



Российская Академия Наук

ISSN 0005-2310 (Print)
ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

7

И Ю Л Ъ

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И., Моржин О.В., Мунасыпов Р.А.,
Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я.,
Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю.,
Рапопорт Л.Б., Родионов И.В., Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А.,
Филимонюк Л.Ю., Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Чхатишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»



ЗОЛОТОЙ ЮБИЛЕЙ АКАДЕМИКА: ЖИЗНЬ ВО БЛАГО НАУКИ

5 июля 2026 г. исполняется 80 лет академику Российской академии наук, доктору физико-математических наук Станиславу Николаевичу Васильеву.

Юбиляр – выдающийся ученый, специалист в области математической кибернетики, системного анализа, теории управления и искусственного интеллекта. Его научные разработки, объединяющие фундаментальную математику с прикладными задачами анализа динамики и интеллектуализации управления сложными системами, получили признание как в России, так и далеко за ее пределами.

Станислав Николаевич родился 5 июля 1946 г. в городе Чистяково (ныне Торез) Донецкой области. Золотая медаль в школе задала тон всему его дальнейшему обучению: в 1970 г. он с отличием и рекомендацией в аспирантуру окончил радиотехнический факультет Казанского авиационного института им. А.Н. Туполева.

Начав карьеру в родном вузе, в 1975 г. он последовал за своим учителем, академиком В.М. Матросовым, в Иркутск. Именно в Сибири его талант раскрылся в полной мере. Пройдя путь от младшего научного сотрудника до директора Института динамики систем и теории управления СО РАН (ранее – Иркутский вычислительный центр), он сформировался как крупный организатор науки. В 2006 г., уже будучи академиком РАН, он возглавил Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН в Москве, которым руководил до 2016 г., а сегодня продолжает трудиться там в качестве главного научного сотрудника, передавая свой опыт молодому поколению. Академика С.Н. Васильева отличает сочетание глубины фундаментальных исследований и их практической реализации. Начав с разработки системы автоматического наведения телескопа с Луны в геометрический центр Земли переменной фазы, он перешел на тематику разработки методов редукции (упрощения) моделей, позволяющих анализировать поведение сложных систем, что нашло отражение в его работах по преобразованию моделей динамических систем и позволяет управлять как механическими объектами, так и эколого-экономическими системами регионов.

Совместно с В.М. Матросовым он разработал метод сравнения в математической теории систем и внес существенный вклад в качественную теорию динамических систем для анализа устойчивости, управляемости, оптимальности и других свойств нелинейных систем, включая логико-динамические и гибридные системы, которые сочетают непрерывную динамику с дискретными событиями или логическими условиями. Им с учениками разработаны алгоритмы машинного вывода теорем о динамических свойствах систем, что позволило автоматизировать этот процесс и получить на ЭВМ сотни новых теорем. Эти результаты были изложены в монографиях (в соавторстве) «Метод сравнения в математической теории систем» (1980), «Алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова» (1981) и цикле его статей в журнале «Дифференциальные уравнения» (I–IV, 1981–82).

Начиная с 1990-х гг., С.Н. Васильев активно развивает логические методы и методы искусственного интеллекта для задач управления. Его подход основан на формализации знаний и автоматизации логического вывода, что привело к созданию нового направления – интеллектуального управления динамическими системами. Одним из значимых результатов стало создание системы автоматического доказательства теорем, которая используется для обработки динамических знаний и управления. Этому направлению посвящена монография «Интеллектуальное управление динамическими системами» (2000, в соавторстве).

Важной частью деятельности С.Н. Васильева является применение теоретических разработок для решения реальных задач. Наиболее яркий пример – комплексное моделирование и анализ для обеспечения устойчивого развития Байкальского региона. Особого внимания заслуживает вклад Станислава Николаевича в воспитание научной элиты. Он основал кафедру «Физико-математических методов управления» на физфаке МГУ им. М.В. Ломоносова.

ва, долгие годы заведовал кафедрами в МФТИ, в Иркутском и Бурятском госуниверситетах. Под его руководством подготовлено более 20 кандидатов и докторов наук. На протяжении 15 лет Станислав Николаевич был главным редактором журнала «Автоматика и телемеханика». Всего под его авторством опубликовано более 400 научных работ, включая авторитетные монографии. Их значимость была отмечена Государственной премией СССР еще в 1984 г. (за цикл работ в области теории управления сложными системами и математического моделирования). За заслуги перед государством и наукой он отмечен званиями лауреата Премии Правительства РФ в области образования (2010) и Премии Правительства РФ в области науки и техники (2012), награжден орденом «Знак Почета», орденом Дружбы, рядом медалей, включая медаль им. С.П. Королева, и другими государственными и научными наградами, грамотами и благодарностями.

80 лет – это возраст мудрости и зрелости, но коллеги и ученики знают Станислава Николаевича как человека по-прежнему неисчерпаемого интереса к широкому спектру актуальных задач науки, как человека творческого поиска и создания оригинальных решений (сегодня в первую очередь на стыке автоматизации и интеллектуального управления). От всей души поздравляем юбиляра и желаем ему крепкого здоровья, новых открытий и благодарных учеников.

Главный редактор АиТ Галяев А.А.

Редколлегия АиТ

Сотрудники ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН

© 2026 г. В.И. КРУЖКОВ (kruzhkov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

**МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК ВНУТРИ ОБЛАСТИ
ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ
МОДЕЛИ ОБЪЕКТА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА
С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹**

Предложен метод для нахождения реализуемых значений выходного вектора с учетом ограничений на управляющие и выходные сигналы в процессе управления. Разработанный алгоритм позволяет преодолеть вычислительные ограничения традиционных подходов при работе с моделями высокого порядка. Метод основан на последовательном анализе компонент выходного вектора сведением к задачам линейного программирования. Применение метода продемонстрировано на примере модели плазмы сферического токамака Глобус-М2, где показана возможность определения достижимых конфигураций плазмы при ограничениях на напряжения и токи в обмотках управления.

Ключевые слова: линейные системы, цифровые системы, системы с переменными параметрами, область достижимости, плазма, токамак.

DOI: 10.7868/S2413977726070018

1. Введение

Проблема определения областей достижимости (ОД) для динамических систем занимает центральное место в теории управления [1–3]. Классические подходы к определению ОД для систем с управлениями, принадлежащими заданной области, описанные в [1, 4–8], сталкиваются с существенными вычислительными трудностями при анализе моделей систем высокого порядка, характерных для современных приложений, включая системы управления плазмой в токамаках. Основные ограничения традиционных методов связаны с экспоненциальным ростом вычислительной сложности, необходимостью построения выпуклых оболочек в пространствах высокой размерности, ограниченной применимостью к системам с переменными параметрами и ограничениями на выходные сигналы, что делает точное определение ОД вычислительно сложным для моделей объектов высокого порядка. В данной работе предлагается итеративный подход, позволяющий эффективно находить точки внутри ОД для систем с десятками переменных состояния, учитывать

¹ Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 21-79-20180-П),
<https://rscf.ru/project/21-79-20180/>

параметрические изменения модели, получать практически полезные оценки для инженерных приложений.

Метод вычисления множества достижимости в постановке задачи, описанной далее в (6), предложен в [4–6], где показано, что с помощью динамического программирования многошаговая оценка ОД может быть сведена к рекуррентному вычислению одношаговых оценок. Последние, в свою очередь, сводятся к построению выпуклой оболочки множества точек в пространстве размерности n , соответствующей размерности вектора состояний.

В [4–6] для построения выпуклой оболочки используются модификации симплекс-метода. Альтернативный подход основан на разделении пространства, аналогично алгоритму быстрой сортировки [9]. Хотя этот метод не имеет принципиальных ограничений на класс моделей, он требует значительных вычислительных ресурсов [4] при высокой размерности вектора состояний. Это происходит из-за того, что количество гиперграней d -политопы с N вершинами может достигать [9, 10]:

$$(1) \quad F(d, N) = \begin{cases} \frac{2N}{d} C_{N-d/2-1}^{d/2-1}, & \text{для четных } d, \\ 2C_{N-\lfloor d/2 \rfloor - 1}^{\lfloor d/2 \rfloor - 1}, & \text{для нечетных } d, \end{cases}$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – округление вниз, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний. Таким образом, $F(d, N) = O(N^{\lfloor d/2 \rfloor})$, что свидетельствует об экспоненциальном росте сложности с увеличением числа вершин.

Метод [1, 7, 8] основывается на аппроксимации ОД множествами простой структуры, а именно эллипсоидами. Такое описание эффективно при малых размерностях фазового пространства ($n = 2, 3$), но при больших размерностях фазового пространства этот способ трудоемок и при этом дает весьма неполное представление о достижимом множестве [1, 7, 11].

Такая вычислительная сложность делает непрактичным применение алгоритма для моделей с десятками переменных состояния, включая модели токамаков и их систем управления [12–14]. В данной работе предложен подход, позволяющий преодолеть это ограничение путем последовательного оценивания ОД по компонентам выходного вектора с помощью симплекс-метода для решения задачи линейного программирования [15–17]. Хотя симплекс-метод в худшем случае имеет экспоненциальную сложность, на практике он демонстрирует полиномиальную сходимость в среднем [17]. Ценой повышения эффективности является получение не полной информации об ОД, а лишь ее сечений. Однако данный метод позволяет находить достижимые точки при заданных ограничениях на управление.

В [18, 19] применен другой подход, состоящий из двух идей: оценка области достижимости в установившемся режиме и разделение многомерной ОД на верхнюю и нижнюю оценки. Методика, основанная на рассмотрении установившегося режима, применима к стационарным и квазистационарным объектам, в которых характерное время изменения параметров на порядки

выше, чем характерное время переходных процессов. Подход разделения ОД на верхнюю и нижнюю оценки нагляден и эффективен для многомерных объектов. Верхняя оценка ОД описана около реальной области достижимости, а нижняя – вписана. Таким образом, все точки внутри нижней оценки достижимы, а никакие точки вне верхней – нет. Однако в случае сильной связи между каналами и несимметричных ограничений по управлению и/или начальным состояниям такой подход приводит к расширению «серой зоны» между верхней и нижней оценками для точек, про которые нельзя сказать, достижимы они или нет. Это проиллюстрировано в разделе 4 на рис. 1.

Далее в разделе 2 приводится постановка задачи. В разделе 3 описаны предварительные вычисления, позволяющие получить матричную связь между выходами системы, зная входы и начальные условия. В разделе 4 приводится последовательная верхняя оценка области достижимости на основе предыдущих результатов и сравнение последовательной оценки с верхней и нижней оценками из [18, 19]. В разделе 5 применена последовательная оценка для модельного примера, показано, что результаты согласуются с результатами применения метода [4–6]. В разделе 6 найдена динамика областей достижимости по форме плазмы для моделей токамака Глобус-М2 с переменными параметрами и проверка этих результатов в численных экспериментах. В Заключение приводятся основные итоги работы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную модель объекта в пространстве состояний размерности n , у которой p входов и две группы выходов размерности m и r , с переменными параметрами:

$$(2) \quad \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \\ y_k = C_k x_k + D_k u_k, \\ \tilde{y}_k = \tilde{C}_k x_k + \tilde{D}_k u_k, \end{cases}$$

где $k \in [1, T]$, матрицы $A_k, B_k, C_k, \tilde{C}_k, D_k, \tilde{D}_k$ имеют соответствующие размерности, x_k – вектор состояний, u_k – вектор управления, y_k и $\tilde{y}_k$ – выходные векторы. Рассматриваются ограничения следующего вида:

- на вектор начальных состояний

$$(3) \quad X_1 = \left\{ x : x \in \mathbb{R}^n, x_{\min}^{(i)} \leq x^{(i)} \leq x_{\max}^{(i)}, i \in [1, n] \right\}, \quad x_1 \in X_1;$$

- на управления на каждом шаге

$$(4) \quad P = \left\{ u : u \in \mathbb{R}^p, u_{\min}^{(i)} \leq u^{(i)} \leq u_{\max}^{(i)}, i \in [1, p] \right\}, \quad u_k \in P;$$

- на вторую группу выходных векторов на каждом шаге

$$(5) \quad F = \left\{ \tilde{y} : \tilde{y} \in \mathbb{R}^r, \tilde{y}_{\min}^{(i)} \leq \tilde{y}^{(i)} \leq \tilde{y}_{\max}^{(i)}, i \in [1, r] \right\}, \quad \tilde{y}_k \in F.$$

Верхний индекс $x^{(i)}$ означает i -й элемент вектора x .

Областью достижимости состояний в системе (2) с ограничениями (3), (4), (5) на конец T -го шага аналогично [2–4] будем называть множество

$$(6) \quad \begin{aligned} G(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T) = & \left\{ x_T : x_T \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \in [1, T-1], \right. \\ & \left. x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \tilde{y}_k = \tilde{C}_k x_k + \tilde{D}_k u_k, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y} \in F \right\}. \end{aligned}$$

Областью достижимости выходов будем называть множество

$$(7) \quad \begin{aligned} Y(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T) = & \left\{ y_T : y_T \in \mathbb{R}^m, \right. \\ & \left. y_T = C_T x_T + D_T u_T, x_T \in G(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T), u_T \in P \right\}. \end{aligned}$$

В [4] показано, что множество (6) при ограничениях вида (3, 4) представляет собой выпуклый многогранник с конечным числом вершин. Проводя аналогичные рассуждения можно показать, что и (7) при ограничениях такого же вида – также выпуклый многогранник с конечным числом вершин.

3. Получение матричной связи вход–выход

Найдем матричное соотношение между векторами начальных состояний x_1 , управляющих воздействий u_i и вектором состояний на k -м шаге для модели (2). Поскольку $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$, то вектор состояний может быть вычислен согласно формуле:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_2 &= A_1 x_1 + B_1 u_1, \\ x_3 &= A_2 x_2 + B_2 u_2 = A_2(A_1 x_1 + B_1 u_1) + B_2 u_2, \\ &\dots \\ x_k &= A_{k-1} \cdots A_1 x_1 + A_{k-1} \cdots A_2 B_1 u_1 + A_{k-1} \cdots A_3 B_2 u_2 + \dots + B_{k-1} u_{k-1}. \end{aligned}$$

Используя соотношение $y_k = C_k x_k + D_k u_k$, получим значения выходного вектора

$$(9) \quad \begin{aligned} y_1 &= C_1 x_1 + D_1 u_1, \\ y_2 &= C_2 x_2 + D_2 u_2 = C_2(A_1 x_1 + B_1 u_1) + D_2 u_2, \\ &\dots \\ y_k &= C_k(A_{k-1} \cdots A_1 x_1 + A_{k-1} \cdots A_2 B_1 u_1 + \dots + B_{k-1} u_{k-1}) + D_k u_k. \end{aligned}$$

Объединяя векторы начальных значений и управляющих сигналов на всех шагах до k -го включительно в вектор-столбец

$$(10) \quad U_k = [x_1^\top, u_1^\top, \dots, u_k^\top]^\top$$

и введя обозначение

$$(11) \quad M_k = [C_k A_{k-1} \cdots A_1, C_k A_{k-1} \cdots A_2 B_1, C_k A_{k-1} \cdots A_3 B_2, \dots, C_k B_{k-1}, D_k],$$

получаем матричную связь между всеми управляющими сигналами, начальным состоянием и вектором выхода на k -м шаге:

$$(12) \quad y_k = M_k U_k,$$

где $M_k \in \mathbb{R}^{m \times (kp+n)}$, $U_k \in \mathbb{R}^{(kp+n)}$. Аналогично найдем значение второй группы выходных сигналов на протяжении шагов $[1, k]$

$$(13) \quad \begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \tilde{C}_1 x_1 + \tilde{D}_1 u_1, \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{C}_2 x_2 + \tilde{D}_2 u_2 = \tilde{C}_2(A_1 x_1 + B_1 u_1) + \tilde{D}_2 u_2, \\ &\dots \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_k(A_{k-1} \dots A_1 x_1 + A_{k-1} \dots A_2 B_1 u_1 + \dots + B_{k-1} u_{k-1}) + \tilde{D}_k u_k. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$(14) \quad \tilde{M}_k = [\tilde{C}_k A_{k-1} \dots A_1, \tilde{C}_k A_{k-1} \dots A_2 B_1, \tilde{C}_k A_{k-1} \dots A_3 B_2, \dots, \tilde{C}_k B_{k-1}, \tilde{D}_k],$$

$$H_k = \begin{bmatrix} \tilde{M}_1, 0_{r \times p(k-1)} \\ \tilde{M}_2, 0_{r \times p(k-2)} \\ \dots \\ \tilde{M}_{k-1}, 0_{r \times p} \\ \tilde{M}_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y}_k = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \dots \\ \tilde{y}_{k-1} \\ \tilde{y}_k \end{bmatrix} = H_k U_k,$$

где $0_{r \times p}$ – нулевая матрица соответствующей размерности.

При расчетах динамики ОД удобно также рекуррентное представление формул для вычисления матричной связи:

$$(15) \quad \begin{aligned} M_1 &= D_1, \quad H_1 = \tilde{M}_1 = \tilde{D}_1, \\ M_k &= [C_k Q_k, D_k], \quad \tilde{M}_k = [\tilde{C}_k Q_k, \tilde{D}_k], \quad k \in [2, T], \\ H_k &= \begin{bmatrix} H_{k-1}, 0_{r(k-1) \times p} \\ \tilde{M}_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где Q_k – вспомогательная матрица, вычисляемая итерационно

$$(16) \quad \begin{aligned} Q_2 &= [A_1, B_1], \\ Q_k &= [A_{k-1} Q_{k-1}, B_{k-1}], \quad k \in [3, T]. \end{aligned}$$

4. Последовательная оценка области достижимости по каналам

Зная матричную связь (12), можно провести многомерную оценку области достижимости. Одним из способов является разделение области достижимости на верхнюю и нижнюю оценки, как показано в [18]. При таком разделении верхняя оценка представляет собой гиперпрямоугольник, описанный около

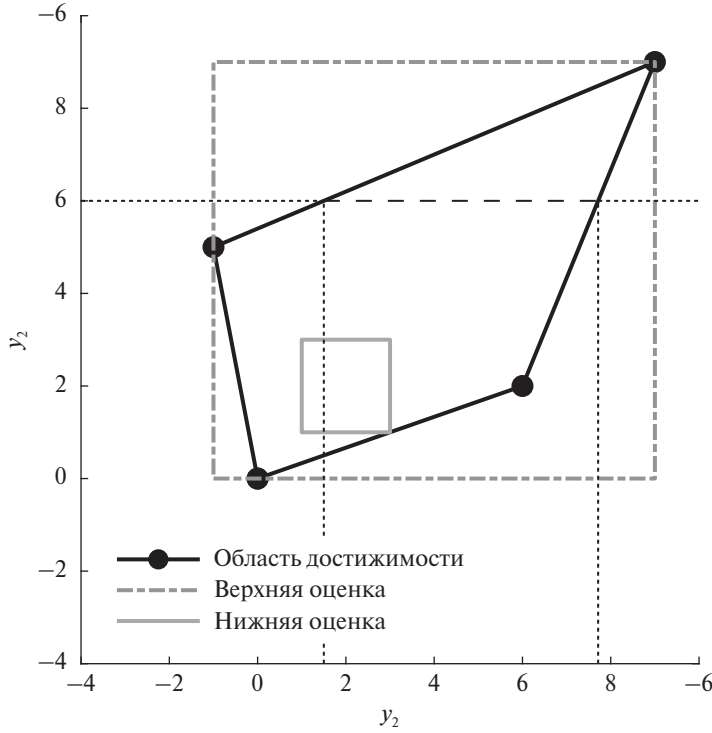


Рис. 1. Иллюстрация нижней и верхней оценок области достижимости в двумерном случае. Пунктирная линия $y_2 = 4$ показывает фиксацию значения одного из выходов, тогда штриховая линия соответствует области достижимости по координате y_1 .

множества (7), а нижняя – гиперкуб с центром в начале координат, вписанный в множество (7) в пространстве размерности m . Такой подход нагляден, однако в общем случае между верхней и нижней оценкой возникает большая разница, что приводит к существенной неопределенности при оценке области достижимости. Это наглядно показано на рис. 1 для двумерного случая.

Более информативной может быть последовательное нахождение верхней оценки с последующей фиксацией значения одного из выходов в допустимом диапазоне, после чего снова может быть найдена верхняя оценка уже с учетом фиксированного выхода. Такая процедура может быть повторена столько раз, сколько выходов в рассматриваемой системе.

Рассмотрим подробнее процесс построения последовательной оценки области достижимости. Первый шаг алгоритма поиска последовательной оценки области достижимости – нахождение верхней оценки области достижимости по всем компонентам выходного вектора. Эту оценку можно найти, решая m задач для максимума

$$(17) \quad \max \left\{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, \right. \\ \left. x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], i \in [1, m] \right\}$$

и минимума

$$(18) \quad \min \left\{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, \right. \\ \left. x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], i \in [1, m] \right\},$$

где $M_k^{(i)}$ – строка матрицы M_k . Задачи (17), (18) являются задачами линейного программирования, которые могут быть решены симплекс-методом [15], методом внутренней точки [20] и др. Вообще говоря, системы уравнений (17), (18) могут быть несовместными, рассмотрим условия существования решения.

Решение существует, если выполнено одно из двух утверждений: заданы ограничения только на начальное состояние и управления (3), (4), $r = 0$ или верхние и нижние ограничения на начальные условия, управления и выходы разных знаков. В первом случае системы (17), (18) всегда имеют хотя бы одно решение, поскольку нет ограничений на выходные сигналы, а хотя бы один входной сигнал, например $u_k^{(i)} = u_{\min}^{(i)}$, $i \in [1, n]$, реализуем и, как следствие, хотя бы один выходной сигнал реализуем. При наличии ограничений на часть выходов (5) и при $r \neq 0$ достаточным (но не необходимым) для существования решения условием является

$$(19) \quad \begin{cases} x_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq x_{\max}^{(i)}, & i \in [1, n], \\ u_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq u_{\max}^{(i)}, & i \in [1, p], \\ \tilde{y}_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq \tilde{y}_{\max}^{(i)}, & i \in [1, r]. \end{cases}$$

Это несложно проверить подстановкой нулевого вектора в качестве управляющего сигнала на каждом шаге. Такое дополнительное условие на ограничения является естественным для линейных систем.

Таким образом, для каждой составляющей выходного вектора найден интервал, в котором она может изменяться $y_T^{(i)} \min 1 \leq y_T^{(i)} \leq y_T^{(i)} \max 1$, $i \in [1, m]$. Пользователю предлагается выбрать одну из компонент и зафиксировать ее значение. Не нарушая общности, будем считать, что зафиксировано значение первой компоненты: $y_T^{(1)} = y^{(1)}$. Рассмотрим второй шаг алгоритма. Для нахождения верхней оценки по оставшимся $(m - 1)$ -й компонентам необходимо решить следующие задачи: для максимума

$$(20) \quad \begin{cases} y_T^{(1)} = M_T^{(1)} U_T, \\ \max \left\{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, \right. \\ \left. x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y} \in F, k \in [1, T], i \in [2, m] \right\} \end{cases}$$

и для минимума

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_T^{(1)} = M_T^{(1)} U_T, \\ \min \left\{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, \right. \\ \left. x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y} \in F, k \in [1, T], i \in [2, m] \right\}. \end{array} \right.$$

Таким образом на втором шаге будут найдены новые оценки $y_{T \min 2}^{(i)} \leq y_T^{(i)} \leq y_{T \max 2}^{(i)}$, $i \in [2, m]$. Прделав оставшиеся этапы алгоритма аналогично, после m шагов получим задачу

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_T = M_T U_T, \\ \tilde{Y}_T = H_T U_T, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], \end{array} \right.$$

где $y_T \in Y(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T)$ – реализуемое значение выходного вектора. Задачи (20), (21), (22) – также задачи линейного программирования, и они имеют решение, поскольку добавляющееся на каждом шаге ограничение на выходной сигнал типа равенства является совместным с остальными уравнениями, так как оно удовлетворяет ограничениям аналогичной задачи на предыдущем шаге. Решением задачи (22) является вектор $U_T^* \in \mathbb{R}^{(kp+n)}$, содержащий начальные условия $x_1^* \in X_1$ и программное управление $u_k^* \in P$, $j \in [1, T]$, реализующие выход y_T .

5. Пример

Продemonстрируем работу алгоритма на примере, рассмотренном в [6]. Модель объекта:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,8877 & -0,012 \\ 0,0258 & 0,4215 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{18}(k-1) & \sin \frac{\pi}{36}(k-1) \\ -\sin \frac{\pi}{36}(k-1) & \cos \frac{\pi}{18}(k-1) \end{bmatrix} x_k + \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_k; \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k; \end{array} \right.$$

ограничение на управляющие воздействия и вектор начальных состояний:

$$(24) \quad |x_1^{(1)}| \leq 5, |x_1^{(2)}| \leq 5, |u^{(1)}| \leq 1, |u^{(2)}| \leq 1,5.$$

В [6] рассматривается область достижимости по состоянию, а в текущей статье – по выходу. Для возможности сравнения в модели (23) рассмотрена единичная матрица выхода. Таким образом, вектор состояний равен вектору выхода. В данном примере нет ограничений на выходные сигналы, $r = 0$.

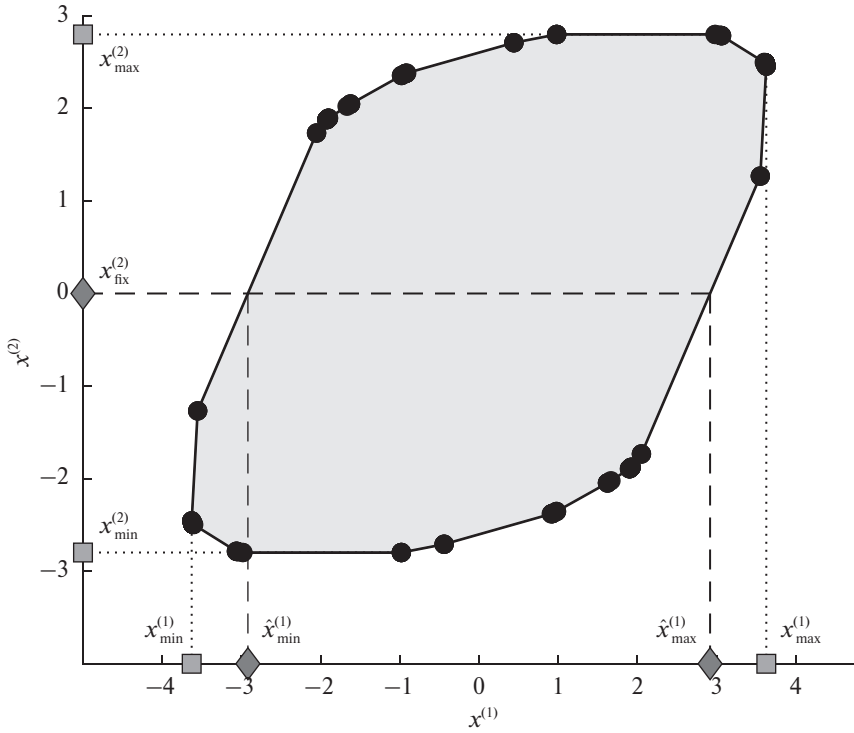


Рис. 2. Область достижимости, полученная методом [6] (темные кружки) и методом, описанным в текущей статье (квадраты и ромбы).

После семидесяти временных шагов область достижимости вектора состояний, найденная методом [4, 6], показана на рис. 2 круглыми маркерами и заливкой. Предложенный в данной статье алгоритм на первом шаге дает оценку области достижимости по каждой из составляющих: $x_{\min}^{(i)} \leq x^{(i)} \leq x_{\max}^{(i)}$, $i \in [1, 2]$, таким образом получается прямоугольник, описанный вокруг области достижимости. Первый шаг нахождения области достижимости показан на рис. 2 квадратными маркерами, $-3,6276 \leq x^{(1)} \leq 3,6276$, $-2,7982 \leq x^{(2)} \leq 2,7982$. На втором шаге пользователь фиксирует одну из составляющих вектора, например: $x^{(2)} = x_{\text{fix}}^{(2)} = 0$, а алгоритм позволяет найти изменившуюся оценку области достижимости по оставшейся составляющей вектора состояний (равного вектору выхода в данном примере). На рис. 2 второй шаг показан ромбовидными маркерами, $-2,9178 \leq x^{(1)} \leq 2,9178$. На заключительном шаге пользователь может задать корректное значение оставшейся составляющей, и алгоритм вычислит одно из возможных программных управлений, реализующих полученный вектор выхода на заданном временном шаге.

Таким образом путем последовательных приближений по каждой составляющей вектора выхода (состояний) была найдена точка внутри области достижимости и программное управление, реализующее достижение этой точки.

6. Оценка ОД для токамака Глобус-М2

Описанный выше метод получения области достижимости был применен для нахождения возможных конфигураций формы плазмы в токамаке Глобус-М2 (ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург). Были рассмотрены линейные модели с переменными параметрами и ограничения на входные и выходные сигналы.

6.1. Экспериментальные сигналы

На токамаке Глобус-М2 [21, 22] проводится измерение напряжений и токов в управляющих обмотках, а также сигналов с петель магнитной диагностики во время плазменного разряда. Временной шаг измерений 0,1 мс. Управляющие обмотки представляют собой центральный соленоид, обмотки горизонтального и вертикального управляющих полей, две полоидальные и корректирующую обмотки. Магнитная диагностика состоит из двадцати одной петли, установленных на поверхности камеры токамака, и измеряет магнитный полоидальный поток. По сигналам с обмоток и магнитной диагностики восстановлена форма плазмы на диверторной фазе разряда с тем же временным шагом 0,1 мс [23]. Под формой плазмы подразумевается 24 зазора между стенкой-лимитером токамака и границей плазмы вдоль направлений с шагом 15° (рис. 3).

Таким образом получены с шагом 0,1 мс экспериментальные сигналы с управляющих обмоток на интервале времени 0,15–0,24 с:

$$\begin{aligned} U_{PF,k} &= [U_{HFC,k}, U_{VFC,k}, U_{CS,k}, U_{CC,k}, U_{PF1,k}, U_{PF3,k}]^\top, \\ I_{PF,k} &= [I_{HFC,k}, I_{VFC,k}, I_{CS,k}, I_{CC,k}, I_{PF1,k}, I_{PF3,k}]^\top \end{aligned}$$

и восстановленные по магнитным измерениям зазоры между границей плазмы и лимитером токамака $G_k = [g_{1,k}, \dots, g_{24,k}]^\top$, а также вертикальное положение центра плазменного шнура Z . Далее будем называть эти сигналы экспериментальными или сценарными.

6.2. Модель

Для оценки возможностей токамака получать конфигурации плазмы построена его линейная модель. Модели токамака Глобус-М2 [12, 13] построены по экспериментальным данным разрядов №№ 41805, 41835 и 41867 в отклонениях от экспериментальных сигналов в дискретном времени с переменными параметрами:

$$(25) \quad \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k \delta u_k, \\ \delta y_k = C_k x_k, \\ \delta \tilde{y}_k = \tilde{C}_k x_k, \end{cases}$$

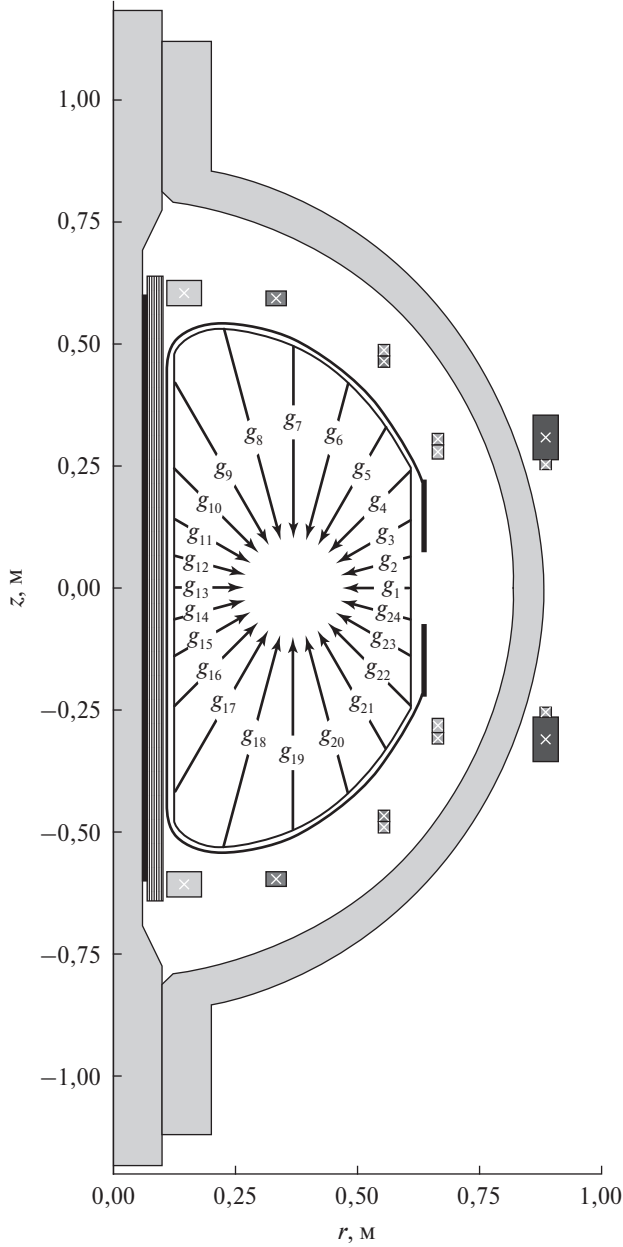


Рис. 3. Вертикальное сечение токамака Глобус-М2. Стрелками показаны 24 направления, вдоль которых измеряются 24 зазора g_1 - g_{24} между лимитером токамака и границей плазмы.

где $x \in \mathbb{R}^{17}$, $\delta u = [\delta U_{HFC}, \delta U_{VFC}, \delta U_{CS}, \delta U_{CC}, \delta U_{PF1}, \delta U_{PF3}]^T \in \mathbb{R}^6$ – отклонения от сценарных напряжений в управляющих обмотках, $\delta y = [\delta g_1, \dots, \delta g_{24}]^T \in \mathbb{R}^{24}$ – изменения формы относительно сценарных сигналов, $\delta \tilde{y} = [\delta Z, \delta I_{HFC}, \delta I_{VFC}, \delta I_{CS}, \delta I_{CC}, \delta I_{PF1}, \delta I_{PF3}]^T \in \mathbb{R}^7$ – изменения верти-

кального положения плазмы и токов в управляющих обмотках. Матрицы стационарных линейных моделей $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$, $\hat{C}_i$ вычислены на интервале времени с 0,13 по 0,24 с с шагом 1 мс и интерполируются по линейному закону:

$$(26) \quad A_k = \frac{10 - (k-1)\%10}{10} \hat{A}_{\lfloor \frac{k-1}{10} \rfloor + 1} + \frac{(k-1)\%10}{10} \hat{A}_{\lfloor \frac{k-1}{10} \rfloor + 2},$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – округление вниз, $\%$ – остаток от деления. Аналогично вычисляются матрицы B и C .

6.3. Ограничения на управляющие сигналы

Рассмотрим отклонения от управляющих сигналов при следующих ограничениях:

- нулевые начальные условия $x_1^{(j)} = 0$, $j \in [1, 17]$;
- отклонения на напряжения в управляющих обмотках $|\delta u^{(j)}| \leq 100$ В, $j \in [1, 6]$;
- отклонения по неустойчивому вертикальному положению центра плазменного шнура $|\delta Z| \leq 1$ см;
- отклонения по токам в управляющих обмотках $|\delta I_{HFC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{VFC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{CS}| \leq 5$ кА, $|\delta I_{CC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{PF1}| \leq 500$ А, $|\delta I_{PF3}| \leq 500$ А.

Напряжения в управляющих обмотках меняются в диапазоне $\pm 1,6$ кВ, типичные значения токов в обмотках HFC, VFC, CC – 0,5 кА, PF1 – 1,5 кА, PF3 – 3 кА, ток в обмотке CS изменяется от 0,5 до 2,5 кА. Типичные величины вертикального смещения порядка 1 см (рис. 4). Поэтому можно считать отклонения от сценарных значений малыми и применять линейные модели плазмы для последующих вычислений.

Таким образом, уравнения модели (25) и ограничения на каждом шаге удовлетворяют постановке задачи (2), (3), (4), (5) и условию (19). При этом для данных моделей неприменим подход к вычислению ОД, описанный в [4–6], так как он требует вычисления выпуклой оболочки точек в пространстве, размерность которого равна числу состояний модели, в данном случае: 17. В таком пространстве точки образуют d -политоп, у которого по меньшей мере $N = 2^d$ вершин, согласно (1) $F(d) \sim 2^{3d/2}$ гиперграней и на каждом шаге это число увеличивается пропорционально числу входов. Таким образом, становится актуальным метод, описанный в разделах 2, 3, 4.

6.4. Область достижимости по форме

Проанализируем возможность изменения составляющих формы g_7 и g_{19} – верхней и нижней точки плазмы. Изменяя эти величины можно влиять на вытянутость плазмы по вертикали. Уменьшение зазоров между плазмой и стенкой вакуумной камеры соответствует увеличению вытянутости. Начальное значение вектора состояний будем считать нулевым.

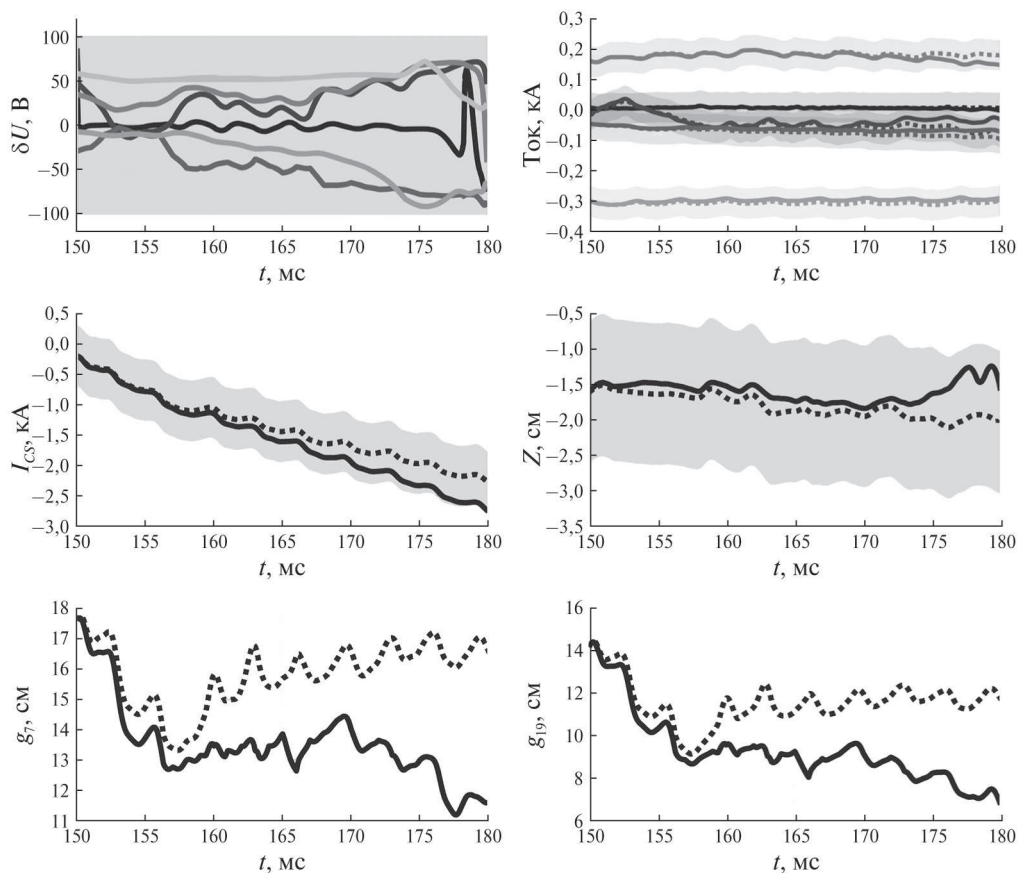


Рис. 4. Результат моделирования плазмы с измененным управлением, реализующим через 30 мс отклонения по составляющим формы $\delta g_7 = 5$ см, $\delta g_{19} = 5$ см, дополнительно вытягивающие плазму по вертикали при ограничениях на смещение плазмы по вертикали, напряжения и токи в управляющих обмотках. Пунктирные линии – сценарий, сплошные – отклоненные сигналы, полутона – допустимые отклонения. Разряд № 41805.

Используя предложенный алгоритм, получаем для модели разряда № 41805, что по прошествии 30 мс (300 временных шагов) выходы системы δg_7 и δg_{19} ограничены на интервалах:

$$(27) \quad -7,9 \leq \delta g_7 \leq 7,9; \quad -8,6 \leq \delta g_{19} \leq 8,6,$$

где значения отклонений выражены в сантиметрах. На втором шаге зафиксируем $\delta g_7 = -5,0$ см, тогда получим:

$$(28) \quad \delta g_7 = -5,0; \quad -8,6 \leq \delta g_{19} \leq -2,9.$$

На последнем шаге можно зафиксировать значение $\delta g_{19} = -5,0$ см и получить программное управление, значения отклонения выходов на 5 см. Динамика системы с найденным программным управлением показана на рис. 4.

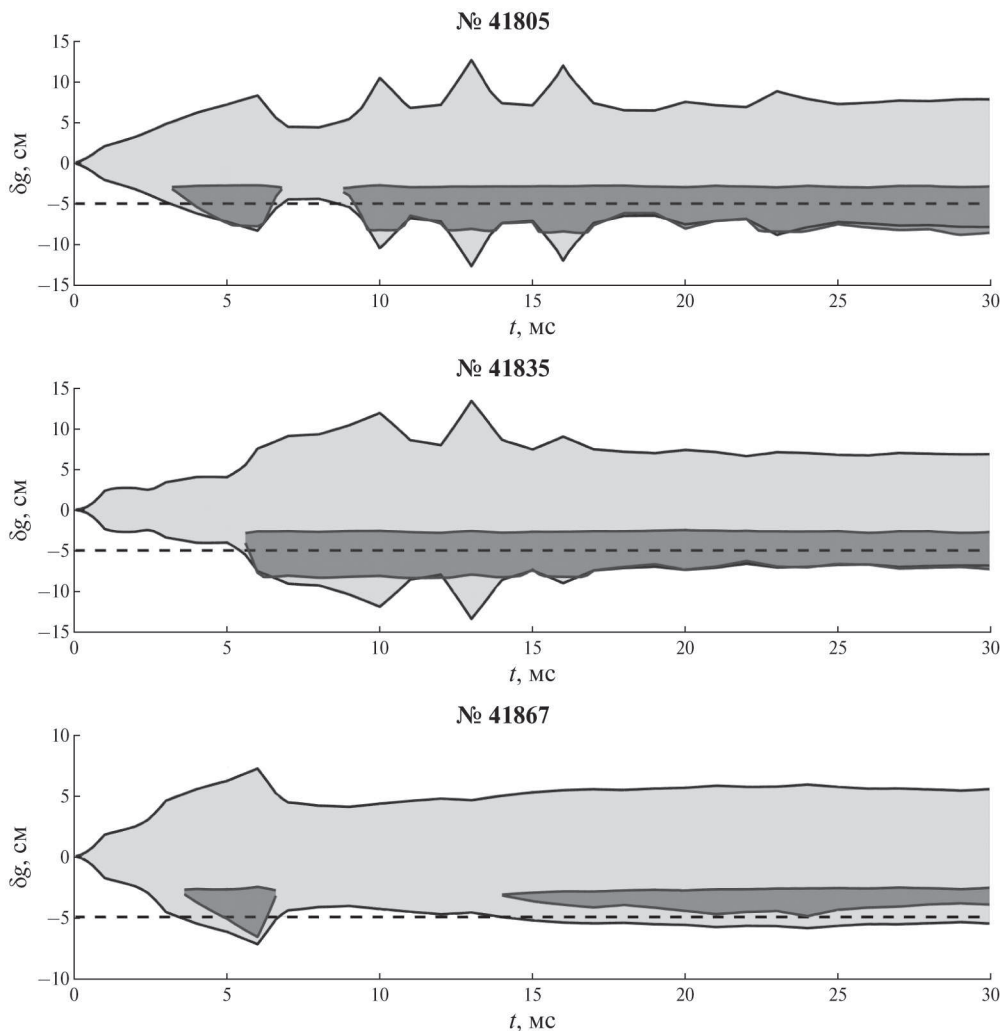


Рис. 5. Изменение области достижимости на протяжении диверторной фазы разряда. Светло-серым показана область достижимости по отклонению для зазора δg_7 , темно-серым – для зазора δg_{19} , при условии $\delta g_7 = -0,05$ см, в те моменты времени, где такое условие осуществимо. Время указано с начала диверторной фазы.

Таким образом показано, что используя обмотки полоидального поля можно увеличить вытянутость плазмы по вертикали в существующей конфигурации токамака Глобус-М2.

Проанализируем изменение областей достижимости по этим составляющим формы во времени. Рассмотрим плазменные разряды №№ 41 805, 41 835, 41 867. Вычислим возможное отклонение по δg_7 . В случае, если отклонение по δg_7 может быть равно -5 см, фиксируем его и находим область достижимости по δg_{19} . Результат показан на рис. 5, время указано от начала диверторной

фазы. Видна сильная связь между противоположными зазорами, отклонение составляющей δg_7 неизбежно приводит к отклонению составляющей δg_{19} в том же направлении.

7. Заключение

В работе предложен метод нахождения точек, лежащих внутри многомерной области достижимости, для линейных дискретных систем с переменными параметрами. Разработан вычислительно эффективный алгоритм, позволяющий последовательно оценивать сечения области достижимости по компонентам выходного вектора, находить точки внутри ОД с помощью задач линейного программирования. Метод применен к задаче управления плазмой в токамаке Глобус-М2, что позволило найти достижимые конфигурации плазмы при заданных ограничениях на управление, показать возможность увеличения вертикальной вытянутости плазмы, проанализировать изменение ОД в ходе плазменного разряда. Проведенные численные эксперименты демонстрируют согласованность результатов с известными методами для низкоразмерных случаев, практическую применимость подхода для систем с десятками переменных состояния, возможность учета переменных параметров.

Предложенный подход открывает новые возможности для анализа и синтеза систем управления сложными динамическими объектами, где традиционные методы построения ОД оказываются неприменимыми из-за высокой вычислительной сложности. Разработанный алгоритм может быть полезен как для теоретических исследований свойств управляемости динамических систем, так и для решения прикладных задач управления сложными техническими объектами.

Автор благодарит коллектив токамака Глобус-М2 за предоставленные экспериментальные данные, П.С. Коренева за предоставленные модели плазмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств). М.: ЛЕНАНД, 2014.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Афанасьев В.Н. Теория оптимального управления непрерывными динамическими системами. Аналитическое конструирование. М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2011.
4. Тюлюкин В.А., Шорилов А.Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // АиТ. 1993. № 4. С. 115–127.
5. Булаев В.В., Шорилов А.Ф. Модификация общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейных дискретных управляемых систем // Информационные технологии и системы: Труды Шестой Международной научной конференции. 2017. С. 47–52.

6. Булаев В.В., Осипов И.О. Модифицированный алгоритм построения областей достижимости линейных дискретных динамических систем // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2018. Т. 18. № 1. С. 56–62.
7. Щербakov П.С. Множества достижимости линейных систем: определения, основные свойства, аппроксимации // Труды 11-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых УБС. 2014. С. 15–19.
8. Хлебников М.В. Внешняя оценка множества достижимости линейной динамической системы // Стохастическая оптимизация в информатике. 2016. Т. 12. С. 112–122.
9. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение: пер. с англ. М.: Мир, 1989.
10. Klee V. Convex polytopes and linear programming // Proc. IBM Sci. Comput. Symp. Combinatorial Problems, IBM, White Plains, USA. 1966. P. 123–158.
11. Балашов М.В. Тремба А.А. Некоторые теоретико-множественные операции с множеством достижимости линейной управляемой системы // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. 2022. С. 20–22.
12. Корнев П.С., Митришкин Ю.В., Патров М.И. Реконструкция равновесного распределения параметров плазмы токамака по внешним магнитным измерениям и построение линейных плазменных моделей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 4. С. 254–265.
13. Коньков А.Е., Корнев П.С., Митришкин Ю.В. и др. Система магнитного управления плазмой реального времени с алгоритмом восстановления равновесия в обратной связи для токамака Глобус-М2 // Физика плазмы. 2023. Т. 49. № 12. С. 1348–1356.
14. Корнев П.С., Коньков А.Е., Чектыбаев Б.Ж. и др. Оценка области управляемости вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ с катушкой НФС // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2024. Т. 47. № 3. С. 49–59.
15. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. 5-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024.
16. Юдин Д.Б., Гольцштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. М.: Сов. радио, 1964.
17. Borgwardt K. The simplex method: A probabilistic analysis (Algorithms and Combinatorics (Study and Research Texts)). Berlin: Springer-Verlag, 1987.
18. Mitrishkin Y.V., Kruzhkov V.I., Korenev P.S. Methodology of Plasma Shape Reachability Area Estimation in D-Shaped Tokamaks // Mathematics, MDPI. 2022. No. 10(23).
19. Mitrishkin Y.V., Kruzhkov V.I., Patrov M.I. Estimation of controllability region of unstable vertical plasma position and plasma separatrix multivariable reachability area of a spherical tokamak. EPS2019 // Proceedings of the 46th European Physical Society Conference on Plasma Physics Milan: European Physical Society, 2019. P. 4.1095.
20. Дикин И.И. Итеративное решение задачи линейного и квадратичного программирования // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 4. С. 747–748.

21. *Minaev V.B., Gusev V.K., Sakharov N.V., et al.* Spherical tokamak Globus-M2: Design, integration, construction // Nuclear Fusion. 2017. V. 57. P. 066047.
22. *Mitrishkin Y.V., Korenev P.S., Prokhorov A.A., et al.* Plasma Control in Tokamaks. Part 1. Controlled thermonuclear fusion problem. Tokamaks. Components of control systems // Advanc. Syst. Sci. Appl. 2018. V. 18. No. 2. P. 26–52.
23. *Корнев П.С., Коньков А.Е., Митришкин Ю.В. и др.* Усовершенствованный алгоритм FCDI для восстановления равновесия плазмы в токамаке // Письма в ЖТФ. 2023. Т. 49. № 4. С. 36–39.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 06.06.2025

После доработки 11.11.2025

Принята к публикации 14.11.2025

© 2026 г. А.Ю. КУСТОВ, канд. физ.-мат. наук (arkadiykustov@yandex.ru),
А.В. ЮРЧЕНКОВ, канд. физ.-мат. наук (alexander.yurchenkov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

ПОДХОД К ПАРАМЕТРИЗАЦИИ СУБОПТИМАЛЬНЫХ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ¹

Рассматривается задача параметризации субоптимальных и γ -оптимальных анизотропийных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию для линейных дискретных стационарных систем со случайным внешним возмущением с ограниченной средней анизотропией. Решение задачи основано на применении леммы Финслера к системе неравенств, характеризующей ограниченность анизотропийной нормы некоторым числом в постановке задачи синтеза регулятора. Указывается на связь решения данной задачи с решением задачи синтеза субоптимальных и γ -оптимальных анизотропийных регуляторов методами выпуклой оптимизации без проведения параметризации. Приведен пример, демонстрирующий эффективность предлагаемого подхода к параметризации анизотропийных регуляторов.

Ключевые слова: анизотропийная теория, линейные системы, дискретные системы, субоптимальные регуляторы, параметризация.

DOI: 10.7868/S2413977726070027

1. Введение

Анизотропийная теория управления и фильтрации, основу которой заложил в середине 90-х гг. И.Г. Владимирова [1–3], предоставляет математический инструмент для анализа линейных дискретных систем управления со случайными внешними возмущениями и синтеза для них регуляторов, оптимальных по критерию среднеквадратичного коэффициента усиления при наихудшем возмущении из определенного класса. Основным отличием этой теории от известных $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -теорий управления является способ описания внешних возмущений, действующих на систему, – связанная с ними стохастическая неопределенность описывается в теоретико-информационных терминах, порожденных такими понятиями, как относительная энтропия и взаимная информация. Предложенный И.Г. Владимирова подход позволяет

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20055).

считать $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -нормы систем частными случаями так называемой анизотропийной нормы, а $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторы – соответствующими версиями анизотропийных регуляторов.

На сегодняшний день в рамках анизотропийной теории решены многие задачи в разнообразных постановках: управления и фильтрации, для стационарных и нестационарных систем, в оптимальном и субоптимальном случаях, многокритериальные, для систем с мультипликативными шумами и систем с сетевой структурой и многие другие [4–9]. Наряду с этим разрабатывались и методы решения этих задач: если в первых работах результаты приводились в форме связанных уравнений Риккати и Ляпунова, характерных в первую очередь для оптимальных постановок, то чуть позже почти все решения начали приводиться в форме задачи выпуклой оптимизации с ограничениями в виде линейных матричных неравенств и одного неравенства специального вида. Тем не менее каждый из упомянутых случаев при реализации на вычислительном устройстве давал лишь одно решение, найденное численным алгоритмом. На самом же деле такой регулятор (даже оптимальный) не всегда единственный, а в субоптимальной постановке решением является континуальное множество. Параметризация регуляторов, если таковая возможна, является одним из способов описания множества решений – всего или отдельной части.

В данной работе рассматривается задача параметрического описания множества анизотропийных регуляторов в форме обратной связи по состоянию в субоптимальной и γ -оптимальной постановках. Статья организована следующим образом. В разделе 2 описаны основные понятия анизотропийной теории, необходимые для понимания изложенного далее. Раздел 3 представляет собой математическую постановку решаемой задачи. Основной результат и сопровождающие его утверждения приведены в разделе 4. Доказательство основного результата вынесено в Приложение. В разделе 5 приводится пример, заключение – в разделе 6.

2. Основные сведения

В этом разделе приведены основные сведения, необходимые читателю для понимания изложенного далее.

2.1. Условные обозначения

Пусть $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – произвольная матрица над полем вещественных чисел. Транспонированную для L матрицу обозначим через L^T . Спектральная норма (или ∞ -норма Шаттена) матрицы L определяется как $\|L\| = \sigma_{\max}(L)$, где $\sigma_{\max}(L) = \sqrt{\lambda_{\max}(L^T L)}$ – максимальное сингулярное число матрицы L , а $\lambda_{\max}(L^T L)$ – максимальное собственное число матрицы $L^T L$. Для симметричной матрицы $L = L^T$ запись $L \succ 0$ используется для обозначения ее положительной определенности. Обозначение $L^\perp$ использовано для левого нуль-пространства (или коядра, или ортогонального дополнения) матрицы L , и

определяется как любая матрица, удовлетворяющая соотношениям $L^\perp L = 0$ и $L^\perp L^{\perp\top} \succ 0$, если таковая существует. Матрица $L^\perp$ обозначает псевдообратную по Муру–Пенроузу для матрицы L .

2.2. Основные понятия анизотропийной теории

Анизотропийная теория относится к направлениям теории автоматического управления, занимающимся широким спектром вопросов управления и фильтрации для линейных дискретных стохастических систем, наличие стохастичности в которых определено главным образом тем обстоятельством, что они функционируют в присутствии аддитивных случайных шумов и внешних возмущений. В предположении, что статистика этих возмущений доподлинно не известна, но возможно некоторым образом описать общую закономерность передачи информации в рассматриваемом процессе, вводится специальный функционал на множестве спектральных плотностей возмущения. Задание условия ограниченности этого функционала некоторым числом позволяет выделить из множества всех внешних возмущений определенный класс и далее исследовать влияние возмущений из этого класса на систему, а также возможности системы управления к гашению возмущений из такого класса.

Пусть $\{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – стационарная эргодическая последовательность n_w -мерных случайных векторов. Тогда для нее можно определить среднюю анизотропию [10]

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N} = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{n_w \mathbf{E}[\tilde{w}_0 \tilde{w}_0^\top]}{\mathbf{E}[|w_0|^2]} \right),$$

где $W_{s:t} = (w_s^\top, \dots, w_t^\top)^\top$ – вектор-фрагмент последовательности, $\tilde{w}_0 = w_0 - \mathbf{E}[w_0 | \{w_k\}_{k < 0}]$ – вектор ошибки предсказания на установившемся режиме, $\mathbf{A}(w)$ – анизотропия случайного вектора w , определяемая как

$$\mathbf{A}(w) = \frac{n_w}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{n_w} \mathbf{E}[|w|^2] \right) - \mathbf{h}(w),$$

где дифференциальная энтропия $\mathbf{h}(w)$ случайного вектора w с плотностью распределения вероятности $f : \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}_+$ определяется как

$$\mathbf{h}(w) = -\mathbf{E}[\ln(f(w))].$$

Пусть теперь $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность линейным образом зависящих от $\{w_j\}_{j \leq k}$ векторов, порожденных системой F , т.е. $Z = F * W$. Предположим, что передаточная функция системы F является аналитической внутри единичного диска на комплексной плоскости и имеет конечную $\mathcal{H}_\infty$ -норму

$$\|F\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{C}: |z| < 1} \sigma_{\max}(F(z)).$$

Тогда для системы F можно ввести анизотропийную норму как [2]

$$\|F\|_a = \sup_{G: V \rightarrow W, \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2},$$

где W – стационарная гауссовская последовательность, образованная пропусканием стандартного гауссовского белого шума V через стационарную линейную систему G с передаточной функцией $G(z)$, аналитической внутри единичного диска на комплексной плоскости и имеющей конечную $\mathcal{H}_2$ -норму

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(\widehat{G}(\omega)(\widehat{G}(\omega))^*) d\omega}.$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему F , заданную уравнениями

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_u u_k + B_w w_k, \\ z_k = Cx_k, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, \dots$ – индекс времени, x_k – n_x -мерный вектор состояния ($x_0 = 0$), u_k – n_u -мерный вектор управления, w_k – n_w -мерный вектор внешних возмущений, z_k – n_z -мерный вектор, подлежащий регулированию. Все матрицы A , B_u , B_w , C системы (1) имеют подходящие размерности и являются известными, пара матриц (A, B_w) является управляемой, а пара (A, B_u) – стабилизируемой. Без потери общности будем считать, что $n_u \leq n_x$, $\text{rank}(C) = n_z \leq n_x$. Предполагается, что на систему (1) действует случайное внешнее возмущение, представленное последовательностью $W = \{w_k\}_{k \geq 0}$ с неопределенностью, связанной с неточно известными стохастическими характеристиками векторов w_k , количественное описание которой выражается в терминах ограничения сверху на среднюю анизотропию последовательности W некоторым числом $a > 0$: $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. Пусть закон управления имеет вид статической обратной связи по состоянию

$$(2) \quad u_k = Kx_k,$$

где матрица $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ регулятора подлежит определению. Система F_{cl} , полученная замыканием системы (1) регулятором (2), имеет вид

$$(3) \quad \begin{cases} x_{k+1} = A_{cl}x_k + B_{cl}w_k, \\ z_k = C_{cl}x_k, \end{cases}$$

где использованы обозначения $A_{cl} = A + B_u K$, $B_{cl} = B_w$, $C_{cl} = C$.

Стандартная задача синтеза γ -оптимального анизотропийного регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для системы (1) состоит в нахождении такой матрицы K закона управления (2), что соответствующий регулятор является стабилизирующим, а анизотропийная норма замкнутой им системы (3) ограничена сверху минимально возможным числом $\gamma_{\min}$, т.е. выполнены условия

$$(4) \quad \rho(A + B_u K) < 1, \quad \|F_{cl}\|_a \leq \gamma, \quad \gamma \rightarrow \min.$$

Данная задача, в том числе в более общих формулировках, нашла решение в [4, 11, 12]. Отличие приведенной постановки от субоптимальной состоит в минимизации верхней границы γ : так, если γ – фиксированное число ($\gamma \geq \gamma_{\min}$), то имеет место субоптимальная постановка.

Задача 1. Параметризовать множество решений стандартных задач синтеза субоптимального и γ -оптимального анизотропийных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию.

Случай обратной связи по состоянию (4) выбран из простоты. Для случаев статической и динамической обратных связей по выходу при выполнении ряда дополнительных требований к системе также возможно проведение параметризации.

Практическая значимость поставленной задачи состоит в нескольких аспектах. Во-первых, решение задачи параметризации регуляторов позволяет сформировать представление об их множестве, что может оказаться полезным при исследовании возможности внесения в задачу дополнительных критериев, не приводящих к пустому множеству решений. Во-вторых, при изменении параметров задачи (например, представлений о средней анизотропии внешнего возмущения) в реальном времени стандартный путь решения состоит в пересчете регулятора, и нет гарантии, что в результате этой операции на относительно малые изменения параметров произойдет относительно малое изменение коэффициентов регулятора. Иными словами, так как задача поиска коэффициентов регулятора в классическом подходе решается численно и найденное решение может существенно отличаться от предыдущего, при переключении с одного регулятора на другой могут произойти неблагоприятные переходные процессы. Среди прочих аспектов можно привести, например, важность учета ошибок округления, которые не могут быть учтены классическим образом, но для которых можно получить соответствующие результаты в рамках решения задачи параметризации.

4. Параметризация субоптимальных анизотропийных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию

Как было отмечено, задача синтеза γ -оптимального анизотропийного регулятора уже решена. Ее решение (с точностью до некоторых переобозначений) описывается следующей теоремой [12, Теорема 1].

Теорема 1. При заданных $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ для того, чтобы для системы (1) существовал стабилизирующий статический регулятор по состоянию (2), гарантирующий выполнение ограниченности анизотропийной нормы замкнутой системы (3) числом γ , достаточно, чтобы система неравенств

$$(5) \quad P \succ 0, \quad \Psi \succ 0, \quad \eta^2 \geq \gamma^2,$$

$$(6) \quad \begin{bmatrix} P & \star & \star & \star \\ 0_{n_w \times n_x} & \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ AP + B_u \tilde{K} & B_w & P & \star \\ CP & 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(7) \quad \begin{bmatrix} \eta^2 I_{n_w} - \Psi & \star \\ B_w & P \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(8) \quad (\det(\Psi))^{1/n_w} - e^{2a/n_w}(\eta^2 - \gamma^2) \geq 0$$

была разрешима относительно скалярной переменной η^2 и вещественных матриц $P \succ 0_{n_x \times n_x}$, $\Psi \succ 0_{n_w \times n_w}$ и $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$. В этом случае матрица статического регулятора определяется выражением $K = \tilde{K}P^{-1}$.

Замечание 1. Если в рамках теоремы 1 считать γ минимизируемой переменной, то получим формулировку (4) для нахождения γ -оптимального анизотропийного регулятора по состоянию.

Замечание 2. Применение численного алгоритма на основе условий теоремы 1 позволяет находить субоптимальные анизотропийные регуляторы, но не оставляет свободы выбора – результатом работы алгоритма является фиксированная точка K в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n_u \times n_x}$.

Замечание 2 представляет собой одну из сторон мотивации проводимого исследования. Из множества регуляторов, являющихся решением некоторой задачи, выбор конкретного может быть обусловлен целым рядом вспомогательных условий, не внесенных в исходную постановку задачи, и пренебрежение свободой данного выбора (передача “права выбора” вычислительному устройству) может привести к тому, что ряд второстепенных для задачи характеристик регулятора или замкнутой системы будут выбраны не наилучшим образом. Кроме того, при внесении дополнительного условия в задачу придется заново решать ее вместо того, чтобы из уже найденного множества регуляторов выбрать подходящий. Наконец, описание границ всего множества регуляторов является более цельной математической задачей, чем нахождение какого-то одного решения.

Для формулировки основного результата понадобится следующее вспомогательное утверждение – один из вариантов леммы Финслера [13, Теоре-

ма 2.3.12] (приводится с переобозначениями, согласованными с используемыми в настоящей работе).

Теорема 2. Пусть известны матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\Pi \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) *существует матрица $\tilde{K}$, такая что*

$$(9) \quad \Theta + \Lambda \tilde{K} \Pi + (\Lambda \tilde{K} \Pi)^T \succ 0;$$

2) *выполнены следующие два условия:*

$$(10) \quad \Lambda^\perp \Theta \Lambda^{\perp T} \succ 0 \quad \text{или} \quad \Lambda \Lambda^T \succ 0,$$

$$(11) \quad \Pi^{T\perp} \Theta \Pi^{T\perp T} \succ 0 \quad \text{или} \quad \Pi^T \Pi \succ 0.$$

Предположим, что утверждения выше выполнены. Пусть матрицы Λ и Π допускают факторизации $\Lambda = \Lambda_L \Lambda_R$ и $\Pi = \Pi_L \Pi_R$, где Λ_L , Λ_R , Π_L , Π_R – произвольные матрицы полного ранга. Тогда все матрицы-решения $\tilde{K}$ неравенства (9) имеют вид

$$(12) \quad \tilde{K} = \Lambda_R^+ X \Pi_L^+ + Z - \Lambda_R^+ \Lambda_R Z \Pi_L \Pi_L^+,$$

где Z – произвольная матрица, и

$$(13) \quad X = T \Lambda_L^T \Phi \Pi_R^T (\Pi_R \Phi \Pi_R^T)^{-1} + S^{1/2} Y (\Pi_R \Phi \Pi_R^T)^{-1/2},$$

$$(14) \quad S = T - T \Lambda_L^T (\Phi - \Phi \Pi_R^T (\Pi_R \Phi \Pi_R^T)^{-1} \Pi_R \Phi) \Lambda_L T,$$

где $Y : \|Y\| < 1$ – произвольная матрица с ограниченной спектральной нормой, а T – произвольная положительно определенная матрица, такая что

$$(15) \quad \Phi = (\Theta + \Lambda_L T \Lambda_L^T)^{-1} \succ 0.$$

Содержание данной теоремы комментировать не будем. Заметим лишь, что при ее применении в задачах управления помимо степеней свободы, связанных с произволом выбора матриц Z , Y и T , будет иметь место еще одна степень свободы, обусловленная принимаемым матрицей Θ значением, зависящим, вообще говоря, от других переменных. Подробнее об этом будет изложено после основного результата, представленного ниже.

4.1. Основной результат

Теорема 3. Пусть задана система (1) с матрицей B_u , причем последняя допускает факторизацию $B_u = B_{uL} B_{uR}$ с матрицами $B_{uL} \in \mathbb{R}^{n_x \times r}$ и $B_{uR} \in \mathbb{R}^{r \times n_u}$ полного ранга, где $r = \text{rank}(B_u)$, а пары матриц (A, B_w) и (A, B_u) являются управляемой и стабилизируемой соответственно. Пусть

также выбраны два числа $a \geq 0$ и $\gamma > 0$. Тогда для существования стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию (2), обеспечивающего выполнение требования $\|F_{cl}\|_a \leq \gamma$, достаточно, чтобы система неравенств

$$(16) \quad \begin{bmatrix} P & \star & \star & \star \\ 0_{n_w \times n_x} & \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ B_u^\perp A P & B_u^\perp B_w & B_u^\perp P B_u^{\perp T} & \star \\ C P & 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times (n_u - r)} & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(17) \quad \begin{bmatrix} \eta^2 I_{n_w} - \Psi & \star \\ B_w & P \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(18) \quad (\det(\Psi))^{1/n_w} - e^{2a/n_w}(\eta^2 - \gamma^2) \geq 0,$$

$$(19) \quad P \succ 0, \quad \Psi \succ 0, \quad \eta^2 \geq \gamma^2$$

была разрешима относительно переменных P , Ψ , η^2 .

При выполнении утверждений теоремы все матрицы K стабилизирующего регулятора (2), гарантирующего $\|F_{cl}\|_a \leq \gamma$, исчерпываются представлением $K = \tilde{K}P^{-1}$, где

$$(20) \quad \tilde{K} = B_{uR}^+ X + (I_{n_u} - B_{uR}^+ B_{uR})Z,$$

$$(21) \quad X = T B_{uL}^T \Phi_{31} \Phi_{11}^{-1} + S^{1/2} Y \Phi_{11}^{-1/2},$$

$$(22) \quad S = T - T B_{uL}^T (\Phi_{33} - \Phi_{31} \Phi_{11}^{-1} \Phi_{31}^T) B_{uL} T,$$

$$(23) \quad \Phi = \text{block}_{i,j=\overline{1,4}}(\Phi_{ij}) = \begin{bmatrix} P & \star & \star & \star \\ 0_{n_w \times n_x} & \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ A P & B_w & P + B_{uL} T B_{uL}^T & \star \\ C P & 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{bmatrix}^{-1},$$

$Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ – произвольная матрица, $Y \in \mathbb{R}^{r \times n_x}$ – произвольная матрица, удовлетворяющая ограничению $\|Y\| < 1$, а $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ – любая положительно определенная матрица, такая что $\Phi \succ 0$.

Доказательство теоремы вынесено в Приложение.

Заметим, что выражения (16)–(19) теоремы 3 не зависят от матрицы K искомого регулятора, т.е. достаточные условия существования подходящего анизотропного регулятора имеют замкнутую форму. Вторая часть теоремы, а именно формулы (20)–(23), описывают в явной параметрической форме все анизотропные регуляторы, являющиеся решением поставленной задачи.

Можно показать, что все матрицы T из теоремы 3, связанные с матрицей $\Phi \succ 0$, заданной формулой (23), принадлежат конусу

$$(24) \quad T \succ B_{uL}^+ (A(P^{-1} - C^T C)^{-1} A^T + \eta^{-2} B_w B_w^T - P) B_{uL}^{+T},$$

т.е. граничное (в смысле отношения порядка $\succ$ на множестве симметричных матриц) значение T может быть найдено в явном виде. Обратим внимание также на тот факт, что помимо степеней свободы, обусловленных выбором матриц Z , Y и T , в условиях теоремы 3 неявно имеет место еще одна степень свободы, связанная с тем, какие значения в ходе решения неравенств (16)–(19) примут переменные P и η^2 , от которых зависят матрицы в (20)–(23). А если в рамках теоремы 3 рассмотреть случай, когда B_u – матрица полного ранга, т.е. $r = n_u$, то условие (16) примет упрощенный вид

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ CP & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0.$$

Замечание 3. Если в рамках теоремы 3 число γ не задано, а является одной из переменных, и решается задача минимизации верхней границы анизотропийной нормы

$$\gamma^2 \rightarrow \min_{P \succ 0, \Psi \succ 0, \eta^2 \geq \gamma^2 > 0} \quad \text{при условиях (16)–(19),}$$

то имеем формулировку для параметризации γ -оптимального анизотропийного регулятора по состоянию.

Отметим еще раз, что полученная параметризация зависит от найденных на этапе решения системы неравенств (16)–(19) переменных P , Ψ , η^2 (а в рамках замечания 3 – еще и переменной γ^2). Получение параметризации этой системы неравенств является действительно актуальной задачей, но затруднительно из-за наличия условия (18), описывающего связь переменных η^2 и γ^2 со спектром матрицы Ψ .

5. Пример

В академических целях продемонстрируем полученные результаты на простом примере. Для этого рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_u u_k + w_k, \\ z_k = x_k \end{cases}$$

с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0,98 & 0,2 & 0,02 & 0 \\ -0,2 & 0,98 & 0,2 & 0,02 \\ 0,02 & 0 & 0,98 & 0,2 \\ 0,2 & 0,02 & -0,2 & 0,98 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что внешнее возмущение $\{w_k\}_{k \geq 0}$, действующее на систему, принадлежит классу последовательностей случайных векторов с ограниченной числом $a = 0,1$ средней анизотропией: $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq 0,1$. Требуется описать параметрически множество решений задачи построения стабилизирующего закона управления, обеспечивающего выполнение требования $\|F\|_a \leq \gamma$. Данную задачу рассмотрим в двух случаях: в первом случае будем считать, что γ – заданное число, которое равно $\gamma = 6$, во втором – что стоит задача синтеза γ -оптимального анизотропийного регулятора, т.е. $\gamma \rightarrow \min$. Для сравнительного анализа также будем приводить решение поставленных задач в соответствии с теоремой 1 без проведения параметризации. Расчеты проводились в Matlab, где использовался пакет Yalmip для решения задач выпуклого программирования. Альтернативно, может быть использована система решения задач выпуклого программирования CVX.

В ходе решения в соответствии с формулами теоремы 1 одна из матриц субоптимального анизотропийного регулятора, найденная численными методами при $\gamma = 6$, имеет вид (здесь и далее для различения матриц регуляторов и прочих переменных им присваивается верхний порядковый индекс, заключенный в скобки)

$$K^{(1)} \approx [-7,14 \quad -5,72 \quad 1,95 \quad -5,01],$$

а матрица γ -оптимального анизотропийного регулятора, полученного тем же методом, но в оптимальной постановке (см. замечание 1), равна

$$(25) \quad K^{(2)} \approx [-12,04 \quad -6,23 \quad 3,75 \quad -9,73].$$

Для сравнения, значения анизотропийных норм систем, замкнутых соответствующими регуляторами, оказались равными

$$\|F_{cl}(K^{(1)})\|_{0,1} \approx 5,83, \quad \|F_{cl}(K^{(2)})\|_{0,1} \approx 5,39.$$

Далее поочередно приводится решение задач параметризации субоптимальных и γ -оптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию, проведенных в соответствии с содержанием теоремы 3 и замечания 3. Первую из них приведем в достаточной степени подробно, для второй лишь дадим окончательный результат.

Найденным решением системы неравенств (16)–(19) относительно переменных $P \succ 0$, $\Psi \succ 0$, $\eta^2 \geq \gamma^2$ являются матрицы

$$P^{(3)} \approx \begin{bmatrix} 0,13 & * & * & * \\ -0,09 & 0,93 & * & * \\ 0,05 & 0,01 & 0,07 & * \\ -0,07 & -0,01 & -0,03 & 0,07 \end{bmatrix}, \quad \Psi^{(3)} \approx \begin{bmatrix} 213,52 & * & * & * \\ -2,17 & 233,12 & * & * \\ 4,69 & 0,57 & 215,96 & * \\ -19,68 & -2,1 & -3,7 & 197,32 \end{bmatrix}$$

и число $\eta^{(3)} \approx 15,37$. Так как некоторые из обрабатываемых матриц в правой части неравенства (24) являются плохо обусловленными, определение порогового значения T с высокой точностью может оказаться достаточно трудоемким. Во избежание проблем вычисления порогового значения матрицы T

в этом примере было задано для него завышенное значение: $T^{(3)} \geq 410$. Нужные блоки Φ_{ij} матрицы Φ будут получены подстановкой в (23) выбранной матрицы T и найденных P и η . Отметим, что в силу $B_{uR} = 1$, переменная Z в параметризации участвовать не будет, т.е. $\tilde{K} = X$, при этом сама матрица регулятора, заданная выражением (20) и заменой $K = \tilde{K}P^{-1}$, примет вид $K = XP^{-1}$. Поскольку визуализировать предлагаемую в рамках теоремы 3 параметризацию сложно даже в рассматриваемом (весьма простом) примере, то ограничимся лишь случаем вариации матрицы T . Для этого зафиксируем матрицу $\bar{Y} = [0,999 \ 0 \ 0 \ 0]$ и рассмотрим случай $Y^{(3)} = \bar{Y}$, случай противоположной по знаку матрицы (т.е. $Y^{(3)} = -\bar{Y}$) и случай нулевой матрицы $Y^{(3)} = 0$ с целью формирования представления об области допустимых значений коэффициентов матрицы регулятора. Полученные зависимости коэффициентов регулятора от параметра T представлены на рисунке. Для точек «а» ($T^{(3)} = 410$, $Y^{(3)} = \bar{Y}$), «б» ($T^{(3)} = 820$, $Y^{(3)} = -\bar{Y}$) и «в» ($T^{(3)} = 39\,000$, $Y^{(3)} = 0$) приведем значения коэффициентов соответствующих регуляторов:

$$\begin{aligned} K^{(3,a)} &\approx [-11,79 \quad -6,14 \quad 3,79 \quad -10,19], \\ K^{(3,b)} &\approx [-15,23 \quad -6,47 \quad 4,23 \quad -13,17], \\ K^{(3,v)} &\approx [-13,6 \quad -6,39 \quad 4,11 \quad -11,81]. \end{aligned}$$

Значения анизотропийных норм замкнутых ими систем равны соответственно

$$\|F_{cl}(K^{(3,a)})\|_{0,1} \approx 5,4, \quad \|F_{cl}(K^{(3,b)})\|_{0,1} \approx 5,45, \quad \|F_{cl}(K^{(3,v)})\|_{0,1} \approx 5,41,$$

что удовлетворяет исходному требованию $\|F_{cl}\|_{0,1} \leq 6$.

Теперь рассмотрим решение задачи параметризации γ -оптимального анизотропийного регулятора по состоянию, как было описано в замечании 3. Для этого случая слагаемое $S^{1/2}Y\Phi_{11}^{-1/2}$ из (21) близко к нулю, т.е. регулятор «теряет» зависимость от матрицы Y , поэтому на рисунке приведена лишь одна линия, отражающая прямую зависимость $K^{(4)}$ от матрицы T . В выбранной точке «г», соответствующей значению $T^{(4)} = 4000$, матрица γ -оптимального анизотропийного регулятора имеет вид

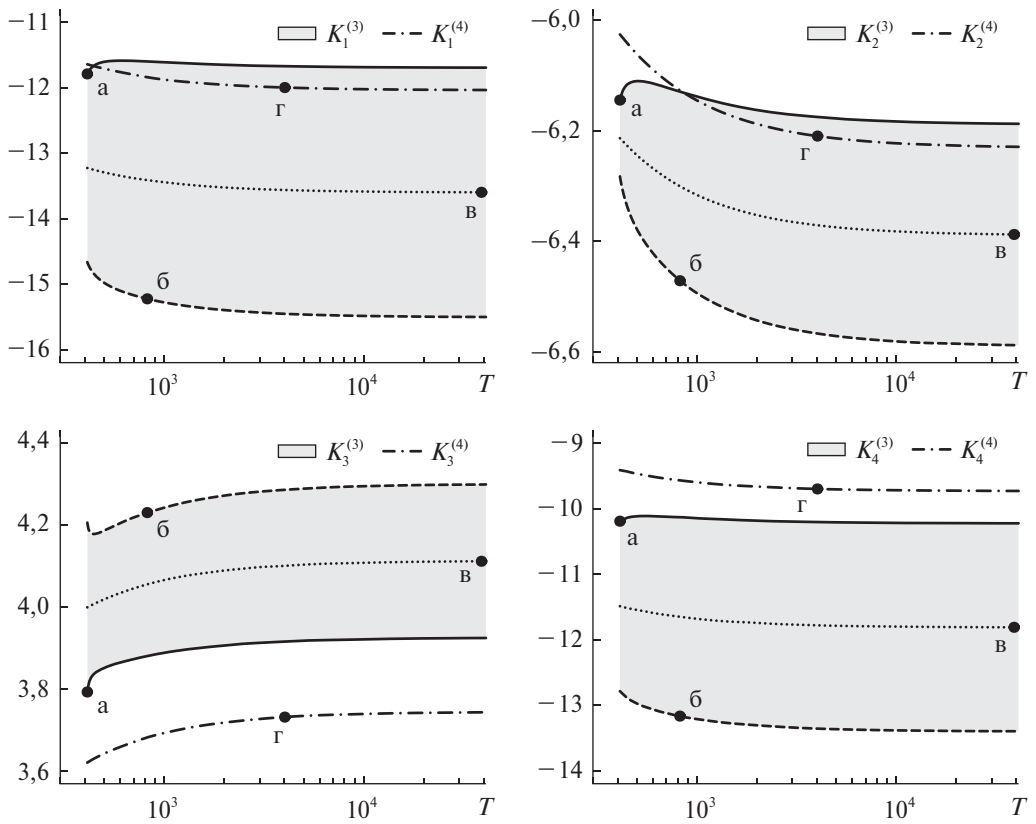
$$(26) \quad K^{(4,r)} \approx [-12 \quad -6,21 \quad 3,73 \quad -9,7],$$

а значение анизотропийной нормы замкнутой этим регулятором системы равно

$$\|F_{cl}(K^{(4,r)})\|_{0,1} \approx 5,39.$$

Данная величина согласуется с полученным ранее значением для γ -оптимального регулятора $K^{(2)}$, как (с определенной точностью) и коэффициенты матриц самих регуляторов, что следует из сравнения (25) и (26). Единственным отличием является наличие возможности выбора коэффициентов регулятора из некоторого допустимого диапазона значений.

В заключении примера имеет смысл еще раз подчеркнуть, что закрашенная на рисунке область соответствует всем субоптимальным анизотропийным



Зависимость коэффициентов субоптимального и γ -оптимального анизотропийных регуляторов в примере из раздела 5 от параметра T (в логарифмическом масштабе). Сплошная линия соответствует случаю $Y = Y^{(3)}$; пунктирная линия – случаю $Y = -Y^{(3)}$; линия из точек – случаю $Y = 0$; закрашенная область отражает все возможные коэффициенты матриц регулятора для промежуточного случая $Y = (2\lambda - 1)Y^{(3)}$ при произвольном $\lambda \in [0; 1]$; штрихпунктирная линия отражает зависимость γ -оптимального регулятора $K^{(4)}$ от T . Все линии и закрашенная область являются неограниченными справа (в направлении роста T). Точками «а», «б», «в», «г» обозначены коэффициенты матриц регуляторов, рассмотренных в примере.

регуляторам, порожденным найденными на первом шаге решения матрицами $P^{(3)}$, $\Psi^{(3)}$ и числом $\eta^{(3)}$. Для другого набора решений (P, Ψ, η) это множество будет отличаться от приведенного на рисунке, а объединение *всех* таких множеств и даст *все* множество субоптимальных анизотропийных регуляторов для выбранных значений $a \geq 0$ и $\gamma > 0$. Это, в частности, служит объяснением того, почему линия, соответствующая γ -оптимальному случаю (см. штрихпунктирную линию на рисунке), при некоторых значениях T находится вне закрашенной области, хотя γ -оптимальные анизотропийные регуляторы при фиксированном $a \geq 0$ принадлежат всем возможным (но непустым) множествам субоптимальных регуляторов для того же числа a .

6. Заключение

В статье предложен подход к параметризации субоптимальных и γ -оптимальных анизотропийных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию для линейных дискретных стационарных систем со случайным внешним возмущением с ограниченной средней анизотропией. Указана связь решения данной задачи с решением задачи синтеза субоптимальных и γ -оптимальных анизотропийных регуляторов методами выпуклой оптимизации без проведения параметризации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы основано на «скрещивании» теорем 1 и 2 и применении одного полезного свойства. В условиях теоремы 1 неравенство (6) представимо в виде (9), где

$$\Theta = \begin{bmatrix} P & \star & \star & \star \\ 0_{n_w \times n_x} & \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ AP & B_w & P & \star \\ CP & 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_u} \\ 0_{n_w \times n_u} \\ B_u \\ 0_{n_z \times n_u} \end{bmatrix}, \quad \Pi^T = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0_{n_w \times n_x} \\ 0_{n_x \times n_x} \\ 0_{n_z \times n_x} \end{bmatrix}.$$

Так как теорема 2 дает необходимые и достаточные условия существования решения неравенства (9), его аналог (6) может быть заменен на соответствующую неравенствам (10), (11) пару неравенств. Первое из них, аналогичное (10), примет вид (16). Второе неравенство, аналогичное (11), примет вид

$$\begin{bmatrix} \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ B_w & P & \star \\ 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

что позволяет не учитывать его ввиду требования выполнения (7) для положительно определенной матрицы $\Psi \succ 0_{n_w \times n_w}$.

Поскольку добавление ограничений в систему уже заданных условий может привести лишь к сужению соответствующего множества решений, добавление к (10), (11) неравенств (5), (7), (8) способно лишь сузить множество решений в терминах переменных P , Ψ , η^2 , но не изменить того факта, что параметризация решений, приведенная во второй части теоремы 2, остается верной. Действительно, все матрицы $\tilde{K}$, заданные через (12), зависят от Θ ввиду (15) – именно эта зависимость (наряду с ограничениями на выбираемые матрицы Y и T) и гарантирует выполнение исходного неравенства (9).

Аккуратно проводя необходимые выкладки с учетом того, что матрица B_u допускает факторизацию $B_u = B_{uL} B_{uR}$ с матрицами полного ранга B_{uL} и B_{uR} , получаем, что выражения (20)–(23) являются полными аналогами выражений (12)–(15) соответственно.

В завершении доказательства обратная замена $K = \tilde{K} P^{-1}$ мотивирована содержанием теоремы 1. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic approach to H_∞ -optimization // Proc. 1994 33rd IEEE Conf. on Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
2. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // IFAC Proceedings Volumes. 1996. V. 29. Is. 1. P. 3057–3062.
3. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space solution to anisotropy-based stochastic H_∞ -optimization problem // IFAC Proceedings Volumes. 1996. V. 29. Is. 1. P. 3816–3821.
4. *Tchaikovsky M.* Static output feedback anisotropic controller design by LMI-based approach: General and special cases // American Control Conference. 2012. P. 5208–5213.
5. *Тимин В.Н., Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Решение задачи анизотропной субоптимальной фильтрации методом выпуклой оптимизации // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 612–615.
6. *Тимин В.Н.* Субоптимальная анизотропная фильтрация линейных дискретных стационарных систем // АиТ. 2013. № 11. С. 3–18.
7. *Timin V.N., Kurdjukov A.P.* Finite horizon anisotropy-based multicriteria filtering // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. Is. 14. P. 192–197.
8. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Субоптимальная анизотропная фильтрация на конечном горизонте // АиТ. 2016. № 1. С. 5–29.
9. *Чайковский М.М., Тимин В.Н.* Синтез анизотропного субоптимального управления для линейных нестационарных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2017. № 7. С. 39–56.
10. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2006. № 8. С. 92–111.
11. *Чайковский М.М.* Синтез субоптимального анизотропного стохастического робастного управления методами выпуклой оптимизации. М.: ИПУ РАН: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.13.01 // 2012. 193 с.
12. *Чайковский М.М.* Синтез анизотропных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования // УБС. 2013. № 42. С. 100–152.
13. *Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis K.M.* A unified algebraic approach to control design // Routledge. 1998. 304 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 15.05.2025

После доработки 06.11.2025

Принята к публикации 11.11.2025

© 2026 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)
(Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,
Воронеж)

О ВЗАИМОСВЯЗИ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЧЕТКОГО СИГНАЛА НА ВХОДЕ И ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена задача о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой, описываемой линейным дифференциальным уравнением высокого порядка с переменными вещественными коэффициентами, нечеткозначной неоднородностью и нечеткими начальными условиями. Предполагается, что известны некоторые числовые средние характеристики нечеткозначного входного сигнала (нечеткие средние и нечеткие полуразмахи) и по ним с учетом параметров системы устанавливаются соответствующие числовые средние характеристики нечеткого сигнала на выходе. Используются методы нечеткой математики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве приложения рассмотрена модель радиотехнической цепи (последовательного колебательного контура) с нечеткозначным входным сигналом.

Ключевые слова: нечеткозначные функции, числовые средние нечеткозначных функций, производные нечеткозначных функций, нечеткие линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

DOI: 10.7868/S2413977726070030

1. Введение

Задача оценивания сигнала на выходе динамических систем при неполной или слабоформализованной информации о входном сигнале имеет важное теоретическое и прикладное значение, в частности, для последующего парирования уровня внешних возмущений (шума измерений, возникающих дефектов и т.д.). Использование нечетких дифференциальных уравнений является важным современным способом моделирования динамических систем в условиях возможных неопределенностей.

В данной статье рассмотрена задача о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой. При этом линейная динамическая система описывается линейным нечетким дифференциальным уравнением высокого порядка с переменными вещественными коэффициентами, нечеткозначной неоднородностью и нечеткими начальными условиями.

Основы теории нечетких дифференциальных уравнений заложены в работах [1–5] и др. Эта тематика активно развивается и в последние десятилетия.

В работах [6, 7] и др. предложен метод преобразования нечетких линейных дифференциальных уравнений к интегральным нечетким уравнениям, которые затем решаются. Рядом авторов рассмотрен подход, состоящий в сведении нечетких дифференциальных уравнений к дифференциальным включениям [8, 9] и дальнейшему их исследованию.

Широкое распространение для решения линейных нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка в последние годы получил метод нечеткого преобразования Лапласа [10, 11]. Многие авторы исследуют численные методы решения нечетких дифференциальных уравнений [12–14].

Как правило [15, 16], при решении линейных нечетких дифференциальных уравнений выписывают систему уравнений для соответствующих α -индексов и решают ее. Затем проверяют, определяют ли производные полученных α -индексов производную нечеткозначной функции. Как показывают примеры [6, 16], это не всегда так.

В данной статье используется понятие ультраслабого нечеткого решения (введенного ранее автором в работах [17, 18]) как непрерывной по метрике Хаусдорфа нечеткозначной функции, α -индексы которой удовлетворяют уравнениям для α -индексов, вытекающих из заданного нечеткого дифференциального уравнения.

В литературе рассматриваются различные определения дифференцируемости нечеткозначных функций (см., например, [2–5]). В разделе 3 настоящей работы применяется определение производной по Сеиккала [3], в разделе 4 – обобщенных производных по Хукухаре [5–7] и др.

Отметим, что в [17, 18] обсуждается, в частности, вопрос о гладкости ультраслабых решений по Сеиккала.

Стандартная ситуация в приложениях состоит в том, что про входной нечеткий сигнал имеется неполная информация. А именно, не известны точно функции принадлежности соответствующих нечетких чисел, однако можно указать некоторые оценки. Здесь будем использовать аналогию с теорией случайных процессов, где широко известен подход, когда по средним характеристикам входного случайного сигнала (математическому ожиданию и корреляционной функции) с учетом параметров линейной динамической системы определяются средние характеристики выходного случайного сигнала [19, гл. 7]. Такой подход связан с тем, что не всегда известны функции распределения случайных величин, соответствующих входному (а тем более выходному) случайному сигналу.

В данном исследовании предполагается, что известны числовые средние характеристики входного нечеткого сигнала – средние нечетких чисел (нечеткие средние) и полуразмахи нечетких чисел (нечеткие полуразмахи), которые, в частности, могут быть получены с помощью экспертных оценок. Тогда возникает практически важная задача определения с учетом параметров рассматриваемой системы соответствующих числовых средних характеристик нечеткого сигнала на выходе линейной динамической системы.

В настоящей работе фактически предлагается способ отыскания упомянутых числовых характеристик решения начальной задачи для нечеткого дифференциального уравнения по параметрам системы, нечетким начальным условиям и соответствующим числовым средним характеристикам входных данных задачи, не находя предварительно самого нечеткозначного решения. Отметим, что такой подход для нечетких дифференциальных уравнений ранее не рассматривался. При этом нечеткие средние широко используются для дефаззификации нечетких чисел, а нечеткие полуразмахи введены в данной работе и оказались полезными в теоретическом и прикладном аспектах.

Нечеткие линейные дифференциальные уравнения широко используются в различных приложениях (из недавних работ укажем [20–22]). В разделе 5 настоящей работы в качестве приложения рассмотрена модель реакции радиотехнической цепи с постоянными параметрами на нечеткий входной сигнал.

Данная статья продолжает исследования, начатые в работе автора [23], в которой для линейной динамической системы с постоянными вещественными параметрами установлена взаимосвязь средних, а также ковариационных функций входного и выходного нечетких ограниченных сигналов.

2. Нечеткие числа и нечеткозначные функции

Под нечетким числом будем понимать нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел $\mathbb{R}$, имеющее компактный носитель и нормальную, выпуклую и полунепрерывную сверху функцию принадлежности (см., например, [24, гл. 5; 25, гл. 2, 3]).

При этом носителем нечеткого числа $\tilde{z}$ называется $Supp \tilde{z} = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\}$. Нечеткое число $\tilde{z}$ нормально, если $\max_x \mu_{\tilde{z}}(x) = 1$; выпукло, если для любых вещественных $r \leq t \leq s$ выполняется соотношение $\mu_{\tilde{z}}(t) \geq \min(\mu_{\tilde{z}}(r), \mu_{\tilde{z}}(s))$.

Множество таких нечетких чисел обозначим через J .

Ниже будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы α -уровня (α -интервалы) нечеткого числа $\tilde{z} \in J$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями: $[\tilde{z}]_{\alpha} = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}$ ($\alpha \in (0, 1]$), $[\tilde{z}]_0 = cl\{x | \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\}$, где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α -уровни нечеткого числа – замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α -интервала через z_{α}^{-} , а правую через z_{α}^{+} . Таким образом, $[\tilde{z}]_{\alpha} = [z_{\alpha}^{-}, z_{\alpha}^{+}]$. Выражения z_{α}^{-} и z_{α}^{+} называют соответственно левым и правым α -индексами (индексами) нечеткого числа.

Для нечетких чисел $\tilde{z} \in J$ выполнены следующие условия на α -индексы нечеткого числа: 1) $z_{\alpha}^{-} \leq z_{\alpha}^{+}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$; 2) Функция z_{α}^{-} ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0; 3) Функция z_{α}^{+} ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций, заданных на промежутке $[0, 1]$, для которых выполняются условия 1–3, определяют нечеткое число, α -интервал которого имеет вид $[z_\alpha^-, z_\alpha^+]$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами z_α^- , z_α^+ и u_α^- , u_α^+ понимается нечеткое число с интервалами α -уровня $[z_\alpha^- + u_\alpha^-, z_\alpha^+ + u_\alpha^+]$. Умножение на положительное число c характеризуется интервалами α -уровня $[cz_\alpha^-, cz_\alpha^+]$, а умножение на отрицательное число c – интервалами α -уровня $[cz_\alpha^+, cz_\alpha^-]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α -индексов при $\forall \alpha \in [0, 1]$. Вещественное число r трактуется как нечеткое, α -индексы которого совпадают с r при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Средним значением (нечетким средним) нечеткого числа $\tilde{z}$ с α -индексами $z_\alpha^\pm$ называют вещественное число [26]

$$m_{\tilde{z}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (z_\alpha^+ + z_\alpha^-) d\alpha.$$

Как известно [24], модальным значением (или модой) нечеткого числа $\tilde{z}$ называют такое значение z_{Mod} , для которого $\mu(z_{Mod}) = 1$. Для унимодальных нечетких чисел, т.е. имеющих единственное модальное значение, иногда рассматривают правую и левую ширину нечеткого числа $\tilde{z}$, определяемые формулами (см., например, [27, с. 11])

$$(r\tilde{z})_l = \int_0^1 (z_\alpha^+ - z_{Mod}) d\alpha, \quad (r\tilde{z})_r = \int_0^1 (z_{Mod} - z_\alpha^-) d\alpha.$$

Определим полуразмах нечеткого числа $\tilde{z}(t)$ (нечеткий полуразмах) как вещественное число вида

$$r_{\tilde{z}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (z_\alpha^+ - z_\alpha^-) d\alpha.$$

Это определение позволяет не предполагать знание модального значения нечеткого числа и является естественным, как обобщение понятия радиуса в интервальном анализе. Отметим, что $r_{\tilde{z}} = \frac{1}{2} ((r\tilde{z})_l + (r\tilde{z})_r)$.

Пример 1. Нечеткое треугольное число $\tilde{z}$, характеризуемое тройкой вещественных чисел (a, b, c) при $a < b < c$, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае левая и правая граница α -интервала имеют соответственно вид $z_{\alpha}^{-} = (b - a) + a$, $z_{\alpha}^{+} = -(c - b) + c$.

Легко видеть, что среднее значение треугольного числа $m_{\tilde{z}}$ определяется формулой $m_{\tilde{z}} = \frac{1}{4}(2b + a + c)$, а полуразмах $r_{\tilde{z}}$ – формулой $r_{\tilde{z}} = \frac{1}{4}(c - a)$.

Ниже используется метрика Хаусдорфа, задаваемая для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ равенством [28] $d(\tilde{z}, \tilde{u}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|z_{\alpha}^{-} - u_{\alpha}^{-}|, |z_{\alpha}^{+} - u_{\alpha}^{+}|\}$. Здесь $z_{\alpha}^{\pm}$ и $u_{\alpha}^{\pm}$ – α -индексы нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ соответственно.

Фиксируем промежуток $[0, T]$ числовой оси. Отображение $\tilde{z} : [0, T] \rightarrow J$ будем называть нечеткозначной функцией.

Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ при $t \in [0, T]$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x, t)$. При фиксированном $\forall \alpha \in (0, 1]$ рассмотрим α -интервал $[\tilde{z}]_{\alpha}(t) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}}(x, t) \geq \alpha\}$ и $z_0(\alpha) = cl\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}}(x, t) > 0\}$. Обозначим через $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $z_{\alpha}^{+}(t)$ левую и соответственно правую границы α -интервала. Так что $[\tilde{z}]_{\alpha}(t) = [z_{\alpha}^{-}(t), z_{\alpha}^{+}(t)]$.

Непрерывность функции $\tilde{z}(t)$ по t будем понимать по метрике Хаусдорфа, а ограниченность – в следующем смысле: найдется постоянная $C > 0$, такая что выполнено неравенство $d(\tilde{z}(t), \tilde{\theta}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|z_{\alpha}^{-}(t)|, |z_{\alpha}^{+}(t)|\} \leq C$ ($\forall t \in [0, T]$). Здесь $\tilde{\theta}$ – нечеткое число, у которого α -индексы $\theta_{\alpha}^{\pm} = 0$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$; d – метрика Хаусдорфа.

Замечание 1. Сумма непрерывных по Хаусдорфу нечеткозначных функций и произведение нечеткозначной функции на вещественное число непрерывны по метрике Хаусдорфа.

Замечание 2. Индексы $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $z_{\alpha}^{+}(t)$ непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ непрерывны по t при любом $\alpha \in [0, 1]$. А если $\tilde{z}(t)$ ограничена по $t \in [0, T]$, то это влечет ограниченность $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по $t \in [0, T]$ при любом $\alpha \in [0, 1]$.

Интегралом (Римана) по промежутку $[0, T]$ от непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ называют [29] нечеткое число $\tilde{g}$, такое что его интервалы α -уровня при любом $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид $g_{\alpha} = \int_0^T z_{\alpha}(t) dt$. Интеграл обозначают как $\int_0^T \tilde{z}(t) dt$.

С учетом замечания 2 для непрерывной функции $\tilde{z} : [0, T] \rightarrow J$ имеет место интервальное представление [29] $\left[\int_0^T \tilde{z}(t) dt \right]_{\alpha} = \left[\int_0^T z_{\alpha}^{-}(t) dt, \int_0^T z_{\alpha}^{+}(t) dt \right]$.

Дадим определение производной по Сеиккала от нечеткозначной функции.

Нечеткозначную функцию $\tilde{z} : [0, T] \rightarrow J$ называют дифференцируемой по Сеиккала (или S -дифференцируемой) в точке $t \in (0, T)$ [3], если ее α -индексы $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $z_{\alpha}^{+}(t)$ дифференцируемы и их производные $(z_{\alpha}^{-})'(t)$ и $(z_{\alpha}^{+})'(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ порождают нечеткое число с α -интервалом $[\tilde{z}'(t)]_{\alpha} = [(z_{\alpha}^{-})'(t), (z_{\alpha}^{+})'(t)]$.

Например, нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ вида $\tilde{z}(t) = g(t)\tilde{r}$, где $g(t)$ – скалярная дифференцируемая функция, а $\tilde{r} \in J$ – заданное нечеткое число, будет S -дифференцируемой в точке t при условии $g(t)g'(t) \geq 0$ [5].

Замечание 3. По определению нечеткая S -производная является аддитивной и положительно однородной. То есть, для нечеткозначных S -дифференцируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем $(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t))' = \tilde{z}'(t) + \tilde{w}'(t)$ и $(c\tilde{z}(t))' = c\tilde{z}'(t)$ для любой вещественной постоянной $c \geq 0$. При этом $[(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t))']_{\alpha}^{\pm} = (z_{\alpha}^{\pm})'(t) + (w_{\alpha}^{\pm})'(t)$ и $[(c\tilde{z}(t))']_{\alpha}^{\pm} = c(z_{\alpha}^{\pm})'(t)$.

Вторая S -производная $\tilde{z}''(t)$ в точке $t \in (0, T)$ определяется как S -производная от первой производной. То есть, как нечеткое число $\tilde{z}''(t)$, имеющее левый α -индекс $(z_{\alpha}^{-})''(t)$ и правый α -индекс $(z_{\alpha}^{+})''(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Аналогично определяются последующие S -производные.

Определения обобщенных производных от нечеткозначных функций приводятся и используются в разделе 4.

3. Начальная задача для линейных дифференциальных уравнений с нечеткозначной неоднородностью и нечеткими начальными условиями

На промежутке $[0, T]$ рассмотрим начальную задачу для линейного неоднородного нечеткого дифференциального уравнения

$$(1) \quad \tilde{y}^{(n)}(t) + p_1(t)\tilde{y}^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t) \quad (t \in (0, T]),$$

$$(2) \quad \tilde{y}^{(j)}(0) = \tilde{a}_j \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

с переменными вещественными непрерывными коэффициентами $p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), непрерывной по Хаусдорфу нечеткозначной функцией $\tilde{f} : [0, T] \rightarrow J$ и нечеткими начальными данными $\tilde{a}_j$ ($j = 0, \dots, n-1$).

Сильным решением задачи (1), (2) назовем n раз непрерывно S -дифференцируемую нечеткозначную функцию $\tilde{y}(t)$, удовлетворяющую соотношениям (1), (2).

Обозначим α -индексы $\tilde{y}(t)$ при $\forall t \in [0, T]$ через $y_{\alpha}^{\pm}(t)$, α -индексы $\tilde{f}(t)$ через $f_{\alpha}^{\pm}(t)$, а α -индексы $\tilde{a}_j$ через $(a_j)_{\alpha}^{\pm}$ ($j = 0, \dots, n-1$). Тогда в соответствии с определением и свойствами S -производных задача (1), (2) в интервальной форме при $\forall \alpha \in [0, 1]$ имеет следующий вид:

$$(3) \quad \left[(y_{\alpha}^{-})^{(n)}, (y_{\alpha}^{+})^{(n)} \right] + p_1(t) \left[(y_{\alpha}^{-})^{(n-1)}, (y_{\alpha}^{+})^{(n-1)} \right] + \dots \\ \dots + p_n(t) [y_{\alpha}^{-}, y_{\alpha}^{+}] = [f_{\alpha}^{-}(t), f_{\alpha}^{+}(t)] \quad (t \in (0, T]),$$

$$(4) \quad \left[(y_{\alpha}^{-})^{(j)}(0), (y_{\alpha}^{+})^{(j)}(0) \right] = [(a_j)_{\alpha}^{-}, (a_j)_{\alpha}^{+}] \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Отметим, что $f_{\alpha}^{\pm}(t)$ (α -индексы непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{f}(t)$) являются согласно замечанию 2 непрерывными по t вещественнозначными функциями при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Назовем ультраслабым решением задачи (1), (2) непрерывную (по метрике Хаусдорфа) нечеткозначную функцию $\tilde{y} : [0, T] \rightarrow J$, α -индексы которой удовлетворяют соотношениям (3), (4) (см. [17, 18]).

На основании приведенных определений справедлива

Лемма 1. Пусть коэффициенты $p_i(t)$ ($t \in [0, T]$; $i = 1, \dots, n$) уравнения (1) – непрерывные вещественнозначные функции, а нечеткозначная функция $\tilde{f} : [0, T] \rightarrow J$ непрерывна по метрике Хаусдорфа. Тогда сильное решение задачи (1), (2) является ультраслабым.

При этом ультраслабое решение является сильным лишь при дополнительном предположении о существовании и непрерывности всех его нечетких производных, входящих в уравнение (1).

Отметим, как показывают примеры [6, 16], решения задачи (3), (4) $y_\alpha^\pm(t)$ при некоторых (или всех) значениях t могут не определять нечеткие числа, т.е. для них не выполняются хотя бы одно из условий 1–3 раздела 2. С другой стороны, даже если $y_\alpha^\pm(t)$ определяют нечеткозначную функцию, она может быть не дифференцируема. В связи с этим обоснована градация нечеткозначного решения задачи (1), (2) на сильные, слабые и ультраслабые, предложенная автором в работах [17, 18]. При этом слабое решение понимается как ультраслабое, которое дополнительно является решением интегрального уравнения, соответствующего задаче (1), (2). В данной работе слабые решения не рассматриваются.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и дополнительно при $\forall t \in [0, T]$ коэффициенты $p_i(t) \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда для α -индексов $y_\alpha^\pm(t)$ сильного решения $\tilde{y}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ справедливы следующие задачи: для правых индексов

$$(5) \quad (y_\alpha^+)^{(n)}(t) + p_1(t)(y_\alpha^+)^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)y_\alpha^+(t) = f_\alpha^+(t) \quad (t \in (0, T]),$$

$$(6) \quad (y_\alpha^+)^{(j)}(0) = (a_j)_\alpha^+, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

а для левых индексов

$$(7) \quad (y_\alpha^-)^{(n)}(t) + p_1(t)(y_\alpha^-)^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)y_\alpha^-(t) = f_\alpha^-(t) \quad (t \in (0, T]),$$

$$(8) \quad (y_\alpha^-)^{(j)}(0) = (a_j)_\alpha^-, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Это следует из линейности уравнения (1), свойств арифметических операций над нечеткими числами в интервальной форме и свойств аддитивности и положительной однородности производных (по замечанию 3).

Таким образом, в случае неотрицательности коэффициентов $p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) уравнения (1) при $\forall t \in [0, T]$ и α -индексы ультраслабого решения $\tilde{y} : [0, T] \rightarrow J$ задачи (1), (2) удовлетворяют соотношениям (5), (6) и (7), (8) соответственно. То есть, система для α -индексов распадается на две независимые задачи для правых и левых индексов соответственно.

Отметим, что согласно [30, гл. 3] в условиях леммы 2 при $\forall \alpha \in [0, 1]$ решения линейных задач (5), (6) и (7), (8) существуют и единственны.

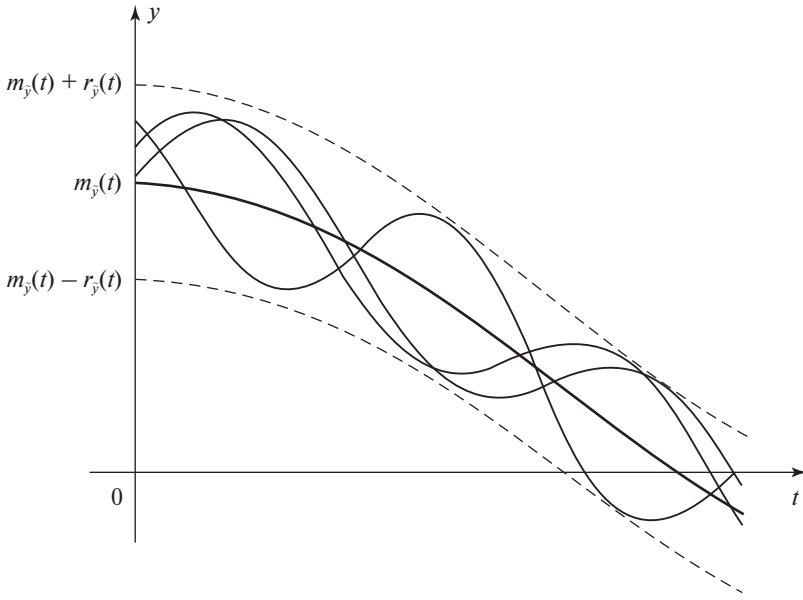


Рис. 1. Геометрический смысл среднего и полуразмаха решений.

Обозначим через

$$(9) \quad m_{\tilde{y}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (y_{\alpha}^{+}(t) + y_{\alpha}^{-}(t)) d\alpha, \quad r_{\tilde{y}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (y_{\alpha}^{+}(t) - y_{\alpha}^{-}(t)) d\alpha$$

– среднее значение и полуразмах ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ задачи (3), (4) при $\forall t \in (0, T]$. По определению ультраслабому решению задачи (1), (2) при любом $t \in (0, T]$ и $\alpha \in [0, 1]$ соответствует α -интервал $[\tilde{y}(t)]_{\alpha} = [y_{\alpha}^{-}(t), y_{\alpha}^{+}(t)]$. Рассмотрим интервал $\left[\int_0^1 y_{\alpha}^{-}(t) d\alpha, \int_0^1 y_{\alpha}^{+}(t) d\alpha \right]$. Любой элемент $y(t)$ этого интервала при любом $t \in (0, T]$ лежит в полосе (рис. 1).

Рассмотрим вопрос о взаимосвязи числовых средних характеристик нечеткозначной неоднородности на входе и соответствующих числовых средних характеристик нечеткозначной функции на выходе линейной динамической системы, т.е. числовых средних характеристик ультраслабого нечеткозначного решения задачи (1), (2).

Обозначим:

$$(10) \quad m_{\tilde{f}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f_{\alpha}^{+}(t) + f_{\alpha}^{-}(t)) d\alpha, \quad r_{\tilde{f}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f_{\alpha}^{+}(t) - f_{\alpha}^{-}(t)) d\alpha$$

– среднее значение и полуразмах соответственно неоднородности уравнения (1) $\tilde{f}(t)$ при $\forall t \in (0, T]$.

Теорема 1. Пусть имеют место условия леммы 1. Тогда среднее значение $m_{\tilde{y}}(t)$ ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ задачи (1), (2), определяемое формулой (9), удовлетворяет уравнению

$$(11) \quad (m_{\tilde{y}})^{(n)}(t) + p_1(t)(m_{\tilde{y}})^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)m_{\tilde{y}}(t) = m_{\tilde{f}}(t) \quad (t \in (0, T]),$$

где $m_{\tilde{f}}(t)$ задается формулой (10). При этом выполнены начальные условия

$$(12) \quad (m_{\tilde{y}})^{(j)}(0) = m_{\tilde{y}_j} = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 ((a_j)_\alpha^+ + (a_j)_\alpha^-) d\alpha \right) \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Доказательство. Предположим вначале, что все коэффициенты уравнения (1) $p_i(t) \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$), $\forall t \in [0, T]$. Введем в рассмотрение среднее арифметическое $A_{\tilde{y}}(\alpha, t) = \frac{1}{2}(y_\alpha^+(t) + y_\alpha^-(t))$. Складывая левые и правые части равенств (5), (7) и деля полученное соотношение справа и слева на два с учетом линейности уравнений (5), (7), получим, что вещественнозначная функция $A_{\tilde{y}}(\alpha, t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (0, T]$ удовлетворяет вещественному дифференциальному уравнению

$$(A_{\tilde{y}})_t^{(n)}(\alpha, t) + p_1(t)(A_{\tilde{y}})_t^{(n-1)}(\alpha, t) + \dots + p_n(t)A_{\tilde{y}}(\alpha, t) = \frac{1}{2}(f_\alpha^+(t) + f_\alpha^-(t)).$$

Интегрируя обе части этого уравнения по α от 0 до 1 с учетом перестановочности интегрирования по α и дифференцирования по t для $m_{\tilde{y}}(t)$ получим дифференциальное уравнение (11).

По поводу начальных условий заметим, что согласно (6), (8)

$$(A_{\tilde{y}}(\alpha, t))^{(j)} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}((a_j)_\alpha^+ + (a_j)_\alpha^-) \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Откуда следует (12).

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые (или все) из коэффициентов уравнения (1) могут быть отрицательными. Пусть, например, $p_i(t) < 0$ при некотором i в некоторой точке $t \in (0, T]$. Остальные коэффициенты для определенности будем считать неотрицательными. Положим $p_i(t) = -q_i(t)$ и рассмотрим соответствующее выражение из соотношения (3)

$$\begin{aligned} p_i(t) \left[(y_\alpha^-)^{(n-i)}, (y_\alpha^+)^{(n-i)} \right] &= \left[q_i(t)(-y_\alpha^+)^{(n-i)}, q_i(t)(-y_\alpha^-)^{(n-i)} \right] = \\ &= q_i(t) \left[(-y_\alpha^+)^{(n-i)}, (-y_\alpha^-)^{(n-i)} \right]. \end{aligned}$$

Поэтому для правых α -индексов уравнение примет вид ($t \in (0, T]$)

$$(13) \quad (y_\alpha^+)^{(n)} + p_1(t)(y_\alpha^+)^{(n-1)} + \dots + q_i(-y_\alpha^-)^{(n-i)} + \dots + p_n(t)y_\alpha^+ = f_\alpha^+(t),$$

а для левых индексов ($t \in (0, T]$)

$$(14) \quad (y_{\alpha}^{-})^{(n)} + p_1(t)(y_{\alpha}^{-})^{(n-1)} + \dots + q_i(-y_{\alpha}^{+})^{(n-i)} + \dots + p_n(t)y_{\alpha}^{-} = f_{\alpha}^{-}(t).$$

Сложим обе части равенств (13) и (14) и разделим на два. Интегрируя полученное соотношение по α от 0 до 1, а также используя обозначение $p_i(t) = -q_i(t)$, получим, что для среднего $m_{\tilde{y}}(t)$ выполнено уравнение (11).

Рассмотрим теперь взаимосвязь между полуразмахом неоднородности $r_{\tilde{f}}(t)$, задаваемым формулой (10), и полуразмахом ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (1), (2), определяемым формулой (9).

Теорема 2. Пусть имеют место условия леммы 1. Тогда полуразмах $r_{\tilde{y}}(t)$ ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ задачи (1), (2), определяемый формулой (9), удовлетворяет уравнению ($t \in (0, T]$)

$$(15) \quad x^{(n)}(t) + |p_1(t)|x^{(n-1)}(t) + \dots + |p_i(t)|x^{(n-i)}(t) + \dots + |p_n(t)|x(t) = r_{\tilde{f}}(t),$$

где правая часть $r_{\tilde{f}}(t)$ задается формулой (10). При этом выполнены начальные условия

$$(16) \quad (r_{\tilde{y}})^{(j)}(0) = r_{\tilde{a}_j} \equiv \frac{1}{2} \left(\int_0^1 ((a_j)_{\alpha}^{+} - (a_j)_{\alpha}^{-}) d\alpha \right) \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай неотрицательности всех коэффициентов $p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$). Вычтем из равенства (5) равенство (7). Воспользовавшись линейностью уравнений для полуразности $R_{\tilde{y}}(\alpha, t) = \frac{1}{2}(y_{\alpha}^{+}(t) - y_{\alpha}^{-}(t))$, получим, что при $\forall \alpha \in [0, 1]$ выполнено вещественное уравнение ($t \in (0, T]$)

$$(17) \quad (R_{\tilde{y}})_t^{(n)}(\alpha, t) + p_1(t)(R_{\tilde{y}})_t^{(n-1)}(\alpha, t) + \dots + p_n(t)R_{\tilde{y}}(\alpha, t) = \frac{1}{2}(f_{\alpha}^{+}(t) - f_{\alpha}^{-}(t))$$

при начальных условиях

$$(18) \quad (R_{\tilde{y}}(\alpha, t))^{(j)} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} ((a_j)_{\alpha}^{+} - (a_j)_{\alpha}^{-}) \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

После интегрирования по α от 0 до 1 обеих частей уравнения (17) для полуразмаха $r_{\tilde{y}}(t)$ получим вещественное уравнение ($t \in (0, T]$)

$$(19) \quad (r_{\tilde{y}})^{(n)}(t) + p_1(t)(r_{\tilde{y}})^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t).$$

Уравнение (19) в случае неотрицательности коэффициентов $p_i(t)$ совпадает с (13).

При этом в силу (18) выполнены начальные условия (16).

Обратимся в случае полуразмахов к предположению, что $p_i(t) < 0$ для некоторого i в некоторой точке $t \in (0, T]$. При этом остальные коэффициенты для определенности будем считать неотрицательными. Вычитая из равенства (13) равенство (14) и интегрируя обе части полученного соотношения по α от 0 до 1, установим, что для полуразмахов (10) выполнено соотношение ($t \in (0, T]$)

$$x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + (-p_i(t))x^{(n-i)}(t) + \dots + p_n(t)x(t) = r_{\tilde{f}}(t).$$

Следовательно, в уравнении для полуразмаха перед отрицательным коэффициентом исходного уравнения ставится знак « $\leftarrow$ ». Так что этот коэффициент становится положительным. Так как в разных точках $t \in (0, T]$ $p_i(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то в общей ситуации справедливо уравнение (15) при начальных условиях (16).

Отметим, что если существует ультраслабое решение $\tilde{y}(t)$ задачи (1), (2), то для его α -индексов $y_{\alpha}^{\pm}(t)$ при любом $t \in (0, T]$ выполняются условия 1–3 раздела 2 на нечеткие числа. В частности, $y_{\alpha}^{-}(t) \leq y_{\alpha}^{+}(t)$. Следовательно, полуразмах нечеткозначной функции $\tilde{y}(t)$, определяемый формулой (9), неотрицателен. Если решение задачи (15), (16) дает функцию, имеющую в некоторых точках отрицательное значение, то $\tilde{y}(t)$ не является ультраслабым решением в указанных точках (т.е. не существует ультраслабого решения).

4. Случай обобщенных производных

В последние десятилетия исследователи активно используют обобщенные производные нечеткозначных функций [5–8, 14–16]. Сформулируем соответствующее определение [5].

Для множеств A, B множество C называют разностью Хукухары и обозначают $C = A \ominus B$, если $A = B + C$.

Определение [5]. Пусть $\tilde{f} : (0, T) \rightarrow J$ и $t_0 \in (0, T)$. Говорят, что нечеткозначная функция $\tilde{f}$ сильно обобщенно дифференцируема в точке t_0 , если существует элемент $\tilde{f}'(t_0) \in J$ такой, что либо

1) для всех достаточно малых $h > 0$, $\exists \tilde{f}(t_0 + h) \ominus \tilde{f}(t_0)$, $\tilde{f}(t_0) \ominus \tilde{f}(t_0 - h)$ и существуют пределы (в метрике Хаусдорфа d)

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0 + h) \ominus \tilde{f}(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0) \ominus \tilde{f}(t_0 - h)}{h} = \tilde{f}'(t_0),$$

либо

2) для всех достаточно малых $h > 0$, $\exists f(t_0) \ominus f(t_0 + h)$, $f(t_0 - h) \ominus f(t_0)$ и существуют пределы (в метрике d)

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0) \ominus \tilde{f}(t_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0 - h) \ominus \tilde{f}(t_0)}{(-h)} = \tilde{f}'(t_0).$$

В случае (1) говорят об обобщенной (1)-дифференцируемости $\tilde{f}$ в точке t_0 и производную обозначают как $D_1^{(1)}\tilde{f}(t_0)$. В случае (2) говорят об обобщенной (2)-дифференцируемости $\tilde{f}$ в точке t_0 и производную обозначают как $D_2^{(1)}\tilde{f}(t_0)$. Как обычно, обобщенная дифференцируемость на интервале понимается как обобщенная дифференцируемость в каждой точке интервала.

Пусть функции $\tilde{f} : (0, T) \rightarrow J$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ соответствуют α -интервалы $[\tilde{f}]_\alpha(t) = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$. Заметим, что выражению $\tilde{f}(t_0 + h) \ominus \tilde{f}(t_0)$ по определению разности Хукухары отвечает α -интервал $[\tilde{f}(t_0 + h) \ominus \tilde{f}(t_0)]_\alpha = [f_\alpha^-(t_0 + h) - f_\alpha^-(t_0), f_\alpha^+(t_0 + h) - f_\alpha^+(t_0)]$. При этом предположение о существовании $\tilde{f}(t_0 + h) \ominus \tilde{f}(t_0)$ означает, что указанные α -интервалы порождают нечеткое число, т.е. выполнены условия 1–3 раздела 2 на α -индексы.

Имеет место

Лемма 3 [15]. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f} : (0, T) \rightarrow J$ обобщенно (1)-дифференцируема. Тогда ее производной $D_1^{(1)}\tilde{f}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ соответствует α -интервал $[D_1^{(1)}\tilde{f}(t)]_\alpha = [(f_\alpha^-)'(t), (f_\alpha^+)'(t)]$. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f} : (0, T) \rightarrow J$ обобщенно (2)-дифференцируема. Тогда ее производной $D_2^{(1)}\tilde{f}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ соответствует α -интервал $[D_2^{(1)}\tilde{f}(t)]_\alpha = [(f_\alpha^+)'(t), (f_\alpha^-)'(t)]$.

Согласно лемме 3 справедливо

Следствие 1. Обобщенная (1)-дифференцируемость нечеткозначной функции $\tilde{f} : (0, T) \rightarrow J$ влечет дифференцируемость по Сеиккала на $(0, T)$.

Говорят, что нечеткозначная функция $\tilde{f} : (0, T) \rightarrow J$ является дважды обобщенно (n, m) -дифференцируемой (для $n, m = 1, 2$) в точке t_0 , если первая обобщенная производная n -го типа $D_n^{(1)}\tilde{f}(t)$ существует в окрестности точки t_0 как нечеткозначная функция и она обобщенно m -дифференцируема в точке t_0 . Этот факт будем обозначать как $D_{n,m}^{(2)}\tilde{f}(t_0)$. Аналогично определяются последующие обобщенные производные более высокого порядка.

В силу леммы 3 справедливо

Следствие 2. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f} : (0, T) \rightarrow J$ характеризуется α -интервалами $[f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$. Тогда

1. Если $\tilde{f}(t)$ – дважды обобщенно (1, 1)-дифференцируемая на $(0, T)$ нечеткозначная функция, то для второй производной $D_{1,1}^{(2)}\tilde{f}(t)$ имеем $[D_{1,1}^{(2)}\tilde{f}(t)]_\alpha = [(f_\alpha^-)''(t), (f_\alpha^+)''(t)]$.

2. Если $\tilde{f}(t)$ – дважды обобщенно (1, 2)-дифференцируемая на $(0, T)$ нечеткозначная функция, то для второй производной $D_{1,2}^{(2)}\tilde{f}(t)$ имеем $[D_{1,2}^{(2)}\tilde{f}(t)]_\alpha = [(f_\alpha^+)''(t), (f_\alpha^-)''(t)]$.

3. Если $\tilde{f}(t)$ – дважды обобщенно (2, 1)-дифференцируемая на $(0, T)$ нечеткозначная функция, то для второй производной $D_{2,1}^{(2)}\tilde{f}(t)$ имеем $[D_{2,1}^{(2)}\tilde{f}(t)]_\alpha = [(f_\alpha^+)''(t), (f_\alpha^-)''(t)]$.

4. Пусть $\tilde{f}(t)$ – дважды обобщенно $(2,2)$ -дифференцируемая на $(0, T)$ нечеткозначная функция, тогда для второй производной $D_{2,2}^{(2)}\tilde{f}(t)$ имеем $[D_{2,2}^{(2)}\tilde{f}(t)]_\alpha = [(f_\alpha^-)''(t), (f_\alpha^+)''(t)]$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда производные нечеткозначного решения задачи (1), (2) являются обобщенными производными первого или второго типа. Рассмотрение проведем для случая нечеткого дифференциального уравнения второго порядка

$$(20) \quad \tilde{y}''(t) + p_1(t)\tilde{y}'(t) + p_2(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t) \quad (t \in (0, T])$$

с непрерывными вещественными коэффициентами $p_1, p_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывной по метрике Хаусдорфа нечеткозначной функцией $\tilde{f}(t) : [0, T] \rightarrow J$ при выполнении начальных условий

$$(21) \quad \tilde{y}(0) = \tilde{a}, \quad \tilde{y}'(t) = \tilde{b} \quad (\tilde{a}, \tilde{b} \in J).$$

Отметим, что в данном контексте возможны четыре типа уравнений для α -индексов в соответствии с типами первых и вторых обобщенных производных.

В соответствии с леммой 3 и следствием 2 справедлива

Лемма 4. Пусть коэффициенты $p_1, p_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные вещественные функции, неотрицательные на $[0, T]$, а нечеткозначная функция $\tilde{f}(t) : [0, T] \rightarrow J$ непрерывна по метрике Хаусдорфа. Тогда в случае обобщенной $(1,1)$ -дифференцируемости нечеткозначного решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (20) имеют место следующие уравнения для α -индексов:

$$(22) \quad (y_\alpha^+)''(t) + p_1(y_\alpha^+)'(t) + p_2 y_\alpha^+(t) = f_\alpha^+(t) \quad (t \in (0, T]),$$

$$(23) \quad (y_\alpha^-)''(t) + p_1(y_\alpha^-)'(t) + p_2 y_\alpha^-(t) = f_\alpha^-(t) \quad (t \in (0, T]).$$

В случае обобщенной $(1,2)$ -дифференцируемости нечеткозначного решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (20) имеют место следующие уравнения для α -индексов:

$$(24) \quad (y_\alpha^-)''(t) + p_1(t)(y_\alpha^+)'(t) + p_2(t)y_\alpha^+(t) = f_\alpha^+(t) \quad (t \in (0, T]),$$

$$(25) \quad (y_\alpha^+)''(t) + p_1(t)(y_\alpha^-)'(t) + p_2(t)y_\alpha^-(t) = f_\alpha^-(t) \quad (t \in (0, T]).$$

В случае обобщенной $(2,1)$ -дифференцируемости нечеткозначного решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (20) имеют место следующие уравнения для α -индексов:

$$(26) \quad (y_\alpha^-)''(t) + p_1(t)(y_\alpha^-)'(t) + p_2(t)y_\alpha^+(t) = f_\alpha^+(t) \quad (t \in (0, T]),$$

$$(27) \quad (y_\alpha^+)''(t) + p_1(t)(y_\alpha^+)'(t) + p_2(t)y_\alpha^-(t) = f_\alpha^-(t) \quad (t \in (0, T]).$$

В случае обобщенной $(2,2)$ -дифференцируемости нечеткозначного решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (20) имеют место следующие уравнения для α -индексов:

$$(28) \quad (y_\alpha^+)''(t) + p_1(t)(y_\alpha^-)'(t) + p_2(t)y_\alpha^+(t) = f_\alpha^+(t) \quad (t \in (0, T]),$$

$$(29) \quad (y_\alpha^-)''(t) + p_1(t)(y_\alpha^+)'(t) + p_2(t)y_\alpha^-(t) = f_\alpha^-(t) \quad (t \in (0, T]).$$

При этом выполнены следующие начальные условия, отвечающие (21).

В случае (1)-дифференцируемости $\tilde{y}(t)$ имеем

$$(30) \quad y_{\alpha}^{\pm}(0) = a_{\alpha}^{\pm}, (y_{\alpha}^{\pm})'(0) = b_{\alpha}^{\pm}.$$

В случае (2)-дифференцируемости $\tilde{y}(t)$ имеем

$$(31) \quad y_{\alpha}^{\pm}(0) = a_{\alpha}^{\pm}, (y_{\alpha}^{\pm})'(0) = b_{\alpha}^{\mp}.$$

Нечеткозначную функцию, α -индексы которой удовлетворяют уравнениям (22), (23), (30), будем называть (1,1)-ультраслабым решением задачи (20), (21); удовлетворяющую уравнениям (24), (25), (30) будем называть (1,2)-ультраслабым решением задачи (20), (21); удовлетворяющую уравнениям (26), (27), (31) будем называть (2,1)-ультраслабым решением задачи (20), (21); удовлетворяющую уравнениям (28), (29), (31) будем называть (2,2)-ультраслабым решением задачи (20), (21).

Справедлива

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда, независимо от типов ультраслабых решений задачи (20), (21), среднее значение (9) удовлетворяет одному и тому же уравнению

$$(32) \quad m_{\tilde{y}}''(t) + p_1(t)m_{\tilde{y}}'(t) + p_2(t)m_{\tilde{y}}(t) = m_{\tilde{f}}(t) \quad (t \in (0, T])$$

при начальных условиях

$$(33) \quad m_{\tilde{y}}(0) = m_{\tilde{a}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (a_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{-}) d\alpha, \quad (m_{\tilde{y}})'(0) = m_{\tilde{b}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (b_{\alpha}^{+} + b_{\alpha}^{-}) d\alpha.$$

Действительно, в каждом из случаев (n, m) -ультраслабых решений задачи (20), (21) при $n, m = 1, 2$ сложим соответствующее равенство для правых и левых α -индексов и разделим полученное соотношение на 2. После интегрирования по α от 0 до 1 обеих частей последнего получим, что для среднего $m_{\tilde{y}}(t)$ справедливо уравнение (32).

По поводу начальных условий заметим, что в случае (1)-дифференцируемости $\tilde{y}(t)$ в силу (30) согласно (12) следует, что справедливо (33).

В случае (2)-дифференцируемости $\tilde{y}(t)$ в силу (31) согласно (12) следует, что также справедливо (33).

Замечание 4. Результат теоремы 3 справедлив и в случае произвольных знаков коэффициентов $p_i(t)$ уравнения (20).

Рассмотрим случай полуразмахов. Справедливо

Утверждение 1. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда в случае обобщенного (1,1)-ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (20) для его полуразмахов (9) справедливо уравнение $r_{\tilde{y}}''(t) + p_1(t)r_{\tilde{y}}'(t) + p_2(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$

($t \in (0, T]$). В случае обобщенного (1, 2)-ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (20) для его полуразмахов (9) справедливо уравнение $-r_{\tilde{y}}''(t) + p_1(t)r_{\tilde{y}}'(t) + p_2(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$ ($t \in (0, T]$). В случае обобщенного (2, 1)-ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (20) для его полуразмахов (9) справедливо уравнение $-r_{\tilde{y}}''(t) - p_1(t)r_{\tilde{y}}'(t) + p_2(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$ ($t \in (0, T]$). В случае обобщенного (2, 2)-ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (20) для его полуразмахов (9) справедливо уравнение $r_{\tilde{y}}''(t) - p_1(t)r_{\tilde{y}}'(t) + p_2(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$ ($t \in (0, T]$).

Это утверждение получается при вычитании соответствующих уравнений для правых и левых индексов.

При этом начальные условия имеют вид $r_{\tilde{y}}(0) = r_{\tilde{a}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (a_{\alpha}^+ - a_{\alpha}^-) d\alpha$ и $r_{\tilde{y}}'(0) = r_{\tilde{b}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (b_{\alpha}^+ - b_{\alpha}^-) d\alpha$ в случае обобщенной (1)-дифференцируемости решения либо второе условие заменяется на $r_{\tilde{y}}'(0) = -r_{\tilde{b}}$ в случае обобщенной (2)-дифференцируемости решения.

5. Преобразование нечеткого сигнала последовательным колебательным контуром

Поставим задачу: найти реакцию радиотехнической цепи, схема которой представлена на рис. 2, на входное нечеткое воздействие $\tilde{g}(t)$.

Здесь L – индуктивность, C – емкость, R – сопротивление, $\tilde{g}(t)$ трактуется как источник напряжения, $\tilde{z}(t)$ – напряжение, снимаемое на сопротивлении. Данная цепь называется последовательным колебательным контуром. Обозначим $\tilde{y}(t) = \frac{1}{R} \tilde{z}(t)$. Тогда данная цепь описывается (см., например, [31]) дифференциальным уравнением второго порядка относительно токов $\tilde{y}(t)$ с постоянными коэффициентами

$$(34) \quad \begin{aligned} & a_0 \tilde{y}''(t) + a_1 \tilde{y}'(t) + a_2 \tilde{y}(t) = \tilde{g}'(t), \\ & a_0 = L > 0, \quad a_1 = R > 0, \quad a_2 = \frac{1}{C} > 0 \quad (t \in (0, T]) \end{aligned}$$

и непрерывно дифференцируемым (по Сеиккала) нечеткозначным входным сигналом $\tilde{g} : [0, T] \rightarrow J$.

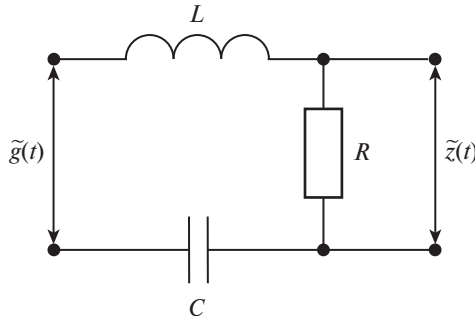


Рис. 2. Последовательный колебательный контур.

Предположим, что в начальный момент система находится в состоянии

$$(35) \quad \tilde{y}(0) = \tilde{a}, \quad \tilde{y}'(0) = \tilde{b},$$

где $a, b \in J$ – нечеткие числа.

Разделив (34) на $a_0 > 0$, получим уравнение ($t \in (0, T]$)

$$(36) \quad \begin{aligned} &\tilde{y}''(t) + p_1 \tilde{y}'(t) + p_2 \tilde{y}(t) = \tilde{f}(t), \\ &p_1 := \frac{R}{L}, \quad p_2 := \frac{1}{LC}, \quad \tilde{f}(t) := \frac{1}{L} \tilde{g}'(t). \end{aligned}$$

Утверждение 2. Пусть вещественные коэффициенты p_1, p_2 положительны, а нечеткозначная функция $\tilde{f}: [0, T] \rightarrow J$ непрерывна по метрике Хаусдорфа. Пусть корни характеристического уравнения $\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0$ вещественные, различные и отрицательные, равные $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$, где $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Тогда (1,1)-ультраслабое решение задачи (35), (36) существует, единственно и представимо в виде

$$(37) \quad \tilde{y}(t) = \tilde{a} \gamma_{\tilde{a}}(t) + \tilde{b} \gamma_{\tilde{b}}(t) + \int_0^t K(t-s) \tilde{f}(s) ds,$$

где функции $\gamma_{\tilde{a}}(t)$ и $\gamma_{\tilde{b}}(t)$ имеют вид

$$(38) \quad \gamma_{\tilde{a}}(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}), \quad \gamma_{\tilde{b}}(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}),$$

а функция Коши $K(t-s)$ определяется формулой

$$(39) \quad K(t-s) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2(t-s)} - e^{-\lambda_1(t-s)}).$$

Действительно, в условиях утверждения 2 α -индексы (1,1)-ультраслабого решения задачи (35), (36) удовлетворяют уравнениям

$$(40) \quad (y_{\alpha}^{\pm})''(t) + p_1 (y_{\alpha}^{\pm})'(t) + p_2 y_{\alpha}^{\pm}(t) = f_{\alpha}^{\pm}(t) \quad (t \in (0, T])$$

при начальных условиях

$$(41) \quad y_{\alpha}^{\pm}(0) = a_{\alpha}^{\pm}, \quad (y_{\alpha}^{\pm})'(0) = b_{\alpha}^{\pm}.$$

Решение задачи (40), (41) при $\forall \alpha \in [0, 1]$ представим в виде суммы $y_{\alpha}^{\pm}(t) = x_{\alpha}^{\pm}(t) + z_{\alpha}^{\pm}(t)$, где $x_{\alpha}^{\pm}(t)$ – решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $(x_{\alpha}^{\pm})''(t) + p_1 (x_{\alpha}^{\pm})'(t) + p_2 x_{\alpha}^{\pm}(t) = 0$ с начальными условиями $x_{\alpha}^{\pm}(0) = a_{\alpha}^{\pm}$, $(x_{\alpha}^{\pm})'(0) = b_{\alpha}^{\pm}$, а $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ – решение неоднородного дифференциального уравнения $(z_{\alpha}^{\pm})''(t) + p_1 (z_{\alpha}^{\pm})'(t) + p_2 z_{\alpha}^{\pm}(t) = f_{\alpha}^{\pm}(t)$ с нулевыми

начальными условиями $z_{\alpha}^{\pm}(0) = 0$, $(z_{\alpha}^{\pm})'(0) = 0$. Нетрудно видеть, что $x_{\alpha}^{\pm}(t) = a_{\alpha}^{\pm}\gamma_{\bar{a}}(t) + b_{\alpha}^{\pm}\gamma_{\bar{b}}(t)$, а $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ представимо с помощью функции Коши [30, гл. 3] формулой

$$z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_0^t K(t-s)f_{\alpha}^{\pm}(s)ds.$$

Здесь функция Коши $K(t-s)$ в соответствии с определением есть решение вещественной задачи $x''(t) + p_1x'(t) + p_2x(t) = 0$, $x(s) = 0$, $x'(s) = 1$. Она дается равенством (39). Тогда имеет место формула

$$(42) \quad y_{\alpha}^{\pm}(t) = a_{\alpha}^{\pm}\gamma_{\bar{a}}(t) + b_{\alpha}^{\pm}\gamma_{\bar{b}}(t) + \int_0^t K(t-s)f_{\alpha}^{\pm}(s)ds.$$

Отметим, что в представлении (42) вещественные функции $\gamma_{\bar{a}}(t)$ и $\gamma_{\bar{b}}(t)$, определенные формулой (28), непрерывны и положительны при $t \geq 0$. Кроме того, и функция Коши (39) непрерывна и неотрицательна при $t \geq s$. В силу этого для функций $y_{\alpha}^{\pm}(t)$, задаваемых (42), при $\forall t \in [0, T]$ выполнены условия 1–3 раздела 2 на α -индексы нечетких чисел. Поэтому они определяют нечеткозначную функцию (37). Согласно условиям утверждения 2 на основании формулы (42) и определения метрики Хаусдорфа нечеткозначная функция (37) непрерывна. Таким образом, (37) является (1,1)-ультраслабым решением задачи (35), (36).

Единственность (1,1)-ультраслабого решения задачи (35), (36) вытекает из единственности при $\forall \alpha \in [0, 1]$ решений задач (40), (41).

Предположим, что про неоднородность $\tilde{f}(t)$ уравнения (36) и про начальные условия $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в (35) известны лишь их средние характеристики. Тогда справедливо следующее

Утверждение 3. Пусть выполнены условия утверждения 2. Тогда средние характеристики $m_{\tilde{y}}(t)$ и $r_{\tilde{y}}(t)$ нечеткозначного решения задачи (35), (36) выражаются через средние характеристики $m_{\bar{a}}$, $m_{\bar{b}}$, $m_{\tilde{f}}$ и соответственно $r_{\bar{a}}$, $r_{\bar{b}}$, $r_{\tilde{f}}$ формулами

$$(43) \quad m_{\tilde{y}}(t) = m_{\bar{a}}\gamma_{\bar{a}}(t) + m_{\bar{b}}\gamma_{\bar{b}}(t) + \int_0^t K(t-s)m_{\tilde{f}}(s)ds,$$

$$(44) \quad r_{\tilde{y}}(t) = r_{\bar{a}}\gamma_{\bar{a}}(t) + r_{\bar{b}}\gamma_{\bar{b}}(t) + \int_0^t K(t-s)r_{\tilde{f}}(s)ds,$$

где $\gamma_{\bar{a}}(t)$ и $\gamma_{\bar{b}}(t)$ определены равенствами (38), а $K(t-s)$ – формулой (39).

Действительно, рассмотрим случай средних $m_{\tilde{y}}(t)$. В силу (40), (41) аналогично теореме 3 среднее $m_{\tilde{y}}(t)$ есть решение уравнения

$$(45) \quad m_{\tilde{y}}''(t) + p_1m_{\tilde{y}}'(t) + p_2m_{\tilde{y}}(t) = m_{\tilde{f}}(t) \quad (t \in (0, T])$$

при начальных условиях

$$(46) \quad m_{\tilde{y}}(0) = m_{\tilde{a}} \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (a_{\alpha}^+ + a_{\alpha}^-) d\alpha, \quad m'_{\tilde{y}}(0) = m'_{\tilde{b}} \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (b_{\alpha}^+ + b_{\alpha}^-) d\alpha.$$

Отсюда, аналогично рассуждениям утверждения 2, следует формула (43).

Для полуразмаха $r_{\tilde{y}}(t)$ согласно утверждению 1 справедливо уравнение

$$(47) \quad r''_{\tilde{y}}(t) + p_1 r'_{\tilde{y}}(t) + p_2 r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t) \quad (t \in (0, T])$$

при начальных условиях

$$(48) \quad r_{\tilde{y}}(0) = r_{\tilde{a}} \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (a_{\alpha}^+ - a_{\alpha}^-) d\alpha, \quad r'_{\tilde{y}}(0) = r'_{\tilde{b}} \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (b_{\alpha}^+ - b_{\alpha}^-) d\alpha.$$

Отсюда следует формула (44).

Отметим, что в соответствии с определением функция $r_{\tilde{y}}(t)$ должна быть неотрицательной. Фактически, это вытекает из формулы (44) в силу неотрицательности чисел $r_{\tilde{a}}$, $r'_{\tilde{b}}$, функций $\gamma_{\tilde{a}}(t)$ и $\gamma_{\tilde{b}}(t)$ при $\forall t \geq 0$, а также неотрицательности функции $r_{\tilde{f}}(s)$ при $s \geq 0$ и $K(t-s)$ при $t \geq s \geq 0$.

Рассмотрим случай бесконечного отрезка $[0, \infty)$ вещественной оси.

Утверждение 4. Пусть выполнены условия утверждения 2 и дополнительно правая часть уравнения (36) $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow J$ непрерывна и ограничена по метрике Хаусдорфа. Тогда средние (43) и (44) ограничены при $t \in [0, \infty)$.

Действительно, оценим, например, модуль $|m_{\tilde{y}}(t)|$ исходя из формулы (33). С учетом (28) первое слагаемое правой части (43) оценивается величиной $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [|m_{\tilde{a}}|(\lambda_1 - \lambda_2) + 2|m_{\tilde{b}}|]$. Чтобы оценить второе слагаемое, сделаем в интеграле замену переменных $t - s = \sigma$. Тогда $\int_0^t K(t-s)m_{\tilde{f}}(s)ds = \int_0^t K(\sigma)m_{\tilde{f}}(t-\sigma)d\sigma$. По предположению и в силу замечания 2 найдется постоянная $c_{\tilde{f}}$ такая, что $|m_{\tilde{f}}(s)| \leq c_{\tilde{f}}$ для $\forall s \geq 0$. Тогда в силу формулы (39) получим

$$\left| \int_0^t K(\sigma)m_{\tilde{f}}(t-\sigma)d\sigma \right| \leq \int_0^t |K(\sigma)||m_{\tilde{f}}(t-\sigma)|d\sigma \leq c_{\tilde{f}} \int_0^t |K(\sigma)|d\sigma \leq \frac{c_{\tilde{f}}}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Откуда следует высказанное утверждение для $m_{\tilde{y}}(t)$. Аналогично для $r_{\tilde{y}}(t)$.

Замечание 5. В условиях утверждения 4 решение (43) уравнения (45), а также решение (44) уравнения (47) устойчивы по Ляпунову (по начальным данным) в соответствии с [32, гл. II]. Более того, асимптотически устойчивы. Кроме того, справедлива устойчивость при постоянно действующих возмущениях [32, гл. II].

Физически устойчивость обусловлена тем, что последовательный колебательный контур в силу положительности коэффициентов p_1, p_2 порождает пассивную (казуальную) динамическую систему [31].

Подчеркнем, что фактически в утверждениях 2–4 и замечании 5 рассмотрен случай (1,1)-обобщенного ультраслабкого решения задачи (35), (36).

Обратимся к случаю обобщенных ультраслабких решений других типов в задаче (35), (36). Рассмотрим для определенности (1,2)-ультраслабое дважды обобщенно решение задачи (35), (36). Как отмечено в теореме 3, в этом случае среднее $m_{\tilde{y}}(t)$ является решением задачи (32), (33). Следовательно, имеет вид (43). Аналогично для других типов ультраслабких обобщенных решений.

По поводу полуразмаха $r_{\tilde{y}}(t)$ заметим, что в случае (1,1)-ультраслабкого решения задачи (47), (48) функция (44) дает ограниченное при $t \rightarrow +\infty$ решение, устойчивое по Ляпунову.

В случае, например, (1,2)-ультраслабкого решения задачи (35), (36) уравнение для $r_{\tilde{y}}(t)$ согласно утверждению 1 имеет вид $r_{\tilde{y}}''(t) - p_1 r_{\tilde{y}}'(t) - p_2 r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$. Для отвечающего ему характеристического уравнения $\lambda^2 - p_1 \lambda - p_2 = 0$ согласно теореме Виета корни вещественные и различных знаков. Это означает неустойчивость (т.е. физическую нереализуемость) соответствующего решения. Другие случаи рассматриваются аналогично. Другое дело было бы, если вместо исходной системы рассматривалась, например, система с обратной связью или система усиления сигналов.

Рассмотрим важный частный случай уравнения (36) – уравнение гармонического осциллятора, когда в колебательном контуре (рис. 2) отсутствует сопротивление. Имеем следующее нечеткое дифференциальное уравнение:

$$(49) \quad \tilde{y}''(t) + \omega^2 \tilde{y}(t) = \tilde{f}(t).$$

Здесь $\omega > 0$ – постоянная, определяющая частоту колебаний решений однородного уравнения

$$(50) \quad y''(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

Как известно, общее решение однородного уравнения (50) имеет вид $c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные. При этом функция Коши дается формулой $K(t-s) = \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-s)$. Тогда аналогично утверждению 3 средние характеристики $m_{\tilde{y}}(t)$ и $r_{\tilde{y}}(t)$ задачи (49), (35) имеют вид

$$m_{\tilde{y}}(t) = m_{\tilde{a}} \cos \omega t + m_{\tilde{b}} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) m_{\tilde{f}}(s) ds,$$

$$r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{a}} \cos \omega t + r_{\tilde{b}} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) r_{\tilde{f}}(s) ds.$$

Здесь использованы обозначения, принятые в утверждении 3.

6. Заключение

В теории нечетких чисел широко распространен метод оценивания нечетких чисел вещественными числами (дефаззификация) либо вещественными интервалами. В данной работе фактически решается задача: по оценке нечеткого сигнала на входе линейной динамической системы найти соответствующую оценку нечеткого сигнала на выходе.

При этом основными параметрами оценивания являются нечеткое среднее и нечеткий полуразмах. Подчеркнем установленный в данной работе фундаментальный факт – универсальную роль нечеткого среднего (9) $m_{\tilde{y}}$ (теорема 3), которое одинаково при различных возможных типах обобщенных производных дифференциальной задачи, описывающей данную динамическую систему. Это имеет место, несмотря на различные уравнения для α -индексов при различных типах дифференцируемости.

Результаты данной работы допускают развитие в следующих направлениях: рассмотрение взаимосвязи модальных значений нечетких сигналов на входе и выходе линейной динамической системы, развитие интервального подхода при оценивании входного и выходного нечетких сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kandel A., Byatt W.J.* Fuzzy processes // Fuzzy Sets and Systems. 1980. V. 4. No. 2. P. 117–152.
2. *Puri M., Ralescu D.* Differentials of fuzzy functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1983. V. 91. No. 3. P. 552–558.
3. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. 1987. V. 24. No. 3. P. 319–330.
4. *Buckley J.J., Feuring T.* Fuzzy initial value problem for Nth-order fuzzy linear differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 2001. V. 121. No. 2. P. 247–255.
5. *Barnab'as Bede, Sorin G. Gal.* Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 2005. V. 151. No. 3. P. 581–599.
6. *Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A.* A new method for solving fuzzy linear differential equations // Soft Computing. 2011. V. 92. P. 181–197.
7. *Salahshour S.* Nth-order Fuzzy Differential Equations Under Generalized Differentiability // Journal of Fuzzy Set Valued Analysis. 2011. V. 2011. P. 1–14.
8. *Abbasbandy S., Allahviranloo T., Lopez-Pouso O., Nieto J.J.* Numerical methods for fuzzy differential inclusions // Comput. Math. Appl. 2004. V. 48. No. 10–11. P. 1633–1641.
9. *Gasilov N., Amrahov S. Em., Fatullayev A.G.* Solution of linear differential equations with fuzzy boundary values // Fuzzy Sets and Systems. 2014. V. 257. No. 16. P. 169–183.
10. *Salahshour S., Allahviranloo T.* Applications of fuzzy Laplace Transforms // Soft Computing. 2013. V. 17. No. 1. P. 145–158.

11. *Ahmad L., Farooq M., Abdullah S.* Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014. P. 1–20. URL: <https://arxiv.org/abs/1403.0242> (date of access: 23.11.2024)
12. *Jayakumar T., Kanagarajan K., Indrakumar S.* Numerical Solution of Nth-Order Fuzzy Differential Equation by Runge-Kutta Nystrom Method // International Journal of Mathematical Engineering and Science. 2012. V. 1. No. 5. P. 1–13.
13. *Amen S.G., Jameel A.F., Yaakob A.M.* Approximate Solution of Higher Order Fuzzy Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations Using Bezier Curve Representation // Mathematics and Statistics. 2021. V. 9. No. 4. P. 431–438.
14. *Alavi S.M.* A method for second-order linear fuzzy two-point boundary value problems based on the Hukuhara differentiability // Computational Methods for Differential Equations. 2023. V. 11. No. 3. P. 576–588.
15. *Chalco-Cano Y., Román-Flores H.* On new solutions of fuzzy differential equations // Chaos, Solitons & Fractals. 2008. V. 38. No. 1. P. 112–119.
16. *Khastan A., Bahrami F., Ivaz K.* New Results on Multiple Solutions for Nth-Order Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability // Boundary Value Problems. 2009. V. 2009. No. 7. P. 1–13.
17. *Хацкевич В.Л.* Преобразование непрерывного нечеткого сигнала линейной динамической системой // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2024. С. 34–48.
18. *Хацкевич В.Л.* Применение функции Коши в задаче о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой // Искусственный интеллект и принятие решений. 2025. № 2. С. 97–113.
19. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. 5-е изд., стер. М.: КноРус, 2014. 448 с.
20. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Часть 1. Позиционное управление // Информационные технологии. 2019. Т. 25. № 5. С. 259–270.
21. *Padmapriya V., Kaliyappan M.* Solutions of non-homogeneous system of fuzzy fractional differential equations: a novel approach // Soft Computing. 2023. V. 27. No. 6. P. 14553–14569.
22. *Bhattacharyya R., Jha Br. K.* Analyzing fuzzy boundary value problems: a study on the influence of mitochondria and ER fluxes on calcium ions in neuron cells // Journal of Bioenergetics and Biomembranes. 2024. V. 56. P. 15–29.
23. *Хацкевич В.Л.* Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения // АиТ. 2023. № 8. С. 43–60.
Khatskevich V.L. Continuous processes with fuzzy states and their applications // Autom. Remote Control. 2023. No. 8. P. 43–60.
24. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986. 312 с.
25. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 801 с.
26. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // Fuzzy sets and systems. 1987. V. 24. No. 3. P. 279–300.
27. *Борисов В.В., Федюлов А.С., Зернов М.М.* Основы нечеткой арифметики. М.: Горячая Линия – Телеком, 2019. 98 с.

28. *Diamond P., Cloeden P.* Metric Spaces of Fuzzy Sets. Theory and Applications. World Scientific. 1994. 188 p.
29. *Hsien-Chung Wu.* The fuzzy Riemann integral and its numerical integration // Fuzzy Sets and Systems. 2000. V. 110. No. 1. P. 1–25.
30. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.
31. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988. 536 с.
32. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. 4-е изд., стер. М.: Наука, 2023. 480 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 06.03.2025

После доработки 24.06.2025

Принята к публикации 28.07.2025

© 2026 г. А.А. ЩЕГЛОВА, д-р физ.-мат. наук (shchegl@icc.ru)
(Институт динамики систем и теории управления СО РАН
им. В.М. Матросова, Иркутск)

ДЕТЕКТИРУЕМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СКАЛЯРНЫМ ВЫХОДОМ¹

Рассматриваются нестационарные линейные и нелинейные системы дифференциально-алгебраических уравнений со скалярным наблюдаемым выходом. В линейном случае получены достаточные условия детектируемости и построен наблюдатель состояния. Для систем с управляемым входом специального вида предложена процедура стабилизации с помощью динамической обратной связи по выходу. С использованием линейного приближения получены условия детектируемости для нелинейной системы.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, детектируемость, стабилизируемость.

DOI: 10.7868/S2413977726070041

1. Введение

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.1) \quad A(t) \frac{d}{dt} x(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0,$$

$$(1.2) \quad y(t) = c(t)^T x(t), \quad t \in T = [0, +\infty),$$

где $A(t)$, $B(t)$ – известные $(n \times n)$ -матрицы; $U(t)$ – заданная $(n \times l)$ -матрица, $x(t)$ – искомая, а $c(t)$ – заданные n -мерные вектор-функции; $u(t)$ – l -мерный управляемый вход, $y(t)$ – скалярный наблюдаемый выход, T – символ транспонирования. Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $U(t)$ и векторов $u(t)$, $c(t)$ – достаточное число раз непрерывно дифференцируемые на T функции. Допускается случай

$$\det A(t) \equiv 0, \quad t \in T.$$

Такие системы называются, в частности, дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) или дескрипторными системами.

¹ Работа выполнена за счет государственного задания в рамках темы «Эволюционные и динамические управляемые системы: теория, численные методы, приложения». (Шифр научной темы FWEW-2026-0011, № госрегистрации 126021217177-7).

Изучаемые в данной работе классы ДАУ включают в себя прикладные задачи из различных областей науки и техники: теории электрических цепей [1], биологии [2], механики [3], химии [4], экономики [5], теории защиты информации [6] и др.

Начиная с 90-х г. прошлого столетия наблюдается значительный рост интереса к проблеме построения наблюдателей для дифференциально-алгебраических уравнений как в линейной [1, 3, 4, 7, 8], так и в нелинейной [9–20] постановках.

В большинстве работ по линейным системам анализируется стационарный случай. Результатов по нелинейным системам сравнительно немного. При этом, как правило, рассматривается квазилинейная постановка задачи в предположениях, обеспечивающих специальную структуру системы или выполнение других довольно жестких ограничений. Например, требуется, чтобы линейная часть не зависела от времени [9–11] или чтобы система имела «линейно-доминирующую структуру» [12, 13], треугольную форму [14], или чтобы нелинейность системы удовлетворяла строгому глобальному условию Липшица [10, 12, 13].

В [11] представлен обзор литературы по построению наблюдателей состояния для нелинейных дескрипторных систем с обсуждением типов рассматриваемых нелинейностей. В [9] рассматривается локальная устойчивость наблюдателя для полувывной системы с простой структурой. Также рассматриваются ДАУ с прямоугольными дескрипторами [6, 15]. В [16] при построении наблюдателей используется линеаризация и методы упрощения внутренней структуры системы. Наиболее распространенным является подход, при котором существование наблюдателей требует разрешимости определенных линейных матричных неравенств [17–20].

В настоящее время вопрос о получении условий детектируемости и построении наблюдателей состояния для нестационарных ДАУ в общем случае остается открытым. Данная работа посвящена линейным и нелинейным системам, удовлетворяющим достаточно общим требованиям на внутреннюю структуру. Разделы 2–4 посвящены анализу линейных систем. Структурная форма, представленная в разделе 2, позволила получить условия детектируемости и построить наблюдатель состояния (раздел 3). С использованием последнего в разделе 4 предложена процедура стабилизации для систем со специальным управляемым входом. В разделе 5 рассматривается внутренняя структура нелинейных ДАУ

$$f\left(t, x(t), \frac{d}{dt}x(t)\right) = 0,$$

где $\det \frac{\partial f(t, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$ в области определения. На этой основе в разделе 6 получены достаточные условия детектируемости по линейному приближению и вид наблюдателя состояния в нелинейном случае.

2. Вспомогательные результаты о структуре линейных ДАУ

При некотором $r : 0 \leq r \leq n$ поставим в соответствие матричным коэффициентам системы (1.1) следующие объекты: $(n(r+1) \times n)$ -матрицы

$$(2.1) \quad \mathcal{B}_r(t) = \text{col} \left(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t) \right),$$

$$(2.2) \quad \mathcal{A}_r(t) = \text{col} \left(C_0^0 A(t), C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t), \dots, C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t) \right),$$

$n(r+1) \times nr$ -матрицу

$$(2.3) \quad \Lambda_r(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ C_1^1 A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$(2.4) \quad \mathcal{D}_r(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_r(t) & \mathcal{A}_r(t) & \Lambda_r(t) \end{pmatrix}$$

размера $n(r+1) \times n(r+2)$. Здесь и далее $C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ – биномиальные коэффициенты,

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} \phi(t), \quad \phi^{(j)}(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^j \phi(t).$$

Предположим, что выполняются условия:

A1) $\text{rank } \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const} \quad \forall t \in T$;

A2) матрица $\mathcal{D}_r(t)$ содержит обратимую при всех $t \in T$ подматрицу $\mathcal{M}_r(t)$ порядка $n(r+1)$, включающую в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$ и все n столбцов матрицы $\mathcal{A}_r(t)$.

Обозначим через Q матрицу перестановок столбцов такую, что

$$(2.5) \quad \mathcal{B}_r(t)Q = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{B}}_1(t) & \bar{\mathcal{B}}_2(t) \end{pmatrix},$$

где блок $\bar{\mathcal{B}}_2(t)$ входит, а блок $\bar{\mathcal{B}}_1(t)$ не входит в матрицу $\mathcal{M}_r(t)$. Обозначим через d число столбцов в $\bar{\mathcal{B}}_2(t)$. Соответственно

$$(2.6) \quad B(t)Q = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t)Q = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \end{pmatrix},$$

где блоки $B_1(t)$, $A_1(t)$ и $B_2(t)$, $A_2(t)$ имеют попарно размеры $n \times (n-d)$ и $n \times d$ соответственно.

В [21] показано, что в предположениях A1, A2 существует оператор

$$(2.7) \quad \mathcal{R} = \sum_{j=0}^r R_j(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^j,$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$(2.8) \quad \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \end{pmatrix} \mathcal{M}_r^{-1}(t),$$

E_n – единичная матрица порядка n .

Действие оператора (2.7) преобразует систему (1.1) к виду

$$(2.9) \quad \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(t) & E_d \\ J_2(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \mathcal{R}[U(t)u(t)] = 0, \quad t \in T,$$

где $x_1(t) \in \mathbf{R}^{n-d}$, а $x_2(t) \in \mathbf{R}^d$,

$$(2.10) \quad \text{col } (x_1(t), x_2(t)) = Q^{-1}x(t),$$

$$(2.11) \quad \text{col } (J_1(t), J_2(t)) = \sum_{j=0}^r R_j(t) B_1^{(j)}(t),$$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}[U(t)u(t)] &= \sum_{j=0}^r R_j(t) (U(t)u(t))^{(j)} = \\ &= \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) \end{pmatrix} \mathcal{U}_r(t) \bar{u}_r(t), \end{aligned}$$

$$(2.13) \quad \bar{u}_r(t) = \text{col } \left(u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t) \right),$$

$$(2.14) \quad \mathcal{U}_r(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 U(t) & O & O & \dots & O \\ C_1^0 U'(t) & C_1^1 U(t) & O & \dots & O \\ C_2^0 U^{(2)}(t) & C_2^1 U'(t) & C_2^2 U(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^0 U^{(r)}(t) & C_r^1 U^{(r-1)}(t) & C_r^2 U^{(r-2)}(t) & \dots & C_r^r U(t) \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Под решением системы (1.1) будем понимать n -мерную вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}(T)$, обращающую (1.1) в тождество при подстановке.

Очевидно, что при достаточно гладких входных данных любое решение системы (1.1) является решением системы (2.9). Для того, чтобы доказать обратное утверждение, требуются дополнительные предположения.

Допустим, что помимо A1, A2, выполняются условия:

A3) $\text{rank } \Lambda_{r+1}(t) = \text{rank } \Lambda_r(t) + n \quad \forall t \in T$;

A4) в матрице $\mathcal{D}_{r+1}(t)$ имеется обратимая при всех $t \in T$ подматрица $\mathcal{M}_{r+1}(t)$ порядка $n(r+2)$, включающая в себя все столбцы матрицы $\mathcal{M}_r(t)$ и еще n столбцов матрицы $\Lambda_{r+1}(t)$.

Тогда оператор $\mathcal{R}$ обладает левым обратным оператором [21]

$$\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t) \frac{d}{dt},$$

где $L_0(t)$, $L_1(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы. Последнее означает, что действие оператора $\mathcal{L}$ и перестановка строк искомого вектора (2.10) преобразуют систему (2.9) к виду (1.1). В этом случае любое решение системы (2.9) является решением системы (1.1).

Таким образом, предположения A1–A4 обеспечивают эквивалентность систем (1.1) и (2.9) в смысле решений (с точностью до перестановок компонент). Очевидно, что для выделения единственного решения системы (2.9) или (1.1) необходимо задать начальные данные в виде

$$(2.15) \quad x_1(0) = x_0,$$

где $x_0 \in \mathbf{R}^{n-d}$.

При определенных обстоятельствах оператор $\mathcal{R}$ (2.7) может иметь правый обратный оператор.

Лемма 1. Пусть:

- 1) $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$;
- 2) выполнены предположения A1, A2;
- 3) для всех $t \in T$

$$(2.16) \quad (R_1(t) \ R_2(t) \dots R_r(t)) \begin{pmatrix} C_1^1 B_1(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 B_1'(t) & C_2^2 B_1(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 B_1^{(r-1)}(t) & C_r^2 B_1^{(r-2)}(t) & \dots & C_r^r B_1(t) \end{pmatrix} = O.$$

Тогда для оператора (2.7) существует правый обратный оператор вида

$$(2.17) \quad \mathcal{P} = P_0(t) + P_1(t) \frac{d}{dt},$$

где

$$P_0(t) = \begin{pmatrix} B_2(t) & A_1(t) \end{pmatrix}, \quad P_1(t) = \begin{pmatrix} A_2(t) & O \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$ определены в (2.6).

Доказательство вынесено в Приложение.

3. Построение наблюдателя состояния линейной системы

Предположим справедливость условий A1–A4. В представлении для выхода (1.2) сделаем замену переменных

$$x(t) = Q \operatorname{col} (x_1(t), x_2(t)),$$

где Q – матрица перестановок из (2.5). Тогда

$$(3.1) \quad y(t) = c_1^\top(t) x_1(t) + c_2^\top x_2(t),$$

$$c_1(t) \in \mathbf{R}^{n-d}, \quad c_2(t) \in \mathbf{R}^d \quad \forall t \in T.$$

Определение 2. Система

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}'_1(t) \\ \hat{x}'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{J}_1(t) & E_d \\ \hat{J}_2(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} + \hat{U}(t)\bar{u}_r(t) + \\ & + g(t) \left(y(t) - c_1^\top(t)\hat{x}_1(t) - c_2^\top(t)\hat{x}_2(t) \right) = 0, \\ & \hat{y}(t) = H(t)\text{col}(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) + \nu(t)y(t) + F(t)\bar{u}_r(t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

где матрицы $\hat{J}_1(t)$, $\hat{J}_2(t)$, $\hat{U}(t)$, $H(t)$, $F(t)$ и векторы $g(t)$, $\nu(t)$ имеют соответствующие размеры, называется наблюдателем состояния для (2.9), (3.1), если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\hat{y}(t) - \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Будем искать наблюдатель состояния для системы (2.9), (3.1) в виде

$$(3.2) \quad \hat{x}_2(t) + J_1(t)\hat{x}_1(t) + \mathcal{V}_{r,1}(t)\bar{u}_r(t) = 0,$$

$$(3.3) \quad \hat{x}'_1(t) + J_2(t)\hat{x}_1(t) + \mathcal{V}_{r,2}(t)\bar{u}_r(t) + g(t) \left(y(t) - c_1^\top(t)\hat{x}_1(t) - c_2^\top(t)\hat{x}_2(t) \right) = 0,$$

$$(3.4) \quad \hat{y}_1(t) = \hat{x}_1(t), \quad \hat{y}_2(t) = \hat{x}_2(t),$$

где $g(t) : T \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$,

$$\text{col}(\mathcal{V}_{r,1}(t), \mathcal{V}_{r,2}(t)) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) \end{pmatrix} \mathcal{U}_r(t),$$

$\mathcal{U}_r(t)$ определена в (2.14), матрицы $\mathcal{V}_{r,1}(t)$ и $\mathcal{V}_{r,2}(t)$ имеют размеры $d \times l(r+1)$ и $(n-d) \times l(r+1)$ соответственно, $J_1(t)$ и $J_2(t)$ – матричные коэффициенты из (2.9), которые вычисляются с использованием формул (2.6), (2.8), (2.11).

Тогда невязки

$$(3.5) \quad e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t), \quad e_2(t) = \hat{x}_2(t) - x_2(t)$$

должны удовлетворять системе

$$(3.6) \quad e_2(t) + J_1(t)e_1(t) = 0,$$

$$(3.7) \quad e'_1(t) + J_2(t)e_1(t) - g(t) \left(c_1^\top(t)e_1(t) + c_2^\top(t)e_2(t) \right) = 0.$$

Из (3.6) следует

$$(3.8) \quad e_2(t) = -J_1(t)e_1(t).$$

Подстановка (3.8) в (3.7) приводит к уравнению относительно $e_1(t)$

$$(3.9) \quad e'_1(t) + \left(J_2(t) - g(t) \left(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t) \right) \right) e_1(t) = 0.$$

Допустим, найдется вектор-функция $g(t)$ такая, что для любого решения системы (3.9) справедливо предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$. В этом случае невырожденная система

$$(3.10) \quad x'_1(t) + J_2(t)x_1(t) = 0,$$

$$(3.11) \quad y(t) = \left(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t) \right) x_1(t)$$

называется *детектируемой* [22, с. 313], и для нее существует наблюдатель вида

$$(3.12) \quad \hat{x}'_1(t) + J_2(t)\hat{x}_1(t) + g(t) \left(y(t) - \left(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t) \right) \hat{x}_1(t) \right) = 0,$$

$$(3.13) \quad \hat{y}(t) = \hat{x}_1(t).$$

Если дополнительно предположить, что матрица $J_1(t)$ имеет неположительный характеристический показатель

$$(3.14) \quad \chi[J_1(t)] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|J_1(t)\| \leq 0,$$

то из (3.8) вытекает предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$. Таким образом, система (3.2)–(3.4) является наблюдателем состояния для системы (2.9), (3.1).

В предположениях А1–А4 системы (1.1) и (2.9) имеют одни и те же решения. Это означает, что система (3.2)–(3.4) является наблюдателем состояния и для системы (1.1), (1.2). Тем самым доказан следующий результат.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия А1–А4 и (3.14). Для ДАУ (1.1), (1.2) существует наблюдатель состояния вида (3.2)–(3.4) тогда и только тогда, когда система (3.10), (3.11) имеет наблюдатель вида (3.12), (3.13).

Определение 3. Система наблюдения (1.1), (1.2) называется детектируемой, если найдется вектор-функция $g(t)$ такая, что система (3.9) асимптотически устойчива.

Утверждение 2. Пусть имеют место предположения А1–А4 и (3.14). Система (1.1), (1.2) детектируема тогда и только тогда, когда детектируема система (3.10), (3.11).

Сформулируем условие детектируемости системы (3.10), (3.11) [22, с. 314]. Для этого определим матрицу наблюдаемости

$$(3.15) \quad \mathcal{S}(t) = \text{col} (s_0(t), s_1(t), \dots, s_{n-d-1}(t)),$$

где $s_0(t) = c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t)$, $s_i(t) = s'_{i-1}(t) - s_{i-1}(t)J_2(t)$, $i = \overline{1, n-d}$.

Для обратимой матрицы $\mathcal{S}(t)$ зададим функции

$$(3.16) \quad (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_{n-d}(t)) = s_{n-d}(t)\mathcal{S}^{-1}(t).$$

Лемма 2. Пусть:

- 1) $J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(T)$, $c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$;
- 2) $\mathcal{S}(t)$ – матрица Ляпунова;
- 3) каждая из функций $\omega_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(T)$ ($i = \overline{1, n-d}$) ограничена на T вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно.

Тогда система (3.10), (3.11) детектируема.

Замечание 1. Из доказательства теоремы о детектируемости линейной системы [22, с. 314] следует, что вектор-функция $g(t)$ в (3.12) может быть выбрана таким образом, что сама она будет ограничена на T , а система (3.12) приводима в смысле Ляпунова.

Опираясь на утверждения 1, 2 и лемму 2, можно получить достаточные условия детектируемости ДАУ (1.1), (1.2).

Теорема 1. Пусть:

- 1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{n+r-d}(T)$ ($n-d \geq 1$); $c(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$; $U(t), u(t) \in \mathbf{C}^r(T)$;
- 2) выполнены условия A1–A4 и (3.14);
- 3) справедливы предположения 2 и 3 леммы 2.

Тогда система (1.1), (1.2) детектируема и имеет наблюдатель вида (3.2)–(3.4).

4. Стабилизируемость линейной системы с помощью наблюдателя состояния

Допустим, что все предположения леммы 1 выполнены. Рассмотрим ДАУ

$$(4.1) \quad A(t)x'(t) + B(t)x(t) + P_0(t)b(t)u(t) + P_1(t)(b(t)u(t))' = 0,$$

где $P_0(t)$ и $P_1(t)$ – коэффициенты оператора (2.17) правого обратного по отношению с оператору (2.7), $b(t)$ – заданная n -мерная вектор-функция, $u(t)$ – скалярный управляемый вход.

Пусть $\beta_1(t), \beta_2(t)$ – достаточно гладкие n -мерные вектор-функции. При определенных условиях систему

$$(4.2) \quad A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \beta_1(t)u(t) + \beta_2(t)u(t)' = 0$$

можно представить в виде (4.1).

Лемма 3. Пусть:

- 1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$;
- 2) выполнены предположения 2, 3 леммы 1;
- 3) $\beta_1(t) \in \mathbf{C}^r(T)$;
- 4) для всех $t \in T$

$$(4.3) \quad \beta_2(t) = P_1(t)\mathcal{R}[\beta_1(t)].$$

Тогда систему (4.2) можно записать в виде (4.1), где $b(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ находится по формуле

$$(4.4) \quad b(t) = \mathcal{R}[\beta_1(t)],$$

оператор $\mathcal{R}$ определен в (2.7), (2.8).

Доказательство вынесено в Приложение.

Зададим для системы (4.1) наблюдаемый выход (1.2). Построим для (4.1) стабилизирующее управление.

В результате действия на обе части уравнения (4.1) оператора (2.7) получим систему

$$(4.5) \quad x_2(t) + J_1(t)x_1(t) + b_1(t)u(t) = 0,$$

$$(4.6) \quad x_1'(t) + J_2(t)x_1(t) + b_2(t)u(t) = 0$$

с выходом (3.1). Здесь $\text{col}(b_1(t), b_2(t)) = b(t)$, $b_1(t) \in \mathbf{R}^d$, $b_2(t) \in \mathbf{R}^{n-d}$.

Наблюдатель состояния для (4.5), (4.6) будем строить в виде (3.2)–(3.4), где

$$\mathcal{V}_{r,1}(t)\bar{u}_r(t) = b_1(t)u(t), \quad \mathcal{V}_{r,2}(t)\bar{u}_r(t) = b_2(t)u(t).$$

Стабилизирующее управление для ДАУ (4.5), (4.6) будем искать в виде динамической обратной связи

$$(4.7) \quad u(t) = k^\top(t)\hat{x}_1(t),$$

что приводит к уравнениям

$$x_2(t) + J_1(t)x_1(t) + b_1(t)k^\top(t)\hat{x}_1(t) = 0,$$

$$x_1'(t) + J_2(t)x_1(t) + b_2(t)k^\top(t)\hat{x}_1(t) = 0.$$

Вводя в рассмотрение невязки (3.5), приходим к системе

$$(4.8) \quad x_2(t) = - \left(J_1(t) + b_1(t)k^\top(t) \right) x_1(t) - b_1(t)k^\top(t)e_1(t),$$

$$(4.9) \quad x_1'(t) + \left(J_2(t) + b_2(t)k^\top(t) \right) x_1(t) + b_2(t)k^\top(t)e_1(t) = 0.$$

$$(4.10) \quad e_2(t) = -J_1(t)e_1(t),$$

$$(4.11) \quad e_1'(t) + \left(J_2(t) - g(t) \left(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t) \right) \right) e_1(t) = 0.$$

Управление (4.7) будет стабилизирующим, если система (4.8)–(4.11) асимптотически устойчива. Последнее, в частности, подразумевает стабилизируемость системы (4.6) и детектируемость системы (3.10), (3.11).

Определение 4. Система (4.6) называется стабилизируемой, если существует обратная связь

$$(4.12) \quad u(t) = k^\top(t)x_1(t)$$

такая, что замкнутая система

$$(4.13) \quad x_1'(t) + \left(J_2(t) + b_2(t)k^\top(t) \right) x_1(t) = 0$$

асимптотически устойчива.

Сформулируем условия стабилизируемости системы (4.6). Для этого введем в рассмотрение векторы

$$\varphi_0(t) = b_2(t), \quad \varphi_i = J_2(t)\varphi_{i-1}(t) - \varphi'_{i-1}(t), \quad i = \overline{1, n-d},$$

и матрицу управляемости

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & \dots & \varphi_{n-d-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Если $\Phi(t)$ обратима, можно определить функцию

$$\psi(t) = \Phi^{-1}(t)\varphi_{n-d}(t) = \text{col}(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{n-d}(t)).$$

Лемма 4 [22, с. 302]. Пусть:

- 1) $J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(T)$, $b_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$;
- 2) $\Phi(t)$ – матрица Ляпунова;
- 3) каждая из функций $\psi_i(t) \in \mathbf{C}^i(T)$ ($i = \overline{1, n-d}$) ограничена на T вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно.

Тогда найдется строка

$$(4.14) \quad k^\top(t) = (k_1(t), \dots, k_{n-d}(t)) K(t)$$

такая, что замкнутая система (4.13) асимптотически устойчива. В (4.14) $K(t)$ – матрица Ляпунова, а каждая из функций $k_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(T)$ ограничена на T вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно.

Замечание 2. В соответствии с утверждением леммы 4, вектор-функция $k(t)$ в обратной связи (4.12) будет ограничена, а следовательно,

$$(4.15) \quad \chi[k(t)] = 0.$$

Замечание 3. Если в системе (4.6) $J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$, $b_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d+1}(T)$, то стабилизирующее управление (4.12) можно построить так, чтобы $k(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ [22, с. 166, 248, 299].

Теорема 2. Пусть:

- 1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{n+r-d}(T)$ ($n-d \geq 1$), $c(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$, $b_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d+1}(T)$, $b_1(t) \in \mathbf{C}^1(T)$;
- 2) выполнены условия $A1-A4$ и (3.14);
- 3) справедливы предположения 1, 3 леммы 1 и 2, 3 леммы 2;
- 4) выполнены условия 2 и 3 леммы 4;
- 5) $\chi[b_1(t)] \leq 0$.

Тогда система (4.1) стабилизируема с помощью обратной связи вида (4.7).

Доказательство вынесено в Приложение.

5. Необходимые сведения о структуре нелинейных ДАУ

В этом разделе рассматривается нелинейная система со скалярным наблюдаемым выходом

$$(5.1) \quad f(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

$$(5.2) \quad y(t) = c^\top(t)x(t) + \rho(t, x(t)) \quad t \in T,$$

где компоненты функции $f(t, \alpha, \beta) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{R}^n$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по каждому из своих аргументов в области $\mathcal{W} = \{(t, \alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{2n+1} : t \in T, \|\alpha\| < K_0, \|\beta\| < K_1\}$; $\rho(t, \alpha) : \hat{\mathcal{W}} \rightarrow \mathbf{R}$, $\hat{\mathcal{W}} = \{(t, \alpha) \in \mathbf{R}^{n+1} : t \in T, \|\alpha\| < K_0\}$, $c(t) : T \rightarrow \mathbf{R}^n$. Предполагается, что

$$(5.3) \quad \begin{aligned} f(t, 0, 0) &= 0, \\ \rho(t, 0) &= 0 \quad \forall t \in T, \\ \det \frac{\partial f(t, \alpha, \beta)}{\partial \beta} &= 0 \quad \forall (t, \alpha, \beta) \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

В нелинейном случае невырожденную систему, эквивалентную (5.1) в смысле решений, приходится искать как часть компонент неявной функции, удовлетворяющей так называемой r -продолженной системе (r -derivative argument equations), которая представляет собой совокупность системы (5.1) и ее r полных производных по t :

$$(5.4) \quad \mathcal{F}_r(t, \bar{x}_{r+1}) = \begin{pmatrix} f(t, x(t), x'(t)) \\ \frac{d}{dt} f(t, x(t), x'(t)) \\ \dots \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^r f(t, x(t), x'(t)) \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь и далее

$$(5.5) \quad \bar{x}_{r+1} = (x, x', \dots, x^{(r+1)}).$$

В (5.4) $t, x, x', \dots, x^{(r+1)}$ следует рассматривать как независимые переменные.

Ситуация осложняется тем, что классическая теорема [23, с. 68] гарантирует существование неявной функции лишь в некоторой окрестности начальной точки, в то время как для анализа детектируемости необходимо, чтобы она была определена по крайней мере для всех $t \in T$. Для выполнения этого требования был использован глобальный вариант теоремы о неявной функции, полученный в [24].

Введем в рассмотрение $(n(r+1) \times n)$ -матрицы

$$\bar{B}_r(t, \bar{x}_{r+1}) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r(t, \bar{x}_{r+1})}{\partial x} \right), \quad \bar{A}_r(t, \bar{x}_{r+1}) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r(t, \bar{x}_{r+1})}{\partial x'} \right),$$

$(n(r+1) \times nr)$ -матрицу

$$\bar{\Lambda}_r(t, \bar{x}_{r+1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r(t, \bar{x}_{r+1})}{\partial x''} & \dots & \frac{\partial \mathcal{F}_r(t, \bar{x}_{r+1})}{\partial x^{(r+1)}} \end{pmatrix}$$

и $(n(r+1) \times n(r+2))$ -матрицу

$$\bar{D}_r(t, \bar{x}_{r+1}) = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{B}}_r(t, \bar{x}_{r+1}) & \bar{\mathcal{A}}_r(t, \bar{x}_{r+1}) & \bar{\Lambda}_r(t, \bar{x}_{r+1}) \end{pmatrix}.$$

Из (5.3) вытекает свойство

$$\mathcal{F}_r(0, 0) = 0.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

B1) $\text{rank } \bar{\Lambda}_r(t, \bar{x}_{r+1}) = \lambda = \text{const}$ всюду в области определения;

B2) матрица $\bar{D}_r(t, \bar{x}_{r+1})$ имеет обратимую в точке $(t, \bar{x}_{r+1}) = 0$ подматрицу $\bar{\mathcal{M}}_r(t, \bar{x}_{r+1})$ порядка $n(r+1)$, которая включает в себя λ столбцов матрицы $\bar{\Lambda}_r(t, \bar{x}_{r+1})$ и все n столбцов матрицы $\bar{\mathcal{A}}_r(t, \bar{x}_{r+1})$. При этом

$$\bar{\mathcal{M}}_r(t, \bar{x}_{r+1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x'} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial X_1} \end{pmatrix},$$

где

$$(5.6) \quad x = Q \text{col}(x_1, x_2),$$

$$(5.7) \quad \text{col}(x'', \dots, x^{(r+1)}) = Q_r \text{col}(X_1, X_2),$$

Q, Q_r – соответствующие матрицы перестановок строк, $x_1 \in \mathcal{W}_1 \subseteq \mathbf{R}^{n-d}$, $x_2 \in \mathcal{W}_2 \subseteq \mathbf{R}^d$, $X_1 \in \mathcal{X}_1 \subseteq \mathbf{R}^\lambda$, $X_2 \in \mathcal{X}_2 \subseteq \mathbf{R}^d$, $d = nr - \lambda$, Q строится так же, как в линейном случае (см. (2.5)), $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ – окрестности нуля в соответствующих пространствах.

В [25] показано, что в условиях B1, B2 и некоторых дополнительных предположениях в области $T \times \mathcal{W}_1 \times \mathcal{X}_2$ определена неявная функция

$$(5.8) \quad x_2 = f_1(t, x_1),$$

$$(5.9) \quad x'_1 = f_2(t, x_1),$$

$$(5.10) \quad x'_2 = f_3(t, x_1),$$

$$(5.11) \quad X_1 = f_4(t, x_1, X_2),$$

обращающая систему (5.4) в тождество при подстановке.

Построим для (5.1) $(r+1)$ -продолженную систему

$$\mathcal{F}_{r+1}(t, \bar{x}_{r+2}) = 0.$$

Допустим, что, помимо B1, B2, выполняются условия:

B3) $\text{rank } \bar{\Lambda}_{r+1}(t, \bar{x}_{r+2}(t)) = \lambda + n = \text{const}$ всюду на области определения этой матрицы;

B4) матрица $\bar{D}_{r+1}(t, \bar{x}_{r+2}(t))$ содержит обратимую в точке $(t, \bar{x}_{r+2}) = 0$ подматрицу $\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t, \bar{x}_{r+2})$ порядка $n(r+2)$, которая включает в себя все столбцы, содержащие $\bar{\mathcal{M}}_r(t, \bar{x}_{r+1})$ и еще n столбцов матрицы $\bar{\Lambda}_{r+1}(t, \bar{x}_{r+2})$.

Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t, \bar{x}_{r+2}) &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x'} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \hat{X}_1} \right). \\ \bar{\mathcal{D}}_{r+1}(t, \bar{x}_{r+2}) \begin{pmatrix} Q & O & O \\ O & Q & O \\ O & O & \hat{Q}_r \end{pmatrix} &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x'_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x'_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \hat{X}_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \hat{X}_2} \right), \\ \text{col} \left(x'', \dots, x^{(r+2)} \right) &= \hat{Q}_r \text{col} \left(\hat{X}_1, \hat{X}_2 \right),\end{aligned}$$

$\hat{Q}_r$ – соответствующая матрица перестановок строк, $\hat{X}_1(t) \in \hat{\mathcal{X}}_1 \subseteq \mathbf{R}^{\lambda+n}$, $\hat{X}_2(t) \in \hat{\mathcal{X}}_2 \subseteq \mathbf{R}^d$.

Для $(p \times q)$ -матрицы H и q -мерного вектора h определим величины

$$\Omega(H) = \max_{\|h\|_{\mathbf{R}^q}=1} \|Hh\|_{\mathbf{R}^p}, \quad \omega(H) = \min_{\|h\|_{\mathbf{R}^q}=1} \|Hh\|_{\mathbf{R}^p}.$$

Здесь и далее под нормой вектора понимается евклидова норма, а под нормой матрицы – спектральная матричная норма.

Теорема 3 [25]. Пусть:

- 1) функция $f(t, \alpha, \beta)$ имеет в области $\mathcal{W}$ непрерывные частные производные по своим аргументам до порядка $r+2$ включительно: $f(t, \alpha, \beta) \in \mathbf{C}^{r+2}(\mathcal{W})$;
- 2) выполнены условия B1–B4;
- 3) существует непрерывная функция $v(s) : T \rightarrow T$ такая, что

$$v(s) > 0, \quad s \in (0, \infty); \quad \int_1^\infty \frac{ds}{v(s)} = \infty,$$

и для всех значений $(t, x, x', \hat{X}_1, \hat{X}_2) \in \mathcal{W} \times \hat{\mathcal{X}}_1 \times \hat{\mathcal{X}}_2$ имеют место оценки

$$\begin{aligned}\omega(\bar{\mathcal{M}}_{r+1}) &> 0, \\ \Omega\left(\frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial t} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \hat{X}_2}\right) / \omega(\bar{\mathcal{M}}_{r+1}) &\leq v\left(\left\| \begin{pmatrix} x_2, x', \hat{X}_1 \end{pmatrix} \right\| \right).\end{aligned}$$

Тогда любое решение системы (5.1), определенное в достаточно малой окрестности нуля, является решением системы

$$(5.12) \quad x_2(t) = f_1(t, x_1(t)),$$

$$(5.13) \quad x'_1(t) = f_2(t, x_1(t)), \quad t \in T,$$

и наоборот.

Функции $f_1(t, x_1(t))$ и $f_2(t, x_1(t))$ находятся как часть компонент неявной функции (5.8)–(5.11), удовлетворяющей системе (5.4). При этом

$$(5.14) \quad f_i(t, x_1) \in \mathbf{C}^1(T \times \mathcal{W}_1),$$

$$(5.15) \quad f_i(t, 0) = 0, \quad t \in T, \quad i = 1, 2.$$

Легко видеть, что для выделения единственного решения системы (5.12), (5.13) или (5.1) необходимо определить начальные данные (2.15).

6. Детектируемость нелинейных ДАУ

Сначала рассмотрим нелинейную систему вида (5.12), (5.13) со свойствами (5.14), (5.15) и наблюдаемым выходом

$$(6.1) \quad y(t) = c_1^\top(t)x_1(t) + c_2^\top(t)x_2(t) + \tilde{\rho}(t, x_1(t), x_2(t)),$$

где $c_1(t) : T \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$, $c_2(t) : T \rightarrow \mathbf{R}^d$,

$$\tilde{\rho}(t, 0, 0) \equiv 0 \quad t \in T.$$

Линеаризуем систему (5.12), (5.13)

$$(6.2) \quad x_2(t) = G_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t)),$$

$$(6.3) \quad x_1'(t) = G_2(t)x_1(t) + r_2(t, x_1(t)),$$

где $G_1(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, 0)$, $G_2(t) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, 0)$.

Подставив (6.2) в (6.1), получим представление для выхода

$$(6.4) \quad \begin{aligned} y(t) = & \left(c_1^\top(t) + c_2^\top(t)G_1(t) \right) x_1(t) + c_2^\top(t)r_1(t, x_1(t)) + \\ & + \tilde{\rho}\left(t, x_1(t), G_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t))\right). \end{aligned}$$

Для системы (6.2)–(6.4) построим наблюдатель состояния

$$(6.5) \quad \hat{x}_2(t) = G_1(t)\hat{x}_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t)),$$

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \hat{x}_1'(t) = & G_2(t)\hat{x}_1(t) + r_2(t, \hat{x}_1(t)) + g(t)\left(y(t) - (c_1^\top(t) + c_2^\top(t)G_1(t))\hat{x}_1(t) - \right. \\ & \left. - c_2^\top(t)r_1(t, \hat{x}_1(t)) - \tilde{\rho}\left(t, \hat{x}_1(t), G_1(t)\hat{x}_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t))\right)\right), \end{aligned}$$

$$(6.7) \quad \hat{y}_1(t) = \hat{x}_1(t), \quad \hat{y}_2(t) = \hat{x}_2(t).$$

Тогда невязки $e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t)$ и $e_2(t) = \hat{x}_2(t) - x_2(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$(6.8) \quad e_2(t) = G_1(t)e_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t)) - r_1(t, x_1(t)),$$

$$(6.9) \quad \begin{aligned} e_1'(t) = & \left(G_2(t) - g(t)(c_1^\top(t) + c_2^\top(t)G_1(t)) \right) e_1(t) + r_2(t, \hat{x}_1(t)) - r_2(t, x_1(t)) - \\ & - c_2^\top(t)(r_1(t, \hat{x}_1(t)) - r_1(t, x_1(t))) + \tilde{\rho}\left(t, x_1(t), G_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t))\right) - \\ & - \tilde{\rho}\left(t, \hat{x}_1(t), G_1(t)\hat{x}_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t))\right). \end{aligned}$$

Определение 5. Будем говорить, что система (6.2)–(6.4) имеет наблюдатель состояния вида (6.5)–(6.7), если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{y}_i(t) - x_i(t)) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Определение 6. Система (6.2)–(6.4) называется детектируемой, если найдется вектор-функция $g(t) : T \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ такая, что система (6.8)–(6.9) асимптотически устойчива.

Очевидно, что система

$$(6.10) \quad e_2(t) = G_1(t)e_1(t),$$

$$(6.11) \quad e_1'(t) = \left(G_2(t) - g(t)(c_1^\top(t) + c_2^\top G_1(t)) \right) e_1(t), \quad t \in T,$$

является системой первого приближения для (6.8), (6.9). Сформулируем для (6.10), (6.11) условия устойчивости, вытекающие непосредственно из леммы 2.

Замечание 4. Пусть:

- 1) $G_1(t) \in \mathbf{C}(T)$, $G_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(t)$, $c_1^\top(t) + c_2^\top(t)G_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$ ($n - d \geq 1$);
- 2) $\|G_1(t)\| \leq \kappa \quad \forall t \in T$, $\kappa = \text{const} > 0$;
- 3) выполнены предположения 2, 3 леммы 2, при этом в (3.15), (3.16)

$$(6.12) \quad s_0(t) = c_1^\top + c_2^\top(t)G_1(t), \quad s_i = s_{i-1}'(t) + s_{i-1}(t)G_2(t), \quad i = \overline{1, n-d}.$$

Тогда найдется $(n - d)$ -мерная вектор-функция $g(t)$ такая, что система (6.10), (6.11) будет асимптотически устойчива.

Опираясь на утверждение 3, можно получить достаточные условия детектируемости системы (5.12), (5.13), (6.1).

Теорема 4. Пусть:

- 1) имеют место свойства (5.14), (5.15) и $\tilde{\rho}(t, x_1, x_2) \in \mathbf{C}(\hat{W})$;
- 2) выполнены предположения утверждения 3;
- 3) $|\tilde{\rho}(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2) - \tilde{\rho}(t, x_1, x_2)| \leq \eta_\rho (\|\hat{x}_1 - x_1\| + \|\hat{x}_2 - x_2\|)$, где $\eta_\rho > 0$ достаточно малая постоянная при достаточно малых x_i и $\hat{x}_i - x_i$, близких к нулю ($i = 1, 2$);
- 4) $\|c_2(t)\| \leq c$, $t \in T$, $c = \text{const} > 0$;
- 5) $\|r_i(t, \hat{x}_1) - r_i(t, x_1)\| \leq \eta_i \|\hat{x}_1 - x_1\|$ ($i = 1, 2$), где $\eta_i > 0$ – постоянные, достаточно малые при достаточно близких к нулю $\|x_1\|$ и $\|\hat{x}_1 - x_1\|$.

Тогда система (5.12), (5.13), (6.1) детектируема и имеет наблюдатель состояния вида (6.5)–(6.7).

Доказательство вынесено в Приложение.

Обратимся к системе (5.1), (5.2). Линеаризуем (5.1) в окрестности точки $(x, x') = (0, 0)$

$$(6.13) \quad A(t)x'(t) + B(t)x(t) + h(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f(t, x, x')}{\partial x'}(t, 0, 0), \quad B(t) = \frac{\partial f(t, x, x')}{\partial x}(t, 0, 0).$$

Допустим, что выполнены предположения A1, A2. Тогда существует оператор (2.7), преобразующий систему (1.1) к виду (2.9)–(2.14). Подействовав

этим оператором на уравнение (6.13), получим

$$(6.14) \quad x_2(t) + J_1(t)x_1(t) + h_1(t, \bar{x}_{r+1}(t)) = 0,$$

$$(6.15) \quad x_1'(t) + J_2(t)x_1(t) + h_2(t, \bar{x}_{r+1}(t)) = 0,$$

где использованы обозначения (2.10), (5.5) и

$$\begin{pmatrix} h_1(t, \bar{x}_{r+1}(t)) \\ h_2(t, \bar{x}_{r+1}(t)) \end{pmatrix} = \mathcal{R} [h(t, x(t), x'(t))].$$

В условиях теоремы 3 любое решение системы (5.1), определенное в достаточно малой окрестности нуля, является решением системы (5.12), (5.13) и наоборот. Уравнения (6.2), (6.3) представляют собой линеаризацию системы (5.12), (5.13) в окрестности точки $x_1 = 0$.

Лемма 5. Пусть выполнены все предположения теоремы 3. Тогда в системах (6.14), (6.15) и (6.2), (6.3)

$$J_1(t) = -G_1(t), \quad J_2(t) = -G_2(t) \quad \forall t \in T,$$

а функции $-r_1(t, x_1(t))$ и $-r_2(t, x_1(t))$ получаются из $h_1(t, \bar{x}_{r+1}(t))$ и $h_2(t, \bar{x}_{r+1}(t))$ подстановкой неявной функции (5.8)–(5.11), удовлетворяющей r -продолженной системе (5.4).

Аналогичный результат доказан в работе [26].

Теорема 5. Пусть выполнены предположения теоремы 3, а также условия 2–4 теоремы 4. Кроме того,

$$(6.16) \quad \lim_{\hat{x}_2 \rightarrow x_2, \hat{x}' \rightarrow x', \hat{X}_1 \rightarrow X_1, \hat{X}_2 \rightarrow X_2} \|h_i(t, \hat{x}_{r+1}) - h_i(t, \bar{x}_{r+1})\| \leq \mu_i \|\hat{x}_1 - x_1\|,$$

$$i = 1, 2,$$

где $\mu_i = \text{const} > 0$ достаточно малы при $\|\hat{x}_1 - x_1\|$ и $\|\bar{x}_{r+1}\|$ из соответствующих малых окрестностей нуля. Переменные $\bar{x}_{r+1}$, x_1 , x_2 , X_1 и X_2 определены в (5.5)–(5.7).

Тогда система (5.1), (5.2) детектируема и имеет наблюдатель вида (6.5)–(6.7).

Доказательство вынесено в Приложение.

7. Иллюстрирующий пример

Опираясь на теорему 5, исследуем детектируемость нелинейной системы

$$(7.1) \quad 2x_{(1)}(t) + x_{(3)}(t) + e^{-t}x_{(1)}(t)x_{(2)}(t) = 0,$$

$$(7.2) \quad (1 + x_{(1)}(t))x'_{(1)}(t) = 0,$$

$$(7.3) \quad x'_{(2)}(t) + x'_{(3)}(t) + 4x_{(2)}(t) + 2x_{(2)}(t)x_{(3)}(t) = 0,$$

$$(7.4) \quad y(t) = \left(1 + \frac{1}{4} \cos t\right)x_{(2)}(t) + 2x_{(3)}(t) + e^{-2t}x_{(1)}(t)x_{(3)}(t), \quad t \in T,$$

где

$$x(t) = \text{col} \left(x_{(1)}(t), x_{(2)}(t), x_{(3)}(t) \right).$$

Для того, чтобы проверить справедливость предположений В1–В4, выпишем матрицу

$$\mathcal{D}_2(t, x, x', x'', x''') =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} v_1 & v_2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ x'_{(1)} & 0 & 0 & \boxed{1+x_{(1)}} & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & v_3 & v_4 & 0 & \boxed{1} & 1 & & & & & & \\ \hline v'_1 & v'_2 & 0 & v_1 & v_2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & & & \\ x''_{(1)} & 0 & 0 & 2x'_{(1)} & 0 & 0 & \boxed{1+x_{(1)}} & 0 & 0 & & & \\ 0 & v'_3 & v'_4 & 0 & v_3 & v_4 & 0 & \boxed{1} & 1 & & & \\ \hline v''_1 & v''_2 & 0 & 2v'_1 & 2v'_2 & 0 & v_1 & v_2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ x'''_{(1)} & 0 & 0 & 3x''_{(1)} & 0 & 0 & 3x'_{(1)} & 0 & 0 & \boxed{1+x_{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & v''_3 & v''_4 & 0 & 2v'_3 & 2v'_4 & 0 & v_3 & v_4 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right),$$

где $v_1(t) = 2 + e^{-t}x_{(2)}(t)$, $v_2(t) = e^{-t}x_{(1)}(t)$, $v_3(t) = 4 + 2x_{(3)}(t)$, $v_4(t) = 2x_{(2)}(t)$.

Легко видеть, что при $r = 1$ выполняется предположение В1, а именно

$$\text{rank } \Lambda_1(t, x, x') = \text{rank} \begin{pmatrix} 1+x_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda = 2,$$

когда $x_{(1)}$ удовлетворяет неравенству $|x_{(1)}| < 1$.

Очевидно, что (6×9) -матрица $\mathcal{D}_1(t, x, x', x'')$, расположенная выше горизонтальной и левее вертикальной двойной линии, имеет обратимую подматрицу $\mathcal{M}_1(t, x, x', x'')$ порядка 6, столбцы которой отмечены элементами, обведенными рамками, так что условие В2 также имеет место.

Матрица $\Lambda_2(t, x, x', x'')$ представляет собой последние шесть столбцов матрицы $\mathcal{D}_2$. Легко убедиться, что при $|x_{(1)}| < 1$ $\text{rank } \Lambda_2(t, x, x', x'') = \lambda + n = 5$, т.е. справедливо предположение В3.

В $\mathcal{D}_2(t, x, x', x'', x''')$ подматрица $\mathcal{M}_2(t, x, x', x'', x''')$ порядка 9 со свойствами, сформулированными в условии В4, также существует, она состоит из столбцов, содержащих обведенные рамками элементы. Таким образом, при $r = 1$ предположения В1–В4 выполнены.

Для системы первого приближения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} x(t) = 0$$

определен оператор $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t) \frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt},$$

который имеет левый обратный оператор $\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t)$, $L_0(t) = R_0^{-1}(t)$, $L_1(t) = -R_1(t)$.

Оператор $\mathcal{R}$ преобразует систему (7.1)–(7.3) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(t) & 1 \\ J_2(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t, x, x', x'') \\ h_2(t, x, x', x'') \end{pmatrix} = 0,$$

где $d = 1$, $Q = E_3$,

$$(7.5) \quad x_2(t) = x_{(3)}(t), \quad x_1(t) = \begin{pmatrix} x_{(1)}(t) \\ x_{(2)}(t) \end{pmatrix},$$

$$J_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(7.6) \quad h_1(t, x, x', x'') = e^{-t} x_{(1)}(t) x_{(2)}(t),$$

$$(7.7) \quad h_2(t, x, x', x'') = \begin{pmatrix} x_{(1)}(t) x'_{(1)}(t) \\ e^{-t} \left(x_{(1)}(t) x_{(2)}(t) - x'_{(1)}(t) x_{(2)}(t) - x_{(1)}(t) x'_{(2)}(t) \right) + \\ + 2x_{(1)}(t) x'_{(1)}(t) + 2x_{(2)}(t) x_{(3)}(t) \end{pmatrix}.$$

Перейдем к проверке предположений утверждения 3. Согласно лемме 5, $G_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Очевидно, условие 2 выполнено.

С учетом (7.5) из (7.4) получим $c_1^\top(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{4} \cos t \end{pmatrix}$, $c_2^\top(t) = 2$. В соответствии с формулами (6.12), (3.15)

$$S(t) = \begin{pmatrix} -4 & 1 + \frac{1}{4} \cos t \\ 0 & -\left(4 + \frac{1}{4} \sin t + \cos t\right) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det S(t) = 16 + \sin t + 4 \cos t \neq 0 \quad \forall t \in T$, можно найти обратную матрицу

$$S^{-1}(t) = -\frac{1}{16 + \sin t + 4 \cos t} \begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{4} \sin t + \cos t & 1 + \frac{1}{4} \cos t \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

и функции (3.16)

$$\omega_1(t) = 0, \quad \omega_2(t) = -\frac{64 + 8 \sin t + 15 \cos t}{16 + \sin t + 4 \cos t}.$$

Легко видеть, что условия 2, 3 леммы 2, а равно как и предположение 3 утверждения 3, выполнены.

Перейдем к проверке условий 3 и 4 теоремы 4, принимая во внимание соотношения (7.5). Очевидно, $\|c_2(t)\| = 2$. Поскольку $\tilde{\rho}(t, x_1, x_2) = e^{-2t} x_{(1)} x_{(3)}$,

$$|\tilde{\rho}(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2) - \tilde{\rho}(t, x_1, x_2)| \leq |x_{(3)}| \|\hat{x}_1 - x_1\| + (|\hat{x}_{(1)} - x_{(1)}| + |x_{(1)}|) \|\hat{x}_2 - x_2\|,$$

откуда следует оценка из условия 3 теоремы 4 при $\eta_\rho = \max\{\delta_2, \delta_1 + \delta_3\}$, где $|x_{(1)}| \leq \delta_1 < 1$, $|x_{(3)}| \leq \delta_2$, $|\hat{x}_{(1)} - x_{(1)}| \leq \delta_3$, $\delta_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Обратимся к формулировке теоремы 5. Рассмотрим предположение (6.16). С учетом (7.6), (7.7)

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{x}_2 \rightarrow x_2, \hat{x}' \rightarrow x', \hat{X}_1 \rightarrow X_1, \hat{X}_2 \rightarrow X_2} \|h_1(t, \hat{\bar{x}}_{r+1}) - h_1(t, \bar{x}_{r+1})\| &= \\ &= e^{-t} |\hat{x}_{(1)} \hat{x}_{(2)} - x_{(1)} x_{(2)}| \leq \\ &\leq (|\hat{x}_{(1)} - x_{(1)}| + |x_{(1)}| + |x_{(2)}|) \|\hat{x}_1 - x_1\| \leq \eta_1 \|\hat{x}_1 - x_1\|, \end{aligned}$$

где $\eta_1 = \delta_1 + \delta_3 + \delta_4$, $|x_{(2)}| \leq \delta_4$, $\delta_4 = \text{const} > 0$.

В свою очередь,

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{x}_2 \rightarrow x_2, \hat{x}' \rightarrow x', \hat{X}_1 \rightarrow X_1, \hat{X}_2 \rightarrow X_2} \|h_2(t, \hat{\bar{x}}_{r+1}) - h_2(t, \bar{x}_{r+1})\| &\leq \\ &\leq (|x_{(1)}| + |x_{(2)}| + 2|x_{(3)}| + |\hat{x}_{(1)} - x_{(1)}| + 4|x'_{(1)}| + |x'_{(2)}|) \|\hat{x}_1 - x_1\| \leq \eta_2 \|\hat{x}_1 - x_1\|, \end{aligned}$$

где $\eta_2 = \delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 4\delta_5 + \delta_6$, $|x'_{(1)}| \leq \delta_5$, $|x'_{(2)}| \leq \delta_6$; δ_5, δ_6 – положительные константы.

Таким образом, все предположения теоремы 5 выполнены, вследствие чего система (7.1)–(7.4) является детектируемой.

Для рассматриваемого примера из первых четырех уравнений 2-продолженной системы можно найти функции (5.12), (5.13)

$$\begin{aligned} x_{(3)}(t) &= -x_{(1)}(t) (2 + e^{-t} x_{(2)}(t)), \\ x'_{(1)}(t) &= 0, \quad x'_{(2)}(t) = \frac{x_{(2)}(t) (e^{-t} x_{(1)}(t) (2x_{(2)}(t) - 1) + 4(x_{(1)}(t) - 1))}{1 - e^{-t} x_{(1)}(t)}, \end{aligned}$$

что позволяет построить для системы (7.1)–(7.4) наблюдатель состояния с выходом (6.7):

$$\begin{aligned} \hat{x}_{(3)}(t) &= -\hat{x}_{(1)}(t) (2 + e^{-t} \hat{x}_{(2)}(t)), \\ \begin{pmatrix} \hat{x}'_{(1)}(t) \\ \hat{x}'_{(2)}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4\hat{x}_{(2)}(t) + \frac{\hat{x}_{(1)}(t) \hat{x}_{(2)}(t) (2e^{-t} \hat{x}_{(2)}(t) - 5e^{-t} - 4)}{1 - e^{-t} \hat{x}_{(1)}(t)} \end{pmatrix} + \\ &+ g(t) \left(y(t) + 4\hat{x}_{(1)}(t) - \left(1 + \frac{1}{4} \right) \hat{x}_{(2)}(t) + 2e^{-t} \hat{x}_{(1)}(t) \hat{x}_{(2)}(t) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-2t} \hat{x}_{(1)}^2(t) (2 + e^{-t} \hat{x}_{(2)}(t)) \right). \end{aligned}$$

Вектор-функция $g(t)$ должна обеспечивать детектируемость системы (3.10), (3.11) или же асимптотическую устойчивость системы (3.9). Способ нахождения такой функции предложен в книге [22, с. 255–257, 283–284, 312–314], в соответствии с которым

$$g(t) = \Gamma(t) \begin{pmatrix} g_1(t) - \gamma_1 \\ g_2(t) - \gamma_2 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_1 = -\xi_1 \xi_2$, $\gamma_2 = -(\xi_1 + \xi_2)$, ξ_1 и ξ_2 – некоторые заданные отрицательные числа,

$$g_1(t) = \frac{\sin t + 4 \cos t}{q(t)} + \left(\frac{\cos t - 4 \sin t}{q(t)} \right)^2, \quad g_2(t) = 4 + \frac{4 \sin t - \cos t}{q(t)},$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{q(t)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4} \cos t & g_2(t) \left(1 + \frac{1}{4} \cos t \right) - 4 - \cos t - \frac{1}{4} \sin t \\ 4 & 4g_2(t) \end{pmatrix},$$

$$q(t) = 16 + 4 \cos t + \sin t.$$

Для того, чтобы убедиться в асимптотической устойчивости системы (3.9), нужно в (3.9) сделать замену переменных $e_1(t) = \Gamma(t)\tilde{e}_1(t)$. В результате подстановки получим систему $\tilde{e}'_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1 \\ -1 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \tilde{e}_1(t)$, матрица которой имеет отрицательные собственные числа ξ_1 и ξ_2 . Поскольку $\Gamma(t)$ является матрицей Ляпунова, система (3.9) также будет асимптотически устойчива.

8. Заключение

В статье были рассмотрены линейные и нелинейные нестационарные ДАУ наблюдения в общих предположениях об их внутренней структуре.

Для линейной системы (1.1) сформулированы условия существования структурной формы (2.9), полученной в результате действия на (1.1) линейного дифференциального оператора (2.7). Этот оператор обладает левым обратным оператором, в силу чего системы (1.1) и (2.9) имеют одно и то же множество решений. При этом в (2.9) уже разделены дифференциальная и алгебраическая составляющие, каждая из которых невырождена. Получены условия, обеспечивающие для оператора (2.7) существование правого обратного оператора (2.17) (лемма 1).

Для структурной формы (2.9) со скалярным выходом построен наблюдатель состояния (3.2)–(3.4), который можно использовать в качестве такового и для системы (1.1), (1.2) (теорема 1). Фактически для построения наблюдателя достаточно построить наблюдатель для дифференциальной составляющей ДАУ (1.1).

Рассмотрена система (4.1) со скалярным управлением, включающая в себя также и производную от управления. Существенным является использование при построении такой системы правого обратного оператора (2.17). Обоснованы условия, при которых систему вида (4.2) можно представить в форме (4.1)

(лемма 3). Для ДАУ (4.1) получены условия стабилизируемости с использованием наблюдателя состояния (3.2)–(3.4) (теорема 2). При этом стабилизирующая динамическая обратная связь (4.7) включает в себя лишь решение дифференциальной подсистемы наблюдателя.

При анализе нелинейной системы (5.1) со скалярным выходом (5.2) была использована структурная форма (5.12), (5.13), любое решение которой, начинающееся в достаточно малой окрестности нуля, является решением системы (5.1) и наоборот. Эта структурная форма представляет собой уже невырожденную систему и является частью компонент неявной функции, удовлетворяющей r -продолженной системе (5.4) (теорема 3). Для ДАУ (5.1), (5.2) с использованием системы линейного приближения получены достаточные условия детектируемости и построен наблюдатель состояния вида (6.5)–(6.7) (теорема 5). Следует заметить, что для построения наблюдателя приходится находить упомянутую выше неявную функцию. В то же время проверка условий детектируемости этого не требует, а использует исключительно свойства линейного приближения. Важным вспомогательным результатом представляются условия детектируемости и способ построения наблюдателя состояния для квазилинейной системы вида (5.12), (5.13), (6.1) (теорема 4).

Предложенный подход может быть использован для исследования детектируемости и построения наблюдателей для линейных и нелинейных дискретных дескрипторных систем, а также вырожденных систем с непрерывным и дискретным временем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. В матрице $\mathcal{D}_r(t)$ (см. (2.1)–(2.4)) переставим столбцы, умножив ее справа на матрицу перестановок $\text{diag}\{Q, \dots, Q\}$, Q определена в (2.5). При этом необходимо учитывать структуру разбиений (2.6). Вычеркнув столбцы, входящие в блок $B_1(t)$, из $\mathcal{D}_r(t)$ получим матрицу $\bar{\mathcal{D}}_r(t)$, которую ввиду громоздкости выписывать не будем.

Заметим, что предположение 1 леммы обеспечивает включение $P_0(t), P_1(t) \in \mathbf{C}^r(T)$.

По построению коэффициенты оператора $\mathcal{R}$ при всех $t \in T$ удовлетворяют уравнению

$$(П.1) \quad \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) \end{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}_r(t) = \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, коэффициенты операторов (2.7) и (2.17) по определению связаны тождеством

$$(П.2) \quad \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & C_0^0 P_1 & O & \dots & O \\ P'_0 & C_1^0 P'_1 + C_1^1 P_0 & C_1^1 P_1 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_0^{(r)} & C_r^0 P_1^{(r)} + C_r^1 P_0^{(r-1)} & C_r^1 P_1^{(r-1)} + C_r^2 P_0^{(r-2)} & \dots & C_r^r P_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \end{pmatrix}.$$

Если положить в (П.2) $P_0(t) = \begin{pmatrix} B_2(t) & A_1(t) \end{pmatrix}$, $P_1(t) = \begin{pmatrix} A_2(t) & O \end{pmatrix}$, то равенства (П.1) и (П.2) совпадут в том случае, если справедливо тождество (2.16).

Доказательство леммы 3. Очевидно, для того чтобы утверждение леммы было справедливым, векторы $b(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ должны удовлетворять соотношениям

$$(П.3) \quad \beta_1(t) = P_0(t)b(t) + P_1(t)b'(t),$$

$$(П.4) \quad \beta_2(t) = P_1(t)b(t), \quad t \in T.$$

Согласно лемме 1, оператор $P_0(t) + P_1(t)\frac{d}{dt}$ имеет левый обратный оператор $\mathcal{R}$. Подействовав на обе части тождества (П.3) оператором $\mathcal{R}$, приходим к представлению (4.4). Условие (4.3) получается в результате подстановки (4.4) в равенство (П.4).

Доказательство теоремы 2. Сначала покажем, что в условиях теоремы найдется обратная связь (4.7), стабилизирующая систему (4.5), (4.6).

Рассмотрим уравнения (4.10), (4.11). Предположения 1 и 3 обеспечивают выполнение всех условий леммы 2, согласно которой найдется функция $g(t) \in \mathbf{C}(T)$ такая, что

$$(П.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0.$$

В этом случае, в силу оценки (3.14) из (4.10), вытекает предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$. Таким образом, при надлежащем выборе $g(t)$ подсистема (4.10), (4.11) будет асимптотически устойчива.

Обратимся к уравнениям (4.8), (4.9). Предположения 1 и 4 гарантируют справедливость утверждения леммы 4, в соответствии с которым найдется вектор-функция $k(t) \in \mathbf{C}(T)$ такая, что система (4.9) будет асимптотически устойчива. Это означает, что при любой непрерывной функции $b_2(t)k^\top(t)e_1(t)$ каждое решение $x_1(t)$ системы (4.9) обладает свойством

$$(П.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0.$$

В свою очередь, из предположения 5 и условий (3.14), (4.15) вытекают оценки

$$\chi \left[J_1(t) + b_1(t)k^\top(t) \right] \leq 0, \quad \chi \left[b_1(t)k^\top(t) \right] \leq 0,$$

откуда с учетом (П.5), (П.6) следует, что в (4.8) $x_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

На основании изложенного выше можно сделать вывод, что управление (4.7) является стабилизирующим для системы (4.5), (4.6).

Предполагаемая гладкость входных данных системы (4.1) обеспечивает включения $J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$, $b_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d+1}(T)$. В соответствии с замечанием 3, для управления (4.7) функцию $k(t)$ можно построить в классе $\mathbf{C}^1(T)$.

В условиях А1–А4 ДАУ (4.1) и (П.5), (4.5) эквивалентны в смысле решений, поэтому обратная связь (4.7) будет стабилизировать также и систему (4.1).

Доказательство теоремы 4. В соответствии с утверждением 3 существует функция $g(t) : T \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ такая, что система (6.11) будет асимптотически устойчива. При этом, согласно замечанию 1, можно считать $g(t)$ ограниченной, а систему (6.11) приводимой по Ляпунову.

В сделанных предположениях в уравнении (6.9)

$$\begin{aligned} & \left\| r_2(t, \hat{x}_1(t)) - r_2(t, x_1(t)) - c_2^\top(t) \left(r_1(t, \hat{x}_1(t)) - r_1(t, x_1(t)) \right) + \right. \\ & \left. + \tilde{\rho}(t, x_1(t), G_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t))) - \tilde{\rho}(t, \hat{x}_1(t), G_1(t)\hat{x}_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t))) \right\| \leq \\ & \leq (\eta_2 + \eta_1(1+c) + \eta_\rho(1+\kappa)) \|e_1\|. \end{aligned}$$

По теореме об устойчивости по первому приближению [22, с. 340] при постоянных η_1 , η_2 и η_ρ достаточно малых, когда $e_1(t)$ изменяется в малой окрестности нуля, тривиальное решение системы (6.9) будет асимптотически устойчиво.

В свою очередь, в силу ограниченности матрицы $G_1(t)$ и оценки $\|r_1(t, \hat{x}_1) - r_1(t, x_1)\| \leq \eta_1 \|e_1(t)\|$ вектор-функция $e_2(t)$, как решение уравнения (6.8), будет стремиться к нулю при $e_1(t) \rightarrow 0$.

Таким образом, нулевое решение системы (6.8), (6.9) будет асимптотически устойчиво при надлежащем выборе $g(t)$. Это означает, что система (6.2)–(6.4), а значит и система (5.12), (5.13), (6.1), детектируема и имеет наблюдатель вида (6.5)–(6.7).

Доказательство теоремы 5. В соответствии с теоремой 3 при достаточно малых начальных данных (2.15) система (5.1) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее уравнениям (5.12), (5.13). В свою очередь, любое решение системы (5.12), (5.13), расположенное в достаточно малой окрестности нуля, является решением системы (5.1). Следовательно, системы (5.1), (5.2) и (5.12), (5.13), (6.1) детектируемы одновременно. Напомним, что (6.1) – другое представление для выхода (5.2).

В условиях теоремы 3 существует неявная функция (5.8)–(5.11), удовлетворяющая r -продолженной системе (5.4). В силу предположения 1 теоремы 3 и условия (5.3) эта неявная функция имеет на своей области определения непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов и обладает свойством $f_j(t, 0) \equiv 0$, $f_4(t, 0, 0) \equiv 0$, $t \in T$, $j = 1, 2, 3$.

Подставим функции (5.8)–(5.11) в условие (6.16). В отличие от постоянных η_i из предположения 5 теоремы 4 константы μ_i могут зависеть от размеров соответствующих окрестностей нуля, которым принадлежат переменные x_2 , x'_1 , x'_2 и X_1 . В результате указанной подстановки эти переменные заменятся на функции, стоящие в правой части равенств (5.8)–(5.11). В соответствии с упомянутыми свойствами этих функций можно выбрать $\|x_1\|$ и $\|X_2\|$ настолько близкими к нулю, что величины $|f_j(t, x_1)|$ и $|f_4(t, x_1, X_2)|$ будут

принадлежать заданным малым окрестностям нуля при любых $t \in T$. Принимая во внимание лемму 5, можно утверждать, что оценки предположения 5 теоремы 4 выполняются.

Таким образом, справедливы все предположения теоремы 4. Согласно этой теореме, система (5.12), (5.13), (5.2) детектируема и имеет наблюдатель состояния вида (6.5)–(6.7). Тем же свойством обладает и система (5.1), (5.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dai L.* Singular control systems. Berlin: Springer, 1989.
2. *Assoudi A., Yaagoubi H.* Observer design for a class of differential-algebraic model of an aerobic culture of a recombinant yeast // *Bioprocess Biosyst. Eng.* 2003. V. 26. P. 27–35.
3. *Hou M., Muller P.* Observer design for descriptor systems // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1999. V. 44. No. 1. P. 164–169.
4. *Duan G.-R.* Analysis and design of descriptor linear systems. *Advances in Mechanics and Mathematics.* V. 23. NY: Springer, 2010.
5. *Silva M.S., Lima T.P.* Looking for nonnegative solutions of a Leontief dynamic model // *Linear Algebra and its Applications.* 2003. V. 364. P. 281–316.
6. *Moysis L., Giakoumis A., Gupta M.K., et al.* Observers for rectangular descriptor systems with output nonlinearities: application to secure communications and microcontroller implementation // *Int. J. Dyn. Control.* 2021. V. 9. No. 2. P. 530–540.
7. *Shields D.N.* Observers for descriptor systems // *Int. J. of Control.* 1991. V. 55. No. 1. P. 249–256.
8. *Nikoukhah R., Willsky A.S., Levy B.C.* Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 1992. V. 37. No. 9. P. 1325–1342.
9. *Ashund J., Frisk E.* An observer for non-linear differential-algebraic systems // *Automatica.* 2006. V. 42. No. 6. P. 959–965.
10. *Shields D.N.* Observer design and detection for nonlinear descriptor systems // *Int. J. of Control.* 2010. V. 67. No. 2. P. 153–168.
11. *Tripathi M., Moysis L., Gupta M.K., Fragulis G.F., Volos Ch.* Observer design for nonlinear descriptor systems: a survey on system nonlinearities // *Circuits, Systems and Signal Processing.* 2024. V. 43. P. 2853–2872.
12. *Abbaszadeh M., Marquez H.J.* Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems // *In Proc. of the 2010 American Control Conference (IEEE, 2010).* P. 5284–5289.
13. *Berger T.* On observers for nonlinear differential-algebraic systems // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2018. V. 64. No. 5. P. 2150–2157.
14. *Cong C.* Observer-based robust control of uncertain systems via an integral quadratic constraint approach // *Int. J. Dyn. Control.* 2019. V. 7. No. 3. P. 926–939.
15. *Darouach M., Boutat-Baddas L., Zerrougui M.* H^∞ -observers design for a class of nonlinear singular systems // *Automatica.* 2011. V. 47. No. 11. P. 2517–2525.
16. *Kidane N., Yamashita Y., Nishitani H.* Observer based I/O-linearizing control of high index dae systems // *In Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, Denver, Colorado, USA.* 2003. P. 3537–3542.

17. *Gao Z., Ho D.W.* State/noise estimator for descriptor systems with application to sensor fault diagnosis // IEEE Trans. Signal Proc. 2006. V. 54. No. 4. P. 1316–1326.
18. *Lu G., Ho D.W.* Full-order and reduced-order observers for Lipschitz descriptor systems: The unified LMI approach // IEEE Trans. Circuits Syst., II: Express Briefs. 2006. V. 53. No. 7. P. 563–567.
19. *Zhang J., Swain A.K., Nguang S.K.* Simultaneous estimation of actuator and sensor faults for descriptor systems / In book Robust Observer Based Fault Diagnosis for Nonlinear Systems Using MATLAB, Advances in Industrial Control. Cham: Springer. 2016. P. 165–197.
20. *Zulfiqar A., Rehan M., Abid M.* Observer design for one-sided Lipschitz descriptor systems // Appl. Math. Model. 2016. V. 40. No. 3. P. 2301–2311.
21. *Щеглова А.А.* Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.
22. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Изд-во Института математики НАН Беларуси, 1999.
23. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.
24. *Cristea M.* A note on global implicit function theorem // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. 2007. V. 8. Issue 4. Article 100.
25. *Щеглова А.А.* О неограниченной продолжимости решений нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 4. С. 937–953.
26. *Щеглова А.А.* Устойчивость по линейному приближению нелинейных вырожденных систем с дискретным временем // Сибирский математический журнал. 2024. Т. 65. № 2. С. 407–427.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 10.10.2025

После доработки 11.12.2025

Принята к публикации 24.12.2025

© 2026 г. В.В. АВETИСЯН, д-р физ.-мат. наук (vanavet@yahoo.com)
(Институт механики НАН Республики Армения, Ереван),
С.П. СТЕПАНЯН, д-р тех. наук (sevran.steranyan@ysu.am)
(Ереванский государственный университет)

ДОСТИЖИМЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С ОГРАНИЧЕННЫМИ УГЛОВЫМИ СКОРОСТЯМИ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИИ

Рассматривается задача построения областей достижимости плоского двузвеного манипулятора со вторым статически уравновешенным звеном при оптимальном по быстродействию управлении его перемещением с ограничениями на величины угловых скоростей звеньев. Оптимальные управления принадлежат классу релейных режимов и содержат минимальное суммарное число переключений, достаточное для выполнения граничных условий: система покоится в начальный и конечный моменты времени. Разработан метод определения областей в конфигурационной плоскости манипулятора, достижимых при предложенных управлениях, соблюдающих ограничения на угловые скорости.

Ключевые слова: область достижимости, двузвенный манипулятор, оптимальное управление, ограниченные угловые скорости.

DOI: 10.7868/S2413977726070052

1. Введение

Двузвенные роботы-манипуляторы широко применяются в различных отраслях современного производства как самостоятельно, так и в составе многозвенных систем, где два звена выполняют основной объем движений при осуществлении технологических операций. Разработка эффективных режимов программного управления для таких манипуляторов остается актуальной задачей. В случаях, когда сокращение времени рабочего цикла манипулятора ускоряет технологический процесс, целесообразно разрабатывать управляющие режимы, оптимизированные по быстродействию. Существует множество исследований, посвященных как механическим моделям двузвенных манипуляторов [1–9], так и их динамическому взаимодействию с приводами [10–13]. Важно отметить, что при проектировании таких режимов необходимо учитывать не только скорость выполнения операций, но и ограничения на угловые скорости звеньев. Превышение допустимых угловых скоростей может привести к механическим повреждениям, потере устойчивости системы и сни-

жению точности выполнения задач. Вопросы оптимизации быстродействующих управлений при наличии ограничений на угловые скорости рассмотрены в [14, 15]. При этом учет ограничений на угловые скорости может увеличить количество переключений в структуре оптимального управления и привести к появлению интервалов времени, в течение которых манипулятор или двигатель работают на предельных значениях угловой скорости. Для реализации таких оптимальных управлений необходимо точно рассчитывать моменты переключений управляющего воздействия. Однако из-за неизбежных вычислительных погрешностей увеличение числа переключений может существенно повлиять на точность управления.

Таким образом, ключевой задачей является построение областей достижимых конфигураций на конфигурационной плоскости манипулятора, реализуемых при оптимальных управлениях с минимальным числом переключений. При этом предельные угловые скорости должны достигаться только в моменты переключения управления, в зависимости от его конечной конфигурации. Настоящая статья посвящена решению этой задачи для модели двухзвенного манипулятора со вторым уравновешенным звеном [16–18]. Отметим, что упрощенные и полные модели манипуляторов с двумя степенями свободы в контексте оптимального быстродействия рассматривались также в [19–25].

2. Расчетная модель манипулятора и постановка задачи

Рассмотрим механическую двухзвенную систему, состоящую из двух абсолютно жестких звеньев G_1 , G_2 равной длины, соединенных шарниром O_2 (рис. 1). Звено G_1 при помощи шарнира O_1 связано с неподвижным основанием. Шарниры являются идеальными, цилиндрическими, а их оси параллельны друг другу. На конце второго звена в точке O_3 укреплен схват. Будем предполагать, что линейные размеры схвата много меньше длин звеньев, и при исследовании транспортных движений считать схват материальной точкой. Управление манипулятором осуществляется с помощью двух независимых приводов D_1 , D_2 . Привод D_1 осуществляет взаимодействие первого звена

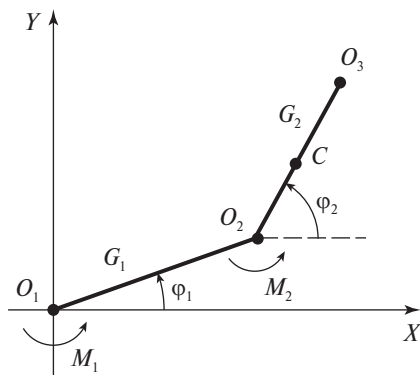


Рис. 1. Расчетная модель двухзвенного манипулятора.

с основанием, а D_2 – взаимодействие между звеньями G_1, G_2 манипулятора. Управляющими функциями в исследуемой модели манипулятора являются величины M_1, M_2 – вращающие моменты относительно осей O_1, O_2 , развиваемые приводами D_1, D_2 соответственно.

Описанная система совершает плоскопараллельное движение в горизонтальной плоскости, перпендикулярной осям шарниров O_1, O_2 .

В случае, когда центр масс C второго звена G_2 находится на оси второго шарнира (т.е. второе звено манипулятора статически уравновешено), уравнения Лагранжа, описывающие движение системы, имеют вид [1]:

$$(2.1) \quad (I_1 + m_2 L^2) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = M_2.$$

Здесь φ_1 – угол между осью O_1x и прямой O_1O_2 ; φ_2 – угол между осью O_1x и прямой O_2O_3 ; $L = |O_1O_2| = |O_2O_3|$ – длина первого и второго звеньев; I_1, I_2 – моменты инерции звеньев G_1, G_2 относительно осей шарниров O_1, O_2 соответственно; m_2 – масса звена G_2 .

Будем считать, что конструкция манипулятора позволяет его звеньям выполнять более одного полного оборота как в положительном, так и в отрицательном направлении. В зависимости от технологического назначения это, например, позволяет перемещать конец O_3 манипулятора по спиралеобразной траектории в рабочей зоне.

Отметим, что в задачах оптимального быстрогодействия уравнения (2.1) рассматриваются не только как базовая модель для исследования полных уравнений манипулятора со смещенным центром масс второго звена [2–9], но и отдельно [16–18].

Задача. Определить законы изменения управляющих моментов $M_1 = M_1(t)$, $M_2 = M_2(t)$ и построить области достижимых конечных состояний покоя манипулятора, при которых обеспечивается перемещение системы (2.1) из начального состояния покоя

$$(2.2) \quad \varphi_1(0) = \varphi_1^0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2^0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

в любое конечное состояние покоя в пределах построенной области

$$(2.3) \quad \varphi_1(T) = \varphi_1^T, \quad \dot{\varphi}_1(T) = 0, \quad \varphi_2(T) = \varphi_2^T, \quad \dot{\varphi}_2(T) = 0$$

за минимальное время T . При этом должны выполняться ограничения:

$$(2.4) \quad |M_1(t)| \leq M_1^0, \quad |M_2(t)| \leq M_2^0,$$

а также ограничения на угловые скорости:

$$(2.5) \quad |\dot{\varphi}_1(t)| \leq a_1, \quad |\dot{\varphi}_2(t)| \leq a_2.$$

Эти ограничения должны соблюдаться на всем протяжении движения.

В безразмерных переменных (с дальнейшим опусканием штрихов)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} t' &= [M_2^0 / (m_2 L^2)]^{1/2} t, & I'_i &= I_i / (m_2 L^2), & M'_i &= M_i / M_2^0, \\ a'_i &= [M_2^0 / (m_2 L^2)]^{-1/2} a_i, & \varphi'_i &= \varphi_i - \varphi_i^0, & \varphi_i'^{0,T} &= \varphi_i^{0,T} - \varphi_i^0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

соотношения (2.1)–(2.5) упрощаются и принимают вид

$$(2.7) \quad (I_1 + 1) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = M_2,$$

$$(2.8) \quad \varphi_i(0) = \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(2.9) \quad \varphi_i(T) = \varphi_i^T, \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(2.10) \quad |M_1(t)| \leq M_1^0, \quad |M_2(t)| \leq 1,$$

$$(2.11) \quad |\dot{\varphi}_1(t)| \leq a_1, \quad |\dot{\varphi}_2(t)| \leq a_2.$$

3. Оптимальные управления без учета ограничений на угловые скорости

Используя результаты [1, 9], решение задачи оптимального быстрогодействия для системы (2.7)–(2.10) (без учета ограничений на угловые скорости (2.11)) можно представить следующим образом:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} M^* &= \begin{cases} (M_1^*, M_2), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1 = \bigcup_{\alpha=0}^1 \Phi_1^{(\alpha)}, \\ (M_1, M_2^*), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2 = \bigcup_{\alpha=0}^1 \Phi_2^{(\alpha)}, \end{cases} \\ M^* &= (M_1^*, M_2^*), \quad \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_0 = \bigcup_{\alpha, k=0}^1 \Phi_0^{(\alpha, k)}. \end{aligned}$$

Согласно (3.1),

1. если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1 = \bigcup_{\alpha=0}^1 \Phi_1^{(\alpha)}$, где

$$(3.2) \quad \Phi_1^{(\alpha)} = \left\{ \begin{aligned} &(\varphi_1^T, \varphi_2^T): (-1)^\alpha (I_1 + 1) [I_2 (M_1^0 + (-1)^\alpha)]^{-1} \varphi_1^T < \\ &< \varphi_2^T < (-1)^\alpha (I_1 + 1) [I_2 (M_1^0 - (-1)^\alpha)]^{-1} \varphi_1^T, \\ &(-1)^\alpha \varphi_1^T > 0 \end{aligned} \right\}, \quad \alpha = 0, 1,$$

то оптимальное управление M_1^* – релейная функция с одной точкой переключения

$$(3.3) \quad \begin{aligned} M_1^*(t) &= M_1^0 \operatorname{sign} \{ (t_0 - t) [(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T] \}, \\ t_0 &= T/2, \quad T = 2 (|(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T| / M_1^0)^{1/2}, \end{aligned}$$

а $M_2(t)$ – любое допустимое управление, в частности релейная функция с двумя точками переключения:

$$(3.4) \quad M_2(t) = \begin{cases} (-1)^\gamma, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ (-1)^{\gamma+1}, & t \in [t_1, t_2), \end{cases} \quad \gamma = 0, 1,$$

$$t_1 = (-1)^\gamma I_2 \varphi_2^T / T + T/4, \quad t_2 = (-1)^\gamma I_2 \varphi_2^T / T + 3T/4,$$

$$T = 2 \left(|(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T| / M_1^0 \right)^{1/2}, \quad T = 2(t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

2. если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2 = \bigcup_{\alpha=0}^1 \Phi_2^{(\alpha)}$, где

$$(3.5) \quad \Phi_2^{(\alpha)} = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T): \begin{aligned} & -(-1)^\alpha [I_2(M_1^0 + (-1)^\alpha)] (I_1 + 1)^{-1} \varphi_2^T < \\ & < \varphi_1^T < (-1)^\alpha (I_1 + 1) [I_2(M_1^0 - (-1)^\alpha)]^{-1} \varphi_2^T, \\ & (-1)^\alpha \varphi_2^T > 0 \end{aligned} \right\}, \quad \alpha = 0, 1,$$

то, наоборот,

$$(3.6) \quad M_2(t) = M_2^*(t) = \text{sign}[(t_0 - t)I_2 \varphi_2^T], \quad t_0 = T/2, \quad T = 2(|I_2 \varphi_2^T|)^{1/2},$$

а $M_1(t)$ – любое допустимое управление, в частности релейная функция с двумя точками переключения:

$$(3.7) \quad M_1(t) = \begin{cases} (-1)^\gamma, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ (-1)^{\gamma+1}, & t \in [t_1, t_2), \end{cases} \quad \gamma = 0, 1,$$

$$t_1 = (-1)^\gamma [(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T] / (M_1^0 T) + T/4,$$

$$t_2 = (-1)^\gamma [(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T] / (M_1^0 T) + 3T/4,$$

$$T = 2(|I_2 \varphi_2^T|)^{1/2}, \quad T = 2(t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

3. если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_0 = \bigcup_{\alpha, k=0}^1 \Phi_0^{(\alpha, k)}$, где

$$(3.8) \quad \Phi_0^{(\alpha, k)} = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T): \begin{aligned} & \varphi_2^T = (-1)^k (I_1 + 1) [I_2(M_1^0 - (-1)^k)]^{-1} \varphi_1^T, \\ & (-1)^\alpha \varphi_1^T > 0 \end{aligned} \right\},$$

$$\alpha, k = 0, 1,$$

то $M_1^*(t)$ и $M_2^*(t)$ – релейные функции с одной точкой переключения:

$$(3.9) \quad M_1^*(t) = (-1)^\alpha M_1^0 \text{sign}(t_0 - t), \quad M_2^*(t) = (-1)^k \text{sign}(t_0 - t),$$

$$t_0 = T/2, \quad \alpha, k = 0, 1.$$

В (3.9) T определяются с помощью равносильных формул (3.3) или (3.6).

4. Построение областей достижимости двухзвенного манипулятора при оптимальных управлениях с учетом ограничений на угловые скорости

Введем следующие обозначения:

$$(4.1) \quad R(M^*) = \bigcup_{i=0}^2 R_i(M^*),$$

$$R_0(M^*) = \bigcup_{\alpha, k=0}^1 R_0^{(\alpha, k)}(M^*), \quad R_i(M^*) = \bigcup_{\alpha=0}^1 R_i^{(\alpha)}(M^*),$$

$$R_0^{(\alpha, k)}(M^*) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_0^{(\alpha, k)} : |\dot{\varphi}_1| \leq a_1, |\dot{\varphi}_2| \leq a_2 \right\},$$

$$R_i^{(\alpha)}(M^*) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_i^{(\alpha)} : |\dot{\varphi}_1| \leq a_1, |\dot{\varphi}_2| \leq a_2 \right\},$$

где управление M^* задается с помощью (3.1).

Согласно (4.1) $R(M^*)$ – область на конфигурационной плоскости $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, где реализуются оптимальные режимы (3.1) и при этом не нарушаются ограничения на угловые скорости (2.11).

Как показывают построенные оптимальные решения для кусочно-постоянных законов управления вида (3.1), для управляющих моментов $M_1(t)$, $M_2(t)$ с двумя моментами переключений имеется два эквивалентных режима управления $\gamma = 0, 1$, которые в паре с управлением одним переключением эквивалентны в смысле быстрогодействия. Поэтому достаточно рассмотреть только режимы с $\gamma = 0$.

В силу инвариантности системы (2.7)–(2.9) относительно замены переменных $\varphi_i \rightarrow -\varphi_i$, $\varphi_1^T \rightarrow -\varphi_1^T$, $\varphi_2^T \rightarrow -\varphi_2^T$, $M^* \rightarrow -M^*$ следует, что области $R_0^{(0,0)}$ и $R_0^{(1,0)}$, $R_0^{(0,1)}$ и $R_0^{(1,1)}$, $R_1^{(0)}$ и $R_1^{(1)}$, $R_2^{(0)}$ и $R_2^{(1)}$ попарно симметричны относительно начала координат. В связи с этим можно сосредоточиться на построении только областей $R_0^{(0,0)}$, $R_0^{(0,1)}$, $R_1^{(0)}$, $R_2^{(0)}$.

Процедура построения областей $R_i^{(0)}$, $i = 1, 2$, состоит в следующем: на основе анализа зависимостей $\dot{\varphi}_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, найденных при оптимальных режимах управления (3.2), (3.4), (3.6), (3.7), приводящих систему (2.7) из (2.8) в (2.9) по каждой степени подвижности, следует, что максимальное по модулю значение угловой скорости i -ого звена манипулятора достигается в момент времени t_0 , если вращение звена осуществляется при управлении с одной точкой переключения, и в моменты времени t_1 или t_2 , если вращение осуществляется при управлении с двумя точками переключения. Следовательно, условия (2.11) (или (4.1)) заведомо не нарушаются, если выполняются следующие соотношения:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} |\dot{\varphi}_1(t)| &= |\dot{\varphi}_1(t_j)| \leq a_1, \quad j = 0, 1, 2, \quad 0 < t_1 \leq t_0 \leq t_2, \\ \max_{t \in [0, T]} |\dot{\varphi}_2(t)| &= |\dot{\varphi}_2(t_j)| \leq a_2, \quad j = 0, 1, 2, \quad 0 < t_1 \leq t_0 \leq t_2. \end{aligned}$$

После подстановки $t_0 = t_0(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, $t_1 = t_1(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, $t_2 = t_2(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ из (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) в условия (4.2) получим два неравенства относительно φ_1^T , φ_2^T , которым отвечают области:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} D_1^{(0)}(a_1) &= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)} : |\dot{\varphi}_1| \leq a_1 \right\}, \\ D_1^{(0)}(a_2) &= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)} : |\dot{\varphi}_2| \leq a_2 \right\}, \\ D_2^{(0)}(a_1) &= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)} : |\dot{\varphi}_1| \leq a_1 \right\}, \\ D_2^{(0)}(a_2) &= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)} : |\dot{\varphi}_2| \leq a_2 \right\}. \end{aligned}$$

Тогда искомые области определяются следующим образом:

$$(4.4) \quad R_1^{(0)} = D_1^{(0)}(a_1) \cap D_1^{(0)}(a_2), \quad R_2^{(0)} = D_2^{(0)}(a_1) \cap D_2^{(0)}(a_2).$$

Перейдем к построению областей $R_0^{(0,0)}$, $R_0^{(0,1)}$, $R_1^{(0)}$, $R_2^{(0)}$.

4.1. Построение $R_0^{(0,0)}$ и $R_0^{(0,1)}$

В областях $\Phi_0^{(0,0)}$ и $\Phi_0^{(0,1)}$, представляющих собой пару полупрямых, исходящих из начала координат, оба управляющих момента M_1 и M_2 имеют по одной точке переключения (3.9). Если между параметрами задачи имеет место соотношение

$$(4.5) \quad a_1 (I_1 + 1) (M_1^0 - 1)^{-1} < a_2 I_2,$$

то угловая скорость $\dot{\varphi}_1$ достигает своего максимального по модулю значения a_1 раньше, чем $\dot{\varphi}_2$ своего a_2 . Это утверждение следует из простого интегрирования системы (2.7), (2.8) до момента $t = t_0$ – выхода $\dot{\varphi}_1$ на ограничение.

В этом случае $R_0^{(0,0)}$, $R_0^{(0,1)}$ состоят из двух отрезков, один из концов которых совпадает с началом координат $(0, 0)$, а другие концы имеют соответственно координаты:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} A &= (\varphi_1^A, \varphi_2^A), & B &= (\varphi_1^B, \varphi_2^B), \\ \varphi_1^A &= a_1^2 (I_1 + 1) (M_1^0 - 1)^{-1}, & \varphi_2^A &= a_1^2 (I_1 + 1)^2 I_2^{-1} (M_1^0 - 1)^{-2}, \\ \varphi_1^B &= a_1^2 (I_1 + 1) (M_1^0 + 1)^{-1}, & \varphi_2^B &= -a_1^2 (I_1 + 1)^2 I_2^{-1} (M_1^0 + 1)^{-2}. \end{aligned}$$

При приведении системы (2.7), (2.8) в точки A и B в момент переключения $t = t_0$ выполняются равенство $\dot{\varphi}_1 = a_1$ и неравенство $\dot{\varphi}_2 < a_2$.

В случае обратного неравенства (4.5),

$$(4.7) \quad a_1 (I_1 + 1) (M_1^0 - 1)^{-1} > a_2 I_2,$$

наоборот, угловая скорость $\dot{\varphi}_2$ достигает своего максимального по модулю значения a_2 раньше. Тогда соответствующие области $R_0^{(0,0)}$, $R_0^{(0,1)}$ состоят из двух отрезков, один из концов которых совпадает с началом координат $(0, 0)$, а другие концы имеют соответственно координаты:

$$(4.8) \quad C = (\varphi_1^C, \varphi_2^C), \quad D = (\varphi_1^D, \varphi_2^D),$$

$$\varphi_1^C = a_2^2 I_2^2 (M_1^0 - 1) (I_1 + 1)^{-1}, \quad \varphi_2^C = a_2^2 I_2,$$

$$\varphi_1^D = a_2^2 I_2^2 (M_1^0 + 1) (I_1 + 1)^{-1}, \quad \varphi_2^D = -a_2^2 I_2^2.$$

При приведении системы (2.7), (2.8) в точки C и D в момент переключения $t = t_0$ выполняются равенство $\dot{\varphi}_2 = a_2$ и неравенство $\dot{\varphi}_1 < a_1$.

4.2. Построение $R_1^{(0)}$

Пусть $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)}$. Тогда интегрируя систему (2.7), (2.8) на интервале $[0, T]$ при соответствующих управлениях (3.3), (3.4) ($\gamma = 0$) один раз, получим зависимости $\dot{\varphi}_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, изображенные на рис. 2.

Вычисления показывают, что

$$(4.9) \quad |\dot{\varphi}_1(t)| \leq \max_{t \in [0, T_1]} |\dot{\varphi}_1(t)| = |\dot{\varphi}_1(t_0)|.$$

$$(4.10) \quad |\dot{\varphi}_2(t)| \leq \max_{t \in [0, T_1]} |\dot{\varphi}_2(t)| = \begin{cases} |\dot{\varphi}_2(t_1)|, & \varphi_2^T > 0, \\ |\dot{\varphi}_2(t_2)|, & \varphi_2^T < 0. \end{cases}$$

В (4.9), (4.10) $\dot{\varphi}_1(t_0)$, $\dot{\varphi}_2(t_1)$, $\dot{\varphi}_2(t_2)$, учитывая выражения для T , t_1 , t_2 через t_0 (3.3), (3.4), можно представить в следующих формах соответственно:

$$(4.11) \quad \dot{\varphi}_1(t_0) = -I_2 (I_1 + 1)^{-1} \varphi_2^T t_0^{-1} + M_1^0 (I_1 + 1)^{-1} t_0 > 0,$$

$$(4.12) \quad \dot{\varphi}_2(t_1) = (\varphi_2^T t_0^{-1} + I_2^{-1} t_0) / 2 > 0 \quad \text{при} \quad \varphi_2^T > 0,$$

$$(4.13) \quad \dot{\varphi}_2(t_2) = (\varphi_2^T t_0^{-1} + I_2^{-1} t_0) / 2 < 0 \quad \text{при} \quad \varphi_2^T < 0.$$

После подстановки t_0 из (3.3) в (4.1) неравенство $|\dot{\varphi}_1| \leq a_1$ преобразуется к виду

$$(4.14) \quad \varphi_2^T \geq M_1^0 I_2^{-1} a_1^{-2} (\varphi_1^T)^2 - (I_1 + 1) I_2^{-1} \varphi_1^T.$$

На плоскости $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ неравенство (4.14) задает область, пересечение которой с областью $\Phi_1^{(0)}$ (3.2) определяется следующим образом:

$$(4.15) \quad D_1^{(0)}(a_1) =$$

$$= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)} : \begin{aligned} & -\frac{I_1 + 1}{I_2(M_1^0 + 1)} \varphi_1^T < \varphi_2^T < \frac{I_1 + 1}{I_2(M_1^0 - 1)} \varphi_1^T, \quad \varphi_1^T > 0 \\ & \varphi_2^T \geq M_1^0 I_2^{-1} a_1^{-2} (\varphi_1^T)^2 - (I_1 + 1) I_2^{-1} \varphi_1^T, \quad \varphi_1^T > 0 \end{aligned} \right\}.$$

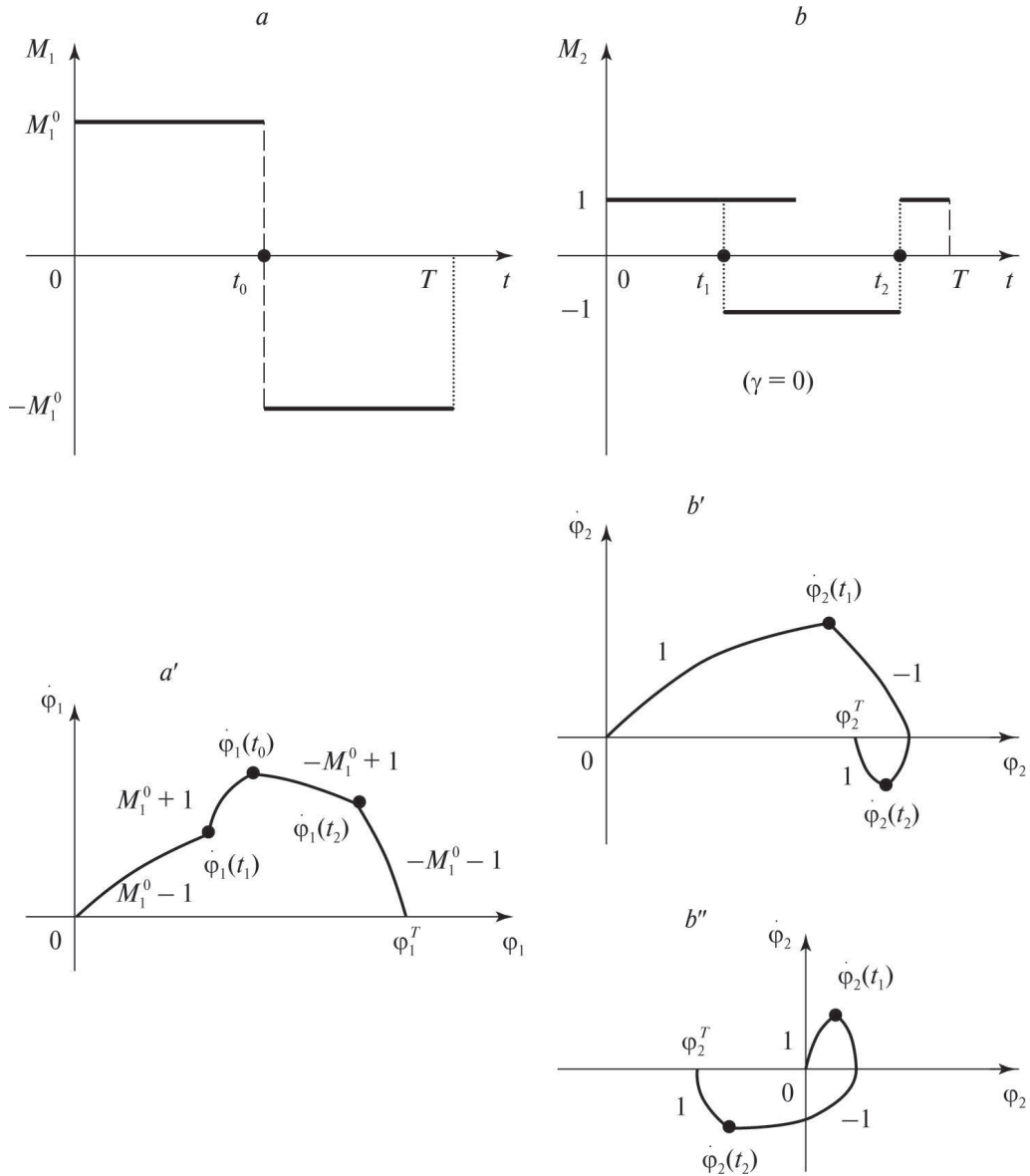


Рис. 2. Если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)}$, то $a - M_1$ и $b - M_2$ – релейные функции с одной и двумя точками переключений соответственно, $a' - \dot{\varphi}_1(\varphi_1)$ и b' , $b'' - \dot{\varphi}_2(\varphi_2)$ – соответствующие фазовые зависимости.

Второе неравенство $|\dot{\varphi}_2| \leq a_2$ из (4.1) в силу (4.10), (4.12), (4.13) преобразуется к квадратичному неравенству относительно t_0 : $t_0^2 - 2a_2I_2t_0 + I_2|\varphi_2^T| \leq 0$, откуда имеем

$$(4.16) \quad t_0^- \leq t_0 \leq t_0^+, \quad t_0^{+,-} = a_2I_2 \pm \sqrt{a_2^2I_2^2 - I_2|\varphi_2^T|}.$$

С использованием выражения для t_0 (3.3) неравенство (4.16) преобразуется к виду

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \varphi_1^{T(-)} &\leq \varphi_1^T \leq \varphi_1^{T(+)}, \\ \varphi_1^{T(+)} &= M_1^0 (I_1 + 1)^{-1} \left(a_2 I_2 + \sqrt{a_2^2 I_2^2 - I_2 |\varphi_2^T|} \right)^2 - I_2 (I_1 + 1)^{-1} \varphi_2^T, \\ \varphi_1^{T(-)} &= M_1^0 (I_1 + 1)^{-1} \left(a_2 I_2 - \sqrt{a_2^2 I_2^2 - I_2 |\varphi_2^T|} \right)^2 - I_2 (I_1 + 1)^{-1} \varphi_2^T. \end{aligned}$$

В пределах $\Phi_1^{(0)}$ область $D_1^{(0)}(a_2)$ определяется следующим образом:

$$(4.18) \quad D_1^{(0)}(a_2) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)} : \varphi_1^{T(-)} \leq \varphi_1^T \leq \varphi_1^{T(+)} \right\},$$

где $\varphi_1^{T(+)}$ и $\varphi_1^{T(-)}$ задаются согласно (4.17).

В соответствии с (4.4) имеем

$$(4.19) \quad R_1^{(0)} = D_1^{(0)}(a_1) \cap D_1^{(0)}(a_2).$$

4.3. Построение $R_2^{(0)}$

Пусть $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)}$. Тогда интегрируя систему (2.7), (2.8) на интервале $[0, T]$ при соответствующих управлениях (3.6), (3.7) ($\gamma = 0$) один раз, получим зависимости $\dot{\varphi}_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, изображенные на рис. 3.

Аналогично предыдущему вычисления дают следующие результаты:

$$(4.20) \quad |\dot{\varphi}_1| \leq \max_{0 \leq t \leq T_2} |\dot{\varphi}_1(t)| = \begin{cases} |\dot{\varphi}_1(t_1)|, & \varphi_1^T > 0, \\ |\dot{\varphi}_1(t_2)|, & \varphi_1^T < 0, \end{cases}$$

$$(4.21) \quad |\dot{\varphi}_2| \leq \max_{0 \leq t \leq T_2} |\dot{\varphi}_2(t)| = |\dot{\varphi}_2(t_0)|,$$

где $\dot{\varphi}_2(t_1)$, $\dot{\varphi}_2(t_2)$, $\dot{\varphi}_1(t_0)$, учитывая выражения для T , t_1 , t_2 через t_0 (3.6), (3.7), можно представить следующим образом соответственно:

$$(4.22) \quad \dot{\varphi}_1(t_1) = (M_1^0 - 1) (I_1 + 1)^{-1} \left\{ [(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T] / (M_1^0 t_0) + t_0 \right\} / 2 > 0,$$

$$(4.23) \quad \dot{\varphi}_1(t_2) = (M_1^0 + 1) (I_1 + 1)^{-1} \left\{ [(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T] / (M_1^0 t_0) - t_0 \right\} / 2 < 0,$$

$$(4.24) \quad \dot{\varphi}_2(t_0) = I_2^{-1} t_0 > 0.$$

С учетом выражения для t_0 (3.6), а также (4.20)–(4.24) неравенства $|\dot{\varphi}_1| \leq a_1$ и $|\dot{\varphi}_2| \leq a_2$ из (4.1) приобретают следующие формы соответственно:

$$(4.25) \quad \varphi_1^T \leq -I_2 (I_1 + 1)^{-1} (M_1^0 + 1) \varphi_2^T + 2a_1 M_1^0 (M_1^0 - 1)^{-1} \sqrt{I_2 \varphi_2^T}, \quad \varphi_1^T > 0,$$

$$(4.26) \quad \varphi_1^T \geq I_2 (I_1 + 1)^{-1} (M_1^0 - 1) \varphi_2^T - 2a_1 M_1^0 (M_1^0 + 1)^{-1} \sqrt{I_2 \varphi_2^T}, \quad \varphi_1^T < 0,$$

$$(4.27) \quad \varphi_2^T \leq I_2 a_2^2.$$

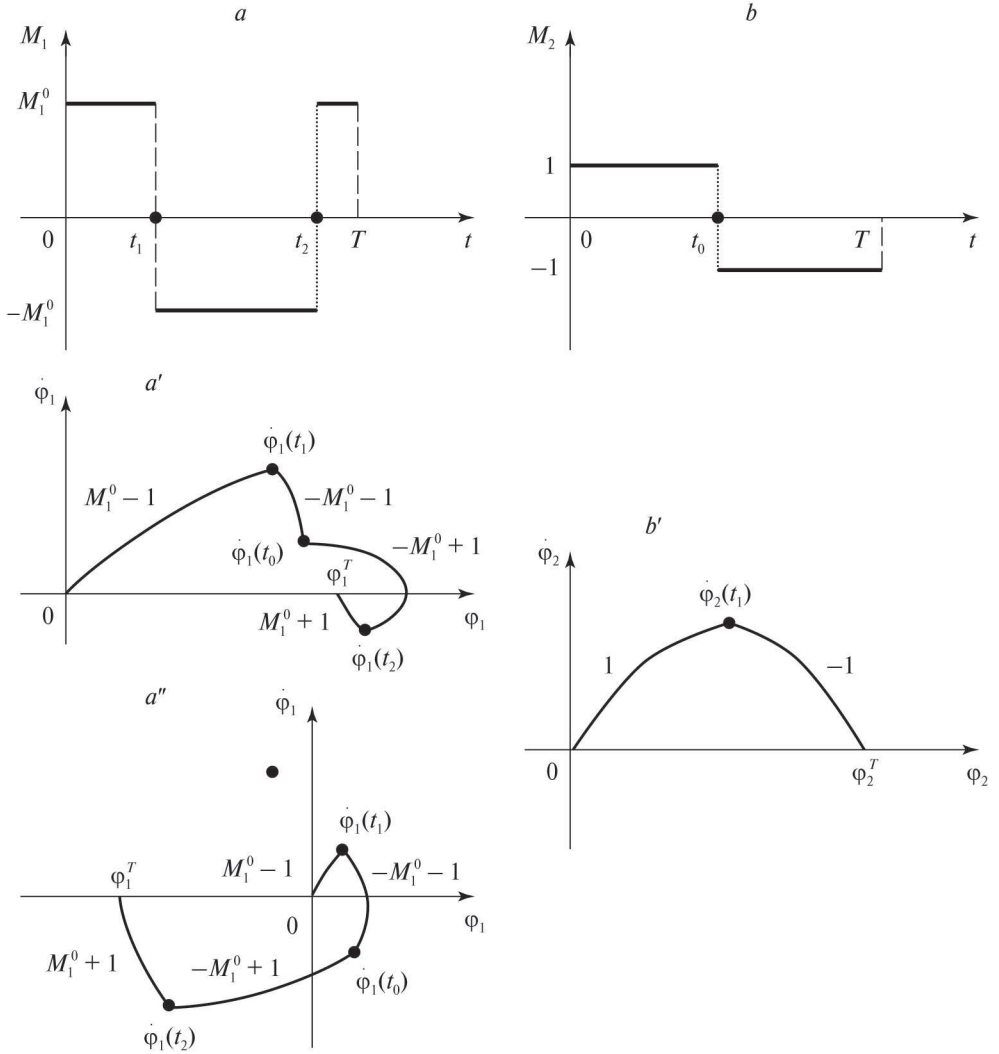


Рис. 3. Если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)}$, то $a - M_1$ и $b - M_2$ – релейные функции с двумя и одной точками переключений соответственно, a' , $a'' - \dot{\varphi}_1(\varphi_1)$ и $b' - \dot{\varphi}_2(\varphi_2)$ – соответствующие фазовые зависимости.

В соответствии с (4.13), (4.25)–(4.27) имеем

$$\begin{aligned}
 (4.28) \quad & D_2^{(0)}(a_1) = \\
 & = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)} : \begin{aligned} & \varphi_1^T \leq -\frac{I_2(M_1^0 + 1)}{I_1 + 1} \varphi_2^T + \frac{2a_1 M_1^0}{M_1^0 - 1} \sqrt{I_2 \varphi_2^T}, \quad \varphi_1^T > 0 \\ & \varphi_1^T \geq \frac{I_2(M_1^0 - 1)}{I_1 + 1} \varphi_2^T - \frac{2a_1 M_1^0}{M_1^0 + 1} \sqrt{I_2 \varphi_2^T}, \quad \varphi_1^T < 0 \end{aligned} \right\}, \\
 (4.29) \quad & D_2^{(0)}(a_2) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)} : \varphi_2^T \leq I_2^{-1} a_2^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, из (4.4) получаем

$$(4.30) \quad R_2^{(0)} = D_2^{(0)}(a_1) \cap D_2^{(0)}(a_2).$$

При построении областей $R_1^{(0)}$, $R_2^{(0)}$, $R_0^{(0,0)}$ и $R_0^{(0,1)}$ было принято, что манипулятор характеризуется размерными параметрами

$$(4.31) \quad \begin{aligned} L = 1 \text{ м}, \quad m_2 = 10 \text{ кг}, \quad I_1 = I_2 = (10/3) \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ M_1^0 = 2 \text{ н} \cdot \text{м}, \quad M_2^0 = 1 \text{ н} \cdot \text{м}, \end{aligned}$$

отвечающими манипулятору, звенья которого – одинаковые однородные стержни. После перехода к безразмерным параметрам согласно (2.6) получим из (4.31), что

$$(4.32) \quad L = 1, \quad m_2 = 1, \quad I_1 = I_2 = 1/3, \quad M_1^0 = 2, \quad M_2^0 = 1.$$

Безразмерные значения угловых скоростей зададим в виде

$$(4.33) \quad \begin{aligned} (A) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 5,4, \\ (B) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0,75. \end{aligned}$$

В случае (4.33) (A) выполняется условие (4.5), а в случае (4.33) (B) – условие (4.17). Графические построения показали, что при значениях (4.33) (A) имеет место включение $D_{1,2}^{(0)}(a_1) \subset D_{1,2}^{(0)}(a_2)$, а при значениях (4.33) (B) – включение $D_{1,2}^{(0)}(a_2) \subset D_{1,2}^{(0)}(a_1)$.

Следовательно, из (4.19) и (4.30) получаем

$$(4.34) \quad \begin{aligned} R_{1,2}^{(0)} &= D_{1,2}^{(0)}(a_1) \quad \text{в случае (A),} \\ R_{1,2}^{(0)} &= D_{1,2}^{(0)}(a_2) \quad \text{в случае (B).} \end{aligned}$$

На рис. 4 граница области (4.19), определяемой параболой (4.14) (помечена номером (1)), пересекается с линиями $\Phi_0^{(0,0)}$ и $\Phi_0^{(0,1)}$ в точках A и B (4.6) соответственно. При этом в любой точке границы (4.19) выполняются условия: $\dot{\varphi} = a_1$ и $|\dot{\varphi}_2| < a_2$. Кривые, заданные равенствами (4.25) и (4.26) и помеченные номерами (2) и (3), стыкуются на оси φ_2^T , а также пересекаются с линиями $\Phi_0^{(0,0)}$ и $\Phi_0^{(0,1)}$ в точках A (4.6) и B' – центрально симметричной точке B (4.6). В силу вышеупомянутой центральной симметрии номерами (1)', (2)', (3)' помечены границы областей $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$.

Замечание. В зависимости от значения a_2 в случае (4.33) (A), точка стыковки кривых (2) и (3) на оси φ_2^T может располагаться ниже (рис. 4) или выше прямой $\varphi_2^T = I_2 a_2^2$. В последнем случае граница области $R_2^{(0)}$ будет содержать отрезок этой прямой.

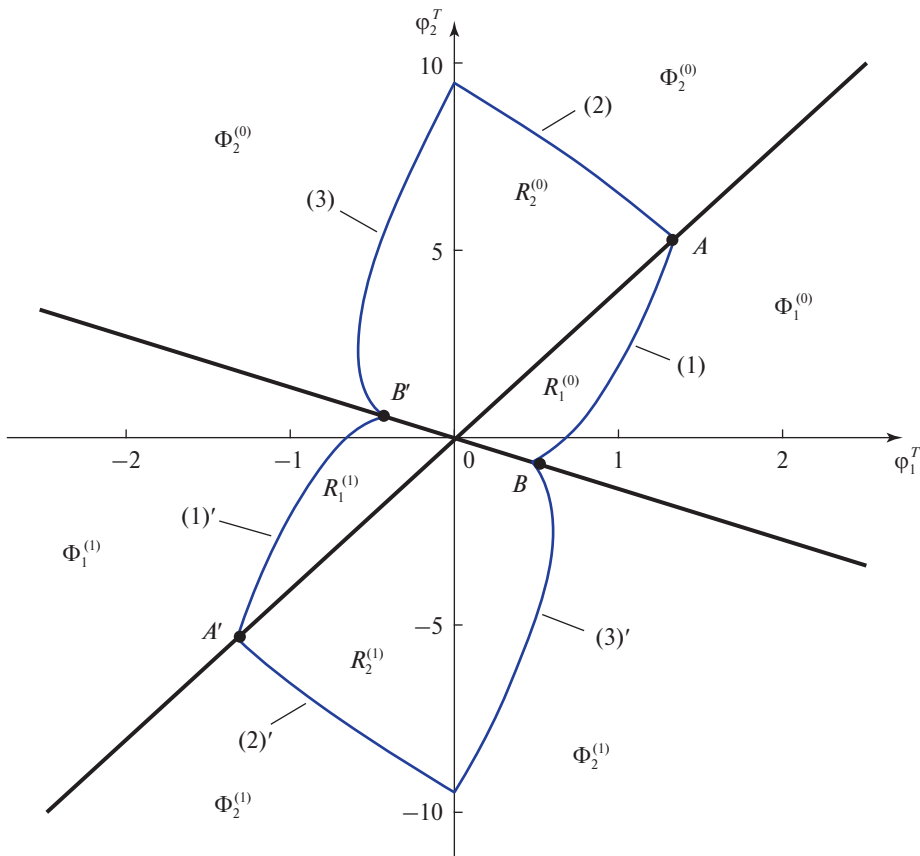


Рис. 4. Области конечных конфигураций, достижимых при оптимальных режимах (3.1) с учетом условия (4.5).

Из рис. 4 следует, что область R (4.1) сужается вблизи начала координат $(0,0)$. Это объясняется следующим образом. Первое звено достигает точки B (ближе к началу координат) с большим ускорением, так как момент $M_1^0 + 1$ разгоняет его быстрее, тогда как в точке A (дальше от начала координат) его ускорение меньше из-за более слабого действия момента $M_1^0 - 1$. В обоих случаях $\dot{\varphi}_1$ достигает своего максимального значения раньше, чем $\dot{\varphi}_2$, причем при большем ускорении этот момент наступает еще раньше, что сильнее ограничивает возможные конечные состояния, сдвигая их ближе к $(0,0)$. Таким образом, чем больше ускорение первого звена, тем ближе конечная точка оказывается к началу координат.

На рис. 5, соответствующем случаю (4.33) (B), номерами (1) и (1)' помечены центрально симметричные границы областей $R_1^{(0)} = D_1^{(0)}(a_2)$ и $R_1^{(1)} = D_1^{(1)}(a_2)$, а номерами (2) и (2)' – границы областей $R_2^{(0)} = D_2^{(0)}(a_2)$ и $R_2^{(1)} = D_2^{(1)}(a_2)$, представляющие собой отрезки прямых $\varphi_2^T = I_2 a_2^2$ и $\varphi_2^T = -I_2 a_2^2$. При этом в любой точке границы (4.19) выполняются условия: $\dot{\varphi} = a_1$ и

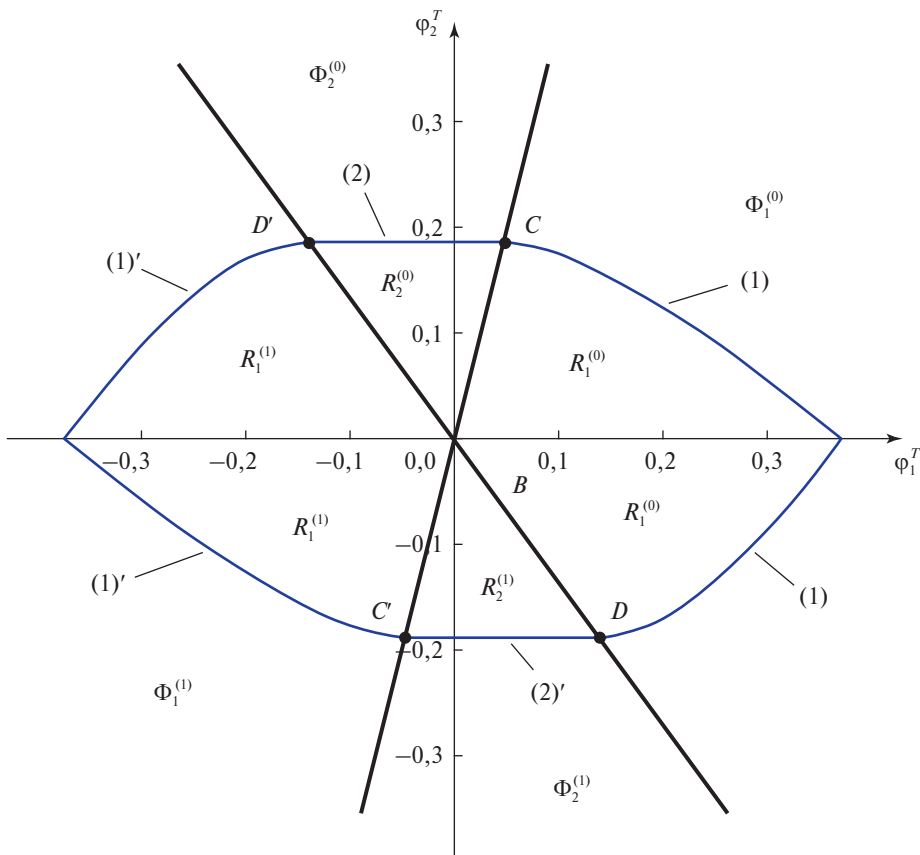


Рис. 5. Области конечных конфигураций, достижимых при оптимальных режимах (3.1) с учетом условия (4.7).

$|\dot{\varphi}_2| < a_2$. Прямая $\varphi_2^T = I_2 a_2^2$ пересекается с линиями $\Phi_0^{(0,0)}$ и $\Phi_0^{(1,0)}$ в точках C (4.8) и D' – симметричной точке D (4.8), а прямая $\varphi_2^T = -I_2 a_2^2$ пересекается с линиями $\Phi_0^{(0,1)}$ и $\Phi_0^{(1,1)}$ в точках D (4.8) и C' – центрально симметричной точке C (4.8).

5. Заключение

Для модели двузвенного манипулятора со вторым статически уравновешенным звеном и ограничениями на угловые скорости разработан алгоритм построения областей на конфигурационной плоскости, достижимых при оптимальных по быстродействию управлениях с минимальным числом переключений. Эти управления обеспечивают перемещение манипулятора из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя. При этом ограничения на угловые скорости не нарушаются, а их предельные значения могут достигаться только в моменты переключения, в зависимости от конечной конфигурации манипулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989.
2. Аветисян В.В., Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимальные программные движения двузвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 123–131.
3. Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Chernousko F.L., Kaplunov A.A. Optimal Control of Manipulation Robots // IFAC Proc. 1985. V. 17. Iss. 2. P. 311–315.
4. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Time-Optimal Control for Robotic Manipulators // Optimal Control Applications and Methods. 1989. V. 10. Iss. 4. P. 293–311. <https://doi.org/10.1002/oca.4660100402>
5. Meier E.B., Bryson A.E. Efficient Algorithm for Time-Optimal Control of a Two-Link Manipulator // J. Guidance, Control and Dynamics. 1990. V. 13. Iss. 5. P. 859–866. <https://doi.org/10.2514/3.25412>
6. Szyszkowski W., Fotouhi C.R. Improving Time-Optimal Maneuvers of Two-Link Robotic Manipulators // J. Guidance, Control and Dynamics. 2000. V. 23. P. 888–889. <https://doi.org/10.2514/2.4619>
7. Demydyuk I.V., Hoshovs'ka N. Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two-Link manipulator // J. Math. Sci. 2019. V. 238. No. 2. P. 174–188. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04227-8>
8. Demydyuk I.V., Demydyuk V.I. Parametric Optimization of the Kinematic Structure and the Movement of the Two-Link Manipulator // Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems. 2020. V. 48. P. 36–48. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-03>
9. Avetisyan V.V., Grigoryan Sh.A. Time-Suboptimal Control of a Two-Link Manipulator Motion // Mechanics – Proceedings of NAS PA. 2022. V. 75. Iss. 1–2. P. 136–147. <https://doi.org/10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-136>
10. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Моделирование и оптимизация транспортных движений промышленного робота // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. № 1. С. 84–90.
11. Аветисян В.В. Оптимизация транспортных движений манипуляционных роботов с ограничением на мощность тепловыделения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 4. С. 200–207.
12. Аветисян В.В., Болотник Н.Н. Субоптимальное управление электромеханической системы с высокой точностью позиционирования // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 32–41.
13. Chernousko F.L. Optimization in Control of Robots // Computational Optimal Control. Basel: Birkhauser, 1994. P. 19–28.
14. Massaro M., Lovato S., Bottin M. An Optimal Control Approach to the Minimum-Time Trajectory Planning of Robotic Manipulators // Robotics. 2023. V. 12. No. 64. P. 1–24. <https://doi.org/10.3390/robotics12030064>
15. Kim J., Kim S.R., Kim S.H., Kim D.H. A practical approach for minimum-time trajectory planning for industrial robots // Ind. Robot Int. J. 2010. V. 37. No. 1. P. 51–61. <https://doi.org/10.1108/01439911011009957>

16. *Аветисян В.В., Овакимян Н.В.* Оптимальные плоскопараллельные перемещения двухзвенного манипулятора // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. № 3. С. 161–168.
17. *Аветисян В.В.* Оптимизация конфигурации и направлений поворотов звеньев двухзвенного манипулятора по комбинированным критериям качества // Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т. 51. № 4. С. 65–71.
18. *Avetisyan V.V.* Time-optimal control of gripper motion in a two-link manipulator with allowance for the terminal configuration // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. Iss. 2. P. 189–199. <https://doi.org/10.1134/S0005117921020016>
19. *Болотник Н.Н., Каплунов А.А.* Оптимальные прямолинейные перемещения груза при помощи двухзвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. № 1. С. 68–74.
20. *Болотник Н.Н., Каплунов А.А.* Оптимизация управления и конфигураций двухзвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 123–131.
21. *Долгий Ю.Ф., Чупин И.А.* Импульсные управления двухзвенным манипуляционным роботом // Изв. ИМИ УдГУ. 2021. Т. 57. С. 77–90. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-57-02>
22. *Dolgii Yu.F., Chupin I.A.* Relay Controls for an Inertialess Two-Link Manipulation Robot // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2025. V. 63. No. 6. P. 972–982. <https://doi.org/10.1134/S1064230724700722>
23. *Shen P., Zhang X., Fang Y.* Complete and Time – Optimal Path-Constrained Trajectory Planning With Torque and Velocity Constraints: Theory and Applications // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2018. V. 23. Iss. 2. P. 735–746. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2018.2810828>
24. *Holmes P., Kousik Sh., Zhang B., et al.* Reachable Sets for Safe, Real-Time Manipulator Trajectory Design // arXiv:2002.01591. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.01591>
25. *Haghshenas H., Hansson A., Norrlof M.* Time – optimal path tracking for cooperative manipulators: A convex optimization approach // Control Engineering Practice. 2023. V. 140. 105668. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2023.105668>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 28.03.2025

После доработки 26.08.2025

Принята к публикации 20.11.2025

© 2026 г. А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук (a.u.aleksandrov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

УПРАВЛЕНИЕ ТРЕХОСНОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ОБРАТНОЙ СВЯЗИ¹

Рассматривается твердое тело, находящееся под воздействием линейного диссипативного и существенно нелинейного восстанавливающего моментов. Предполагается, что в восстанавливающем моменте имеется постоянное запаздывание. С использованием специальной конструкции функционала Ляпунова–Красовского доказывается, что заданная ориентация тела будет асимптотически устойчива при любом значении запаздывания. Исследуется случай, когда на тело действует управление типа ПИД-регулятора с линейной дифференциальной частью и существенно нелинейными интегральной и пропорциональной частями. Определяются допустимые значения параметров регулятора, при которых он решает задачу трехосной стабилизации. Приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие установленные теоретические выводы.

Ключевые слова: твердое тело, трехосная ориентация, запаздывание, функционал Ляпунова–Красовского, ПИД-регулятор.

DOI: 10.7868/S2413977726070063

1. Введение

Управление вращательным движением твердого тела представляет собой актуальную проблему нелинейной механики. Она имеет широкие приложения в задачах ориентации спутников, летательных и подводных аппаратов, роботизированных систем [1–3]. Одним из важных специальных случаев данной проблемы является трехосная стабилизация твердого тела [1, 2]. Изучению этого случая посвящено большое количество работ (см., например, [1–6] и цитируемую там литературу). Были предложены различные подходы к построению стабилизирующих управлений. При этом следует отметить, что управление ориентацией твердого тела – нелинейная задача, поскольку пространство конфигураций для нее не является линейным пространством [7].

При проектировании управляемых систем довольно часто требуется учитывать запаздывание, возникающее в обратной связи [8, 9]. Кроме того, запаздывание может специально вводиться в систему для обеспечения устойчивости или достаточной гладкости переходных процессов [9–13]. Наличие запаздывания существенно затрудняет анализ устойчивости. Основными под-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00091), <https://rscf.ru/project/24-21-00091/>

ходами к решению данной проблемы являются метод Разумихина и метод функционалов Ляпунова–Красовского [8, 9].

Некоторые способы синтеза управлений, обеспечивающих трехосную стабилизацию твердого тела с учетом постоянного запаздывания в обратной связи, предложены в [7, 14–16]. Были построены линейные управляющие моменты, а условия асимптотической устойчивости заданной ориентации тела формулировались в терминах разрешимости систем линейных матричных неравенств, что приводило к довольно жестким ограничениям на параметры системы и величину запаздывания. В [17, 18] для решения задачи трехосной стабилизации применялись линейные управления типа ПИД-регуляторов.

В настоящей работе сначала рассматривается твердое тело, находящееся под воздействием линейного диссипативного и существенно нелинейного восстанавливающего моментов. Нелинейные управления являются более робастными по отношению к запаздываниям и нестационарным возмущениям, чем линейные (см. [19–21]). В ряде случаев они позволяют обеспечить более высокую скорость сходимости нормы вектора состояния замкнутой системы, а также уменьшить установившуюся ошибку по сравнению с линейными алгоритмами [22].

Предполагается, что в восстанавливающем моменте имеется постоянное запаздывание. С использованием метода функционалов Ляпунова–Красовского найдены условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость заданной ориентации тела при любом значении запаздывания. Далее рассматривается случай, когда на тело действует управление типа ПИД-регулятора, причем его дифференциальная часть является линейной, а интегральная и пропорциональная части существенно нелинейны. Определяются допустимые значения параметров регулятора, при которых он решает задачу трехосной стабилизации тела.

2. Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной точки O , совпадающей с его центром масс. Пусть $\omega(t)$ – вектор угловой скорости, а $Oxyz$ – главные центральные оси инерции тела.

Будем считать, что заданы две правые тройки взаимно ортогональных единичных векторов r_1, r_2, r_3 и s_1, s_2, s_3 , причем векторы r_1, r_2, r_3 неподвижны в системе $Oxyz$, векторы s_1, s_2, s_3 занимают неизменное положение в инерциальном пространстве.

Вращение тела под действием управляющего момента M_u моделируется уравнениями Эйлера

$$(1) \quad \Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta \omega(t)) = M_u,$$

а для векторов s_1, s_2, s_3 имеем кинематические уравнения Пуассона

$$(2) \quad \dot{s}_i(t) = -\omega(t) \times s_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $\Theta = \text{diag} \{A, B, C\}$ – тензор инерции тела в осях $Oxyz$ (см. [1, 2]).

Проблема трехосной стабилизации тела заключается в синтезе момента M_u , обеспечивающего для системы (1), (2) существование и асимптотическую устойчивость положения равновесия

$$(3) \quad \omega = 0, \quad s_i = r_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

В [2, 4] показано, что требуемое управление можно выбирать в виде суммы линейных диссипативного и восстанавливающего моментов: $M_u = M_d + M_r$. Здесь

$$(4) \quad M_d = -D\omega(t),$$

$M_r = -L(t)$, D – постоянная положительно определенная матрица,

$$(5) \quad L(t) = \alpha_1 s_1(t) \times r_1 + \alpha_2 s_2(t) \times r_2,$$

α_1, α_2 – положительные коэффициенты. В [19] было предложено вместо линейного восстанавливающего момента использовать существенно нелинейный момент

$$(6) \quad M_r = -f^\nu(t)L(t),$$

где вектор $L(t)$ по-прежнему определяется по формуле (5), $\nu = \text{const} > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{2} (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\|^2 + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|^2),$$

а $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Была доказана робастность такого управления по отношению к нестационарным возмущениям с нулевыми средними значениями.

В настоящей работе исследуем условия трехосной стабилизации в случае, когда тело находится под воздействием линейного момента диссипативных сил (4) и существенно нелинейного восстанавливающего момента (6), причем в восстанавливающем моменте имеется постоянное запаздывание $\tau > 0$. Таким образом, динамические уравнения Эйлера можно записать в форме

$$(7) \quad \Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta \omega(t)) = -f^\nu(t - \tau)L(t - \tau) - D\omega(t).$$

Кроме того, рассмотрим случай, когда на тело действует управление типа ПИД-регулятора следующего вида:

$$(8) \quad M_u = -\beta f^\nu(t)L(t) - D\omega(t) - \int_0^t f^\nu(\xi)G(t - \xi)L(\xi)d\xi,$$

где β – постоянный коэффициент, $G(\zeta)$ – непрерывная при $\zeta \in [0, +\infty)$ матрица. Определим допустимые значения параметров регулятора, при которых он обеспечивает для замкнутой системы существование и асимптотическую устойчивость положения равновесия (3).

3. Стабилизация с использованием запаздывающей обратной связи

Пусть задана система (2), (7). Будем предполагать, что начальные функции $\phi(\xi)$ для нее принадлежат пространству $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^{12})$ непрерывных функций с равномерной нормой $\|\phi\|_\tau = \max_{\xi \in [- \tau, 0]} \|\phi(\xi)\|$.

Теорема 1. При любом постоянном положительном запаздывании τ система (2), (7) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия (3).

Доказательство. Очевидно, что (3) является положением равновесия замкнутой системы. Для доказательства его асимптотической устойчивости выбираем функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$(1) \quad \begin{aligned} V(\omega(t), s_{1t}, s_{2t}) = & f(t) + \frac{\gamma}{2} \omega^\top(t) \Theta \omega(t) + L^\top(t) D^{-1} \Theta \omega(t) + \\ & + \int_{t-\tau}^t (\lambda(\xi + \tau - t) + \mu) (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi - \\ & - L^\top(t) D^{-1} \int_{t-\tau}^t f^\nu(\xi) L(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где γ, λ, μ – положительные параметры, s_{jt} – отрезки соответствующих компонент решения системы: $s_{jt} : \xi \mapsto s_j(t + \xi)$, $\xi \in [- \tau, 0]$, $j = 1, 2$.

Имеем

$$\begin{aligned} & f(t) + c_1 \gamma \|\omega(t)\|^2 - c_2 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \|\omega(t)\| + \\ & + \mu \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi - \\ & - c_3 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1}) d\xi \leq \\ & \leq V(\omega_t, s_{1t}, s_{2t}) \leq f(t) + c_2 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \|\omega(t)\| + \\ & + c_4 \gamma \|\omega(t)\|^2 + (\lambda \tau + \mu) \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi + \\ & + c_3 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1}) d\xi, \end{aligned}$$

где $c_l > 0$, $l = 1, 2, 3, 4$.

Продифференцируем функционал (9) в силу системы (2), (7). Получим

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\gamma\omega^\top(t)D\omega(t) - f^\nu(t)L^\top(t)D^{-1}L(t) - L^\top(t)D^{-1}\left(\omega(t) \times (\Theta\omega(t))\right) + \\
& + \gamma f^\nu(t-\tau)\omega^\top(t)L^\top(t-\tau) + \left(\alpha_1(\omega(t) \times s_1(t)) \times r_1 + \right. \\
& + \left. \alpha_2(\omega(t) \times s_2(t)) \times r_2\right)^\top D^{-1} \left(\int_{t-\tau}^t f^\nu(\xi)L(\xi)d\xi - \Theta\omega(t) \right) - \\
& - \lambda \int_{t-\tau}^t \left(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2} \right) d\xi + \\
& + (\lambda\tau + \mu) \left(\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2} \right) - \\
& - \mu \left(\|s_1(t-\tau) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t-\tau) - r_2\|^{2\nu+2} \right) \leq \\
& \leq (c_5 - \gamma c_6) \|\omega(t)\|^2 - c_7 f^\nu(t) \|L(t)\|^2 + \\
& + \gamma c_8 \|\omega(t)\| \left(\|s_1(t-\tau) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(t-\tau) - r_2\|^{2\nu+1} \right) + \\
& + c_9 \|\omega(t)\|^2 (\|s_1(t) - r_1\| + \|s_2(t) - r_2\|) + \\
& + c_{10} \|\omega(t)\| \int_{t-\tau}^t \left(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1} \right) d\xi - \\
& - \lambda \int_{t-\tau}^t \left(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2} \right) d\xi + \\
& + (\lambda\tau + \mu) \left(\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2} \right) - \\
& - \mu \left(\|s_1(t-\tau) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t-\tau) - r_2\|^{2\nu+2} \right),
\end{aligned}$$

где $c_5, \dots, c_{10}$ – положительные коэффициенты.

Выберем и зафиксируем число $\epsilon \in (0, 1)$. Известно [23], что найдется $\delta > 0$ такое, что

$$(10) \quad \|L(t)\|^2 \geq \epsilon (\alpha_1^2 \|s_1(t) - r_1\|^2 + \alpha_2^2 \|s_2(t) - r_2\|^2)$$

при

$$\|s_1(t) - r_1\| + \|s_2(t) - r_2\| < \delta.$$

Используя соотношение (10) и неравенство Йенсена (см. [8, с. 87]), нетрудно показать, что если значения параметров λ, μ, δ достаточно малы, а γ до-

статочно велико, то при $\|s_{1t} - r_1\|_\tau + \|s_{2t} - r_2\|_\tau < \delta$ будут справедливы оценки

$$(11) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(f(t) + \mu \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi + c_1 \gamma \|\omega(t)\|^2 \right) \leq \\ & \leq V(\omega_t, s_{1t}, s_{2t}) \leq 2 \left(f(t) + c_4 \gamma \|\omega(t)\|^2 + \right. \\ & \quad \left. + (\lambda\tau + \mu) \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \right), \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \left(\gamma c_6 \|\omega(t)\|^2 + \epsilon c_7 f^\nu(t) (\alpha_1^2 \|s_1(t) - r_1\|^2 + \alpha_2^2 \|s_2(t) - r_2\|^2) + \right. \\ & \left. + \lambda \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \right). \end{aligned}$$

Следовательно (см. [8, с. 53, 54]), положение равновесия (3) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 1. В отличие от известных условий трехосной стабилизации, полученных при применении линейных управлений с запаздыванием [7, 14–16], теорема 1 гарантирует, что в случае существенно нелинейного восстанавливающего момента асимптотическая устойчивость требуемого положения равновесия имеет место при любом $\tau > 0$. Однако следует отметить, что увеличение запаздывания приводит к уменьшению величины δ , определяющей область, в которой справедливы оценки (11), (12). Таким образом, закон управления может не обеспечить асимптотическую устойчивость, если требуемое положение осей связанной с телом системы координат достаточно «далеко» от текущего при большом запаздывании. В таких ситуациях для стабилизации программной ориентации нужно увеличивать значения параметров α_1, α_2 в управляющем моменте.

4. Стабилизация с использованием нелинейного ПИД-регулятора

Пусть управляющий момент строится по формуле (8). Рассмотрим систему, состоящую из кинематических уравнений (2) и динамических уравнений Эйлера следующего вида:

$$(13) \quad \begin{aligned} & \Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta \omega(t)) = \\ & = -\beta f^\nu(t) L(t) - D\omega(t) - \int_0^t f^\nu(\xi) G(t - \xi) L(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Каждое решение данной системы определяется начальными условиями:

$$\omega(\xi + t_0) = w(\xi), \quad s_i(\xi + t_0) = \psi_i(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in [-t_0, 0], \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $t_0 \geq 0$, а функции $w(\xi), \psi_i(\xi)$ принадлежат пространству $C([-t_0, 0], \mathbb{R}^3)$ непрерывных функций $\varphi(\xi)$ с нормой $\|\varphi\|_{[-t_0, 0]} = \max_{\xi \in [-t_0, 0]} \|\varphi(\xi)\|$.

Предположение 1. Матрица $G(\zeta)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\int_0^{+\infty} \|G(\xi)\| d\xi < +\infty$,
- 2) $\int_{\zeta}^{+\infty} \|G(\xi)\| d\xi \leq \sigma \|G(\zeta)\| \quad \text{при} \quad \zeta \geq 0, \quad \text{где} \quad \sigma = \text{const} > 0.$

Замечание 2. Предположение 1 выполнено в случае, когда $G(\zeta) = \exp(-a\zeta)\tilde{G}$, где a – положительная постоянная, $\tilde{G}$ – постоянная матрица. Следует отметить, что ПИД регуляторы с такими ядрами широко применяются в теории управления (см., например, [8, 24]).

Пусть

$$\Xi = \beta I + \int_0^{+\infty} G(\zeta) d\zeta$$

где I – единичная матрица.

Предположение 2. Матрица $\Xi D + D\Xi^\top$ положительно определена.

Теорема 2. Если выполнены предположения 1 и 2, то система (2), (13) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия (3).

Доказательство. Очевидно, что (3) является положением равновесия замкнутой системы. Для доказательства его асимптотической устойчивости функционал Ляпунова–Красовского строим в виде

$$(14) \quad \begin{aligned} V(t, \omega(t), s_{1t}, s_{2t}) = & f(t) + \frac{\gamma}{2} \omega^\top(t) \Theta \omega(t) + L^\top(t) D^{-1} \Theta \omega(t) + \\ & + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi - \\ & - L^\top(t) D^{-1} \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} G(\zeta) d\zeta f^\nu(\xi) L(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где γ, μ – положительные параметры, s_{jt} – отрезки соответствующих компонент решения системы, $s_{jt} : \xi \mapsto s_j(t + \xi)$, $\xi \in [-t, 0]$, $j = 1, 2$.

Для функционала (14) и его производной в силу системы (2), (13) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& f(t) + c_1 \gamma \|\omega(t)\|^2 - c_2 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \|\omega(t)\| + \\
& + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi - c_3 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \\
& + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1}) d\xi \leq \\
& \leq V(t, \omega_t, s_{1t}, s_{2t}) \leq f(t) + c_2 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \|\omega(t)\| + \\
& + c_4 \gamma \|\omega(t)\|^2 + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi + \\
& + c_3 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \\
& + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1}) d\xi, \\
& \dot{V} \leq (c_5 - \gamma c_6) \|\omega(t)\|^2 - f^\nu(t) L^\top(t) D^{-1} \Xi L(t) - \\
& - \mu \int_0^t \|G(t - \xi)\| (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi + \\
& + \mu \int_0^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2}) + \\
& + \gamma \beta c_7 \|\omega(t)\| (\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+1}) + \\
& + c_8 \|\omega(t)\|^2 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) + \\
& + \gamma c_9 \|\omega(t)\| \int_0^t \|G(t - \xi)\| (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1}) d\xi - \\
& + c_{10} \|\omega(t)\| \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1}) d\xi,
\end{aligned}$$

где $c_1, \dots, c_{10}$ – положительные коэффициенты.

Как и при доказательстве теоремы 1, выбираем число $\epsilon \in (0, 1)$ и находим $\delta > 0$ такое, что при $\|s_1(t) - r_1\| + \|s_2(t) - r_2\| < \delta$ выполнено соотношение (10). Учитывая предположение 2, имеем

$$f^\nu(t) L^\top(t) D^{-1} \Xi L(t) \geq \epsilon c_{11} (\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2})$$

при $\|s_1(t) - r_1\| + \|s_2(t) - r_2\| < \delta$, где $c_{11} = \text{const} > 0$.

Кроме того, с использованием предположения 1 и неравенства Гельдера получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \leq \\
& \leq \sigma \int_0^t \|G(t-\xi)\| (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi, \\
& \int_0^t \|G(t-\xi)\| \|s_j(\xi) - r_j\|^{2\nu+1} d\xi \leq \\
& \leq c_{12} \left(\int_0^t \|G(t-\xi)\| \|s_j(\xi) - r_j\|^{2\nu+2} d\xi \right)^{\frac{2\nu+1}{2\nu+2}}, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

где $c_{12} = \text{const} > 0$.

С помощью установленных оценок нетрудно показать, что если значения δ и μ достаточно малы, а γ достаточно велико, то при $\|s_{1t} - r_1\|_{[-t,0]} + \|s_{2t} - r_2\|_{[-t,0]} < \delta$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(f(t) + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi + \right. \\
& \quad \left. + c_1 \gamma \|\omega(t)\|^2 \right) \leq V(t, \omega_t, s_{1t}, s_{2t}) \leq 2 \left(f(t) + c_4 \gamma \|\omega(t)\|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \right), \\
& \dot{V} \leq -\frac{1}{2} \left(\gamma c_6 \|\omega(t)\|^2 + \epsilon c_{11} (\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2}) + \right. \\
& \quad \left. + \mu \int_0^t \|G(t-\xi)\| (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \right).
\end{aligned}$$

Следовательно (см. [9, с. 211, 212]), положение равновесия (3) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 2 утверждает, что рассматриваемый регулятор может обеспечить асимптотическую устойчивость программной ориентации и в случае, когда его пропорциональная часть не является восстанавливающей, т.е. когда $\beta \leq 0$. Дестабилизирующий эффект этой части компенсируется за счет соответствующего выбора интегрального слагаемого.

Действительно, если $\beta \leq 0$, то матрицу $G(\zeta)$ можно выбрать в виде $G(\zeta) = ag(\zeta)I$, где a – положительный параметр, $g(\zeta)$ – скалярная непрерывная при $\zeta \in [0, +\infty)$ функция, обладающая следующими свойствами:

- а) $\int_0^{+\infty} |g(\xi)| d\xi < +\infty$,
- б) $\int_{\zeta}^{+\infty} |g(\xi)| d\xi \leq \sigma |g(\zeta)|$ при $\zeta \geq 0$, где $\sigma = \text{const} > 0$,
- в) $\int_0^{+\infty} g(\xi) d\xi > 0$.

В этом случае предположение 1 выполнено, а предположение 2 сводится к выполнению неравенства $\beta + a \int_0^{+\infty} g(\zeta) d\zeta > 0$, которое будет справедливо при достаточно большом значении параметра a .

5. Пример

Рассмотрим твердое тело с главными центральными моментами инерции $A = 20$, $B = 25$, $C = 35$, а в качестве программной ориентации выберем $r_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$, $r_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$, $r_3 = (0, 0, 1)^T$. Здесь и далее все физические величины имеют размерности в системе СИ.

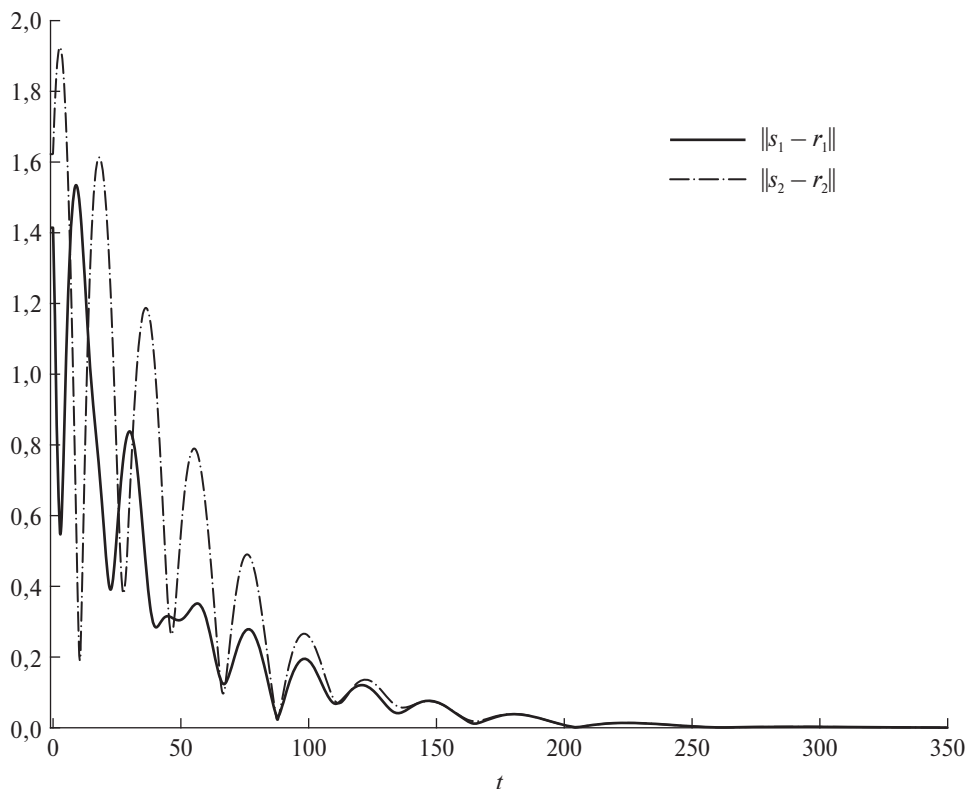


Рис. 1. Результаты численного моделирования при использовании запаздывающей обратной связи.

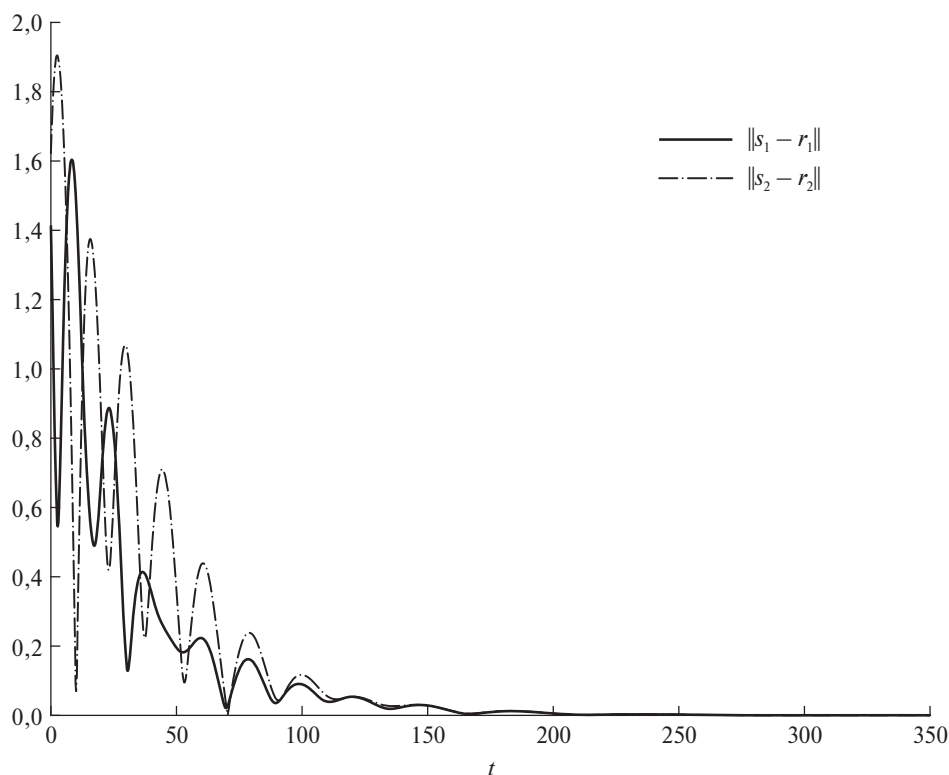


Рис. 2. Результаты численного моделирования при использовании ПИД-регулятора.

Сначала проведем численное моделирование в случае, когда вращательное движение тела описывается системой (2), (7), а затем сравним его результаты с результатами, полученными для системы (2), (13). Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\nu = 0,3$, $D = 2I$, $\tau = 1$, $\beta = 1$, $G(\zeta) = \exp(-2\zeta)I$.

В обоих случаях для численного моделирования были выбраны следующие начальные условия: $t_0 = 0$, $\omega(t) = (0,3, -0,4, 0,4)^\top$, $s_1(t) = (0, 0, 1)^\top$, $s_2(t) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0)^\top$, $s_3(t) = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)^\top$, при $t \in [-1, 0]$. На рис. 1 и 2 показана зависимость величин $\|s_1 - r_1\|$, $\|s_2 - r_2\|$ от времени. Результаты моделирования свидетельствуют об асимптотической устойчивости программной ориентации. Однако при использовании ПИД-регулятора переходные процессы становятся более гладкими, а их время сокращается.

6. Заключение

Рассмотрены два способа построения управляющих моментов, обеспечивающих трехосную стабилизацию твердого тела при наличии запаздывания в обратной связи. Первый способ основан на использовании линейного момента диссипативных сил и существенно нелинейного восстанавливающего момента, содержащего постоянное запаздывание. Доказано, что в отличие от строившихся ранее линейных управляющих моментов предложенное в настоя-

щей статье управление является робастным по отношению к запаздыванию. Второй способ базируется на применении управления типа ПИД-регулятора с линейной дифференциальной частью и существенно нелинейными интегральной и пропорциональной частями. Найдены допустимые значения параметров регулятора, при которых он решает задачу трехосной стабилизации. Из установленных результатов вытекает, что асимптотическую устойчивость программной ориентации можно обеспечить и в случае, когда пропорциональная часть регулятора не является восстанавливающей. Дестабилизирующий эффект этой части компенсируется за счет соответствующего выбора интегральной составляющей.

Следует заметить, что в системе (7) запаздывание имеется только в восстанавливающем, а не в суммарном управляющем моменте. Это обусловлено тем, что в широком классе случаев диссипативные силы естественным образом присутствуют в реальных механических системах. Кроме того, для создания диссипативных управляющих сил довольно часто не требуется измерений скоростей.

С другой стороны, в ряде прикладных задач, особенно при управлении ориентацией спутников, положения и скорости механических систем вычисляются синхронно с помощью измерений датчиков, а запаздывание в управлении возникает вследствие задержек либо при расчете вектора состояния, либо из-за инерционности исполнительных органов. Поэтому в качестве направления дальнейших исследований отметим обобщение разработанных подходов на случай, когда запаздывание входит как в восстанавливающий, так и в диссипативный момент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1975.
2. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
3. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015.
4. *Смирнов Е.Я.* Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
5. *Воротников В.И.* Об оптимальной стабилизации нелинейных управляемых систем // *АиТ.* 1991. № 3. С. 22–34.
6. *Тхай В.Н.* Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2023. № 6. С. 165–179.
7. *Samiei E., Sanyal A.K., Butcher E.A.* Stabilization of rigid body attitude motion with time-delayed feedback // *Aerospace Science and Technology.* 2017. V. 68. P. 509–517.
8. *Fridman E.* Introduction to Time-delay Systems: Analysis and Control. Basel: Birkhauser, 2014.
9. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht: Springer, 1999.

10. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // *АиТ.* 1989. № 9. С. 34–43.
11. *Formal'sky A.* On a modification of the PID controller // *Dyn. Control.* 1997. V. 7. No. 3. P. 269–277.
12. *Fridman E., Shaikhet L.* Stabilization by using artificial delays: an LMI approach // *Automatica.* 2017. V. 81. P. 429–437.
13. *Zhao C., Guo L.* Towards a theoretical foundation of PID control for uncertain nonlinear systems. // *Automatica.* 2022. V. 142. Art. No. 110360.
14. *Bahrami S., Namvar M.* Rigid body attitude control with delayed attitude measurement // *IEEE Trans. on Control Systems Technology.* 2015. V. 23. No. 5. P. 1961–1969.
15. *Mazenc F., Akella M.R.* Quaternion-based stabilization of attitude dynamics subject to pointwise delay in the input // In *Proceedings of the American Control Conference*, 2014. P. 4877–4882.
16. *Safa A., Baradarannia M., Kharrati H., Khanmohammadi S.* Attitude stabilization of a rigid spacecraft with actuator delay and fault // *Trans. of the Institute of Measurement and Control.* 2018. V. 40. No. 7. P. 2340–2351.
17. *Павликов С.В.* К задаче о стабилизации управляемых механических систем // *АиТ.* 2007. № 9. С. 16–26.
18. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Нелинейное управление с распределенным запаздыванием для угловой стабилизации твердого тела // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* 2022. Т. 9. Вып. 4. С. 653–664.
19. *Александров А.Ю.* О стабилизации вращательного движения твердого тела при неавтономных возмущениях // *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Сер. 1. 1999. Вып. 3. С. 53–57.
20. *Aleksandrov A., Efimov D.* Averaging method for the stability analysis of strongly nonlinear mechanical systems // *Automatica.* 2022. V. 146. Art. No. 110576.
21. *Aleksandrov A., Efimov D., Fridman E.* Stability of homogeneous systems with distributed delay and time-varying perturbations // *Automatica.* 2023. V. 153. Art. No. 111058.
22. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А., Копысова Е.А.* Нелинейные законы управления, построенные на базе линейных с использованием нечетных функций // *УБС.* 2023. Вып. 102. С. 58–75.
23. *Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system // *Adv. Space Res.* 2018. V. 62. No. 1. P. 142–151.
24. *Sipahi R., Atay F., Niculescu S.-I.* Stability of traffic flow behavior with distributed delays modeling the memory effects of the drivers // *SIAM J. Applied Mathematics.* 2007. V. 68. P. 738–759.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 12.10.2025

После доработки 30.11.2025

Принята к публикации 08.12.2025

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2026 г. А.П. НЕЛЮБИН, канд. физ.-мат. наук (nelubin@gmail.com)
(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва),
В.В. ПОДИНОВСКИЙ, д-р техн. наук (podinovski@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ КАЧЕСТВЕННЫХ ОЦЕНКАХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ПРЕДПОЧТЕНИЙ¹

Рассматриваются задачи принятия решений, когда предпочтения оцениваются в порядковой шкале, а возможности реализации значений неопределенного фактора описываются качественной вероятностью (полной или только частичной). Вводятся определения отношений предпочтения и безразличий на множестве стратегий. Предлагаются простые решающие правила, позволяющие сравнивать стратегии по предпочтительности, и приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова: принятие решений при неопределенности, качественная вероятность, порядковая полезность, отношения предпочтения.

DOI: 10.7868/S2413977726070078

1. Введение

Практические задачи принятия решений часто предполагают необходимость учета неопределенных факторов, значения которых заранее точно не известны. Основные, наиболее распространенные подходы к анализу таких задач предполагают использование функции полезности, т.е. функции, математическое ожидание которой моделирует предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР) [1–3], или же мер риска [4–6]. Однако построение функции полезности – проблема непростая, и даже само допущение существования функции полезности является достаточно сильным, так как может привести к появлению разного рода «парадоксов» – выводов, не согласующихся со здравым смыслом или с очевидно ожидаемыми ЛПР результатами [7, 8]. Кроме того, использование функции полезности предполагает использование количественной вероятности, т.е. распределение вероятностей на множестве значений неопределенного фактора должно быть задано полностью [9] или хотя бы

¹ Данная работа осуществлена в рамках Программы научного проекта «Модели и методы принятия решений в условиях глубокой неопределенности» НИУ ВШЭ.

частично [10–12]. А при использовании мер риска возникает проблема выбора подходящей меры: нет универсальных мер и каждая обладает недостатками, не позволяющими со всей полнотой адекватно оценить риск [13]. Кроме того, для их расчета также требуется знание количественной вероятности.

Однако в сложных задачах принятия решений социально-экономического, политического и иного характера объективных вероятностей обычно не существует и приходится обращаться к экспертным оценкам. Но, как известно из психологических исследований, количественные оценки весьма сложны для человека, а потому являются недостаточно надежными и могут содержать явные ошибки [14].

Поэтому теоретический и практический интерес представляет проблема разработки методов анализа решений в условиях неопределенности, которые не использовали бы количественных вероятностей. С другой стороны, в сложных задачах возможные последствия вариантов также проще и надежнее оценивать не количественно, а качественно – в порядковой шкале. Впервые метод анализа подобных задач был аннотирован в [15]. Цель настоящей статьи – подробно, с обоснованиями представить такие методы и проиллюстрировать их «работу».

2. Математическая модель проблемной ситуации

Далее используется следующая математическая модель ситуации принятия решения в условиях неопределенности:

$$\langle S, \Lambda, V, f, \succsim, R \rangle.$$

Здесь:

S – множество стратегий (планов, альтернатив, вариантов, действий, решений).

$\Lambda = \{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ – конечное множество значений *неопределенного фактора* ($n \geq 2$). Его элементы называются *состояниями природы*, или *элементарными событиями*, а его подмножества именуются *событиями*.

V – множество *числовых оценок последствий*, которые определяются в порядковой шкале [16]. Предполагается, что предпочтения возрастают на V , т.е. чем числовая оценка v больше, тем она предпочтительнее.

f – *оценочный критерий* – отображение $S \times \Lambda \rightarrow V$, т.е. $v = f(s, \lambda)$ – числовая оценка последствия использования стратегии s , если реализуется значение неопределенного фактора λ . Каждая стратегия s характеризуется векторной оценкой последствий $x = (f(s, \lambda^1), \dots, f(s, \lambda^n))$. Множество всех векторных оценок x (как достижимых, так и гипотетических) есть $X = V^n$. Согласно принятому допущению о характере оценок из V полагаем, что оценочный критерий является порядковым.

$\succsim$ – качественная вероятность, полная или только частичная (для удобства читателя необходимые сведения о качественной вероятности приведены в разделе 3).

R – отношение нестрогого предпочтения ЛПП на множестве X : запись xRy означает, что вектор x не менее предпочтителен, чем y . Оно порождает отношение (строгого) предпочтения P и безразличия (равенства по предпочтительности) I : xPy верно, когда верно xRy и неверно yRx , и xIy верно, когда верно и xRy , и yRx . Запись xPy означает, что x предпочтительнее, чем y , а xIy означает, что x и y безразличны (одинаковы по предпочтительности). Предполагается, что отношение R есть квазипорядок (оно рефлексивно: xRx верно для любого $x \in X$ и транзитивно: для любых $x, y, z \in X$ из xRy и yRz следует xRz), но лишь частичный, т.е. не всякие x и y из X сравнимы по R : может не выполняться ни xRy , ни yRx . Иными словами, отношения I и P являются симметричной и асимметричной частями отношения R . Для квазипорядка R отношение P оказывается строгим частичным порядком (оно иррефлексивно: yPy неверно для любого $y \in X$ и транзитивно), а отношение I – эквивалентностью (оно симметрично: для любых $x, y \in X$ из xRy следует yRx , рефлексивно и транзитивно). Отношения R, P, I порождают на множестве стратегий S аналогичные по смыслу отношения R_*, P_*, I_* следующим образом:

$$s'R_*s'' \Leftrightarrow x'Rx'', \quad s'P_*s'' \Leftrightarrow x'Px'', \quad s'I_*s'' \Leftrightarrow x'Ix'',$$

где $x' = (f(s', \lambda^1), \dots, f(s', \lambda^n))$ и $x'' = (f(s'', \lambda^1), \dots, f(s'', \lambda^n))$. Именно отношения R_*, P_*, I_* непосредственно используются для формирования решения анализируемой задачи принятия решения с учетом типа ее постановки. Например, если требуется выбрать оптимальную стратегию, то строится множество недоминируемых по P_* стратегий, среди которых и надлежит выделить наилучшую (разумеется, если оно внешне устойчиво). Отношение R заранее неизвестно: его нужно построить на основе заданных предпочтений на множестве оценок V и качественной вероятности $\succsim$. Методы построения этого отношения рассматриваются далее в разделах 4 и 5.

3. Качественная вероятность

Приведем необходимые сведения о качественной вероятности. Через A, B, C будут обозначаться подмножества конечного множества элементарных событий, или *состояний природы* $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$; эти подмножества будут называться «событиями». Число всех событий в 2^Λ (с учетом самого Λ и пустого множества $\emptyset$) равно 2^n . Пусть $N = \{1, \dots, n\}$.

Определение 1 [17]. Бинарное отношение $\succsim$ на множестве 2^Λ называется *полной качественной, или полной сравнительной вероятностью*, если оно обладает следующими свойствами, принимаемыми за аксиомы:

C1. *Сравнимость*: для любых A и B выполнено по крайней мере одно из соотношений $A \succsim B$ или $B \succsim A$.

C2. *Транзитивность*: из соотношений $A \succsim B$ и $B \succsim C$ следует $A \succsim C$.

C3. *Существование*: $\Lambda \succ \emptyset$ и для любого A выполнено $A \succ \emptyset$.

C4. *Аддитивность*: если $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то соотношения $A \succsim B$ и $A \cup C \succsim B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно.

Из свойств C1 и C2 следует, что полная качественная вероятность рефлексивна и потому является связным квазипорядком. Поэтому его асимметричная часть $\succ$ есть (частичный) порядок, а симметричная часть $\sim$ является эквивалентностью.

Пусть задана количественная вероятность Pr рядом распределения $\text{Pr}(\lambda^1) = p_1, \dots, \text{Pr}(\lambda^n) = p_n$, так что вероятность события A равна $\text{Pr}A = \sum_{j: \lambda^j \in A} p_j$. Говорят, что количественная вероятность *численно представляет* качественную вероятность, или что количественная вероятность *согласована* с качественной, если выполнено условие: для любых A, B

$$(1) \quad A \succsim B \Leftrightarrow \text{Pr}A \geq \text{Pr}B.$$

Из (1) следует, что $A \succ B \Leftrightarrow \text{Pr}A > \text{Pr}B$, $A \sim B \Leftrightarrow \text{Pr}A = \text{Pr}B$ для любых A, B .

Если задана количественная вероятность Pr , то порождаемое ею согласно (1) отношение $\succsim$ удовлетворяет всем свойствам C1–C4, т.е. является качественной вероятностью.

Оказалось, что всякую полную качественную вероятность можно представить некоторой количественной лишь при $n \leq 4$: в [18] построен контрпример для $n = 5$.

Далее для сокращения записи элементарное событие λ^i будем также обозначать его номером i , а события A записывать в мультипликативной форме. Например, событие $A = \{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\}$ будем писать как $\{1, 2, 4\}$ или 124, а вместо $\lambda^2 \in A$ запишем $2 \in A$.

Пример 1 [18]. Пусть $n = 5$. Рассмотрим отношение $\succ$, заданное цепочкой:

$$(2) \quad \begin{aligned} &12345 \succ 2345 \succ 1345 \succ 1245 \succ 345 \succ 245 \succ 1235 \succ 235 \succ 145 \succ \\ &\succ 1234 \succ 45 \succ 135 \succ 125 \succ 234 \succ 35 \succ 134 \succ 25 \succ 124 \succ 15 \succ \\ &\succ 34 \succ 24 \succ 123 \succ 5 \succ 23 \succ 14 \succ 4 \succ 13 \succ 12 \succ 3 \succ 2 \succ 1 \succ \emptyset. \end{aligned}$$

Проверка показывает, что все свойства C1–C4 выполнены, так что отношение $\succsim$, задаваемое (2), есть полная качественная вероятность. Предположим, что существуют количественные вероятности p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 , которые представляют эту качественную вероятность. Из приведенной выше цепочки выделим четыре звена: $4 \succ 13$, $23 \succ 14$, $15 \succ 34$, $134 \succ 25$. Им соответствуют четыре строгих неравенства:

$$p_4 > p_1 + p_3, \quad p_2 + p_3 > p_1 + p_4, \quad p_1 + p_5 > p_3 + p_4, \quad p_1 + p_3 + p_4 > p_2 + p_5.$$

Однако система из этих четырех неравенств несовместна. Действительно, сложив их левые и правые части, получим:

$$2p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5 > 2p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5, \text{ т.е. } 0 > 0.$$

В свете изложенного понятно, что методы, опирающиеся на предположение о существовании количественной вероятности (в том числе методы теории

полезности), к качественной вероятности, не представимой количественной, в принципе не применимы!

Определение 2 [19]. Бинарное отношение $\succsim$ на множестве 2^A называется частичной качественной (или частичной сравнительной) вероятностью, если оно удовлетворяет аксиомам C2–C4 и аксиоме

C5. Рефлексивность: для любого A выполнено $A \succsim A$.

Более подробно со свойствами полной и частичной качественными вероятностями (а эти свойства необычны и далеко не очевидны) можно ознакомиться по учебнику [20]. Здесь же отметим следующие два свойства:

C6. Если $A_i \succsim B_i$, $i = 1, \dots, m$, $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, то $A_1 \cup \dots \cup A_m \succsim B_1 \cup \dots \cup B_m$.

C7. $A \succsim B \Leftrightarrow \overline{B} \succsim \overline{A}$; поэтому $A \succ B \Leftrightarrow \overline{B} \succ \overline{A}$ и $A \sim B \Leftrightarrow \overline{B} \sim \overline{A}$ (это свойство авторы в литературе не встречали, и поэтому в Приложении приводится его доказательство).

4. Определение отношений предпочтения и безразличия

Введем определения отношений предпочтения и безразличия на множестве векторных оценок $X = V^n$ с учетом заданной качественной вероятности $\succsim$ (полной или только частичной). Определения отношений $R^\succsim$, $P^\succsim$, $I^\succsim$ на множестве векторных оценок $X = V^n$ с учетом заданной качественной вероятности $\succsim$ введем аксиоматически, т.е. укажем систему аксиом, которые имеют ясный практический смысл (с точки зрения предпочтений) и потому им должны удовлетворять эти отношения. Поскольку при сравнении стратегий по предпочтительности состояния природы, в которые она заведомо не попадет, учитывать не имеет смысла, то далее для качественной вероятности будем использовать аксиому существенности в более сильной формулировке: для любого $A \neq \emptyset$ выполнено $A \succ \emptyset$.

Аксиома 1. Отношение $R^\succsim$ рефлексивно.

Аксиома 2. Отношение $R^\succsim$ транзитивно.

При выполнении для $R^\succsim$ этих аксиом отношение $P^\succsim$ оказывается строгим частичным порядком, а отношение $I^\succsim$ – эквивалентностью.

Аксиома 3. Если одна из компонент векторной оценки x больше соответствующей компоненты векторной оценки y , а все остальные из соответственные компоненты равны, то x предпочтительнее, чем y : если $x_i > y_i$ и $x_j = y_j$, $j \in N = \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$, то $x P^\succsim y$.

Отношение Парето $P^\emptyset$ задается так: $x P^\emptyset y \Leftrightarrow x_i \geq y_i$, $i \in N$, $x \neq y$.

Из аксиом 2 и 3 следует, что отношение $P^\succsim$ удовлетворяет аксиоме Парето: если $x_i \geq y_i$, $i \in N$, $x \neq y$, то $x P^\succsim y$, т.е. $x P^\emptyset y$ влечет $x P^\succsim y$.

Пусть A, B – два события. Пусть $x, y \in X$ – две векторные оценки такие, что $x_i = y_j$, $i \in A$, $j \in B$, т.е. все их компоненты с номерами из A и B равны a . Пусть $b \in V$, причем $b \neq a$, и $x' = (x \parallel x_i = b, i \in A) \in X$ (соответственно, $y' = (y \parallel y_j = b, j \in B) \in X$) – векторная оценка, полученная из x заменой на b

всех ее компонент с номерами из A (соответственно, полученная из y заменой на b всех ее компонент с номерами из B). Будем говорить, что векторные оценки (x и y) изменены одинаковым образом по двум событиям, если их равные компоненты, соответствующие этим событиям, изменены на одну и ту же величину (т.е. x и y заменены соответственно на x' и y'). При этом если $b > a$, то будем говорить об улучшении x и y (ибо при этом $x'P^\varnothing x$ и $y'P^\varnothing y$), а если $b < a$, то, наоборот, будем говорить об их ухудшении (ибо $xP^\varnothing x'$ и $yP^\varnothing y'$). Заметим, что при $A = \varnothing$ или $B = \varnothing$ векторные оценки x или, соответственно, y не меняются.

Для отношения нестрогого предпочтения $R^\sim$ и порождаемых им отношений $P^\sim$ и $I^\sim$ на множестве векторных оценок X согласно смыслу этих отношений постулируются их следующие свойства.

Аксиома 4. Пусть две векторные оценки одинаковым образом улучшены по двум равновероятным событиям; если эти векторные оценки одинаковы по предпочтительности, то они и останутся одинаковыми по предпочтительности; если же первая векторная оценка предпочтительнее второй, то она останется предпочтительнее второй: если $A \sim B \succ \varnothing$ и $a < b$, то из $xI^\sim y$ следует $x'I^\sim y'$, а из $xP^\sim y$ следует $x'P^\sim y'$.

Аксиома 5. Если две векторные оценки, первая из которых не менее предпочтительна, чем вторая, одинаковым образом улучшены по двум событиям, первое из которых вероятнее второго, то первая из полученных векторных оценок будет предпочтительнее второй: если $A \succ B$ и $a < b$, то $xR^\sim y \Rightarrow x'P^\sim y'$.

С учетом того, что отношение $R^\sim$ рефлексивно, транзитивно и удовлетворяет аксиоме 3, аксиомы 4 и 5 задают рекурсивное (индуктивное) определение этого отношения, если начинать с соотношений $xI^\sim x$, верных для любых $x \in X$, или с $xP^\sim y$, если верно $xP^\varnothing y$.

Пример 2. Пусть $n = 5$, $V = \{1, 2, \dots, 10\}$, полная качественная вероятность задана соотношениями (2). Начнем с $x = (1, 1, 1, 1, 1)$. Поскольку $2345 \succ 1235$, то по аксиоме 5 выполняется $(1, 2, 2, 2, 2) P^\sim (2, 2, 2, 1, 2)$. Далее, так как $245 \succ 123$, то $(1, 3, 2, 3, 3) P^\sim (3, 3, 3, 1, 2)$. С учетом $4 \succ 13$ получаем $(1, 3, 2, 4, 3) P^\sim (4, 3, 4, 1, 2)$. Но $4 \succ \varnothing$, и поэтому $(1, 3, 2, 5, 3) P^\sim (4, 3, 4, 1, 2)$. Удобно представить проведенные выкладки в виде двойной цепочки (стрелки проводятся от более предпочтительных векторных оценок к менее предпочтительным, прямые соединяют равные или одинаковые по предпочтительности векторные оценки):

$$\begin{array}{ccccccc} (1, 1, 1, 1, 1) & \leftarrow & (1, 2, 2, 2, 2) & \leftarrow & (1, 3, 2, 3, 3) & \leftarrow & (1, 3, 2, 4, 3) & \leftarrow & (1, 3, 2, 5, 3) \\ & & \downarrow 2345 \succ 1235 & & \downarrow 245 \succ 123 & & \downarrow 4 \succ 13 & & \downarrow 4 \succ \varnothing \\ (1, 1, 1, 1, 1) & \leftarrow & (2, 2, 2, 1, 2) & \leftarrow & (3, 3, 3, 1, 2) & \leftarrow & (4, 3, 4, 1, 2) & \leftarrow & (4, 3, 4, 1, 2) \end{array}$$

Подобные двойные цепочки можно назвать *объяснительными*: они наглядно показывают, почему одна из векторных оценок предпочтительнее другой (или же они безразличны). Приведенная выше цепочка является *возрастающей*

щей, поскольку векторные оценки в ней улучшаются. Из аксиом 1–5 могут быть выведены следующие утверждения, использующие также ухудшение векторных оценок.

Теорема 1. Пусть две векторные оценки одинаковым образом изменены по двум равновероятным событиям; если эти векторные оценки одинаковы по предпочтительности, то они и останутся одинаковыми по предпочтительности; если же первая векторная оценка предпочтительнее второй, то она останется предпочтительнее второй: если $A \sim B \succ \emptyset$, то при любых a и b из $xI\tilde{z}y$ следует $x'I\tilde{z}'y'$, а из $xP\tilde{z}y$ следует $x'P\tilde{z}'y'$.

Доказательства теорем вынесены в Приложение.

Теорема 2. Пусть две векторные оценки, первая из которых не менее предпочтительна, чем вторая, одинаковым образом изменены по двум событиям. Если первая векторная оценка улучшена по более вероятному событию или ухудшена по менее вероятному событию, то первая из полученных векторных оценок будет предпочтительнее второй: если $(A \succ B$ и $a < b)$ или $(A \prec B$ и $a > b)$, то $xR\tilde{z}y \Rightarrow x'P\tilde{z}'y'$.

Теоремы 1 и 2 являются обобщениями аксиом 4 и 5 и также могут быть использованы при построении двойных цепочек. В записи цепочек специально используем отношение $A \prec B$ вместо $B \succ A$, чтобы дополнительно указать, что используется теорема 2 с ухудшением векторных оценок.

Пример 3. Пусть $n = 5$, $V = \{1, 2, \dots, 10\}$, полная качественная вероятность задана соотношениями (2). Начнем с $x = (5, 5, 5, 5, 5)$. Поскольку $1235 \prec 12345$, то по теореме 2 верно $(4, 4, 4, 5, 4) P\tilde{z} (4, 4, 4, 4, 4)$. Далее, так как $1235 \prec 245$, то $(3, 3, 3, 5, 3) P\tilde{z} (4, 3, 4, 3, 3)$. С учетом $13 \prec 45$ получаем $(2, 3, 2, 5, 3) P\tilde{z} (4, 3, 4, 2, 2)$. Но $1 \prec 4$, и поэтому $(1, 3, 2, 5, 3) P\tilde{z} (4, 3, 4, 1, 2)$. Имеем цепочку (эта цепочка является убывающей):

$$\begin{array}{ccccccccc} (5, 5, 5, 5, 5) & \rightarrow & (4, 4, 4, 5, 4) & \rightarrow & (3, 3, 3, 5, 3) & \rightarrow & (2, 3, 2, 5, 3) & \rightarrow & (1, 3, 2, 5, 3) \\ & & \downarrow_{1235 \prec 12345} & & \downarrow_{1235 \prec 245} & & \downarrow_{13 \prec 45} & & \downarrow_{1 \prec 4} \\ (5, 5, 5, 5, 5) & \rightarrow & (4, 4, 4, 4, 4) & \rightarrow & (4, 3, 4, 3, 3) & \rightarrow & (4, 3, 4, 2, 2) & \rightarrow & (4, 3, 4, 1, 2). \end{array}$$

5. Построение отношений предпочтения и безразличия

В основе приведенных ниже решающих правил лежит развитие идей теории качественной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений [21]. Для их формулировки каждой паре векторных оценок x и y поставим в соответствие упорядоченное по неубыванию множество, состоящее из их компонент:

$$W(x, y) = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\} \cup \{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\} = \{w_1, \dots, w_q\},$$

где $q \leq 2n$ и зависит от x и y , $w_1 < \dots < w_q$. Векторным оценкам поставим в соответствие $2(q - 1)$ множеств номеров компонент:

$$\begin{aligned} M_k(x) &= \{i \in N \mid x_i \geq w_k\}, & M_k(y) &= \{i \in N \mid y_i \geq w_k\}, & k &= 2, 3, \dots, q. \\ L_k(x) &= \{i \in N \mid x_i \leq w_k\}, & L_k(y) &= \{i \in N \mid y_i \leq w_k\}, & k &= q - 1, q - 2, \dots, 1. \end{aligned}$$

Теорема 3. Соотношение $xR^{\sim}y$ верно тогда и только тогда, когда справедливы соотношения:

$$(3) \quad M_k(x) \succsim M_k(y), \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

При этом если в (3) все $\succsim$ суть $\sim$, то $xI^{\sim}y$. В противном случае (когда в (3) имеется $\succ$) верно $xP^{\sim}y$.

Пример 4. В условиях примера 2 сравним векторные оценки $x = (1, 3, 2, 5, 3)$ и $y = (4, 3, 4, 1, 2)$. Для них $W(x, y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $q = 5$. Согласно (3) имеем:

$$\begin{aligned} w_2 = 2, M_2(x) &= \{2, 3, 4, 5\} \succ \{1, 2, 3, 5\} = M_2(y); \\ w_3 = 3, M_3(x) &= \{2, 4, 5\} \succ \{1, 2, 3\} = M_3(y); \\ w_4 = 4, M_4(x) &= \{4\} \succ \{1, 3\} = M_4(y); \\ w_5 = 5, M_5(x) &= \{4\} \succ \emptyset = M_5(y), \end{aligned}$$

так что верно $xP^{\sim}y$. Легко видеть, что в процессе последовательного использования (3) порождается как раз двойная цепочка из примера 2.

В силу рефлексивности и транзитивности качественной вероятности $\succsim$ определяемое согласно (3) отношение $R^{\sim}$ действительно оказывается квазипорядком, но в общем случае лишь частичным. Однако в случае $q = 2$ и полной качественной вероятности любые две векторные оценки согласно (3) оказываются сравнимыми по предпочтительности.

Пример 5. Пусть $V = \{1, 2\}$ и полная качественная вероятность задается соотношениями (2). Полное упорядочение множества X всех тридцати двух ($= 2^5$) векторных оценок, которые для краткости записаны в мультипликативном виде, таково:

$$\begin{aligned} &22222 P 12222 P 21222 P 22122 P 11222 P 12122 P 22212 P 12212 P \\ &P 21122 P 22221 P 11122 P 21212 P 22112 P 12221 P 11212 P 21221 P \\ &P 12112 P 22121 P 21112 P 11221 P 12121 P 22211 P 11112 P 12211 P \\ &P 21121 P 11121 P 21211 P 22111 P 11211 P 12111 P 21111 P 11111. \end{aligned}$$

Можно сформулировать также решающее правило, эквивалентное (3) и в некотором смысле двойственное ему.

Теорема 4. Соотношение $xR^{\sim}y$ верно тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$(4) \quad L_k(x) \precsim L_k(y), \quad k = q - 1, q - 2, \dots, 1.$$

При этом если в (4) все $\precsim$ суть $\sim$, то $xI^{\sim}y$. В противном случае (когда в (4) имеется $\prec$) верно $xP^{\sim}y$.

Рассматривая множества $M_k(x)$ и $L_k(x)$ как подмножества универсального множества $U = N$, можно записать: $\overline{M}_{k+1}(x) = L_k(x)$ и $\overline{M}_{k+1}(y) = L_k(y)$, $k = 1, \dots, q - 1$, и тогда в свете свойства С7 сразу видно, что условия (3) и (4) равносильны.

Пример 6. В условиях примера 3 сравним векторные оценки $x = (1, 3, 2, 5, 3)$ и $y = (4, 3, 4, 1, 2)$. Для них $W(x, y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $q = 5$. Согласно (4) имеем:

$$w_4 = 4, L_4(x) = \{1, 2, 3, 5\} \prec \{1, 2, 3, 4, 5\} = L_4(y);$$

$$w_3 = 3, L_3(x) = \{1, 2, 3, 5\} \prec \{2, 4, 5\} = L_3(y);$$

$$w_2 = 2, L_2(x) = \{1, 3\} \prec \{4, 5\} = L_2(y);$$

$$w_1 = 1, L_1(x) = \{1\} \prec \{4\} = L_1(y),$$

так что верно $x P^{\sim} y$. В процессе последовательного использования (4) порождается как раз двойная цепочка из примера 3.

Замечание 1. Отношение нестрогого предпочтения на множестве стратегий для задач принятия решений при качественных оценках вероятностей и предпочтений вводилось ранее в [22] аналогично отношению нестрогого предпочтения для сравнимых по важности групп критериев, но оно было более узким, чем рассматриваемое здесь, и для него не было установлено аналитического решающего правила.

6. Заключение

В статье рассмотрена новая, ранее не изучавшаяся постановка задачи анализа принятия решений, в которой предпочтения оцениваются по порядковой шкале, а возможности реализации значений неопределенного фактора выражаются с помощью качественной вероятности. При этом не предполагается, что качественная вероятность может быть представлена количественной. Разработан и обоснован подход к анализу таких проблем и предложены эффективные решающие правила, которые позволяют попарно сравнивать стратегии по предпочтительности и удалять неприемлемые (доминируемые).

Известно, что применение одних качественных оценок обычно не позволяет полностью решить задачу выделения одной оптимальной стратегии, а лишь приводит к сужению множества претендентов на нее. Это облегчает дальнейший анализ (в частности, требует получения меньшего числа количественных оценок предпочтений, причем более простых, например интервальных). Поэтому получение и использование только качественных оценок обычно происходит на первых этапах итеративных процедур решения задач выбора [20, 23].

Полученные результаты можно рассматривать как первый шаг на пути к разработке методологии анализа решений, ориентированной на случаи, в которых предпочтения и вероятности событий оцениваются качественно. Дальнейшие исследования могут быть направлены на учет отношения людей к риску, включение более общих типов отношений предпочтений в набор результатов (например, частичных отношений, которые являются общими для многокритериальных задач), а также более совершенных шкал для представления отношений предпочтений (например, шкалы показателей первого порядка).

Доказательство свойства C7. Рассмотрим сначала случай 1, когда $A \cap B = \emptyset$. Из этого следует $A \subseteq \overline{B}$ и $B \subseteq \overline{A}$. Обозначим $C = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Очевидно, что $A \cap C = B \cap C = \emptyset$. Распишем $A \cup C = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup \overline{B}$. Тогда из $A \subseteq \overline{B}$ следует $A \cup C = \overline{B}$. Аналогично, $B \cup C = \overline{A}$. Так как $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то по свойству C4 получаем $A \lesssim B \Leftrightarrow A \cup C \lesssim B \cup C \Leftrightarrow \overline{B} \lesssim \overline{A}$.

Теперь рассмотрим общий случай 2, когда $A \cap B \neq \emptyset$. Обозначим $D = A \cap B$. По свойству C4 имеем $A \lesssim B \Leftrightarrow A \setminus D \lesssim B \setminus D$. Поскольку $A \setminus D \cap B \setminus D = \emptyset$, то из рассмотренного выше случая 1 следует $A \setminus D \lesssim B \setminus D \Leftrightarrow \overline{B \setminus D} \lesssim \overline{A \setminus D}$. Преобразуем $\overline{A \setminus D} = \overline{A} \cup D$ и $\overline{B \setminus D} = \overline{B} \cup D$. Так как $\overline{A} \cap D = \overline{B} \cap D = \emptyset$, то по свойству C4 имеем $\overline{B} \cup D \lesssim \overline{A} \cup D \Leftrightarrow \overline{B} \lesssim \overline{A}$. В итоге получаем требуемое $A \lesssim B \Leftrightarrow \overline{B} \lesssim \overline{A}$. Свойство C7 доказано.

Доказательства теорем 1 и 2 получаются намного проще, если использовать теорему 3. Поэтому сначала приведем доказательство теоремы 3, которое не использует теоремы 1 и 2.

Доказательство теоремы 3. Введем оператор параллельного улучшения векторных оценок:

$$\uparrow [A, B, a, b], \text{ где } A, B \in 2^A, a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Область определения оператора – множество пар векторных оценок (x, y) , таких что $x_i = y_j = a, i \in A, j \in B$. Результатом действия оператора на (x, y) является пара векторных оценок (x', y') , таких что $x' = (x \parallel x_i = b, i \in A)$, $y' = (y \parallel y_j = b, j \in B)$. Таким образом, для действия оператора должны выполняться аксиомы 4 и 5 отношения $R^{\lesssim}$. А отношение $x R^{\lesssim} y$ между произвольными векторными оценками x и y выполняется тогда и только тогда, когда существует векторная оценка z и суперпозиция операторов улучшения вида:

$$(П.1) \quad (x, y) = \uparrow [A_L, B_L, a_L, b_L] \dots \uparrow [A_1, B_1, a_1, b_1] (z, z),$$

где $A_l \lesssim B_l, l = 1, \dots, L$. Очевидно, что для компонент векторной оценки z должны выполняться условия $z_i \leq x_i$ и $z_i \leq y_i, i \in N$. Далее для удобства будем считать, что для всех $i \in N$ выполняется $z_i \geq w_1 = \min_{j \in N} \{x_j, y_j\}$. В противном случае можно увеличить значения соответствующих компонент с помощью оператора $\uparrow [\{i\}, \{i\}, z_i, w_1]$.

Последовательность применения операторов (П.1) соответствует двойной цепочке, начинающейся с векторной оценки z . Поэтому далее выражение вида (П.1) будем также называть двойной цепочкой.

Сравнение векторных оценок x и y при помощи решающего правила (3) можно представить в виде суперпозиции операторов улучшения следующего вида:

$$(П.2) \quad (x, y) = \uparrow [M_q(x), M_q(y), w_{q-1}, w_q] \dots \uparrow [M_2(x), M_2(y), w_1, w_2] (e, e),$$

где $e = (w_1, \dots, w_1)$. Существование двойной цепочки (П.2) доказывает достаточное условие теоремы 3.

Перейдем к доказательству необходимости. Пусть задана некоторая двойная цепочка вида (П.1). Для нее обозначим $U = W(x, y) \cup \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_L\} \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_L\} = \{u_1, \dots, u_r\}$, где $r \leq 2n + 2L$, $u_1 < \dots < u_r$. В силу сделанного допущения $z_i \geq w_1$, $i \in N$, должно выполняться $u_1 = w_1$. Кроме того, $u_r = w_q$, так как величины $a_l, b_l, l = 1, \dots, L$, не могут превышать конечные значения компонент векторных оценок x и y . Таким образом, границы неравномерных сеток U и $W(x, y)$ совпадают, но в общем случае U может быть более мелкой, чем $W(x, y)$, т.е. $W(x, y) \subseteq U$.

Построим с помощью (П.1) двойную цепочку вида (П.2) по шагам:

- 1) Перейдем от начальной векторной оценки z к e .
- 2) Разобьем все операторы на операторы с шагом по соседним узлам неравномерной сетки U .
- 3) Отсортируем операторы по возрастанию номера k шага по сетке U .
- 4) Объединим операторы с совпадающими k в общий оператор.
- 5) Объединим операторы внутри шага по сетке $W(x, y)$ в общий оператор.

Шаг 1. Из (e, e) легко получить (z, z) , последовательно применяя операторы улучшения $\uparrow [\{i\}, \{i\}, w_1, z_i]$ для всех $i \in N$, при которых $z_i > w_1$. Напомним, что в (П.1) сделано допущение $z_i \geq w_1$, $i \in N$. Получившееся выражение подставим в (П.1) вместо (z, z) .

Шаг 2. Интервал приращения в произвольном операторе улучшения может быть разбит по следующему правилу:

$$(П.3) \quad \uparrow [A, B, a, b] = \uparrow [A, B, c, b] \uparrow [A, B, a, c], \text{ где } a < c < b.$$

Пользуясь свойством (П.3), каждый оператор $\uparrow [A, B, u_k, u_t]$, $k < t$, в имеющейся цепочке можно выразить через операторы с шагами по сетке U :

$$\uparrow [A, B, u_k, u_t] = \uparrow [A, B, u_{t-1}, u_t] \dots \uparrow [A, B, u_{k+1}, u_{k+2}] \uparrow [A, B, u_k, u_{k+1}].$$

Шаг 3. Рассмотрим любые два соседние оператора в получившейся цепочке:

$$\dots \uparrow [C, D, u_{t-1}, u_t] \uparrow [A, B, u_{k-1}, u_k] \dots$$

Если $k \leq t$, оставляем операторы в той же последовательности. А случай $k > t$ возможен только тогда, когда $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \emptyset$, иначе результат действия оператора $\uparrow [A, B, u_{k-1}, u_k]$ не попадет в область определения оператора $\uparrow [C, D, u_{t-1}, u_t]$. Так как эти два оператора действуют на непересекающиеся множества компонент векторных оценок, то эти соседние операторы можно переставить местами в общей последовательности выполнения операторов без влияния на общий результат.

Используя рассмотренную перестановку соседних операторов, отсортируем по возрастанию k всю последовательность операторов.

Шаг 4. Для каждого $k = 2, \dots, r$ рассмотрим все операторы, увеличивающие компоненты векторных оценок от u_{k-1} до u_k . Благодаря выполненной на предыдущем шаге сортировке, все эти операторы образуют подпоследовательность:

$$\uparrow [A_{km}, B_{km}, u_{k-1}, u_k] \dots \uparrow [A_{k2}, B_{k2}, u_{k-1}, u_k] \uparrow [A_{k1}, B_{k1}, u_{k-1}, u_k].$$

Рассмотрим интервал $w_{t-1} < u_k \leq w_t$ на более крупной сетке $W(x, y)$. Для каждого $k = 2, \dots, r$ он существует, так как $w_1 < u_2$ и $u_r = w_q$. Получается, что при преобразовании (П.1) от векторной оценки e до векторной оценки x компоненты с номерами из множеств $A_{k1}, \dots, A_{km}$ увеличивались от u_{k-1} до u_k , т.е. для них в итоге $x_i \geq u_k$. При этом множества $A_{k1}, \dots, A_{km}$ попарно не пересекаются, так как одна и та же компонента векторной оценки не может быть увеличена от u_{k-1} до u_k более одного раза. Так как итоговые значения компонент векторной оценки x принадлежат $W(x, y)$, то $x_i \geq w_t$. А это по определению значит, что $N_t(x) = A_{k1} \cup A_{k2} \cup \dots \cup A_{km}$. Аналогично, $N_t(y) = B_{k1} \cup B_{k2} \cup \dots \cup B_{km}$ и множества $B_{k1}, \dots, B_{km}$ попарно не пересекаются. Тогда из $A_{ki} \succsim B_{ki}$, $i = 1, \dots, m$, по свойству Сб качественной вероятности (см. раздел 3) следует $N_t(x) \succsim N_t(y)$. И рассмотренную подпоследовательность операторов можно свернуть в один: $\uparrow [N_t(x), N_t(y), u_{k-1}, u_k]$.

Шаг 5. Предыдущие рассуждения совпадают для всех шагов $[u_{k-1}, u_k]$ сетки U , попадающих внутрь шага $[w_{t-1}, w_t]$ сетки $W(x, y)$, а именно, $[u_{k_{t-1}}, u_{k_{t-1}+1}]$, $[u_{k_{t-1}+1}, u_{k_{t-1}+2}]$, $\dots$, $[u_{k_t-1}, u_{k_t}]$, где $u_{k_{t-1}} = w_{t-1}$, $u_{k_t} = w_t$. Кроме того, весь интервал $[w_{t-1}, w_t]$ должен быть покрыт этими шагами сетки U , так как в векторных оценках x и y компоненты с номерами из $N_t(x)$ и $N_t(y)$ соответственно в итоге увеличивались от w_{t-1} до w_t . Поэтому операторы $\uparrow [N_t(x), N_t(y), u_{k-1}, u_k]$ для всех $k = k_{t-1} + 1, \dots, k_t$ можно свернуть в один оператор по свойству (П.3):

$$\begin{aligned} \uparrow [N_t(x), N_t(y), w_{t-1}, w_t] &= \uparrow [N_t(x), N_t(y), u_{k_{t-1}}, u_{k_t}] \dots \\ &\dots \uparrow [N_t(x), N_t(y), u_{k_{t-1}}, u_{k_{t-1}+1}]. \end{aligned}$$

Искомая цепочка (П.2) получена. Необходимое условие теоремы 3 доказано.

Лемма 1. Если $A = B \succ \emptyset$, то при любых a и b из $xI \tilde{\succ} y$ следует $x'I \tilde{\succ} y'$, а из $xP \tilde{\succ} y$ следует $x'P \tilde{\succ} y'$.

Доказательство леммы 1. Условие леммы 1 при $a < b$ следует из аксиомы 4. Предположим, что при $A = B$ и $a > b$ выполняется $xR \tilde{\succ} y$. Рассмотрим объединение множеств $W = W(x, y) \cup W(x', y')$. От $W(x, y)$ оно отличается добавлением числа b , если его не было в $W(x, y)$. А от $W(x', y')$ оно отличается добавлением числа a , если его не было в $W(x', y')$. Пусть $W = \{w_1, \dots, w_q\}$, $w_1 < \dots < w_q$. Добавление элементов в $W(x, y)$ не влияет на выполнение условий решающего правила (3), поэтому из $xR \tilde{\succ} y$ по теореме 3 следует

$$(П.4) \quad M_k(x) \succsim M_k(y), \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

При этом в случае $xI\tilde{>}y$ в (П.4) для всех k верно $M_k(x) \sim M_k(y)$, а в случае $xP\tilde{>}y$ в (П.4) хотя бы для одного k выполняется $M_k(x) \succ M_k(y)$.

Обозначим $w_{k_a} = a$, $w_{k_b} = b$. Заметим, что при $k \leq k_b$ и $k > k_a$ выполняются равенства множеств $M_k(x') = M_k(x)$ и $M_k(y') = M_k(y)$. А при $k_b < k \leq k_a$ справедливо $M_k(x') \cup A = M_k(x)$, $M_k(x') \cap A = \emptyset$ и $M_k(y') \cup A = M_k(y)$, $M_k(y') \cap A = \emptyset$. Тогда по аксиоме аддитивности из $M_k(x) \sim M_k(y)$ следует $M_k(x') \sim M_k(y')$, а из $M_k(x) \succ M_k(y)$ следует $M_k(x') \succ M_k(y')$. Поэтому по теореме 3 с учетом (П.4) в случае $xI\tilde{>}y$ получаем $x'I\tilde{>}y'$, а в случае $xP\tilde{>}y$ получаем $x'P\tilde{>}y'$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. При $a < b$ утверждение теоремы 1 следует из аксиомы 4. Предположим, что при $a > b$ выполняется $xR\tilde{>}y$. Ухудшим векторные оценки x и y по одному и тому же событию $C = A \cup B$: $x'' = (x \parallel x_i = b, i \in C)$, $y'' = (y \parallel y_i = b, i \in C)$. Тогда по лемме 1 верно $x''R\tilde{>}y''$. Заметим, что векторные оценки x' и y' могут быть получены путем улучшения одинаковым образом (от b до a) векторных оценок x'' и y'' по событиям $B \setminus A$ и $A \setminus B$ соответственно. Но из $A \sim B$ по аксиоме аддитивности следует $B \setminus A \sim A \setminus B$. Тогда по аксиоме 4 получаем $x'R\tilde{>}y'$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. При $A \succ B$ и $a < b$ утверждение теоремы 2 следует из аксиомы 5. Предположим, что при $A \prec B$ и $a > b$ выполняется $xR\tilde{>}y$. Ухудшим векторные оценки x и y по одному и тому же событию $C = A \cup B$: $x'' = (x \parallel x_i = b, i \in C)$, $y'' = (y \parallel y_i = b, i \in C)$. Тогда по лемме 1 верно $x''R\tilde{>}y''$. Заметим, что векторные оценки x' и y' могут быть получены путем улучшения одинаковым образом (от b до a) векторных оценок x'' и y'' по событиям $B \setminus A$ и $A \setminus B$ соответственно. Но из $A \prec B$ по аксиоме аддитивности следует $B \setminus A \succ A \setminus B$. Тогда по аксиоме 5 получаем $x'P\tilde{>}y'$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейман Дж., фон Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. Пер. с англ. М.: Наука Физматлит, 1970.
2. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. Пер. с англ. М.: Наука, 1978.
3. *Briggs R.A.* Normative theories of rational choice: expected utility / The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2023 Edition). E.N. Zalta, U. Nodelman (eds.). <https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/rationality-normative-utility/>
4. *Muller A., Stoyan D.* Comparison methods for stochastic models and risks. Chichester: Wiley: 2002.
5. *Kovacevic R.W., Pflug G.C., Pichler A.* Measuring and managing risk. In: Baker, H.K., Filbeck, G. (Eds.). Investment Risk Management. New York: Oxford University press, 2015. P. 17–41.
6. *Montiel L.V., Bickel E.* Decision making with partial probabilistic or preference information // Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science. 2015. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470400531.eorms1104>

7. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Введение и критический обзор. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
8. Schoemaker P. The expected utility model: its variants, purposes, evidence and limitations // Journal of Economic Literature. 1982. V. 20. P. 529–563.
9. Райфа Х. Анализ решений: введение в проблему выбора в условиях неопределенности. Пер. с англ. М.: Наука, 1977.
10. Fishburn P.C. Decision and Value Theory. New York: Wiley, 1964.
11. Kirkwood C.W., Sarin R.K. Ranking with partial information: a method and an application // Operations Research. 1985. V. 33. P. 38–48.
12. Подиновский В.В. Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // АиТ. 2004. № 11. С. 141–159.
Podinovskii V.V. Decision under multiple estimates for the importance coefficients of criteria and probabilities of values of uncertain factors in the aim function // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 11. P. 1817–1833.
13. Подиновский В.В. Меры риска как критерии выбора при вероятностной неопределенности // Искусственный интеллект и принятие решений. 2015. № 2. С. 60–74.
14. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. М.: Наука, 1979.
15. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Метод анализа решений в условиях неопределенности при качественном оценивании предпочтений и вероятностей // Доклады РАН. Матем., информ., проц. упр. 2025. Т. 524. № 4. С. 47–50.
16. Пфанцгаль И. Теория измерений. Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
17. Fishburn P.C. The axioms of subjective probability // Statistical Science. 1986. V. 1. P. 335–345.
18. Kraft C.H., Pratt J.W., Seidenberg A. Intuitive probability on finite sets // Annals of mathematical statistics. 1959. V. 30. P. 408–419.
19. Fishburn P.C. Linear extensions of additive partial orders // Order. 1997–1998. V. 14. P. 153–169.
20. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2025.
21. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности группами критериев // АиТ. 2022. № 7. С. 119–136.
Nelyubin A.P., Podinovski V.V. Multicriteria problems with importance-ordered criteria groups // Autom. Remote Control. 2022. No. 7. P. 1108–1122.
22. Подиновский В.В. Анализ решений в условиях неопределенности при нечисловом оценивании предпочтений и вероятностей // Проблемы управления. 2020. № 1. С. 48–58. <https://doi.org/10.25728/ru.2020.1.5>
23. Гафт М.Г., Подиновский В.В. О построении решающих правил в задачах принятия решений // АиТ. 1981. № 6. С. 128–138.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 07.08.2025

После доработки 18.09.2025

Принята к публикации 17.12.2025

СОДЕРЖАНИЕ

Станислав Николаевич Васильев (к 80-летию со дня рождения)	3
--	---

Линейные системы

Кружков В.И. Метод нахождения точек внутри области достижимости для линейной дискретной модели объекта высокого порядка с переменными параметрами	6
Кустов А.Ю., Юрченков А.В. Подход к параметризации субоптимальных анизотропийных регуляторов	23
Хацкевич В.Л. О взаимосвязи средних характеристик нечеткого сигнала на входе и выходе линейной динамической системы	37
Щеглова А.А. Детектируемость нестационарных дифференциально-алгебраических уравнений со скалярным выходом	59

Нелинейные системы

Аветисян В.В., Степанян С.П. Достижимые конфигурации двузвенного манипулятора с ограниченными угловыми скоростями при оптимальном по быстродействию управлению	84
---	----

Управление в технических системах

Александров А.Ю. Управление трехосной ориентацией твердого тела при наличии запаздывания в обратной связи	100
--	-----

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Теоретические основы и методы анализа решений в условиях неопределенности при качественных оценках вероятностей и предпочтений	113
--	-----

C O N T E N T S

To the 80th Anniversary of Academician S.N. Vassilyev	3
---	---

Linear Systems

Kruzhkov V.I. An Approach to Finding Points Inside the Reachable Set for a Linear Discrete Large-Order Model with Time-Varying Parameters	6
Kustov A.Yu., Yurchenkov A.V. An Approach to Parametrization of Suboptimal Anisotropic Controllers	23
Khatskevich V.L. On the Relationship between the Average Characteristics of a Fuzzy Signal at the Input and Output of a Linear Dynamic System	37
Shcheglova A.A. Detectability of Time-Varying Differential-Algebraic Equations with Scalar Output	59

Nonlinear Systems

Avetisyan V.V., Stepanyan S.P. Reachable Configurations of a Two-Link Manip- ulator under Time-Optimal Control with Bounded Angular Velocities	84
--	----

Control in Technical Systems

Aleksandrov A.Yu. Control of the Triaxial Orientation of a Rigid Body under a Delay in the Feedback Law	100
---	-----

Intellectual Control Systems, Data Analysis

Nelyubin A.P., Podinovski V.V. Theoretical Basis and Methods of Decision Anal- ysis under Uncertainty with Qualitative Estimates of Probabilities and Prefer- ences	113
--	-----