую совершение определенного действия;
- сети преступников (англ. crime networks) [38] – исторически первый пример⁵, послуживший основой для модели «линейно-квадратичной игры» [39] (см. раздел 2.2.3) и задачи выявления ключевого игрока (см.

⁵ <https://lens.monash.edu/2019/08/06/1375976/network-science-identifying-key-players-in-collective-dynamics>

раздел 3.2), x_i – профиль преступника (англ. crime effort profile). Эконометрические модели оценивают, как связи между агентами влияют на проявление девиантного поведения [40]. Игры на сетях показывают, как эффекты стратегической дополнителности (или заменимости, см. раздел 2.1) усилий взаимодействующих агентов распространяются через сеть.

- конкуренция и сотрудничество фирм [19]. В данном случае x_i – объем выпуска (нормированный объем продаж). Авторы исследуют влияние коллаборации в рамках научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок (НИОКР, англ. Research and development, R&D). В общем случае исследователей интересует вопрос о роли межфирменных отношений в экономическом развитии: влиянии экзогенного расширения деловых сетей на производительность фирм и о механизмах, лежащих в их основе [41].

Основная критика эконометрических моделей идентификации сетевых эффектов связана с проблемой эндогенности [13, 23], а именно корреляции между признаками агентов и их действиями, а также между окружением и ошибкой модели. Для борьбы с эндогенностью предложены различные методы, такие как двухшаговый метод наименьших квадратов с использованием инструментальных переменных, модели нелинейной регрессии и др. (см. обзоры [24, 25]).

Целью данной статьи является обзор моделей и методов управления, которые были предложены для случая линейной зависимости функции наилучшего ответа игроков от действий соседей в рамках теоретико-игрового взаимодействия на сети. Работа состоит из следующих разделов: во введении кратко описана история развития сетевых моделей стратегического взаимодействия и задач управления, отмечена значительная роль моделей идентификации сетевых эффектов (эффектов окружения); в разделе 2 описаны игры с линейным наилучшим ответом – классификация игр, инструменты их анализа, а также примеры игр и задачи управления, решаемые в сравнительной статике. В разделе 3 приводится описание задачи центра, стремящегося изменить равновесный исход игры: классификация методов управления, примеры задач, а также описание решения ряда задач управления сетевым взаимодействием агентов, взаимодействующих стратегически. В заключении указаны примеры из актуальных направлений дальнейших исследований.

2. Игры с линейным наилучшим ответом

2.1. Выигрыш игроков и линейный наилучший ответ

Рассмотрим некооперативную одношаговую игру на сети с полной информацией. Множество агентов $N = \{1, \dots, n\}$ на сети, заданной симметричной матрицей смежности $G = \{g_{ij}\} \in \{0, 1\}^{n \times n}$, $g_{ii} = 0$, взаимодействуют стратегически: пытаются получить наибольшую выгоду, учитывая действия других игроков. Каждый участник i выбирает некоторое неотрицательное действие x_i и получает выигрыш v_i от принятого решения. Функция выигрыша v_i

(или функция платежа/полезности, англ. payoff/utility function)

$$(1) \quad v_i(x) = f(x_i, z(x_{-i}, G))$$

включает в себя зависимость от собственного действия x_i игрока i , а именно – выгоды и издержки, которые он получает от выбранного действия, и зависимость от сетевых эффектов – действий других игроков $x_{-i} = \{x_j\}_{j \neq i}$ – которая представлена в виде функции окружения игрока $z(x_{-i}, G)$, учитывающей структуру сети (подробнее о характере этой зависимости ниже). Помимо этих двух компонент, в модель могут входить так называемые чистые экстерналии (англ. pure externalities) – зависимость выигрыша агента от других, экзогенных параметров, которые не связаны с действиями игроков.

Агенты максимизируют собственный выигрыш, для чего каждому агенту i необходимо наилучшим образом отвечать на действия других агентов x_{-i} :

$$(2) \quad BR_i(x_{-i}, G) = \operatorname{Argmax}_{x_i \geq 0} v_i(x_i, z(x_{-i}, G)).$$

Функция $BR_i(x_{-i})$ носит название функции наилучших ответов игроков (англ. best response/reply function): она не зависит от действий самого игрока i и является его оптимальным ответом на действия других участников. Исход $x^* = \{x_i^*\}_{i \in N}$ называется равновесием Нэша в чистых стратегиях в такой игре, если для всех i

$$(3) \quad x_i^* = BR_i(x_{-i}^*, G).$$

Каждый агент подвержен влиянию прямых (англ. direct) и косвенных (англ. indirect) сетевых эффектов. Прямой эффект на агента i оказывают его соседи по сети (вершины, смежные с вершиной i). Косвенные эффекты возникают в силу сетевого характера взаимодействия: на агента оказывают опосредованное влияние соседи его соседей, соседи соседей его соседа и т.д. Аналогичные рассуждения справедливы и для влияния связей в сети на действия агентов: прямой эффект от ребра графа G получают вершины, соединенные этим ребром, а косвенный – другие вершины, связанные с исходной парой вершин.

Ключевым аспектом игры является характер зависимости игрока i от действий его соседей по сети: в играх с линейным наилучшим ответом функция наилучшего ответа линейно зависит от его окружения $z_i(x_{-i}, G)$, и тогда равновесие в такой игре – это решение системы линейных алгебраических уравнений, являющихся наилучшими ответами игроков при условии $x \geq 0$. В данный момент распространена следующая классификация функций окружения игрока:

- локальное агрегирование (англ. local aggregate):

$$z(x_{-i}, G) = \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j,$$

при котором выигрыш каждого игрока зависит от суммы действий его соседей по сети;

- локальное усреднение (англ. local average):

$$z(x_{-i}, G) = \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j,$$

где d_i – степень узла i ; выигрыш каждого игрока зависит от среднего действий его соседей по сети.

Параметр $\beta \in \mathbb{R}$ оказывает мультипликативный эффект и характеризует силу сетевого взаимодействия (или «социальный мультипликатор» [42]). При отсутствии сетевой компоненты (т.е. при $g_{ij} = 1$ для всех i, j) оба класса сводятся к играм с аддитивным агрегированием, см. [43, 44], в которых на каждого агента влияет одна и та же совокупность стратегий других агентов, в то время как в играх на сетях эта совокупность зависит от агента и сети.

Различие между классами состоит в том, как агент i учитывает (или наблюдает) активность своих соседей по сети. В отличие от локального агрегирования, при котором изменение действия агента j напрямую влияет на агента i , в случае усреднения агент i ориентируется на среднюю характеристику своего окружения вне зависимости от того, каким высоким или низким является вклад агента j . Иными словами, модели локального агрегирования призваны описывать так называемые «эффекты перетока» (англ. spillover effect) – распространения вклада одних участников на других, в то время как модели локального усреднения отражают поведенческие аспекты, связанные с ролью окружения в выборе агента. Как показано в [45, 46], модели локального агрегирования и усреднения⁶ различны как с точки зрения свойств функции выигрыша, так и в сравнительной статике и решениях задач управления. В частности, различна и роль параметра β : в играх локального агрегирования увеличение силы сетевого взаимодействия монотонно увеличивает предельный выигрыш игроков, в то время как в модели локального усреднения это не так (см. раздел 2.2.2).

Другим основанием классификации, предложенным в [48] (в том числе и для не сетевых моделей), является знак перед функцией окружения, в зависимости от которого теоретико-игровые модели получают различную интерпретацию:

- модели с эффектом «стратегической дополнителности» (англ. strategic complementarity, [49]) и, соответственно, положительный сетевой эффект, при котором вклад соседа j игрока i увеличивает предельный выигрыш игрока i (примерами служат модели из [39, 45]);

⁶ В этой связи стоит отметить модели ресурсных сетей [47]: по существу, в этих моделях оба механизма – агрегирование и усреднение – используются одновременно, но не в теоретико-игровой постановке.

- модели с эффектом «стратегической заменимости» (англ. strategic substitutability) и, соответственно, отрицательный сетевой эффект, при котором усилие соседа j игрока i снижает предельный выигрыш игрока i (примерами служат модели из [50, 51]).

Формально речь идет о знаке второй смешанной производной выигрыша игрока по собственному действию и действию его соседей: если $g_{ij} = 1$, то для игр с эффектом стратегической дополнителности $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i x_j} > 0$, а для игр с эффектом стратегической заменимости $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i x_j} < 0$. Иными словами, в действиях агентов проявляются положительные (отрицательные) локальные сетевые экстерналии: для игр со стратегической дополнителностью (заменимостью) увеличение усилий других игроков (x_{-i}) приводит к тому, что более высокие действия игрока i приносят относительно большую (меньшую) выгоду по сравнению с более низкими усилиями этого игрока. Примеры моделей и наилучшие ответы игроков представлены в табл. 1.

Таблица 1. Модели игр с линейным наилучшим ответом

	Стратегическая дополнителность (англ. strategic complementarity)	Стратегическая заменимость (англ. strategic substitutability)
Локальное агрегирование (англ. local aggregate)	«Линейно-квадратичная игра» $BR_i = b_i + \beta \sum_j g_{ij} x_j$	«Игра локального общественного блага» $BR_i = b_i - \beta \sum_j g_{ij} x_j$
Локальное усреднение (англ. local average)	«Социальные нормы в сети» $BR_i = (1 - \beta)b_i + \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j$	«Модель антиконформизма» $BR_i = (1 - \beta)b_i - \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j$

В рамках любой экономической модели обычно выделяют идеальное состояние системы, характеризующееся максимальным общественным благосостоянием. В случае задач управления речь идет о так называемом «первом по предпочтительности исходе» (англ. first-best outcome/contract, или social optimum), по аналогии с задачами агент-принципал теории контрактов [52]. В работах, посвященных задачам управления в играх с линейным наилучшим ответом, под общественным благосостоянием почти всегда понимается сумма выигрышей всех агентов (подробнее об этом – в разделе 3.1):

$$W = \sum_{i=1}^n v_i,$$

а социальный оптимум (т.е. решение задачи $\max_x W$ и соответствующие ему равновесные исходы x^O и выигрыши W^O) исследуется в рамках сравнительной статики, подразумевающей, что агенты стремятся максимизировать не собственные функции выигрыша, а благосостояние всех агентов в сумме. Как

будет показано ниже на примере отдельных игр, равновесие Нэша в них никогда не является социальным оптимумом: сетевой эффект приводит либо к заниженным, либо к завышенным действиям агентов, тем самым делая актуальными разработку методов управления в таких играх.

2.2. Математические модели сетевых эффектов: координация, конкуренция, сотрудничество и информированность

2.2.1. Игра координации

Классическая модель социального влияния и динамики мнений в сети [53, 54], являющаяся частным случаем задачи консенсуса, имеющей важные приложения в задачах управления в технических системах [8], может рассматриваться и как микроэкономическая модель стратегического принятия решений агентами [55].

А именно, пусть n агентов стремятся максимизировать свой индивидуальный выигрыш, характеризующийся функцией

$$(4) \quad v_i = - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} (x_i - x_j)^2.$$

Иными словами, агенту невыгодно делать выбор (например, выбор технологии или языка), который отличается от выбора соседей. Функция $v_i(x)$ вогнута, и условий первого порядка достаточно для получения системы наилучших ответов игроков – оптимальный ответ игрока i на действия своих соседей по сети,

$$(5) \quad BR(x_{-i}) = \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j,$$

совпадает с моделью динамики мнений. Так, модель ДеГроота можно интерпретировать как игру, в которой участники хотят продемонстрировать поведение, похожее на поведение своих соседей по сети, для чего они наилучшим образом реагируют на их действия.

В такой игре любой профиль действий, в котором все агенты совершают одно и то же действие, представляет собой равновесие Нэша. Помимо этого, агенты не обладают индивидуальными характеристиками, отличающими их друг от друга. В силу этого большую популярность получила модель, отражающая взаимодействие агентов, находящихся под влиянием индивидуальных навыков и усредненного поведения своего окружения.

2.2.2. Социальные нормы в сети

С точки зрения теоретико-игрового взаимодействия интерес представляет другой вариант модели ДеГроота, предложенный в [56] (модель Фридкина-Джонсена описывает динамику наилучших ответов игроков, анализу динамики посвящена, например, работа [57]), где каждый узел i дополнительно

поддерживает постоянное внутреннее мнение. Существует несколько популярных вариантов данной модели в теоретико-игровой постановке, в частности модель с неполной информацией, в которой агенты пытаются определить некоторое состояние мира [58]. В этом случае интерпретация модели близка к известной игре «конкурса красоты» (англ. «beauty contest») [59].

Ниже будет рассмотрена модель локального усреднения, или модель социальных норм (англ. social-norm model) [46]. Каждый игрок получает выигрыш⁷

$$(6) \quad v_i = b_i x_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right) \left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j \right)^2 - \frac{1}{2} x_i^2,$$

где $b_i > 0$ отражает индивидуальную продуктивность агента i , а $\beta > 0$ – склонность к конформизму (англ. *taste for conformity*). Агенты совершают затратные действия ($-x_i^2/2$), получают предельный выигрыш $b_i x_i$, не зависящий от усилий соседей, и при этом сравнивают свой индивидуальный вклад x_i со средним вкладом своих соседей по сети, стараясь минимизировать различие между своим действием и средним действием своей группы. В силу большой роли слагаемого $\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j = \bar{x}_i$ в других публикациях, в которых оно фигурирует в контексте социологических исследований, авторы называют его *социальной нормой* агента i .

Из условий первого порядка $\partial v_i / \partial x_i = 0$ находим наилучшие ответы игроков:

$$(7) \quad x_i = (1 - \beta)b_i + \beta \bar{x}_i,$$

или в матричном виде

$$(8) \quad x = (1 - \beta)b + \beta \hat{G}x,$$

где $\hat{G} = \{\hat{g}_{ij} = g_{ij}/d_i\}^{n \times n}$. При $\beta < 1$ равновесие Нэша в чистых стратегиях существует и единственно:

$$(9) \quad x^* = (1 - \beta)(I - \beta \hat{G})^{-1}b.$$

⁷ Можно рассмотреть другие функции выигрыша игроков, например

$$v_i = b_i x_i - \frac{\theta}{2} \sum_j \frac{g_{ij}}{d_i} (x_i - x_j)^2 - \frac{x_i^2}{2},$$

или

$$v_i = b_i x_i - \theta x_i \sum_j \frac{g_{ij}}{d_i} x_j - \frac{1 + \theta}{2} x_i^2,$$

где $\theta = \frac{\beta}{1 - \beta}$. Наблюдение авторов [46] состоит в том, что перечисленные функции выигрышей объединяет функция наилучших ответов, однако, даже если равновесные усилия x^* одинаковы, анализ благосостояния и его сравнительная статика могут отличаться, поскольку равновесные полезности и, следовательно, благосостояние различны.

Первое, что необходимо отметить, это эффект индивидуальной продуктивности. Хотя влияние b_i на v_i^* всегда положительно, взаимовлияние продуктивности агентов может иметь разнонаправленный характер:

$$(10) \quad \frac{\partial v_i^*}{\partial b_j} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \iff x_i^* \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \bar{x}_i^*,$$

т.е. равновесная полезность агента i возрастает (убывает) в ответ на небольшое изменение продуктивности b_j агента j тогда и только тогда, когда равновесный ответ игрока i больше (меньше) его равновесной социальной нормы. Основным интерес представляет зависимость исхода игры от параметра β . Авторы показывают, что в общем случае эта зависимость немонотонна, и переходят к рассмотрению двух крайних случаев:

- чистый индивидуализм ($\beta = 0$): равновесный ответ каждого игрока равен его индивидуальной продуктивности

$$\sum_{j=1}^n x_j^* = \sum_{j=1}^n b_j;$$

- полный конформизм ($\beta \rightarrow 1$): все агенты выбирают одинаковый уровень усилий, равный средневзвешенной индивидуальной продуктивности,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \sum_{j=1}^n x_j^* = n \sum_{j=1}^n \bar{d}_j b_j,$$

где \bar{d} – вектор нормализованных степеней вершин, $\bar{d}_i = d_i / \sum_{j=1}^n d_j$. Будет ли совокупный вклад $\sum_j x_j^*$ выше при чистом индивидуализме ($\beta = 0$) или при полном конформизме ($\beta \rightarrow 1$), зависит от корреляции между продуктивностью b и распределением по степеням вершин в графе G :

$$(11) \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} \sum_{j=1}^n x_j^* \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \sum_{j=1}^n x_j^*(\beta = 0) \iff \text{Corr}(\bar{d}, b) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0.$$

Когда b и \bar{d} положительно (отрицательно) коррелируют, т.е. агенты с более высокой производительностью занимают более (менее) центральные позиции в сети, тогда полный конформизм увеличивает (уменьшает) совокупные усилия.

Социальный оптимум в модели, т.е. решение задачи

$$(12) \quad \max_x \quad b^T x - \frac{1}{2} x^T H(\beta) x,$$

где $H(\beta) := I + \frac{\beta}{1-\beta} (I - \hat{G})^T (I - \hat{G})$, достигается решением следующей системы наилучших ответов игроков:

$$(13) \quad x_i = (1 - \beta)b_i + \beta \bar{x}_i + \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} (x_j - \bar{x}_j).$$

Отличием оптимума от равновесия Нэша в игре является наличие в системе наилучших ответов игроков в случае социального оптимума последнего слагаемого – влияния собственного действия агента на социальную норму своих соседей. В равновесии Нэша, принимая решение о своих индивидуальных усилиях, агенты не учитывают этот фактор, что создает экстерналию, которая может быть как положительной, так и отрицательной: если i и j соседи, то

$$(14) \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \iff x_i \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \bar{x}_i.$$

Другими словами, когда агент j прилагает усилия x_j , он оказывает положительное (отрицательное) внешнее воздействие на своего соседа i тогда и только тогда, когда усилия i выше (ниже) социальной нормы i . Оптимум достигается в том случае, когда равновесные ответы игроков соответствуют их индивидуальной продуктивности

$$(15) \quad x^O = b.$$

В этом случае выделяется класс регулярных сетей: для них совокупные усилия в сети всегда оптимальны: $x^* = x^O = b$. Это происходит потому, что в регулярных сетях положительные и отрицательные внешние эффекты, оказываемые агентами на своих соседей, в точности уравниваются, так что совокупный эффект оптимален.

Ключевую роль индивидуальная продуктивность играет и в задаче добавления и удаления связей между агентами – центр принимает во внимание только продуктивность агентов, при этом информация о структуре сети не играет роли:

1. добавление ключевых связей (англ. key-link adding): в любой сети добавление связи между двумя агентами с высокой (низкой) продуктивностью не только увеличивает (уменьшает) усилия этих двух агентов, но и увеличивает (уменьшает) усилия всех остальных агентов в сети;
2. удаление ключевых связей (англ. key-link removing): независимо от структуры сети центр должен удалить связь между двумя наиболее продуктивными агентами .

Решение задачи стимулирования будет рассмотрено ниже, при анализе управления в линейно-квадратичной игре в разделе 3.2.

2.2.3. Линейно-квадратичная игра

Линейно-квадратичная игра на сети, предложенная в [39], является одной из наиболее известных моделей игры на сети. Функция выигрыша игрока i

$$(16) \quad v_i = x_i \left(b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j \right) - \frac{x_i^2}{2}$$

включает выгоду от собственного действия, $x_i b_i$, и действий соседей, $\beta \sum_j g_{ij} x_j x_i$, а также квадратичные издержки от принятого решения, $x_i^2/2$.

Параметр $b_i > 0$ является предельным выигрышем игрока i , не зависящим от действий соседей (англ. standalone marginal return). Параметр β отражает характер зависимости от действий соседей по сети: при $\beta > 0$ действия игроков комплементарны (англ. strategic complements), а при $\beta < 0$ действия соседей взаимозаменяют друг друга (англ. strategic substitutes).

В случае линейно-квадратичной игры условия первого порядка

$$(17) \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j - x_i = 0$$

приводят к следующим функциям наилучшего ответа:

$$(18) \quad BR_i(x_{-i}) = b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j.$$

В матричном виде систему наилучших ответов можно представить как

$$(I - \beta G)x = b,$$

где I – единичная матрица. Если матрица $(I - \beta G)$ обратима (подробнее об этом в разделе 2.3), то равновесие Нэша существует и единственно: равновесные ответы игроков в матричном виде

$$(19) \quad x^* = (I - \beta G)^{-1}b.$$

Идея авторов модели [39] заключалась в создании связи между концепцией равновесия Нэша и мерами центральности узлов на сети: рассмотрим сеть с матрицей смежности G и скаляр $\beta \geq 0$. Тогда вектор центральностей [60] параметра β

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k G^k \mathbf{1} = (I - \beta G)^{-1} \mathbf{1}$$

отражает общее число путей в G , которые начинаются в вершине i . Параметр β – коэффициент затухания, который снижает относительный вес путей наибольшей длины. Таким образом, равновесие Нэша в линейно-квадратичной игре на графе в точности совпадает с вектором центральностей Каца–Боначича.

В [61] была рассмотрена более общая модель: авторы рассмотрели произвольную взвешенную сеть, множество допустимых действий агента $x_i \in [0, L]$ и наилучший ответ игроков

$$(20) \quad BR_i(x_{-i}) = \min \left(b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j, L \right),$$

тогда при $L = \infty$ получается исходная модель.

В [62] была исследована сравнительная статика модели: социальный оптимум, т.е. решение задачи $\max_x \sum v_i$, приводит к следующей системе наилучших ответов игроков:

$$(21) \quad b_i - x_i + 2\beta \sum_{j=1}^n g_{ij}x_j = 0,$$

или

$$(22) \quad x_i^O = BR_i(x_{-i}) + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij}x_j,$$

т.е. равновесные усилия слишком малы, потому что каждый агент игнорирует положительное влияние (или положительную экстерналию, возникающую вследствие эффекта комплементарности) своего действия на выбор своих соседей. В результате равновесие в игре оказывается неэффективным. В силу этого эффекта действия агентов всегда занижены, а центр в задаче стимулирования всегда выбирает однонаправленные вмешательства: либо все агенты получают дополнительные субсидии, либо, наоборот, облагаются штрафами/налогом (подробнее об этом см. в разделе 3.2).

Очевидно также, что и структура сети монотонно влияет на равновесный исход: для случая симметричных матриц в [63] показано, что для двух матриц Σ и Σ' , таких что $\Sigma = -I + \beta G$, а $\Sigma' > \Sigma$ если $\sigma'_{ij} > \sigma_{ij}$ для всех i, j , то

$$(23) \quad x^*(\Sigma') > x^*(\Sigma).$$

В [64] была предложена модель формирования сети, в которой агенты выбирают себе тех, с кем создавать связь, исходя из максимизации собственной выгоды по формуле (16). Из указанных свойств функции следует, что наибольшую выгоду будут получать агенты с наибольшим показателем центральности, а другие агенты будут стремиться создать с ними связь.

2.2.4. Игра локального общественного блага

Игры на сетях с эффектом стратегической заменимости описывают ситуацию, в которой действия одного агента снижают стимулы для соседей увеличивать свои усилия. Такие игры моделируют конкурентные сценарии, например конкуренцию за ограниченные ресурсы, рынки или выгоды, где игроки связаны через сеть взаимодействия, а их стратегии взаимозаменяемы. Этот эффект противоположен эффекту стратегической дополнительности, при котором действия одного агента стимулируют увеличение усилий соседей.

В модели локального общественного блага на сети агенты принимают решения о своих индивидуальных вкладах в производство некоторого неисключаемого блага (агентов нельзя исключить из его потребления), которое приносит пользу как им самим, так и их соседям по сети. Во многих исследованиях данная модель получила интерпретацию модели теории отраслевых рынков [65], в частности олигополии [66], а некоторые версии получили развитие

в области деловых игр и поведенческих экспериментов [67]. Эта модель тесно связана с теорией олигополии, поскольку в обеих рассматриваются стратегическое взаимодействие между игроками, чьи действия обладают эффектом стратегической заменимости.

Пусть фирма i производит некоторое количество товара x_i , а ее прибыль равна $v_i(x) = x_i p(\sum_j x_j) - c x_i$, где $p(\sum_j x_j)$ – обратная функция спроса, c – издержки. В случае, когда обратная функция спроса линейна, прибыль фирмы i можно записать как

$$(24) \quad v_i = x_i \left(b - \left(x_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j \right) \right) - c x_i,$$

где $g_{ij} = g_{ji} = 1$ означает, что продукция фирмы i и товары фирмы j являются взаимозаменяемыми, β – степень заменимости товаров, а b – размер рынка. Более общие сетевые модели рассмотрены в [19, 68]. Похожие модели рассматривались в [69, 70], где они дополнялись параметром r_i агента, характеризующим тип i -го агента – эффективность или квалификацию его деятельности. Функция выигрыша игроков

$$(25) \quad v_i = x_i \left(b - \sum_{j=1}^n x_j \right) - \frac{x_i^2}{2r_i},$$

а наилучший ответ на произвольном графе G можно представить как

$$(26) \quad (I_r + \beta G) x = b,$$

где I_r – диагональная матрица с элементами $1/r_i$ на диагонали.

В [19] была сформулирована модель, учитывающая эффекты стратегической дополнителности и заменимости одновременно: фирмы конкурируют на рынках, при этом сотрудничая в рамках научно-исследовательских разработок (англ. Cournot oligopoly game with spillover effect of R&D collaborations). Наилучший ответ игрока в данной модели принимает вид:

$$(27) \quad x_i = b_i - \rho \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j,$$

где $B = \{b_{ij}\}$ – матрица конкуренции между фирмами (связь между фирмами возникает в том случае, если они конкурируют на одном рынке), а $G = \{g_{ij}\}$ – матрица сотрудничества в рамках НИОКР. Равновесие, при достаточно нетривиальных условиях, существует и единственно:

$$(28) \quad x^* = (I + \rho B - \beta G)^{-1} b.$$

Всюду выше рассматривался случай общего знания – ситуация, при которой каждый агент обладает полной информацией об индивидуальных характеристиках других агентов, структуре связей и т.д. Одним из подходов к

анализу асимметрии информации являются модели рефлексивных игр. Рефлексивная игра [71] – модель принятия агентами решений на основании иерархии их представлений о поведении оппонентов. Если структура информированности агентов в такой игре имеет конечную сложность (так называемая точечная структура информированности [50]), то можно построить граф рефлексивной игры \bar{G} , наглядно демонстрирующий взаимосвязь между действиями агентов, участвующих в равновесии. В случае линейного наилучшего ответа игроков⁸:

$$(30) \quad BR_i(x_{-i}) = b_i - \beta \sum_{j=1}^n \bar{g}_{ij} x_j,$$

информационное равновесие может быть найдено по формуле [72]:

$$(31) \quad x^* = (I + \beta \bar{G})^{-1} b,$$

где вектор b отражает информированность агентов, а \bar{G} – граф рефлексивной игры. Вершины графа \bar{G} соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, а дуги графа \bar{G} отражают взаимную информированность агентов.

Решения многих задач управления (в том числе в сравнительной статике) в описанной модели близки к решениям задач в линейно-квадратичной игре на сети. Для случая, когда равновесие в модели единственно, авторы [73] рассмотрели задачу стимулирования – ее описанию посвящен раздел 3.2.

2.3. Анализ равновесия в играх с линейным наилучшим ответом

Доказательство существования и единственности равновесия в описанных выше примерах обычно осуществляется двумя способами: через теоремы о существовании решения системы линейных алгебраических уравнений (как, например, в [39]) или через доказательства существования потенциальной функции игры.

Впервые концепция потенциальных игр была предложена в [74]. Основная идея заключается в доказательстве существования функции, которая позволяет описать результат стратегического взаимодействия игроков с помощью скалярной функции⁹. Функция φ является потенциальной функцией игры

⁸ В оригинальной статье была рассмотрена модель

$$(29) \quad v_i = x_i \left(b - \sum_{j=1}^n \hat{g}_{ij} x_j \right) - \frac{x_i^2}{2}$$

и $g_{ii} = 1$.

⁹ В [75] показано, что для некоторых классов игр потенциальная функция является функцией Ляпунова динамики игры, что позволяет использовать метод функций Ляпунова для анализа равновесия [76].

(англ. potential function/best-reply potential), если для любых x_i, x'_i, x_{-i} и для всех $i \in N$ верно

$$(32) \quad \varphi(x_i, x_{-i}) - \varphi(x'_i, x_{-i}) = v_i(x_i, x_{-i}) - v_i(x'_i, x_{-i}).$$

Игры с линейным наилучшим ответом обладают потенциальной функцией (в общем случае она может быть не единственной): например [77], в матричном виде ее можно записать как

$$(33) \quad \varphi(x) = x^T 1 - \frac{1}{2} x^T (I \pm \beta G) x.$$

Максимум потенциальной функции соответствует равновесию Нэша. Достаточным условием существования единственного решения является вогнутость потенциальной функции. Матрица вторых производных $\nabla^2 \varphi(x) = -(I \pm \beta G)$, и $\varphi(x)$ строго вогнута тогда и только тогда, когда матрица $I \pm \beta G$ положительно определена: для любого $y \neq 0$

$$(34) \quad y^T (I \pm \beta G) y > 0.$$

Для игр локального агрегирования в зависимости от знака перед βG необходимым и достаточным условием существования и единственности равновесия является либо $\beta \lambda_{\max}(G) < 1$ в случае игр с эффектом стратегической дополнителности (-), либо $\beta |\lambda_{\min}(G)| < 1$ в случае игр с эффектом стратегической заменимости (+), где $\lambda_{\max}(G)$ и $\lambda_{\min}(G)$ – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы G соответственно. В играх локального усреднения этих условий не требуется: в качестве G выступает строчно-частичная матрица, для которой $\lambda_{\max}(G) = 1$, и тогда условием существования будет являться $\beta < 1$.

Существенным отличием игр с эффектом стратегической заменимости является существование углового решения (англ. corner equilibrium) [78]: потенциальная функция перестает быть вогнутой, и из свойства игры иметь неотрицательные стратегии x возникает ситуация, в которой одни игроки – пассивные агенты – бездействуют, $x_i^* = 0$, а другие – активные агенты – выбирают максимально допустимое действие – $x_j^* = b_j$. В этой ситуации условие существования равновесия связано с наличием в графе G максимального независимого множества, которое, как и число равновесий, может быть не единственным: активные игроки не должны быть связаны между собой.

В случае несимметричной матрицы G достаточным условием для существования равновесия является положительная определенность эрмитовой компоненты матрицы $G = \frac{G+G^T}{2}$ и, следовательно, $1 + \delta \lambda_{\max(\min)}(\frac{G+G^T}{2}) > 0$. Однако в случае игр с эффектом стратегической заменимости анализ динамики наилучших ответов сложнее (см. ниже).

В [63, 100] показано, что равновесие в игре с линейным наилучшим ответом является решением линейной задачи о дополнителности (англ. linear

complementarity problem, LCP). В [76] показано, что задача LCP является подклассом задач вариационного неравенства¹⁰ – анализу игр в этом ключе (в том числе в случае нелинейного наилучшего ответа) посвящены работы [76, 79, 80] и ссылки в них. В [76] авторы, используя формулировку равновесия Нэша в терминах решения задачи вариационного неравенства, исследуют связь между параметризацией игры и матрицей частных производных оператора наилучших ответов (матрицей Якоби, англ. Jacobian of the game), а также влияние свойств матрицы Якоби на существование и единственность равновесия, сходимость динамики наилучших ответов в дискретном и непрерывном времени.

2.4. Динамика наилучших ответов

Выше взаимодействие между агентами сформулировано в виде одношаговой некооперативной игры, однако описанное взаимодействие можно представить альтернативным образом. В [81] систему (18) сформулировали как линейную аффинную динамическую систему в непрерывном времени:

$$(35) \quad \dot{x} = Ax + b,$$

где $A = \beta G - I$. Или для каждого агента i

$$(36) \quad \dot{x}_i = b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j - x_i.$$

Решением системы или установившимся значением состояния системы является величина

$$(37) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= -A^{-1}b \\ &= -(\beta G - I)^{-1}b \\ &= (I - \beta G)^{-1}b. \end{aligned}$$

Интерес представляет и разностная аппроксимация уравнения (35)¹¹, которая позволяет установить взаимосвязь между шагом дискретизации δ и сетевым эффектом β . Конкретное значение множителя перед матрицей взаимодействия связано как с непосредственным влиянием окружения на выбор агента, так и с шагом дискретизации в модели. Помимо этого, наилучшие ответы игроков могут быть ограничены в силу специфики анализа различных жизненных ситуаций: в большинстве случаев (уровень усилий в моделях коллективного поведения, кол-во продукции в моделях производства товаров или услуг

¹⁰ Формулировка равновесия Нэша в терминах решения вариационного неравенства является обобщением свойства игры быть потенциальной [74].

¹¹ В совокупности, у формулы (19) имеется как минимум три интерпретации: это равновесие теоретико-игровой модели, равновесие линейной аффинной динамической системы, а также показатель центральности узлов сети.

и др.) наилучший ответ не может быть отрицательным; в популярном кейсе исследования образовательных процессов агенты выбирают уровень усилий, как правило измеряющийся в часах: наилучшие ответы ограничены нулем и некоторым значением сверху, а также предполагаются быть целочисленными. Все эти аспекты влекут за собой ограничения в выборе инструментов для анализа динамики в таких играх [82]. Обсуждению взаимосвязи между теоретико-игровой интерпретацией и теорией динамических систем, в том числе для модели выше, посвящена книга [83].

В теоретико-игровой терминологии процедура поиска равновесия игроками носит название «нащупывание» (франц. *tatonnement*) равновесия, например «нащупывания по Нэшу/Курно» (франц. *Nash/Cournot tatonnement*). В играх с эффектом стратегической заменимости равновесие, стабильное относительно дискретного нащупывания по Нэшу, влечет стабильность равновесия относительно непрерывной динамики наилучших ответов, однако обратное неверно [78]. Сходимость непрерывной динамики наилучшего ответа к равновесию Нэша в таких играх была показана в [84], случай влияния дальновидных агентов рассмотрен в [85].

В случае игры на ориентированном графе G динамика наилучших ответов может заикливаться. В [86] авторы ввели два класса направленных сетей, для которых динамика наилучших ответов сходится к единственному равновесию: один из классов определяется возможностью изменить параметры игры специальным образом так, чтобы динамика новой игры совпадала с динамикой исходной; другой класс сетей тесно связан с критерием Колмогорова обратимости цепи Маркова¹².

2.5. Связь с другими областями

В [7, 8] рассматриваются основные задачи и приложения сетевого управления («control of networks»), изучающего вопросы управления в сетях (в частности, такими задачами, как групповое, кооперативное, мультиагентное/многоагентное управление). Пусть $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния в момент времени t узлов сети, $i = 1, \dots, n$, состоящей из элементов g_{ij} , отражающих связь между вершинами i и j в графе G . Авторами отмечается, что широкий класс сетевых мультиагентных систем описывается в непрерывном времени моделями вида

$$(38) \quad \dot{x}_i = F_i(t, x_i, u_i) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t) f_{ij}(x_i, x_j),$$

где функции $F_i(\cdot)$ и $f_{ij}(\cdot)$ характеризуют локальную динамику агента и его взаимодействие с другими агентами соответственно. При этом наиболее распространенными являются сети, в которых взаимодействия агентов зависят

¹² О связи между ориентированными графами и критерием Колмогорова см. также в [87, 88].

только от их разногласий (расхождения их состояний) и наиболее полно исследованы в настоящий момент линейные сетевые системы с функцией f_{ij} вида

$$(39) \quad f_{ij}(x_i, x_j) = x_i - x_j.$$

В дальнейшем обзор посвящен именно таким моделям. В то же время подобная (38) постановка справедлива не только для моделей консенсуса, но и для теоретико-игровых моделей взаимодействия, при этом функция $f_{ij}(x_i, x_j)$ носит особую специфику (см. разделы 2.1 и 2.4 данного обзора).

С описанными выше моделями тесно связаны и модели межотраслевого баланса [89, 90]; схожая проблематика исследовалась в работах, посвященных динамическим моделям межотраслевого баланса [91–93] и оптимального планирования [94]. А именно, пусть x_i – объем выпуска i -й отрасли, G – матрица прямых затрат, элементы которой отражают затраты продукции i -й отрасли на производство единицы продукции j -й отрасли. Тогда матрица полных затрат будет

$$\Lambda = (I - G)^{-1},$$

элементы которой отражают количество продукции отрасли i , необходимое для обеспечения единицы конечного выпуска продукта отрасли j . В англоязычной литературе рассматривают более общий случай матрицы Λ , зависящий от параметра β (англ. Leontief inverse) [89]: $\Lambda = (I - \beta G)^{-1}$.

Различным способам описания теоретико-игрового взаимодействия на сети посвящены работы [95, 96], задачам управления в случае стратегического формирования сетей – [97, 98] и в моделях ограниченной рациональности – [50, 71] (подробнее в разделе 2.2.4). При этом в данном обзоре совсем не рассмотрены кооперативные игры [99], хотя несколько вариантов кооперативного решения для описанных выше игр предложены в [100–102].

Отдельно стоит отметить работы, посвященные задачам управления в моделях социальных сетей [12, 103], в моделях смешанного социального влияния (механизмов ассимилятивного/диссимилятивного влияния и ограниченного доверия) [104]. Как было показано выше, подобные модели также можно рассматривать в качестве моделей стратегического взаимодействия.

3. Задачи управления

3.1. Целевые функции и бюджетные ограничения центра

Управляющий орган (или центр/центральный планировщик, англ. central planner) получает информацию о выигрышах участников и может повлиять на их действия, вообще говоря, в разные моменты времени и различными способами. Вследствие этого результаты взаимодействия агентов меняются, становятся более желательными для центра. Предметом управления могут являться различные элементы системы – действия агентов, их стимулы, структура взаимодействия и другие характеристики.

В случае игр с линейным наилучшим ответом управление формулируется в виде задачи оптимизации, которую в общем виде можно представить как

$$(40) \quad \max_u W(x, u)$$

при ограничениях

$$(41) \quad x \geq 0, \quad x = BR(x, u), \quad K(u, u_0) \leq C,$$

где u – параметр игры, на который оказывается воздействие в процессе управления, u_0 – исходное значение параметра, $K(u, u_0)$ – функция затрат, характеризующая ограничения на изменение относительно исходного значения параметра, C – константа. Как было показано выше, в случае анализа сравнительной статики и социального оптимума, в качестве управляющего воздействия может рассматриваться и сам вектор x наилучших ответов игроков. Таким образом, рассматривается двухшаговая игра, в которой на первом шаге центр осуществляет управление, а на втором агенты разыгрывают равновесие.

Хотя одна и та же функция наилучших ответов может соответствовать различным функциям выигрыша, решение задачи управления может различаться в зависимости от того, какую функцию стремится максимизировать центральный планировщик:

- увеличение/снижение агрегированных результатов игроков:

$$W = \sum_{i=1}^n x_i \longrightarrow \max,$$

- увеличение суммы выигрышей участников – социальный оптимум по Бен-таму:

$$W = \sum_{i=1}^n v_i \longrightarrow \max,$$

- увеличение выигрышей наименее «обеспеченных» участников – социальный оптимум по Роулзу:

$$W = \min_i v_i \longrightarrow \max.$$

Проблеме выбора целевых функций центра в таких задачах на данный момент уделено мало внимания (см., например, [105]), а наиболее популярным выбором служит функция общественного благосостояния – сумма выигрышей агентов.

Существует несколько классификаций задач управления, применимых к рассматриваемым моделям [31, 95, 106, 107]. В [31] приведены следующие стратегии сетевых интервенций, каждая из которых имеет различные тактические альтернативы:

- индивидуальные (англ. individual) – идентификация ключевых участников сети, выбранных на основе некоторых сетевых характеристик, см. табл. 2;

- групповые (англ. segmentation) – сегментация сети, при которой вмешательство направлено на отдельные группы узлов;
- структурные (англ. alteration), при которых изменениям подвергаются связи между участниками и сеть взаимодействий в целом, см. табл. 2;
- индукционные (англ. induction), при которых происходит возбуждение сети таким образом, что активируются новые взаимодействия между участниками – так называемые каскады, которые могут носить информационный/поведенческий и др. характер (подробнее см., например, [108]).

Таблица 2. Задачи управления в играх с линейным наилучшим ответом

Тип задачи	Описание	Работы
Индивидуальные	Идентификация ключевых участников сети, выбранных на основе некоторых сетевых характеристик	Galeotti, Goyal, 2009 [109]; Candogan, Bimpikis, Ozdaglar, 2012 [110]; Bloch, Querou, 2013 [111]; Fainmesser, Galeotti, 2016 [112]; Demange, 2017 [113]; Galeotti, Golub, Goyal, 2020 [73]; Kor, Zhou, 2023 [114]; Belhaj, Deroian, Safi, 2023 [116]; Jeong, Shin, 2024 [115]; Dasaratha, Golub, Shah, 2024 [117]
Структурные	Изменениям подвергаются связи между участниками и сеть взаимодействия в целом	Borgatti, 2006 [118]; Ballester, Calvo-Armengol, Zenou, 2006 [39]; Corbo, Calvo-Armengol, Parkes, 2006 [119]; Corbo, Calvo-Armengol, Parkes, 2007 [63]; Golub, Lever, 2010 [120]; Konig, Tessone, Zenou, 2014 [64]; Belhaj, Bervoets, Deroian, 2016 [121]; Матвеевко, Королев, 2016 [122]; Hiller, 2017 [123]; Harkins, 2020 [124]; Li, 2023 [125]; Sun, Zhao, Zhou, 2023 [126]

Ряд авторов [95, 106] выделяют институциональные интервенции, подчеркивая специфику вмешательства, направленного на изменение правил взаимодействия. Помимо этого, в [95] задача управления составом участников выделяется в отдельный класс, в то время как в [31] этот класс задач отнесен к задачам управления структурой взаимодействия.

В работах, посвященных управлению в играх с линейным наилучшим ответом, в качестве u может быть выбран состав игроков $i \in N$, стимулы b или структура взаимодействия G . Ниже описаны решения некоторых задач, а в табл. 2 представлены работы в соответствии с приведенной классификацией.

3.1.1. Управление стимулами агентов

В этих работах рассматриваются задачи управления, в которых центр изменяет индивидуальные характеристики деятельности агентов. Задачи стимулирования, в которых центр стремится максимизировать общественное благосостояние в моделях с эффектом стратегической дополнителности, рассмотрены в [73, 113] (в том числе для игры координации [115]). Задачи определения цен монополистом при наличии локальных экстерналий потребления рассмотрены в [110, 111], где исследовалась взаимосвязь между центральностью потребителей в сети и ценами и объемами, которые им предлагает монополист.

3.1.2. Управление структурой

Управление структурой корректирует уровень активности путем изменения структуры сети. Создание или удаление связей при таком управлении влияет на центральность агентов, что приводит к изменению равновесия. Исследователи изучают оптимальные сети с точки зрения центра. Авторы [64] показали, что среди простых сетей, максимизирующих вогнутую функцию центра, выделяется класс «вложенных расщепляемых графов» (англ. *nested split graph, NSG*). В [121] показано, что любая сеть, не являющаяся NSG, допускает создание связей между агентами, улучшающее благосостояние в линейно-квадратичной игре на сети.

3.1.3. Управление в условиях неопределенности

Многие авторы прибегают к анализу устойчивости предложенных методов управления относительно внешних возмущений или вероятностной неопределенности (например, [73, 78, 127, 128] и др.). Важно, что данные о самой структуре сети зачастую труднодоступны (см. например, [129, 130]), в связи с чем возник ряд работ, моделирующих как вероятностную, так и игровую неопределенность о сетевой структуре.

Так, в [112] центр выбирает оптимальный уровень цен для агентов, располагая информацией только о распределении по степеням вершин сети. Другой случай: структура сети является наблюдаемой, но местоположение или личность агентов – это частная информация [131]. Иными словами, центр не в состоянии отличить сети, идентичные с точностью до перестановки вершин. Существенным в данном дизайне игры является то, что вектор x^* равновесных ответов игроков теперь является контрактом, который центр предлагает агентам. Авторы предъявляют классы сетевых структур, для которых оптимальные контракты центра совместимы со стимулами агентов и их коалиций.

3.1.4. Идентификация сети

Одной из важнейших задач является задача идентификации сети. Существует несколько методов, позволяющих решить эту задачу на основе данных о серии исходов игры, основанных на статистическом подходе (графовые методы регуляризации) [132], методах оптимизации [133] и методах машинного обучения [134]. Отдельное направление исследований – решение задач двух-

уровневой оптимизации¹³ [136], в которой предполагается, что наблюдаемые равновесные ответы игроков возникают в результате оптимизации агентами структуры взаимодействия с точки зрения функции общественного благосостояния.

Другой подход идентификации сети основан на информации о динамике наилучших ответов игроков и решении задачи управления [137]. Центр не знает структуры сети в игре, но имеет возможность наблюдать за наилучшими ответами игроков и манипулировать действиями некоторых из них. Авторы показывают, что критерий идентифицируемости структуры сети эквивалентен ранговому критерию управляемости системы, приведенной к специальному виду, и применяют алгоритм [138], разработанный для идентификации устойчивых линейных систем.

3.2. Управление в линейно-квадратичной игре на сети

Возможно, первой и наиболее исследованной с точки зрения задач управления является линейно-квадратичная игра на сети, для которой существует множество постановок задач управления (см. [39, 118] и ссылки выше). Ниже для данной игры будет рассмотрено несколько задач, решение которых наглядно демонстрирует особенности и специфику задач управления в играх с линейным наилучшим ответом. Выигрыш игроков в модели:

$$(42) \quad v_i = x_i \left(b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j \right) - \frac{x_i^2}{2},$$

а равновесие в игре:

$$x^* = (I - \beta G)^{-1} b.$$

Исторически первой задачей была задача выявления ключевого игрока (англ. key player problem). Ключевой игрок – это игрок, удаление которого оказывает наибольшее влияние на совокупный результат. Пусть G – исходная (симметричная) матрица смежности, G^{-i} – новая матрица, полученная из матрицы G путем заполнения нулями строки и столбца, соответствующих i -ой вершине. Тогда задача центра: $\max_{i \in N} \left[\sum_j x_j^*(G) - \sum_j x_j^*(G^{-i}) \right]$ или, что эквивалентно,

$$(43) \quad \min_{i \in N} \sum_{j=1}^n x_j^*(G^{-i}).$$

Пусть $M = \{m_{ij}\} = (I - \beta G)^{-1}$, а $k = \{k_i\} = (I - \beta G)^{-1} \mathbf{1}$. Авторами вводится специальный показатель центральности (англ. intercentrality measure), учи-

¹³ Исследование задачи двухуровневой оптимизации восходит к исследованию игр Штакельберга, где внешняя (или внутренняя) задача оптимизирует действия лидера (или последователя) [135].

тывающий и индивидуальную центральность игроков, и вклад в центральность других:

$$c_i = \frac{k_i^2}{m_{ii}}.$$

Авторы показали, что вершина с наибольшим значением c_i решает задачу (43).

Другая задача была рассмотрена в [73], это задача стимулирования (англ. incentive-targeting problem): центр стремится максимизировать функцию общественного благосостояния в равновесии:

$$(44) \quad W = \sum_{i=1}^n v_i = \frac{1}{2} x^T x \longrightarrow \max_b.$$

Таким образом, центр вносит изменения в предельный выигрыш игроков, не зависящий от действий соседей $\hat{b} \rightarrow b$, что интерпретируется как изменение стимулов игроков (например, денежные субсидии фирмам). Бюджетное ограничение центра:

$$(45) \quad K(b, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n (b_i - \hat{b}_i)^2 \leq C \sim n.$$

Решением (44) является эффективная сетевая эвристика (англ. network heuristic):

$$(46) \quad \hat{b}_{nh} = b + \sqrt{C} \mu_{1(n)},$$

где $\mu_{1(n)}$ – собственный вектор матрицы G , соответствующий максимальному (минимальному) собственному значению для случая положительных (отрицательных) значений коэффициента β .

Как было указано выше, выбор целевой функции центра оказывает значительное влияние на результат. Если в данной задаче вместо максимизации суммы выигрышей (44) перейти к максимизации агрегированного результата участников

$$W = \sum_{i=1}^n x_i \longrightarrow \max_b,$$

решением будет распределение бюджета, пропорциональное индивидуальному вкладу игроков:

$$\hat{b}_{nh} = b + \sqrt{C} x^*.$$

Разница между функциями состоит в том, что сумма выигрышей учитывает и сами действия, и их различия: $\sum_i v_i = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 = \hat{x}^2 + \sigma^2$, где \hat{x} – среднее, σ^2 – дисперсия.

Предложенная функция затрат (45) обладает рядом свойств, позволяющих авторам распространить полученные результаты на некоторые другие функции [139]. Одним из выделяющихся случаев является пример линейных затрат центра:

$$K(b, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n |b_i - \hat{b}_i| \leq C \sim n.$$

В этой ситуации решение – передать весь бюджет единственному игроку i^* , $\hat{b}_{i^*} = b_{i^*} + C$, который выбирается исходя из вклада игроков в результат вмешательства центра.

Интересно провести сравнение решений задачи стимулирования для моделей локального агрегирования и усреднения. Для достижения социального оптимума без ограничений на бюджет в линейно-квадратичной игре

$$(47) \quad \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n \left[(b_i + s_i)x_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij}x_i x_j - \frac{x_i^2}{2} \right] \rightarrow \max_s$$

центру необходимо выбрать $s_i^O = \beta \sum_j g_{ij}x_j$. Исходя из свойств игры эта величина будет всегда положительна, а центр будет субсидировать более центральных игроков в сети.

Как было показано ранее, в модели социальных норм агенты создают как положительные, так и отрицательные экстерналии для своих соседей. Как результат, в задаче стимулирования [46] агентов

$$(48) \quad \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n \left[(b_i + s_i)x_i - \frac{\theta}{2} \left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j \right)^2 - \frac{x_i^2}{2} \right] \rightarrow \max_s,$$

решением которой является вектор s^O , состоящий из компонент

$$(49) \quad s_i^O = \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} \left(x_j - \sum_{k=1}^n \frac{g_{jk}}{d_j} x_k \right),$$

центр субсидирует (облагает налогом) тех агентов, чьи соседи прилагают усилия выше (ниже) своих социальных норм (в отличие от линейно-квадратичной игры, в которой центр вынужден всегда стимулировать агентов из-за создаваемых ими положительных экстерналий). Другими словами, центру необходимо субсидировать агентов, прилагающих усилия ниже, чем в среднем прилагают их соседи, и облагать налогом тех, кто прилагает усилия выше, чем их соседи.

Важно отметить, что изменение исходного вектора b индивидуальных характеристик до последнего момента подразумевалось как задача с ненулевым бюджетом, в то время как в реальных приложениях имеет место ситуация, в

которой центр перераспределяет ресурсы между агентами без дополнительных ресурсов. Условию сбалансированного бюджета т.е. корректирующим субсидиям и налогам (англ. Pigouvian tax) посвящена работа [20].

В [63, 119] рассматривается задача нахождения структуры взаимодействия, максимизирующей целевую функцию центра. С ростом β решения задач центра по максимизации агрегированных результатов и суммы выигрышей совпадают, а среди всех сетей максимум доставляют те, чей спектральный радиус принимает наибольшее значение. Случай задачи управления комбинацией нескольких активностей (когда x_i становится вектором) рассмотрен в [114]. Случаи одновременного использования нескольких различных стратегий управления рассмотрены, например, в [140, 141].

4. Заключение

В представленной работе подробно рассматриваются вопросы управления стратегическим взаимодействием агентов на сети в случае, когда зависимость агента от действий других описывается линейной функцией наилучших ответов. Равновесие Нэша в таких играх не является социальным оптимумом из-за наличия экстерналий, что мотивирует разработку механизмов управления, таких как выявление ключевых агентов, стимулирование агентов, создание или удаление связей, направленных на увеличение эффективности коллективного взаимодействия.

Некоторые из направлений дальнейших исследований, активно развивающихся в данный момент, заслуживают отдельного внимания.

4.1. Нелинейный наилучший ответ

Задачам управления в играх с нелинейным наилучшим ответом посвящены работы [142–144]. В [34] предложена общая модель сетевых эффектов, нелинейный наилучший ответ в которой включает в себя модель локального усреднения в качестве частного случая. Нелинейность реализована в виде CES-функции с параметром эластичности β :

$$(50) \quad \bar{x} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

а наилучший ответ игрока принимает вид:

$$(51) \quad BR_i = (1 - \lambda_2)b_i + (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

где λ_1 соответствует интенсивности эффекта перетока, а λ_2 – эффекта конформизма. При $\beta = 1$ возникает модель ЛИМ. Когда β очень велико, возникает

модель $\bar{x}_{-i} = \max_j \{x_j\}$, в которой агент ориентируется только на того своего соседа по сети, который прилагает наибольшие усилия, а когда β принимает высокие отрицательные значения, преобладает модель $\bar{x}_{-i} = \min_j \{x_j\}$, в которой агент ориентируется на соседа, демонстрирующего наименьшие усилия.

4.2. Игры на мультиплексных сетях

Во многих случаях ранее рассматривалась взаимосвязь агентов в рамках одной сети. Однако зачастую агенты поддерживают множество типов взаимоотношений, таких как сотрудничество, взаимопомощь, заимствование и др. [145]. Одним из способов описания такого взаимодействия являются мультиплексные сети: многослойные сети, в которых запрещена связь между вершинами из разных слоев, и которые призваны описывать сосуществование различных типов отношений между агентами [146]. Анализу таких игр посвящены работы [147, 148].

4.3. Сети с большим числом вершин и графовые функции

Некоторые сети, встречающиеся в прикладных исследованиях, настолько велики, что анализ становится затруднительным или невозможным [149]. В [150] был предложен инструмент для анализа больших сетей и асимптотического поведения последовательности графов с растущим числом вершин. Графовая функция (англ. graph function, graphon) – объект, который обобщает дискретные графы на случай больших сетей, представленных в непрерывном пределе. В [151] предложены меры центральности для таких объектов, а в [127] описанные выше игры были перенесены на случай предельного объекта: игроки теперь представлены как популяция на интервале $[0, 1]$, а вероятность связи между ними описывается через графовую функцию $W(i, j)$, определенную на единичном квадрате. Динамика в таких играх исследуется в [152], задачи управления рассмотрены в [141, 153].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Asch S.E.* Social psychology. Oxford University Press, 1987.
2. *Merton R.K.* Social theory and social structure. Free Press, 1968.
3. *Katz M.L., Shapiro C.* Network externalities, competition, and compatibility // The American Economic Review. 1985. V. 75. No. 3. P. 424–440.
4. *Farrell J., Saloner G.* Standardization, compatibility, and innovation // RAND J. Econom. 1985. P. 70–83.
5. *Klausner M.* Corporations, corporate law, and networks of contracts // Va. L. Rev. 1995. V. 81. P. 7–57.
6. *Lemley M.A., McGowan D.* Legal implications of network economic effects // Calif. L. Rev. 1998. V. 86. P. 4–79.
7. *Амелина Н.О., Ананьевский М.С., Андриевский Б.Р. и др.* Проблемы сетевого управления. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2015. 392 с.

8. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // *АиТ.* 2016. № 10. С. 3–39.
9. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. I // *АиТ.* 2019. № 4. С. 3–40.
10. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. II // *АиТ.* 2019. № 5. С. 3–31.
11. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. III // *АиТ.* 2019. № 6. С. 3–27.
12. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. 3-е изд., перераб. и дополн. М.: МЦНМО, 2018. 224 с.
13. *Manski C.F.* Identification of endogenous social effects: The reflection problem // *Rev. Econom. Stud.* 1993. V.60. No. 3. P. 531–542.
14. *Poldin O., Yudkevich M.* Peer-effects in higher education: a review of theoretical and empirical approaches // *Voprosy obrazovaniya/Educational Studies Moscow.* 2011. No. 4. P. 106–123.
15. *Dokuka S., Valeeva D., Yudkevich M.* How academic achievement spreads: The role of distinct social networks in academic performance diffusion // *Plos one.* 2020. V. 15. No. 7. e0236737
16. *Bramouille Y., Djebbari H., Fortin B.* Identification of peer effects through social networks // *Journal of econometrics.* 2009. V. 150. No. 1. P. 41–55.
17. *Liebowitz S.J., Margolis S.E.* Network externality: An uncommon tragedy // *J. Econom. Perspect.* 1994. V. 8. No. 2. P. 133–150.
18. *Полтерович В.М.* Интернет, гражданская культура и эволюция механизмов координации // *Вестник ЦЭМИ РАН.* 2018. Т. 1. № 1.
19. *Konig M.D., Liu X., Zenou Y.* R&D networks: Theory, empirics, and policy implications // *Review of Economics and Statistics.* 2019. V. 101. No. 3. P. 476–491.
20. *Galeotti A., Golub B., Goyal S., Talam'as E., Tamuz O.* Taxes and market power: A principal components approach // *arXiv preprint arXiv:2112.08153.* 2021.
21. *Zenou Y.* Peer vs. Network Effects: Microfoundations, Identification, and Beyond // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=5705542>. 2025.
22. *Moffitt R.A.* Policy Interventions, Low-Level Equilibria, and Social Interactions // *Social Dynamics.* 2001. V. 4. P. 45.
23. *Angrist J.D.* The perils of peer effects // *Labour Economics.* 2014. V. 30. P. 98–108.
24. *Bramouille Y., Djebbari H., Fortin B.* Peer effects in networks: A survey // *Annual Review of Economics.* 2020. V. 12. P. 603–629.
25. *Advani A., Malde B.* Methods to identify linear network models: a review // *Swiss journal of economics and statistics.* 2018. V. 154. P. 1–16.
26. *Villeval M.C.* Performance Feedback and Peer Effects // *Handbook of Labor, Human Resources and Population Economics.* 2020. 38 p.
27. *Krupka E.L., Weber R.A.* Identifying social norms using coordination games: Why does dictator game sharing vary? // *Journal of the European Economic Association.* 2013. V. 11. No. 3. P. 495–524.

28. *Elliott M.L., Goyal S., & Teytelboym A.* Networks and economic policy // Oxford Review of Economic Policy. 2019. V. 35. No. 4. C. 565–585.
29. *Bhadra S., Schweinberger M.* Causal Inference Under Network Interference // arXiv preprint arXiv:2508.06808. 2025.
30. *Jackson M.O., Rogers B.W., Zenou Y.* Networks: An economic perspective // arXiv preprint arXiv:1608.07901. 2016.
31. *Valente T.W.* Network interventions // Science. 2012. V. 337. No. 6090. P. 49–53.
32. *Sokolov B.* Causal Estimands for Policy Evaluation and Beyond // SocArXiv. 2025.
33. *Sacerdote B.* Peer effects with random assignment: Results for Dartmouth roommates // Quart. J. Econom. 2001. V. 116. No. 2. P. 681–704.
34. *Boucher V., Rendall M., Ushchev P., Zenou Y.* Toward a general theory of peer effects // Econometrica. 2024. V. 92. No. 2. P. 543–565.
35. *Dimmock S.G., Gerken W.C., Graham N.P.* Is fraud contagious? Coworker influence on misconduct by financial advisors // The Journal of Finance. 2018. V. 73. No. 3. P. 1417–1450.
36. *Carrell S.E., Malmstrom F.V., West J.E.* Peer effects in academic cheating // J. Human Res. 2008. V. 43. No. 1. P. 173–207.
37. *Крезовец Е.В., Польдин О.В.* Социальные сети студентов: факторы формирования влияния на учебу // Вопросы образования. 2013. № 4. С. 121–138.
38. *Calvo-Armengol A., Zenou Y.* Social networks and crime decisions: The role of social structure in facilitating delinquent behavior // International Economic Review. 2004. V. 45. No. 3. P. 939–958.
39. *Ballester C., Calvo-Armengol A., Zenou Y.* Who's who in networks. Wanted: The key player // Econometrica. 2006. V. 74. No. 5. P. 1403–1417.
40. *Dimant E.* Contagion of pro-and anti-social behavior among peers and the role of social proximity // Journal of Economic Psychology. 2019. V. 73. P. 66–88.
41. *Cai J., Szeidl A.* Interfirm relationships and business performance // Quart. J. Econom. 2018. V. 133. No. 3. P. 1229–1282.
42. *Glaeser E.L., Sacerdote B.I., Scheinkman J.A.* The social multiplier // J. Eur. Econom. Associat. 2003. V. 1. No. 2/3. P. 345–353.
43. *Кужушкин Н.* Равновесие по Нэшу в играх с аддитивным агрегированием // Экономика и математические методы (ЭММ). 2000. Т. 36. № 4.
44. *Jensen M.K.* Aggregative games // Handbook of Game Theory and Industrial Organization. V. I. Edward Elgar Publishing, 2018. P. 66–92.
45. *Patacchini E., Zenou Y.* Juvenile delinquency and conformism // The Journal of Law, Economics, & Organization. 2012. V. 28. No. 1. P. 1–31.
46. *Ushchev P., Zenou Y.* Social norms in networks // Journal of Economic Theory. 2020. V. 185. P. 104969.
47. *Жиллякова Л.Ю., Кузнецов О.П.* Теория ресурсных сетей. М.: Издательский Центр РИОР, 2017. 283 с.
48. *Bulow J.I., Geanakoplos J.D., Klemperer P.D.* Multimarket oligopoly: Strategic substitutes and complements // Journal of Political economy. 1985. V. 93. No. 3. P. 488–511.

49. *Vives X., Vravosinos O.* Strategic complementarity in games // Journal of Mathematical Economics. 2024. P. 103005.
50. *Новиков Д.А., Чартишвили А.Г.* Информационное равновесие: точечные структуры информированности // *АиТ.* 2003. № 10. С. 111–122.
51. *Bramouille Y., Kranton R.* Public goods in networks // Journal of Economic theory. 2007. V. 135. No. 1. P. 478–494.
52. *Юджевич М., Подколзина Е., Рябина А.* Основы теории контрактов: модели и задачи. М.: ГУ ВШЭ, 2002. 352 с.
53. *French Jr. J.R.* A formal theory of social power // Psychological review. 1956. V. 63. No. 3. P. 1–81.
54. *DeGroot M.H.* Reaching a consensus // Journal of the American Statistical association. 1974. V. 69. No. 345. P. 118–121.
55. *Golub B., Jackson M.O.* How homophily affects the speed of learning and best-response dynamics // The Quarterly Journal of Economics. 2012. V. 127. No. 3. P. 1287–1338.
56. *Friedkin N.E., Johnsen E.C.* Social influence and opinions // Journal of mathematical sociology. 1990. V. 15. No. 3/4. P. 193–206.
57. *Ghaderi J., Srikanth R.* Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate // Automatica. 2014. V. 50. No. 12. P. 3209–3215.
58. *Golub B., Morris S.* Expectations, networks, and conventions // arXiv preprint arXiv:2009.13802. 2020.
59. *Morris S., Shin H.S.* Social value of public information // Amer. Econom. Rev. 2002. V. 92. No. 5. P. 1521–1534.
60. *Bonacich P.* Power and centrality: A family of measures // Amer. J. Soc. 1987. V. 92. No. 5. P. 1170–1182.
61. *Belhaj M., Bramouille Y., Deroian F.* Network games under strategic complementarities // Games and Economic Behavior. 2014. V. 88. P. 310–319.
62. *Helsley R.W., Zenou Y.* Social networks and interactions in cities // Journal of Economic Theory. 2014. V. 150. P. 426–466.
63. *Corbo J., Calvo-Armengol A., Parkes D.C.* The Importance of Network Topology in Local Contribution Games // Lecture Notes in Computer Science. 2007. P. 388–395.
64. *Konig M.D., Tessone C.J., Zenou Y.* Nestedness in networks: A theoretical model and some applications // Theoretical Economics. 2014. V. 9. No. 3. P. 695–752.
65. *Singh N., Vives X.* Price and quantity competition in a differentiated duopoly // Rand J. Econom. 1984. P. 546–554.
66. *Гераськин М.И.* Обзор новейших достижений в теории игр олигополии // *АиТ.* 2023. № 6. С. 325.
67. *Korgin N.* Introduction to theory of control in organizations for kids via interactive games // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 29. P. 289–294.
68. *Bimpikis K., Ehsani S., Ilklic R.* Cournot competition in networked markets // Management Science. 2019. V. 65. No. 6. P. 2467–2481.
69. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: СИНТЕГ, 2002.

70. *Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г.* Об одной модели информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами: сборник трудов. 2010. № 31. С. 265–275.
71. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексия и управление М.: Изд-во физико-математической литературы, 2012.
72. *Петров И.В., Чхартишвили А.Г.* Задача стимулирования в рефлексивной игре с точечной структурой информированности // Проблемы управления. 2024. № 5. С. 42–48.
73. *Galeotti A., Golub B., Goyal S.* Targeting interventions in networks // *Econometrica*. 2020. V. 88. No. 6. P. 2445–2471.
74. *Monderer D., Shapley L.S.* Potential games // *Games and economic behavior*. 1996. V. 14. No. 1. P. 124–143.
75. *Sandholm W.H.* Population games and evolutionary dynamics. MIT press, 2010.
76. *Parise F., Ozdaglar A.* A variational inequality framework for network games: Existence, uniqueness, convergence and sensitivity analysis // *Games and Economic Behavior*. 2019. V. 114. P. 47–82.
77. *Jackson M.O., Zenou Y.* Games on networks / *Handbook of game theory with economic applications*. V. 4. Elsevier, 2015. P. 95–163.
78. *Bramouille Y., Kranton R., D'amours M.* Strategic interaction and networks // *Amer. Econom. Rev.* 2014. V. 104. No. 3. P. 898–930.
79. *Melo E.* A variational approach to network games. 2018. No. 2018.05.
80. *Zenou Y., Zhou J.* Sign-equivalent transformations and equilibrium systems: Theory and applications // Unpublished manuscript, Monash University. 2024.
81. *Sharkey K.J.* A control analysis perspective on Katz centrality // *Scientific reports*. 2017. V. 7. No. 1. P. 17247.
82. *Bramouille Y., Kranton R.* Games Played on Networks // *Oxford Handbook on the Economics of Networks*. 2016. Chap-5.
83. *Опоицев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
84. *Bervoets S., Faure M.* Stability in games with continua of equilibria // *Journal of Economic Theory*. 2019. V. 179. P. 131–162.
85. *Bayer P., Herings P.J.-J., Peeters R.* Farsighted manipulation and exploitation in networks // *Journal of Economic Theory*. 2021. V. 196. P. 105311.
86. *Bayer P., Kozics G., Sz'oke N.G.* Best-response dynamics in directed network games // *Journal of Economic Theory*. 2023. V. 213. P. 105720.
87. *Альпин Ю.А.* Теорема Харари о знаковых графах и обратимость цепей Маркова // *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2013. Т. 419. С. 5–15.
88. *Альпин Ю.А., Башкин И.В.* Неотрицательные цепные матрицы и условие Колмогорова // *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2021. Т. 504. С. 5–20.
89. *Acemoglu D., Carvalho V.M., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.* The network origins of aggregate fluctuations // *Econometrica*. 2012. V. 80. No. 5. P. 1977–2016.
90. *Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.* Networks, shocks, and systemic risk : tech. rep. / National Bureau of Economic Research. 2015.

91. Дюкалов А.Н., Илютович А.Е. Асимптотические свойства оптимальных траекторий экономической динамики // *АиТ*. 1973. Т. 34. № 3. С. 423–434.
92. Дюкалов А.Н., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Теория управления и экономические системы. I. Проблема описания // *АиТ*. 1974. Т. 35. № 5. С. 797–810.
93. Дубовский С.В., Уздемир А. Критерии оптимальности и вариационные подходы в динамических моделях экономики // *АиТ*. 1974. Т. 35. № 6. С. 951–958.
94. Дубовский С.В., Дюкалов А.Н., Иванов Ю.Н., и др. О построении оптимального экономического плана // *АиТ*. 1972. Т. 33. № 8. С. 1336–1349.
95. Новиков Д.А. Игры и сети // *Математическая теория игр и ее приложения*. 2010. Т. 2. № 1. С. 107–124.
96. Goyal S. *Connections: an introduction to the economics of networks*. Princeton University Press, 2012.
97. Губко М.В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I // *АиТ*. 2004. № 8. С. 115–132.
98. Губко М.В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. II // *АиТ*. 2004. № 9. С. 131–148.
99. Мазалов В., Чиркова Ю. *Сетевые игры*. СПб.: Лань, 2018.
100. Naghizadeh P., Liu M. Provision of public goods on networks: on existence, uniqueness, and centralities // *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*. 2017. V. 5. No. 3. P. 225–236.
101. Elliott M., Golub B. A network centrality approach to coalitional stability // Preprint, available at <http://www.mit.edu/bgolub/papers/centrality.pdf>. 2012.
102. Yan C. Cooperative solutions for network games with quadratic utilities // *Contributions to Game Theory and Management*. 2023. V. 16. No. 0. P. 282–294.
103. Дорофеева Ю.А. Теоретико-игровые модели динамики мнений // Автореферат. Петрозаводск, 2021. 30с.
104. Kozitsin I.V. Optimal control in opinion dynamics models: diversity of influence mechanisms and complex influence hierarchies // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2024. V. 181. P. 114728.
105. Jackson M.O. Inequality's economic and social roots: the role of social networks and homophily // Available at SSRN 3795626. 2021.
106. Siciliano M.D., Whetsell T.A. Strategies of network intervention: A pragmatic approach to policy implementation and public problem resolution through network science // arXiv preprint arXiv:2109.08197. 2021.
107. Robins G., Lusher D., Broccatelli C., et al. Multilevel network interventions: Goals, actions, and outcomes // *Social networks*. 2023. V. 72. P. 108–120.
108. Kempe D., Kleinberg J., Tardos E. Maximizing the spread of influence through a social network // *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. 2003. P. 137–146.
109. Galeotti A., Goyal S. Influencing the influencers: a theory of strategic diffusion // *The RAND Journal of Economics*. 2009. V. 40. No. 3. P. 509–532.
110. Candogan O., Bimpikis K., Ozdaglar A. Optimal pricing in networks with externalities // *Operations Research*. 2012. V. 60. No. 4. P. 883–905.

111. *Bloch F., Qu'eron N.* Pricing in social networks // Games and economic behavior. 2013. V. 80. P. 243–261.
112. *Fainmesser I.P., Galeotti A.* Pricing network effects // The Review of Economic Studies. 2016. V. 83. No. 1. P. 165–198.
113. *Demange G.* Optimal targeting strategies in a network under complementarities // Games and Economic Behavior. 2017. V. 105. P. 84–103.
114. *Kor R., Zhou J.* Multi-activity influence and intervention // Games and Economic Behavior. 2023. V. 137. P. 91–115.
115. *Jeong D., Shin E.* Optimal influence design in networks // Journal of Economic Theory. 2024. V. 220. P. 105877.
116. *Belhaj M., Deroian F., Safi S.* Targeting in networks under costly agreements // Games and Economic Behavior. 2023. V. 140. P. 154–172.
117. *Dasaratha K., Golub B., Shah A.* Incentive Design With Spillovers // Available at SSRN 4853054. 2024.
118. *Borgatti S.P.* Identifying sets of key players in a social network // Computational & Mathematical Organization Theory. 2006. V. 12. P. 21–34.
119. *Corbo J., Calvo-Armengol A., Parkes D.* A study of nash equilibrium in contribution games for peer-to-peer networks // ACM SIGOPS Operating Systems Review. 2006. V. 40. No. 3. P. 61–66.
120. *Golub B., Lever C.* The leverage of weak ties: How linking groups affects inequality // Preprint, available at <http://www.stanford.edu/?bgolub/papers/intergroup.pdf>. 2010.
121. *Belhaj M., Bervoets S., Deroian F.* Efficient networks in games with local complementarities // Theoretical Economics. 2016. V. 11. No. 1. P. 357–380.
122. *Матвеевко В.Д., Королев А.В.* Равновесия в сетевой игре с производством и с экстерналиями знаний // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. № 1. С. 106137.
123. *Hiller T.* Peer effects in endogenous networks // Games and Economic Behavior. 2017. V. 105. P. 349–367.
124. *Harkins A.* Network Comparative Statics // Available at SSRN 3847211. 2020.
125. *Li X.* Designing weighted and directed networks under complementarities // Games and Economic Behavior. 2023. V. 140. P. 556–574.
126. *Sun Y., Zhao W., Zhou J.* Structural interventions in networks // Int. Econom. Rev. 2023. V. 64. No. 4. P. 1533–1563.
127. *Parise F., Ozdaglar A.* Graphon games: A statistical framework for network games and interventions // Econometrica. 2023. V. 91. No. 1. P. 191–225.
128. *Galeotti A., Golub B., Goyal S., et al.* Robust Market Interventions // arXiv preprint arXiv:2411.03026. 2024.
129. *Breza E., Chandrasekhar A.G., McCormick T.H., et al.* Using aggregated relational data to feasibly identify network structure without network data // American Economic Review. 2020. V. 110. No. 8. P. 2454–2484.
130. *Viviano D.* Policy targeting under network interference // Review of Economic Studies. 2024. rdae041.

131. *Bloch F., Shabayek S.* Targeting in social networks with anonymized information // *Games and Economic Behavior*. 2023. V. 141. P. 380–402.
132. *Lake B., Tenenbaum J.* Discovering structure by learning sparse graphs // *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*. V. 32. 2010.
133. *Leng Y., Dong X., Wu J., Pentland A.* Learning quadratic games on networks // *International Conference on Machine Learning*. PMLR. 2020. P. 5820–5830.
134. *Rossi E., Monti F., Leng Y., et al.* Learning to infer structures of network games // *International Conference on Machine Learning*. PMLR. 2022. P. 18809–18827.
135. *Hong M., Wai H.-T., Wang Z., Yang Z.* A two-timescale stochastic algorithm framework for bilevel optimization: Complexity analysis and application to actor-critic // *SIAM Journal on Optimization*. 2023. V. 33. No. 1. P. 147–180.
136. *Zhang C., Liu S., Wai H.-T., et al.* Network Games Induced Prior for Graph Topology Learning // *arXiv preprint arXiv:2410.24095*. 2024.
137. *Ding K., Chen Y., Wang L., Ren X., Shi G.* Network learning in quadratic games from best-response dynamics // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2024.
138. *Jongeneel W., Sutter T., Kuhn D.* Efficient learning of a linear dynamical system with stability guarantees // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2022. V. 68. No. 5. P. 2790–2804.
139. *Galeotti A., Golub B., Goyal S.* Supplement to “Targeting interventions in networks” // *Econometrica*. 2020. V. 88. No. 6. P. 2445–2471.
140. *Kor R., Zhou J.* Welfare and distributional effects of joint intervention in networks // *arXiv preprint arXiv:2206.03863*. 2022.
141. *Petrov I.* Structural Interventions in Linear Best-Response Games on Random Graphs // *IFAC-PapersOnLine*. 2023. V. 56. No. 2. P. 2830–2833.
142. *Belhaj M., Deroian F.* Competing activities in social networks // *The BE Journal of Economic Analysis & Policy*. 2014. V. 14. No. 4. P. 1431–1466.
143. *Allouch N.* On the private provision of public goods on networks // *Journal of Economic Theory*. 2015. V. 157. P. 527–552.
144. *Cai J., Zhang C., Wai H.-T.* Optimal Pricing for Linear-Quadratic Games With Nonlinear Interaction Between Agents // *IEEE Control Systems Letters*. 2024.
145. *Chandrasekhar A.G., Chaudhary V., Golub B., Jackson M.O.* Multiplexing in Networks and Diffusion // *arXiv preprint arXiv:2412.11957*. 2024.
146. *Cheng C., Huang W., Xing Y.* A theory of multiplexity: Sustaining cooperation with multiple relations // Available at SSRN 3811181. 2021.
147. *Ebrahimi R., Naghizadeh P.* United We Fall: On the Nash Equilibria of Multiplex and Multilayer Network Games // *arXiv preprint arXiv:2402.06108*. 2024.
148. *Zenou Y., Zhou J.* Games on Multiplex Networks // Available at SSRN 4772575. 2024.
149. *D’Souza R.M., di Bernardo M., Liu Y.-Y.* Controlling complex networks with complex nodes // *Nature Reviews Physics*. 2023. V. 5. No. 4. P. 250–262.
150. *Lovasz L.* Large networks and graph limits // *Amer. Math. Soc.* 2012. V. 60.
151. *Avella-Medina M., Parise F., Schaub M.T., Segarra S.* Centrality measures for graphons: Accounting for uncertainty in networks // *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*. 2018. V. 7. No. 1. P. 520–537.

152. *Al Taha F., Rokade K., Parise F.* Gradient dynamics in linear quadratic network games with time-varying connectivity and population fluctuation // 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE. 2023. P. 1991–1996.
153. *Parise F., Ozdaglar A.* Analysis and interventions in large network games // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. 2021. V. 4. No. 1. P. 455-486.

Статъа представена к публикации членом редколлегии А.Г. Чхртишвили.

Поступила в редакцию 11.02.2025

После доработки 20.11.2025

Принята к публикации 25.11.2025

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Юрченков А.В., Ряхимов Р.Р.** Построение оценителя для стационарной системы с неидеальными измерениями по критерию минимизации анизотропийной нормы 3

Нелинейные системы

- Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.** Квазиоптимальное по энергии угловое ускорение космического аппарата, полученное в рамках кинематической интерпретации Пуансо 17

Управление в технических системах

- Верба В.С., Меркулов В.И., Закомолдин Д.В.** Оценка возможности перехвата высокоскоростного маневренного летательного аппарата инерционным перехватчиком при нестационарном законе управления 38

Управление в социально-экономических системах

- Голубин А.Ю., Гридин В.Н.** Оптимальные стратегии страхования и инвестирования в модели индивидуального риска с фоновыми рисками 50

Управление в медико-биологических системах

- Лазутов М.Ю., Леоненко В.Н.** Прогнозирование эпидемий острых респираторных инфекций с использованием сигналов раннего предупреждения и моделей машинного обучения 64

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Петров И.В.** Игры на сетях с линейным наилучшим ответом: модели и методы управления 82

C O N T E N T S

Linear Systems

- Yurchenkov A.V., Ryakhimov R.R.** Anisotropy–Based Estimation Design for Linear Discrete Time–Invariant System with Measurement Dropouts 3

Nonlinear Systems

- Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.** Energy-Quasi-Optimal Angular Acceleration of Spacecraft Obtained within the Bounds of the Poincaré Kinematic Interpretation 17

Control in Technical Systems

- Verba V.S., Merkulov V.I., Zakomoldin D.V.** Evaluation of the Possibility of Intercepting a High-Speed Maneuvering Aircraft with an Inertial Interceptor under Non-Stationary Control Law 38

Control in Social Economic Systems

- Golubin A.Yu., Gridin V.N.** Optimal Strategies of Insurance and Investment in the Individual Risk Model with Background Risks 50

Control in Social Economic Systems, Medicine, and Biology

- Lazutov M.Yu., Leonenko V.N.** Predicting Outbreaks of Acute Respiratory Infections Using Early Warning Signals and Machine Learning Models 64

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Petrov I.V.** Linear Best-Response Games on Networks: Models and Interventions . . . 82