



Российская Академия Наук

ISSN 0005-2310 (Print)
ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

8

АВГУСТ

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И., Моржин О.В., Мунасыпов Р.А.,
Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я.,
Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю.,
Рапопорт Л.Б., Родионов И.В., Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А.,
Филимонюк Л.Ю., Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Чхатишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2026 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychhev@yandex.ru)
(АО «Концерн Радиоэлектронные технологии», Москва)

ГИБРИДНО-РОБАСТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И НЕЛИНЕЙНОГО ФАКТОРА

Применительно к задачам вторичной обработки информации развивается гибридно-робастный метод оптимального оценивания различных числовых характеристик (линейных функционалов) при наличии факторов параметрической неопределенности по отношению к информационному процессу, регулярной и нерегулярной помехам, а также корреляционной функции (в том числе и с нелинейными параметрами) шума измерений. Метод полностью или частично инвариантен к указанным факторам и позволяет формировать искомые оценки, не прибегая к процедуре расширения вектора оцениваемых параметров и без привлечения процедур линеаризации. Приводится сравнение с известными методами оценивания, анализируются случайные и методические погрешности, а также достигаемый вычислительный эффект. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: вторичная обработка информации, существенная неопределенность, векторный линейный функционал, спектральные коэффициенты, нелинейный фактор, гибридно-робастный метод, условие инвариантности, условная оптимизация, семейство гипотез, расширенный метод наименьших квадратов, декомпозиция.

DOI: 10.7868/S2413977726080019

1. Введение

При решении широкого круга задач вторичной обработки информации с использованием косвенных измерений (когда сняты проблемы, связанные с обнаружением, различением и распознаванием сигналов) зачастую возникает существенная неопределенность. Она может быть связана с отсутствием достоверных знаний о законах распределения ошибок измерений, наличием аномальных одиночных и групповых ошибок и т.д. (см., например, [1–32]). С подобными ситуациями зачастую приходится сталкиваться, например, при определении движения летательных аппаратов по результатам траекторных измерений в ракетно-космической области [3].

Основу алгоритмов обработки для данных этапов составляют классические вероятностные методы максимума апостериорной плотности вероятности или максимального правдоподобия, как правило, в расширенном вариан-

те (см., например, [1–4]). Этот вариант предполагает включение всех неизвестных параметров неопределенности в расширенный вектор состояния, однако процедура расширения приводит на практике к резкому росту вычислительных затрат, известному эффекту «размазывания точности» и проблемам со сходимостью и устойчивостью формируемых оценок. Анализ показывает, что для условий существенной неопределенности классические вероятностные методы оценивания зачастую малопригодны, однако их можно эффективно использовать для создания гибридно-робастных алгоритмов или на этапе математического моделирования для исследования потенциальных возможностей измерительных систем.

Существуют и другие методы оценивания, которые можно использовать в условиях неопределенности. К ним относятся: расширенный метод наименьших квадратов (РМНК) [3], методы минимума различных геометрических и кинематических невязок [30], метод инвариантов [31], всевозможные методы линейной и нелинейной фильтрации (например, калмановской) [1, 3, 10, 14, 25, 26], различные адаптивные методы с подстройкой параметров [9, 26], робастные [1, 14, 27], рандомизированные [20, 21], кластерные [21, 32] и нейросетевые [28] методы, а также большое число эвристических методов (см., например, [5, 8, 11, 13, 29]). При выполнении ряда ограничений на условия наблюдения указанные методы позволяют преодолевать факторы неопределенности, например бороться с аномальными ошибками. Однако в условиях существенной неопределенности данные методы сталкиваются с различными непредвиденными ограничениями и жесткими требованиями к алгоритмам обработки измерений, которые значительно сужают сферу их применения. Кроме того, они, как правило, гарантируют сходимость в среднем (либо по ансамблю реализаций, либо по одной достаточно длинной реализации), но не гарантируют качество формируемой оценки по одной выборке малого или среднего объема. При этом в большинстве известных процедур оценивания в основном используется весовая обработка, в которой расчет весовых коэффициентов осуществляется априорно на основании большого объема доступной статистической информации. Если такая информация отсутствует или оказывается недостоверной, то необходимо прибегать к апостериорным весовым коэффициентам, которые должны варьироваться от одной выборки измерений к другой.

Рассмотренные выше методы, как правило, направлены на решение задач оценивания спектральных коэффициентов информационных процессов (ИП) либо нахождения их сглаженных значений. Однако в практике измерений весьма актуальна более общая задача, связанная с оптимальным оцениванием различных числовых характеристик ИП. Речь идет о векторе линейных функционалов (ВЛФ), в качестве координат которого могут рассматриваться, например, производные различных порядков от ИП для решения задач, связанных с прогнозированием движения летательных аппаратов и их идентификацией в системах гражданского и военного назначения.

Для достаточно благоприятных условий наблюдения оценка ВЛФ также может осуществляться на базе классических вероятностных методов, например на основе методов максимума апостериорной плотности вероятности или максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов (МНК) и его расширенного аналога РМНК, а также их различных модификаций. При наличии в наблюдениях помех регулярной структуры (представимых в виде линейной оболочки заданной системы базисных функций с неизвестными спектральными коэффициентами) для оптимальной оценки ВЛФ применим метод обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания (МОИНО) [15, 16], который приводит к декомпозиции вычислений и обращению матриц меньшей размерности (по сравнению с РМНК), а в качестве априорных данных использует информацию о нулевом математическом ожидании и заданной корреляционной функции шума измерений.

При наличии в наблюдениях не только регулярных (РП), но и нерегулярных помех (НП), для которых не существует компактных (с точки зрения числа степеней свободы) математических моделей, можно использовать модифицированный метод ОИНО для спектрального анализа составляющих входного наблюдения [17]. Данная модификация дает хороший результат на выборках такого объема, когда можно создать достаточное количество редуцированных временных сеток, среди которых найдутся такие, которые не связаны с НП. Однако для большого класса прикладных задач, в которых приходится оперировать с выборками среднего и малого объема, применение такого метода зачастую оказывается достаточно проблематичным. Кроме того, модифицированный метод ОИНО ориентирован на случай, когда априорно известна корреляционная матрица шума входного наблюдения. Но на практике данный шум может быть полупределенным, т.е. нецентрированным (с неизвестным математическим ожиданием) и характеризоваться параметризованной корреляционной функцией, заданной с точностью до структуры. Для ее параметров (как линейных, так и нелинейных) указывается лишь некоторая область неопределенности. Указанная неопределенность относительно характеристик шума измерений, а также параметров РП и НП зачастую приводит к существенному искажению результатов оценивания. Поэтому требуется разработка более совершенного метода оценивания ВЛФ применительно к условиям неопределенности.

В настоящей статье развивается такой гибридно-робастный метод (ГРМ), учитывающий как априорные, так и апостериорные данные, не требующий проведения процедур линеаризации и расширения вектора оцениваемых параметров. Он сохраняет все достоинства известного метода ОИНО [15, 16] и его модификации [17] в плане декомпозиции, использует лишь простейшие операции сложения, умножения и обращения матриц, а для построения результирующей оценки ВЛФ применяет несложную операцию объединения множества условно оптимальных частных оценок, соответствующих семейству используемых альтернативных гипотез. Термин «декомпозиция» применяется в том смысле, что возможно независимое (раздельное) оценивание

любой числовой характеристики (линейного функционала) для каждой составляющей входного наблюдения, представимой конечной линейной комбинацией заданных базисных функций с неизвестными спектральными коэффициентами. К числу таких составляющих относятся ИП и РП.

ГРМ ориентирован, в первую очередь, на измерительные системы с параллельными вычислениями, чтобы обеспечить требуемую оперативность для организации режима реального времени при обработке входных наблюдений. Именно такие вычисления позволяют эффективно бороться с проблемой нелинейности путем организации большого числа каналов обработки данных для сформированного семейства альтернативных гипотез относительно нелинейного фактора неопределенности.

2. Основные понятия, модели и ограничения

Обозначим через $x_{\text{ИП}}(t) = x_1(t)$ и $x_{\text{РП}}(t) = x_2(t)$ соответственно ИП и РП:

$$(2.1) \quad x_i(t) = \boldsymbol{\psi}_i^T(t) \boldsymbol{\gamma}_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad t \in [0, T],$$

где $\boldsymbol{\psi}_i(t) = [\psi_{im}(t), m = \overline{1, V_i}]^T$ – вектор заданных базисных функций, $\boldsymbol{\gamma}_i = [\gamma_{im}, m = \overline{1, V_i}]^T$ – вектор неизвестных спектральных коэффициентов.

Также вводится НП $z(t)$, присутствующая в измерениях (в том или ином виде) и практически не поддающаяся компактному аналитическому описанию, с небольшим числом степеней свободы. Она, например, может содержать составляющие «хвостов» функциональных бесконечных рядов, используемых для описания ИП и РП, а также неизвестное математическое ожидание шума измерений. Кроме того, $z(t)$ может включать в себя различные ошибки измерений, например аномальные (одиночные или групповые) как естественные, так и преднамеренные. Кроме того, в различных условиях наблюдения могут возникнуть заранее не ожидаемые медленно и (или) быстроменяющиеся составляющие НП, природа которых заранее не известна. Бороться с такой помехой крайне сложно, так как она не соответствует ожидаемым условиям измерительного эксперимента, ее можно характеризовать коэффициентом засоренности [17].

Сформируем уравнение наблюдений (в непрерывном времени)

$$(2.2) \quad h(t) = x_1(t) + x_2(t) + z(t) + \xi(t), \quad t \in [0, T],$$

где $\xi(t)$ – центрированный полуопределенный шум измерений, характеризующийся нулевым математическим ожиданием и параметризованной (заданной с точностью до параметров) корреляционной функцией $k(t', t'', \mathbf{q})$, где $t', t'' \in [0, T]$, $\mathbf{q} = [q_r, r = \overline{1, Q}]^T$ – вектор постоянных параметров.

При реализации известных методов оценивания (МНК, РМНК и МОИНО) в качестве $\mathbf{q}$ традиционно выбирается некоторое номинальное фиксированное значение $\mathbf{q}_0$.

Если рассматривать нецентрированный шум $\tilde{\xi}(t)$, то и в этом случае несложно воспользоваться уравнением (2.2), включив ненулевое математическое ожидание либо в РП (если оно описывается небольшим набором базисных функций), либо непосредственно в НП (если оно имеет расширенное спектральное представление). На координаты вектора $\mathbf{q}$ накладываются ограничения для области возможной неопределенности $\alpha_r \leq q_r \leq \beta_r$, где $\alpha_r > 0$ и $\beta_r > 0$, при этом $\mathbf{q}_0$ принадлежит данной области.

Введем ВЛФ (набор числовых характеристик) $\mathbf{\Omega} = [\mathbf{\Omega}_1^T, \mathbf{\Omega}_2^T]^T = [\varsigma_j, j = \overline{1, M_1 + M_2}]^T$, где

$$\mathbf{\Omega}_i = \mathbf{\Omega}_i\{x_i(t)\} = [\omega_{ir}\{x_i(t)\}, r = \overline{1, M_i}]^T = [\varsigma_{ir}, r = \overline{1, M_i}]^T, \quad i \in \{1, 2\},$$

где ς_{ir} – r -я числовая характеристика для составляющей $x_i(t)$ из (2.1).

Рассматривается общий случай, когда для каждой составляющей $x_1(t)$ или $x_2(t)$ могут раздельно вычисляться свои числовые характеристики (линейные функционалы).

Ставится задача нахождения оптимальной оценки $\mathbf{\Omega}_i^* = \mathbf{P}_i^{\Omega} \mathbf{H}$ для ВЛФ $\mathbf{\Omega}_i$. Здесь $\mathbf{P}_i^{\Omega}$ – матрица линейного оценивания, $\mathbf{H}$ – вектор наблюдений (дискретная выборка для функции $h(t)$ на временной сетке $\{t_1, \dots, t_N\}$):

$$(2.3) \quad \mathbf{H} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z} + \mathbf{\Xi},$$

где $\mathbf{X}_i = [x_{in}, n = \overline{1, N}]^T$, $x_{in} = x_i(t_n)$, $i \in \{1, 2\}$, $\mathbf{Z} = [z_n, n = \overline{1, N}]^T$, $\mathbf{\Xi} = [\xi_n, n = \overline{1, N}]^T$, $z_n = z(t_n)$, $\xi_n = \xi(t_n)$, $t_n \in [0, T]$.

НП можно характеризовать коэффициентом засоренности $\rho_{\mathbf{Z}} = 100 \times N_{\mathbf{Z}}/N$ [%], где $N_{\mathbf{Z}}$ – количество всех тех координат вектора $\mathbf{Z}$, которые могут существенно повлиять на результаты оценивания, если использовать любые оптимальные алгоритмы обработки измерений, не учитывающие НП. В дальнейшем полагаем, что объем выборки (2.3) как минимум превосходит общее число степеней свободы принятых математических моделей (т.е. $N \geq V_1 + V_2 + Q + N_{\mathbf{Z}}$, а для практики зачастую $N \gg V_1 + V_2 + Q + N_{\mathbf{Z}}$) и обеспечивает необходимый сглаживающий эффект (по отношению к шуму $\mathbf{\Xi}$).

С учетом принятых моделей для составляющих $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выборку (2.3) представим в следующем виде:

$$(2.4) \quad \mathbf{H} = \mathbf{\Psi}_1 \boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{\Psi}_2 \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{Z} + \mathbf{\Xi} = \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Z} + \mathbf{\Xi},$$

где

$\mathbf{\Psi}_i = [\psi_{imn}, n = \overline{1, N}, m = \overline{1, V_i}]$ – базисная матрица составляющей $x_i(t)$, $\psi_{imn} = \psi_{im}(t_n)$,

$\mathbf{\Psi} = [\mathbf{\Psi}_1; \mathbf{\Psi}_2]$ – объединенная базисная матрица для двух составляющих уравнения наблюдения (2.3),

$$\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_1^T, \boldsymbol{\gamma}_2^T]^T = [\gamma_j, j = \overline{1, V_1 + V_2}]^T.$$

Матрица $\mathbf{P}_i^\Omega = [p_{imn}^\Omega, m = \overline{1, M_i}, n = \overline{1, N}]$ должна обеспечивать выполнение ряда условий.

Первое условие (инвариантность оценки по отношению к $\mathbf{X}_j$):

$$(2.5) \quad \mathbf{P}_i^\Omega \mathbf{X}_j = \mathbf{P}_i^\Omega \Psi_j \gamma_j = [\mathbf{0}]_{M_i \times 1}, \quad i \neq j.$$

Второе условие (несмещенность оценки):

$$(2.6) \quad \mathbf{P}_i^\Omega \mathbf{X}_i = \mathbf{P}_i^\Omega \Psi_i \gamma_i = \Omega_i.$$

Третье условие (минимизация следа корреляционной матрицы $\mathbf{K}_i^\Omega = [k_{ilp}^\Omega, l, p = \overline{1, M_i}]$ ошибок оценивания):

$$(2.7) \quad Sp \mathbf{K}_i^\Omega = Sp [\mathbf{P}_i^\Omega \mathbf{K} (\mathbf{P}_i^\Omega)^T] \rightarrow \min,$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{q}) = [k(t_n, t_m, \mathbf{q}), n, m = \overline{1, N}]$ – корреляционная матрица шума Ξ .

Условие (2.5) показывает, что при оценивании ВЛФ для $x_i(t)$ другая составляющая $x_j(t)$ рассматривается как помеха и наоборот. Условия (2.6) и (2.7) соответствуют любой процедуре оптимального линейного оценивания [1–4].

Помимо временной сетки $\{t_1, \dots, t_N\}$ используем также многомерную сетку узлов $\{\mathbf{q}_{(1)}, \dots, \mathbf{q}_{(L)}\}$, которая покрывает область $[\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_Q, \beta_Q]$ (например, равномерно) таким образом, чтобы мощности L хватало для качественного описания функции $k(t', t'', \mathbf{q})$ на всей области определения $[0, T] \times [0, T] \times [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_Q, \beta_Q]$. Матрица $\mathbf{P}_i^\Omega$ зависит от $\mathbf{q}$, следовательно, $\mathbf{P}_i^\Omega = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})$ и $\Omega_i^* = \Omega_i^*(\mathbf{q})$. Таким образом, выбор оптимального значения $\mathbf{q}^*$ для параметра $\mathbf{q}$ должен осуществляться в рамках дополнительного решающего правила, учитывающего присутствие в (2.3) составляющей $\mathbf{Z}$ и результаты построения множества частных оценок параметров γ_1 и γ_2 для семейства узлов $\{\mathbf{q}_{(1)}, \dots, \mathbf{q}_{(L)}\}$.

Требуется с учетом (2.1)–(2.7) разработать ГРМ оценивания значений ВЛФ Ω_i (где $i \in \{1, 2\}$) в условиях факторов неопределенности относительно векторных параметров γ_1 , γ_2 , $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{q}$. В такой общей постановке задача оценивания является нелинейной, поскольку некоторые координаты вектора $\mathbf{q}$ могут входить в функцию $k(t', t'', \mathbf{q})$ нелинейно.

Предлагаемый ГРМ должен позволить обойти указанные проблемы, связанные с нелинейностью, и быть ориентированным на применение простейших операций сложения, умножения и обращения матриц в линейном варианте. В отличие от известного метода ОИНО [15, 16] и его известной модификации [17] рассматривается более общая задача, связанная не только со спектральным анализом, но и с оцениванием ВЛФ, шум измерений является полуопределенным (имеем параметрическую неопределенность при описании его корреляционной функции с учетом нелинейного фактора) и, кроме того, в наблюдении присутствует НП $\mathbf{Z}$. Также должна обеспечиваться возможность раздельного оценивания любой координаты (числовой характеристики) ВЛФ как для ИП, так и для РП.

3. Основные расчетные соотношения

Обозначим через $\mathbf{P}_{ir}^\Omega = [p_{irn}^\Omega, n = \overline{1, N}]^T$ вектор-столбец, который состоит из элементов r -й строки матрицы $\mathbf{P}_i^\Omega$. Данный вектор используется для нахождения оценки $\zeta_{ir}^* = (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \mathbf{H}$ отдельной координаты (числовой характеристики) ζ_{ir} ВЛФ Ω_i .

Для фиксированного значения $\mathbf{q}$, с учетом ранее сформулированных условий (2.5)–(2.7), задача поиска вектора оптимального оценивания $\mathbf{P}_{ir}^\Omega = \mathbf{P}_{ir}^\Omega(\mathbf{q})$ связана с нахождением минимума функции (полагая здесь и далее $i \neq j$)

$$(3.1) \quad J(\mathbf{P}_{ir}^\Omega, \boldsymbol{\varphi}_{ir}, \boldsymbol{\theta}_{ir}) = (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \mathbf{K} \mathbf{P}_{ir}^\Omega + (\boldsymbol{\varphi}_{ir})^T (\boldsymbol{\Psi}_j)^T \mathbf{P}_{ir}^\Omega + \\ + \left\{ \omega_r^T \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} - (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \boldsymbol{\Psi}_i \right\} \boldsymbol{\theta}_{ir},$$

где

$[\boldsymbol{\varphi}_{ir}]_{V_j \times 1}$ и $[\boldsymbol{\theta}_{ir}]_{V_i \times 1}$ – векторные множители Лагранжа (здесь и далее квадратными скобками с нижними индексами будут указываться размерности соответствующих матриц и векторов),

$\omega_r \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} = [\omega_r \{ \psi_{im} \}, m = \overline{1, M_i}]^T$ – вектор значений скалярного функционала $\omega_r \{ \cdot \}$ на всех базисных функциях составляющей $x_i(t)$ из (2.1).

Функция (3.1) соответствует эквивалентным (ранее сформулированным) условиям:

$$(3.2) \quad \omega_r^T \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} - (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \boldsymbol{\Psi}_i = [\mathbf{0}]_{1 \times V_i}$$

– первое условие,

$$(3.3) \quad \boldsymbol{\Psi}_j^T \mathbf{P}_{ir}^\Omega = [\mathbf{0}]_{V_j \times 1}$$

– второе условие,

$$(3.4) \quad \min_{\mathbf{P}_{ir}^\Omega} (\sigma_{ir}^\Omega)^2 = \min_{\mathbf{P}_{ir}^\Omega} (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \mathbf{K} \mathbf{P}_{ir}^\Omega$$

– третье условие (где $(\sigma_{ir}^\Omega)^2$ – дисперсия ошибки оценивания числовой характеристики ζ_{ir}).

Опуская несложные, но достаточно громоздкие выкладки, получаем решение задачи условной оптимизации (3.1)–(3.4) в виде (по аналогии с [17])

$$(3.5) \quad \mathbf{P}_{ir}^\Omega = \boldsymbol{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i (\boldsymbol{\Psi}_i^T \boldsymbol{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i)^{-1} \omega_r \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \},$$

$$(3.6) \quad \boldsymbol{\Lambda}_j = \mathbf{E} - \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_j \left[(\boldsymbol{\Psi}_j)^T \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_j \right]^{-1} (\boldsymbol{\Psi}_j)^T,$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица размером $N \times N$.

С учетом (3.5) находим искомую матрицу $\mathbf{P}_i^\Omega = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})$ для линейного оценивания ВЛФ:

$$(3.7) \quad \mathbf{P}_i^\Omega = \left[\boldsymbol{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i (\boldsymbol{\Psi}_i^T \boldsymbol{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} \right]^T,$$

где $\boldsymbol{\Omega} \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} = [\omega_r \{ \psi_{im}(t) \}, m = \overline{1, V_i}, r = \overline{1, M_i}] = [\zeta_{irm}^\psi, m = \overline{1, V_i}, r = \overline{1, M_i}]$.

Следует помнить, что все составляющие в (3.5)–(3.7) зависят от параметра $\mathbf{q}$.

В частном случае, когда $M_i = V_i$ и $\mathbf{\Omega}_i = \boldsymbol{\gamma}_i$ (т.е. в качестве ВЛФ рассматривается вектор спектральных коэффициентов составляющей $x_i(t)$), с учетом (3.7) получаем следующую матрицу линейного оценивания:

$$(3.8) \quad \mathbf{P}_i^Y = \left[\mathbf{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i (\boldsymbol{\Psi}_i^T \mathbf{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i)^{-1} \right]^T.$$

Для фиксированных значений i и $\mathbf{q}$ строим оптимальную оценку для ВЛФ

$$(3.9) \quad \mathbf{\Omega}_i^*(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q}) \mathbf{H}.$$

Ей отвечает следующая корреляционная матрица ошибок оценивания:

$$(3.10) \quad \mathbf{K}_i^\Omega(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q}) \mathbf{K}(\mathbf{q}) [\mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})]^T.$$

В частном случае, используя матрицу $\mathbf{P}_i^Y(\mathbf{q})$, находим оптимальную оценку

$$(3.11) \quad \boldsymbol{\gamma}_i^*(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^Y(\mathbf{q}) \mathbf{H}$$

и корреляционную матрицу

$$(3.12) \quad \mathbf{K}_i^Y(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^Y(\mathbf{q}) \mathbf{K}(\mathbf{q}) [\mathbf{P}_i^Y(\mathbf{q})]^T.$$

Следует отметить, что при $\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$ указанные выше оценки окажутся смещенными.

Для фиксированного $\mathbf{q}$ можно найти невязку (с учетом двух оценок $\boldsymbol{\gamma}_1^*(\mathbf{q})$ и $\boldsymbol{\gamma}_2^*(\mathbf{q})$)

$$(3.13) \quad \Delta(\mathbf{q}) = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{H} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{q}),$$

где $\boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{q}) = \left[[\boldsymbol{\gamma}_1^*(\mathbf{q})]^T, [\boldsymbol{\gamma}_2^*(\mathbf{q})]^T \right]^T = \left[\gamma_j^*(\mathbf{q}), j = \overline{1, V_1 + V_2} \right]^T$ – оценка для вектора $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}) = \left[\boldsymbol{\gamma}_1^T(\mathbf{q}), \boldsymbol{\gamma}_2^T(\mathbf{q}) \right]^T = \left[\gamma_j(\mathbf{q}), j = \overline{1, V_1 + V_2} \right]^T$.

Поскольку есть произвол в выборе значения $\mathbf{q}$, то для преодоления нелинейного фактора и частичной компенсации влияния НП $\mathbf{Z}$ на результаты оценивания поступим следующим образом. Сформируем семейство гипотез $\{\Gamma_{(l)}\}_{l=1}^L$, каждая из которых соответствует наиболее предпочтительному (в соответствии с гипотезой $\Gamma_{(l)}$) фиксированному узлу $\mathbf{q}_{(l)}$, входящему в область неопределенности $[\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_Q, \beta_Q]$. Следовательно, для каждого $\mathbf{q}_{(l)}$ можно найти частную оценку $\boldsymbol{\gamma}_{(l)}^* = \boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{q}_{(l)})$ и частную невязку

$$\Delta_{(l)}^* = \Delta(\boldsymbol{\gamma}_{(l)}^*) = \mathbf{H} - \mathbf{H}_{(l)}^* = \mathbf{H} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\gamma}_{(l)}^*.$$

С учетом (2.3) и (3.11) преобразуем эту невязку к виду

$$\begin{aligned}
 \Delta_{(l)}^* &= \mathbf{H} - \left(\Psi_1 \gamma_{1(l)}^* + \Psi_2 \gamma_{2(l)}^* \right) = \\
 (3.14) \quad &= \mathbf{Z} + \Xi - \left(\Psi_1 \mathbf{P}_{1(l)} + \Psi_2 \mathbf{P}_{2(l)} \right) (\mathbf{Z} + \Xi) = \\
 &= [\mathbf{E} - (\Psi_1 \mathbf{P}_{1(l)} + \Psi_2 \mathbf{P}_{2(l)})] (\mathbf{Z} + \Xi) = \vartheta_{(l)} (\mathbf{Z} + \Xi),
 \end{aligned}$$

где $[\vartheta_{(l)}]_{N \times N}$ – матрица коэффициентов влияния составляющей $\mathbf{Z} + \Xi$.

Математическое ожидание невязки:

$$(3.15) \quad M \left\{ \Delta_{(l)}^* \right\} = \vartheta_{(l)} \mathbf{Z}.$$

Следует отметить, что при построении матриц линейного оценивания $\mathbf{P}_{ir}^\Omega(\mathbf{q}_{(l)})$ (для всех узлов многомерной сетки) используется только априорная статистическая информация и принятые математические модели. Набор таких матриц позволяет сформировать семейства частных оценок $\Omega_{1(l)}^* = \mathbf{P}_{1(l)}^\Omega \mathbf{H}$, $\Omega_{2(l)}^* = \mathbf{P}_{2(l)}^\Omega \mathbf{H}$, $\Omega_{(l)}^* = \left[\left(\Omega_{1(l)}^* \right)^T, \left(\Omega_{2(l)}^* \right)^T \right]^T$ и $\gamma_{1(l)}^* = \mathbf{P}_{1(l)}^\gamma \mathbf{H}$, $\gamma_{2(l)}^* = \mathbf{P}_{2(l)}^\gamma \mathbf{H}$, $\gamma_{(l)}^* = \left[\left(\gamma_{1(l)}^* \right)^T, \left(\gamma_{2(l)}^* \right)^T \right]^T$, где $l = \overline{1, L}$.

В свою очередь, результирующие оценки γ^* и Ω^* , формируемые на базе частных оценок, находятся в рамках ГРМ с использованием некоторого оператора $\mathcal{J}_{\text{opt}}$ с учетом всей имеющейся априорной и апостериорной информации:

$$(3.16) \quad \mathcal{J}_{\text{opt}} : \left(\left\{ \gamma_{(l)}^* \right\}_{l=1}^L, \left\{ \Omega_{(l)}^* \right\}_{l=1}^L \right) \rightarrow (\gamma^*, \Omega^*).$$

Например, в качестве $\mathcal{J}_{\text{opt}}$ может быть принят оператор, обеспечивающий минимум квадратичной формы $F_{(l)} = \left(\Delta_{(l)}^* \right)^T \mathbf{W}_{(l)} \Delta_{(l)}^*$ (алгоритм поиска экстремума):

$$(3.17) \quad \gamma^* = \gamma_{(l^*)}^*, \quad \Omega^* = \Omega_{(l^*)}^*, \quad l^* = \arg \min_l F_{(l)},$$

где l^* – оптимальный номер узла $\mathbf{q}_{(l^*)}$, $l^* \in \{1, \dots, L\}$.

В (3.17) под $\mathbf{W}_{(l)}$ понимается весовая нормированная матрица

$$\mathbf{W}_{(l)} = \mathbf{W}(\mathbf{q}_{(l)}) = \left\| \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}_{(l)}) \right\|^{-1} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}_{(l)}), \quad \left\| \mathbf{W}_{(l)} \right\| = 1 \quad \forall l = \overline{1, L},$$

где $\left\| \cdot \right\|$ – любая из норм, используемых при обработке измерений.

Алгоритм (3.17), несмотря на оптимальность, имеет основной недостаток: для его реализации необходимо иметь оценки всех координат расширенного вектора γ^* , необходимых для формирования невязки $\Delta_{(l)}^* = \mathbf{H} - \Psi \gamma_{(l)}^*$. Кроме того, квадратичная форма, рассматриваемая как функция аргумента l ,

должна иметь один глобальный минимум. Если имеется несколько конкурирующих узлов $\mathbf{q}_{(l_1)}, \dots, \mathbf{q}_{(l_d)}$ (где $l_1, \dots, l_d \in \{1, \dots, L\}$, $d \leq L$) с приблизительно одинаковыми локальными минимумами, то для отбора таких узлов необходимо ввести параметр (выраженный в процентах)

$$\delta_{F(l)} = 100(F_{(l)} - F_{\min})(F_{\max} - F_{\min})^{-1},$$

где $F_{\min} = \min_l F_{(l)}$, $F_{\max} = \max_l F_{(l)}$.

Если задать числовой порог δ_{F0} (также выраженный в процентах), то критерий формирования конкурирующих узлов соответствует выполнению условия $\delta_{F(l)} \leq \delta_{F0}$. Для таких узлов в качестве $\mathcal{J}_{\text{opt}}$ целесообразно применять оператор $\bar{\mathcal{J}}_{\text{opt}}$, обеспечивающий усреднение конкурирующих частных оценок (*алгоритм усреднения*):

$$(3.18) \quad \bar{\boldsymbol{\gamma}}^* = d^{-1} \sum_{k=1}^d \boldsymbol{\gamma}_{(l_k)}^*, \quad \bar{\boldsymbol{\Omega}}^* = d^{-1} \sum_{k=1}^d \boldsymbol{\Omega}_{(l_k)}^*.$$

Для устранения основного недостатка оптимального алгоритма (3.17) целесообразно использовать квазиоптимальный оператор $\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\text{opt}}$ робастного мажоритарного оценивания [33], например, на основе метода выборочной медианы (с использованием вариационного ряда для четного или нечетного случая (*мажоритарный алгоритм*)).

Так применительно к вектору $\boldsymbol{\gamma}$ все одноименные координаты $\gamma_{j(l)}^*, \dots, \gamma_{j(L)}^*$ векторов $\left\{ \boldsymbol{\gamma}_{(l)}^* = [\gamma_{j(l)}^*, j = \overline{1, V_1 + V_2}]^T \right\}_{l=1}^L$ для каждого фиксированного $j \in \{1, \dots, V_1 + V_2\}$ выстраиваются в вариационные ряды: $\gamma_{j[1]}^*, \gamma_{j[2]}^*, \dots, \gamma_{j[L]}^*$, где $\gamma_{j[1]}^* < \gamma_{j[2]}^* < \dots < \gamma_{j[L]}^*$. Аналогично строятся ряды $\zeta_{j[1]}^*, \zeta_{j[2]}^*, \dots, \zeta_{j[L]}^*$ для векторов $\boldsymbol{\Omega}_{(l)}^* = \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_{1(l)}^* \right)^T, \left(\boldsymbol{\Omega}_{2(l)}^* \right)^T \right]^T = [\zeta_{j(l)}^*, j = \overline{1, M_1 + M_2}]^T$.

Оптимальная результирующая оценка каждой координаты γ_j вектора $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_1^T, \boldsymbol{\gamma}_2^T]^T = [\gamma_j, j = \overline{1, V_1 + V_2}]^T$ и каждой координаты ζ_j вектора $\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\Omega}_1^T, \boldsymbol{\Omega}_2^T]^T = [\zeta_j, j = \overline{1, M_1 + M_2}]^T$ находится по правилу

$$(3.19) \quad \bar{\bar{\gamma}}_j^* = 2^{-1}(\gamma_{j[L/2]}^* + \gamma_{j[L/2+1]}^*), \quad \bar{\bar{\zeta}}_j^* = 2^{-1}(\zeta_{j[L/2]}^* + \zeta_{j[L/2+1]}^*)$$

– для четного L (т.е. оценка соответствует среднему от двух центральных членов вариационного ряда),

$$(3.20) \quad \bar{\bar{\gamma}}_j^* = \gamma_{j[(L-1)/2-1]}^*, \quad \bar{\bar{\zeta}}_j^* = \zeta_{j[(L-1)/2-1]}^*$$

– для нечетного L (т.е. оценка совпадает с центральным членом вариационного ряда).

Мажоритарный алгоритм для случаев (3.19) и (3.20) основан на отбрасывании «хвостов» данного ряда и обладает высокой степенью устойчивости к факторам неопределенности. Для его реализации нет необходимости оценивания всех координат вектора $\boldsymbol{\gamma}$, построения невязок $\boldsymbol{\Delta}_{(l)}^*$ и минимизации квадратичной формы $F_{(l)} = \left(\boldsymbol{\Delta}_{(l)}^*\right)^T \mathbf{W}_{(l)} \boldsymbol{\Delta}_{(l)}^*$ по аргументу l .

Оптимальная результирующая оценка ВЛФ $\boldsymbol{\Omega}_i$ применительно к составляющей $x_i(t)$ находится как

$$(3.21) \quad \boldsymbol{\Omega}_{i(l^*)}^* = \mathbf{P}_{i(l^*)}^\Omega \mathbf{H}.$$

Данной оценке соответствует следующая корреляционная матрица ошибок оценивания:

$$(3.22) \quad \mathbf{K}_{i(l^*)}^\Omega = \mathbf{P}_{i(l^*)}^\Omega \mathbf{K}_{(l^*)} \left(\mathbf{P}_{i(l^*)}^\Omega\right)^T.$$

Можно показать, что построение оценки (3.21) для ВЛФ $\boldsymbol{\Omega}_i$, в первую очередь, связано с нахождением оптимальной результирующей оценки (для вектора $\boldsymbol{\gamma}$)

$$(3.23) \quad \boldsymbol{\gamma}_{i(l^*)}^* = \mathbf{P}_{i(l^*)}^\gamma \mathbf{H}$$

с корреляционной матрицей ошибок оценивания

$$(3.24) \quad \mathbf{K}_{i(l^*)}^\gamma = \mathbf{P}_{i(l^*)}^\gamma \mathbf{K}_{(l^*)} \left(\mathbf{P}_{i(l^*)}^\gamma\right)^T.$$

Это вытекает из того, что

$$(3.25) \quad \boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\Omega}\{x_i(t)\} = \boldsymbol{\Omega}\{\boldsymbol{\psi}_i^T(t)\boldsymbol{\gamma}_i\} = \boldsymbol{\Omega}\{\boldsymbol{\psi}_i^T(t)\}\boldsymbol{\gamma}_i.$$

С учетом (3.21) имеем

$$(3.26) \quad \boldsymbol{\Omega}_{i(l^*)}^* = \boldsymbol{\Omega}\{\boldsymbol{\psi}_i^T(t)\}\boldsymbol{\gamma}_{i(l^*)}^* = \boldsymbol{\Omega}\{\boldsymbol{\psi}_i^T(t)\}\mathbf{P}_{i(l^*)}^\gamma \mathbf{H}.$$

Таким образом, для сравнительного анализа различных методов оценивания ВЛФ достаточно ограничиться случаем, когда $M_i = V_i$ и $\boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\gamma}_i$, т.е. рассматривать задачу оценивания спектральных коэффициентов составляющей $x_i(t)$.

Следует отметить, что сформированные результирующие оценки при $\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$ также окажутся смещенными, но с учетом (3.16)–(3.20) появляется возможность минимизации этого смещения для каждой фиксированной выборки $\mathbf{H}$.

Соотношения (3.1)–(3.26) составляют основу ГРМ.

В следующем разделе обсуждаются условия применимости ГРМ и его сравнительный анализ с МНК и РМНК.

4. Математические аспекты исследования эффективности предлагаемого метода

Рассмотрим вопрос, связанный с возможным смещением оценки ВЛФ относительно истинного значения, обусловленным влиянием НП $\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$ и неопределенностью относительно параметра $\mathbf{q}$. Примем $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$, где $\Delta\mathbf{q}$ будем рассматривать в качестве «возмущения». Определим его влияние на результат оценивания. Теперь, вместо $\mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})$, оперируем с матрицей

$$\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}}),$$

где $\Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}})$ – матрица «возмущений», при этом выполняется условие $\Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$.

Найдем невязку, обусловленную наличием $\Delta\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Delta\Omega_i(\tilde{\mathbf{q}}) &= \Omega_i^*(\tilde{\mathbf{q}}) - \Omega_i^*(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})\mathbf{H} + \Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}})\mathbf{H} - \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})\mathbf{H} = \\ &= \Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}}) (\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_j + \mathbf{Z} + \Xi). \end{aligned}$$

Математическое ожидание данной ошибки

$$(4.2) \quad M\{\Delta\Omega_i(\tilde{\mathbf{q}})\} = \Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}}) (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}).$$

Применяя любую из норм $\|\cdot\|$, можно воспользоваться неравенством

$$(4.3) \quad \Delta_i^\Omega \leq \Delta_i^P \eta_i,$$

где $\Delta_i^\Omega = \max_{\tilde{\mathbf{q}}} \|M\{\Delta\Omega_i(\tilde{\mathbf{q}})\}\|$, $\Delta_i^P = \max_{\tilde{\mathbf{q}}} \|\Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}})\|$,

$$\eta_i = \max_{\gamma_1, \gamma_2, \mathbf{Z}} \|\Psi_1\gamma_1 + \Psi_2\gamma_2 + \mathbf{Z}\|.$$

При расчете Δ_i^Ω и Δ_i^P максимум находится для всей области неопределенности $[\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_Q, \beta_Q]$, а для вычисления η_i – с учетом области возможных значений векторов γ_1 , γ_2 и $\mathbf{Z}$.

Рассмотрим три оценки: $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ – раздельная оценка для γ_1 на основе МНК (без учета РП и НП), $\gamma_{(\text{РМНК})}^*$ – единая оценка для $\gamma = [\gamma_1^T, \gamma_2^T]^T$ на базе РМНК (без учета НП), $\gamma_{(\text{ГРМ})i}^*$ – раздельная оценка для γ_i на основе разработанного ГРМ (с целью сокращения записей параметр $\mathbf{q}$ ниже опускается). Опираясь на [3], дадим комплексную оценку этих методов с точки зрения их корректности в постановке измерительного эксперимента в условиях отсутствия и присутствия РП и НП.

Применительно к МНК, не использующего процедуру расширения, определим влияние объединенной помехи $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z} = \Psi_2\gamma_2 + \mathbf{Z}$ на оценку $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ вектора γ_1 спектральных коэффициентов ИП. Применяя оператор нахождения математического ожидания $M\{\cdot\}$, несложно показать, что

$$(4.4) \quad M\{\gamma_{(\text{МНК})1}^*\} = \gamma_1 + \mathbf{C}_1^{-1}\Psi_1^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Y}_2 = \gamma_1 + \mathbf{C}_1^{-1}\Psi_1^T\mathbf{K}^{-1}(\Psi_2\gamma_2 + \mathbf{Z}),$$

где $\mathbf{C}_1 = \Psi_1^T\mathbf{K}^{-1}\Psi_1$.

Второе слагаемое в (4.4) соответствует смещению оценки $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ относительно истинного значения γ_1 , если не учитывать вклад объединенной помехи $\mathbf{Y}_2$. Разброс $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ относительно γ_1 (без учета $\mathbf{Y}_2$) находится как

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{(\text{МНК})1}^\gamma &= M \left\{ \left(\gamma_{(\text{МНК})1}^* - \gamma_1 \right) \left(\gamma_{(\text{МНК})1}^* - \gamma_1 \right)^T \right\} = \\ &= \mathbf{C}_1^{-1} + \mathbf{B}_1 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_2^T \mathbf{B}_1^T = \\ &= \mathbf{C}_1^{-1} + \mathbf{B}_1 (\Psi_2 \gamma_2 + \mathbf{Z}) (\Psi_2 \gamma_2 + \mathbf{Z})^T \mathbf{B}_1^T, \end{aligned}$$

где $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1^{-1} \Psi_1^T \mathbf{K}^{-1}$.

В свою очередь, разброс оценки $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ относительно математического ожидания (4.4) (для МНК без учета $\mathbf{Y}_2$) вычисляется так:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}_{(\text{МНК})1}^\gamma &= \\ &= M \left\{ \left(\gamma_{(\text{МНК})1}^* - M \left\{ \gamma_{(\text{МНК})1}^* \right\} \right) \left(\gamma_{(\text{МНК})1}^* - M \left\{ \gamma_{(\text{МНК})1}^* \right\} \right)^T \right\} = \mathbf{C}_1^{-1}. \end{aligned}$$

В (4.6) под $\mathbf{K}_{(\text{МНК})1}^\gamma$ понимается корреляционная матрица ошибок оценивания спектральных коэффициентов ИП.

Прибегнем теперь к РМНК, который позволяет сформировать единую оценку $\gamma_{(\text{РМНК})}^*$ для вектора $\gamma = [\gamma_1^T, \gamma_2^T]^T$ спектральных коэффициентов ИП и РП (без учета НП $\mathbf{Z}$):

$$(4.7) \quad \gamma_{(\text{РМНК})}^* = \mathbf{C}^{-1} \Psi^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H},$$

где $\mathbf{C} = \Psi^T \mathbf{K}^{-1} \Psi$.

Математическое ожидание такой оценки (по аналогии с (4.4))

$$(4.8) \quad M \left\{ \gamma_{(\text{РМНК})}^* \right\} = \gamma + \mathbf{C}^{-1} \Psi^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Z},$$

где второе слагаемое характеризует ее смещение, обусловленное наличием НП.

Корреляционная матрица ошибок оценивания РМНК в этом случае имеет вид

$$(4.9) \quad \mathbf{K}_{(\text{РМНК})}^\gamma = \mathbf{C}^{-1} = (\Psi^T \mathbf{K}^{-1} \Psi)^{-1},$$

а матрица разброса оценки $\gamma_{(\text{РМНК})}^*$ относительно истинного значения γ по аналогии с (4.5) находится как

$$(4.10) \quad \tilde{\mathbf{K}}_{(\text{РМНК})}^\gamma = \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \mathbf{B}^T,$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \Psi^T \mathbf{K}^{-1}$.

Поскольку РМНК и ГРМ относятся к классу линейных оптимальных оценок, то они наследуют одни и те же потенциальные возможности (в плане точности). Поскольку матрица $\tilde{\mathbf{K}}_{(\text{РМНК})}^Y$ содержит четыре блока, т.е.

$$(4.11) \quad \tilde{\mathbf{K}}_{(\text{РМНК})}^Y = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix},$$

то выполняются условия $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{K}_1^Y = \mathbf{P}_1^Y \mathbf{K} [\mathbf{P}_1^Y]^T$ и $\mathbf{S}_{22} = \mathbf{K}_2^Y = \mathbf{P}_2^Y \mathbf{K} [\mathbf{P}_2^Y]^T$.

Допустим теперь, что объединенная помеха $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}$ (это сумма РП и НП) допускает конечно-аналитическое представление $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}$, где $\mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}}$ – заданная базисная матрица РП и НП, $\mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}$ – вектор неизвестных спектральных коэффициентов. Когда одновременно оцениваются векторы $\mathbf{\gamma}_1$ и $\mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}$ в рамках РМНК, то можно найти корреляционную матрицу ошибок совместного оценивания:

$$(4.12) \quad \mathbf{K}_{(\text{РМНК})1}^Y = \mathbf{C}_1^{-1} + \mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{D}_1 (\mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}})^T,$$

где

$$\mathbf{D}_1 = (\mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} - \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{\Psi}_1 \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{\Psi}_1^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}})^{-1}.$$

Для практики интересен вопрос, связанный с необходимостью расширения вектора оцениваемых параметров с учетом объединенной помехи $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}$. Пусть сформированы следы $\tilde{\chi} = Sp[\mathbf{B}_1 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_2^T \mathbf{B}_1^T]$ и $\chi = Sp[\mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{D}_1 (\mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}})^T]$ вторых матричных слагаемых из выражений (4.10) и (4.12) соответственно. Учитывая, что в $\tilde{\chi}$ фигурирует неизвестный векторный параметр $\mathbf{Y}_2$, можно заменить след $\tilde{\chi}$ его оценкой $\tilde{\chi}^* = Sp[\mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}^* (\mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}^*)^T \mathbf{B}_1^T]$. Далее проверяем выполнение условия

$$(4.13) \quad \tilde{\chi}^* > \chi.$$

В случае невыполнения данного условия можно считать, что влияние объединенной помехи $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}$ на оценку $\mathbf{\gamma}_1^*$ вектора $\mathbf{\gamma}_1$ достаточно мало и процедура расширения вектора оцениваемых параметров не нужна. В противном случае необходимо применять РМНК, а для ГРМ потребуется обеспечить выполнение условия инвариантности к $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}$ с учетом объединенной базисной матрицы $\mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}}$.

Соотношения (4.1)–(4.13) могут быть использованы на практике для сравнительного анализа трех методов и ответа на многие интересующие вопросы, связанные с постановкой измерительного эксперимента.

Анализ соотношений (3.5) и (3.6) показывает, что в ГРМ необходимо обращение матриц размером $V_1 \times V_1$ и $V_2 \times V_2$ соответственно, а в РМНК обращается матрица размером $(V_1 + V_2) \times (V_1 + V_2)$. Следовательно, с точки

зрения вычислительной устойчивости оценивание на базе ГРМ более предпочтительно, поскольку обращаются матрицы меньшего размера. Достигается также декомпозиция вычислительного процесса, поскольку оценивание ВЛФ осуществляется для каждой составляющей $x_i(t)$ независимо (раздельно) в своем канале обработки измерений.

Используя (4.1)–(4.13), можно подобрать необходимые параметры ГРМ, обеспечивающие минимизацию результирующей ошибки оценивания ВЛФ в каждом конкретном случае. Необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи оценивания в рамках ГРМ требуют невырожденности и соблюдения некоторых ограничений на ранги ряда матриц (по аналогии с [15–17]). Выполнение заданных условий на практике обеспечивается рациональным выбором используемых функциональных базисов, числа степеней свободы в принятых моделях, а также заданием соответствующих условий наблюдения. Все эти вопросы относятся к планированию вычислительного эксперимента и далее не рассматриваются, поскольку требуют отдельных исследований в каждом конкретном случае.

5. Алгоритм распознавания при наличии регулярной и нерегулярной погрешностей

Шаг 1. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ строим базисные матрицы $\Psi_{i(l)} = \Psi_i(\mathbf{q}_{(l)})$ и $\Psi_{j(l)} = \Psi_j(\mathbf{q}_{(l)})$, где $i \neq j$.

Шаг 2. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ с учетом (3.6) находим матрицу $\Lambda_{j(l)} = \Lambda_j(\mathbf{q}_{(l)})$.

Шаг 3. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ с учетом (3.8) находим матрицу весового оценивания $\mathbf{P}_{i(l)}^\gamma = \mathbf{P}_i^\gamma(\mathbf{q}_{(l)})$.

Шаг 4. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ с учетом (3.11) находим оптимальную оценку $\gamma_{i(l)}^* = \gamma_i^*(\mathbf{q}_{(l)})$.

Шаг 5. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ с учетом (3.13) формируем невязку $\Delta_{(l)} = \Delta(\mathbf{q}_{(l)})$.

Шаг 6. Для случая, когда функция $\Delta_{(l)}$ аргумента l имеет точку минимума согласно алгоритму поиска экстремума (3.17) находим оптимальный номер l^* узла $\mathbf{q}_{(l^*)}$, в котором достигается этот минимум, и результирующую оценку $\gamma^* = \gamma_{(l^*)}^*$.

Шаг 7. Этот шаг применяется в случае, когда нет явно выраженной точки минимума. Тогда результирующая оценка γ^* находится любым другим способом, например согласно алгоритму усреднения (3.18) либо мажоритарному алгоритму (3.19), (3.20).

Шаг 8. С учетом (3.21) вычисляем оптимальную результирующую оценку $\Omega_{i(l^*)}^*$ для ВЛФ Ω_i применительно к составляющей $x_i(t)$.

Шаг 9. С учетом (3.22) и (3.24) находим корреляционные матрицы $\mathbf{K}_{i(l^*)}^\Omega = \mathbf{K}_i^\Omega(\mathbf{q}_{(l^*)})$ и $\mathbf{K}_{i(l^*)}^\gamma = \mathbf{K}_i^\gamma(\mathbf{q}_{(l^*)})$.

6. Некоторые обобщения и практические рекомендации

Предлагаемый ГРМ можно трактовать и для более широких условий, если в качестве $\mathcal{I}_{\text{opt}}$ использовать оператор, обеспечивающий максимум соответствующей условной плотности вероятности (например, апостериорной или функции правдоподобия), зависящей от корреляционной матрицы $\mathbf{K}(\mathbf{q})$, заданной в параметрическом виде. Так, для гауссова шума измерений в качестве $\mathcal{I}_{\text{opt}}$ может быть принят оператор, обеспечивающий максимум функции правдоподобия

$$p\left(\mathbf{H}/\gamma_{(l)}^*\right) = (2\pi)^{-N/2} (\det \mathbf{K}(\mathbf{q}_{(l)}))^{-1/2} \exp \left\{ \left(\Delta_{(l)}^* \right)^T (\mathbf{q}_{(l)}) \Delta_{(l)}^* \right\}$$

по параметру l .

При этом в отличие от алгоритма (3.17) отпадает необходимость построения весовой нормированной матрицы $\mathbf{W}_{(l)}$, так как требуемая нормировка осуществляется естественным путем (с учетом свойств любой плотности вероятности).

Рассмотренный ГРМ к оцениванию ВЛФ можно распространить и на модели наблюдений более общего вида. Например, можно рассматривать в (2.1) базисные функции $\psi_{jm}(t, \mu_{jm})$, которые нелинейно зависят от векторного параметра μ_{jm} . В этом случае необходимо задавать общую область неопределенности для всех нелинейных параметров задачи оценивания и выбирать соответствующую мощность L числовой сетки покрытия этой области, достаточную для обеспечения заданной точности (см., например, [16]). При этом выбор размерностей всех моделей ИП и РП должен быть согласован с объемом N выборки (2.3).

Очевидно, что такой подход к оцениванию ВЛФ должен отвечать ресурсу используемой вычислительной среды, который напрямую зависит от количества рассматриваемых альтернативных гипотез. Чтобы уменьшить требования к этому ресурсу, целесообразно минимизировать количество нелинейных параметров (что эквивалентно уменьшению числа гипотез), а также повышать размерность вектора линейных параметров. Но и в этом случае надо добиваться разумного компромисса, чтобы исключить возможные парадоксы, связанные с оцениванием ВЛФ на практике. Ответы на подобные вопросы находятся в компетенции общей теории планирования измерительного эксперимента (см., например, [3]).

Возможно комплексирование ГРМ и метода оценивания [17], ориентированного на формирование семейства редуцированных сеток, соответствующих всем возможным вариантам появления НП в узлах исходной сетки $\{t_1, \dots, t_N\}$. При достаточно большом объеме данной сетки такое комплексирование может существенно снизить влияние РП и НП на результаты оценивания. Для ГРМ это приведет к дальнейшему увеличению объема семейства рассматриваемых альтернативных гипотез, при этом формируемая результирующая оценка будет соответствовать оптимальной редуцированной сетке,

для которой соответствующая невязка будет минимальна. В [17] приводятся критерий и алгоритм нахождения такой сетки, кроме того, рассмотрены различные варианты формирования семейства редуцированных сеток, согласованные с имеющимися вычислительными ресурсами.

Нормированную весовую матрицу можно задавать в виде $\mathbf{W}(q)$, где скалярный аргумент $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ отвечает различным вариантам наблюдения. Среди них можно предусмотреть такие варианты, которые учитывают не только свойства шума измерений, но и НП. Например, соответствующим подбором диагональных элементов матрицы $\mathbf{W}(q)$ зачастую удается добиться частичной компенсации НП (за счет ее режекции во временной области) и сглаживания шума.

Современный прогресс в области построения ЭВМ параллельного действия (особенно на новых принципах [34, 35]) позволяет надеяться, что предложенный ГРМ не станет препятствием для перспективных систем реального времени. Однако далеко не для всех существующих систем возможен такой подход, который на выборках большого объема и значительном числе альтернативных гипотез может потребовать огромного числа каналов параллельной обработки данных и существенных вычислительных затрат. В [15–17] приводятся расчетные соотношения, которые могут быть полезны при обосновании вычислительных затрат на реализацию ГРМ.

7. Тестовые примеры

Ограничимся простыми, но имеющими прикладное значение примерами, характерными, например, для высотометров некоторых типов воздушных объектов и связанными со сглаживанием траекторных измерений малого объема [3]. В модели (2.2) в качестве $x_1(t) = \gamma_1 = \text{const}$, например, можно рассматривать высоту барражирующего объекта (параметр γ_1 есть скалярный линейный функционал), а в качестве $x_2(t) = \gamma_2 t^2$ (где $\gamma_2 = \text{const}$) – медленно меняющуюся степенную РП. Эта помеха зачастую обусловлена несовершенством системы управления объекта или связана с воздействием помех различного происхождения на боковые лепестки диаграммы направленности антенны высотометра.

Для каждой фиксированной выборки измерений далее рассматривается относительный энергетический коэффициент

$$\varepsilon_E = \varepsilon_E(\mathbf{H}) = E_1 (E_2 + E_{\mathbf{Z}} + E_{\mathbf{\Xi}})^{-1} = \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} + \mathbf{\Xi}^T \mathbf{\Xi})^{-1},$$

который будет учитываться при сравнительной оценке развиваемого метода.

Пример 1. Данный пример предназначен только для более подробной демонстрации алгоритмических особенностей ГРМ и оценки его потенциальных возможностей. Неопределенность в отношении нестационарного некоррелированного шума измерений будем характеризовать матрицей $\mathbf{K} = \mathbf{K}(q) = \text{diag}[2 \exp\{-q(n-1)\}, n = \overline{1, N}]$, где $q > 0$, $\alpha \leq q \leq \beta$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Рассматривается задача спектрального анализа, связанная с нахождением оценки γ_1^* коэффициента γ_1 (для ИП) и оценки γ_2^* коэффициента γ_2 (для РП). Для упрощения (соответствующим масштабированием) все параметры задачи приведены к безразмерным величинам.

Для наглядной демонстрации ГРМ и его сравнительного анализа ограничимся малой выборкой ($N = 5$), при этом $[0, T] = [0, 5]$, $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = \overline{1, 5}$, $\Delta t = 1$.

Полагаем, что в (2.3): $V_1 = 1$, $\mathbf{\gamma}_1 = [\gamma_{11}]$, $\boldsymbol{\psi}_1(t) = [\psi_{11}(t)]$, $\psi_{11}(t) \equiv 1$, $\gamma_{11} = \gamma_1$, $V_2 = 1$, $\mathbf{\gamma}_2 = [\gamma_{21}]$, $\boldsymbol{\psi}_2(t) = [\psi_{21}(t)]$, $\psi_{21}(t) = t^2$, $\gamma_{21} = \gamma_2$, $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{11}, \gamma_{21}]^T = [\gamma_1, \gamma_2]^T$, $M_1 = 1$, $\boldsymbol{\Omega}\{x_1(t)\} = [\omega_1\{x_1(t)\}] = [\varsigma_{11}] = [\gamma_1]$, $M_2 = 1$, $\boldsymbol{\Omega}\{x_2(t)\} = [\omega_1\{x_2(t)\}] = [\varsigma_{21}] = [\gamma_2]$, $Q = 1$, $\mathbf{q} = [q_1]^T$, $q_1 = q$, $q > 0$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$.

Зададимся истинными значениями параметров для уравнения наблюдения (2.3): $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 10^{-1}$, $\alpha = 0$, $\beta = 9 \times 10^{-1}$, $L = 6$, $q_{(1)} = 0$, $q_{(2)} = 10^{-1}$, $q_{(3)} = 3 \times 10^{-1}$, $q_{(4)} = 5 \times 10^{-1}$, $q_{(5)} = 7 \times 10^{-1}$, $q_{(6)} = 9 \times 10^{-1}$. То есть рассматривается одномерная область неопределенности $[0, 5]$ для параметра q , в которой расположены равномерно шесть узлов. В рассматриваемом примере $\boldsymbol{\Psi}_1^T = [1, 1, 1, 1, 1]$ и $\boldsymbol{\Psi}_2^T = [1, 4, 9, 16, 25]$.

Сначала согласно (3.8) находим векторы $\mathbf{P}_{1(l)}^Y$ коэффициентов, необходимые для построения линейной оценки $\gamma_{1(l)}^*$ коэффициента γ_1 , инвариантной к РП:

$$\mathbf{P}_{1(1)}^Y = [0,4941; 0,4059; 0,2588; 0,0529; -0,2118]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(2)}^Y = [0,4495; 0,4118; 0,2985; 0,0876; -0,2474]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(3)}^Y = [0,3620; 0,4107; 0,3790; 0,1802; -0,3320]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(4)}^Y = [0,2803; 0,3923; 0,4547; 0,3066; -0,4339]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(5)}^Y = [0,2082; 0,3584; 0,5175; 0,4666; -0,5510]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(6)}^Y = [0,1482; 0,3133; 0,5605; 0,6550; -0,6771]^T.$$

Убеждаемся в выполнении условий несмещенности $\mathbf{P}_{1(l)}^Y \mathbf{X}_1 = \gamma_1$ (где $\mathbf{X}_1 = [10; 10; 10; 10; 10]^T$) и инвариантности $\mathbf{P}_{1(l)}^Y \mathbf{X}_2 = 0$ (где $\mathbf{X}_2 = [0,1; 0,4; 0,9; 1,6; 2,5]^T$) для всех $l = \overline{1, 6}$. При нахождении векторов строились матрицы $\boldsymbol{\Lambda}_{2(l)}$ для $\boldsymbol{\Lambda}_2$ из формулы (3.6). Например, для $l = 1$ имеем

$$\boldsymbol{\Lambda}_{2(1)} = \begin{bmatrix} 0,9990 & -0,0041 & -0,0092 & -0,0163 & -0,0255 \\ -0,0041 & 0,9837 & -0,0368 & -0,0654 & -0,1021 \\ -0,0092 & -0,0368 & 0,9173 & -0,1471 & -0,2298 \\ -0,0163 & -0,0654 & -0,1471 & 0,7385 & -0,4086 \\ -0,0255 & -0,1021 & -0,2298 & -0,4086 & 0,3616 \end{bmatrix}.$$

Далее, с учетом (3.12) находим дисперсии ошибок оценивания коэффициента γ_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_{1(1)}^2 &= 1,0471, & \sigma_{1(2)}^2 &= 0,9503, & \sigma_{1(3)}^2 &= 0,7625, \\ \sigma_{1(4)}^2 &= 0,5888, & \sigma_{1(5)}^2 &= 0,4364, & \sigma_{1(6)}^2 &= 0,3103.\end{aligned}$$

Видим, что для рассматриваемой области неопределенности (по параметру q) разброс дисперсий ошибок оценивания меняется в 3,37 раза. Это показывает, что точность оценивания γ_1 для ГРМ существенно зависит от выбранной гипотезы семейства $\{\Gamma_{(l)}\}_{l=1}^6$.

Если вместо векторов $\mathbf{P}_{1(l)}^\gamma$ использовать векторы $\bar{\mathbf{P}}_{1(l)}^\gamma$, не учитывающие РП $\mathbf{X}_2$ (что характерно для простого МНК), то получаем следующие смещения оценки γ_1^* :

$$\begin{aligned}\left(\bar{\mathbf{P}}_{1(1)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,1000, & \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(2)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,2207, & \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(3)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,4591, \\ \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(4)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,6733, & \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(5)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,8540, & \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(6)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 2,8015.\end{aligned}$$

Таким образом, игнорируя РП, можно получить ошибку до 28% при оценке коэффициента γ_1 на базе МНК.

Поскольку для реализации оптимального алгоритма (3.17) необходимо иметь также оценки $\gamma_{2(l)}^*$ для γ_2 , то были найдены соответствующие векторы весовых коэффициентов:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{2(1)}^\gamma &= [-0,0267; -0,0187; -0,0053; 0,0134; 0,0374]^T, \\ \mathbf{P}_{2(2)}^\gamma &= [-0,0235; -0,0191; -0,0082; 0,0107; 0,0401]^T, \\ \mathbf{P}_{2(3)}^\gamma &= [-0,0179; -0,0189; -0,0134; 0,0046; 0,0456]^T, \\ \mathbf{P}_{2(4)}^\gamma &= [-0,0133; -0,0177; -0,0177; -0,0028; 0,0515]^T, \\ \mathbf{P}_{2(5)}^\gamma &= [-0,0095; -0,0159; -0,0210; -0,0113; 0,0577]^T, \\ \mathbf{P}_{2(6)}^\gamma &= [-0,0066; -0,0137; -0,0231; -0,0206; 0,0639]^T.\end{aligned}$$

При нахождении данных векторов строились матрицы $\mathbf{\Lambda}_{1(l)}$ для $\mathbf{\Lambda}_1$ из формулы (3.6). Например, для $l = 3$ имеем следующую матрицу:

$$\mathbf{\Lambda}_{1(3)} = \begin{bmatrix} 0,8995 & -0,1005 & -0,1005 & -0,1005 & -0,1005 \\ -0,1356 & 0,8644 & -0,1356 & -0,1356 & -0,1356 \\ -0,1831 & -0,1831 & 0,8169 & -0,1831 & -0,1831 \\ -0,2472 & -0,2472 & -0,2472 & 0,7528 & -0,2472 \\ -0,3336 & -0,3336 & -0,3336 & -0,3336 & -0,6664 \end{bmatrix}.$$

Далее, с учетом (3.12) находим дисперсии ошибок оценивания параметра $\gamma_2 \times 10^{-3}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{2(1)}^2 &= 5,3476, & \sigma_{2(2)}^2 &= 4,2002, & \sigma_{2(3)}^2 &= 2,6396, \\ \sigma_{2(4)}^2 &= 1,6881, & \sigma_{2(5)}^2 &= 1,0861, & \sigma_{2(6)}^2 &= 0,6955.\end{aligned}$$

В данном случае разброс дисперсий ошибок оценивания меняется в 7,69 раза.

Приведенные данные показывают, что реализация как ГРМ, так и известных методов (МНК, РМНК и МОИНО) с использованием лишь одного заранее фиксированного (номинального) значения $q_0 \in [\alpha, \beta]$ может приводить к существенному разбросу формируемых оценок. Это говорит о возможности существенного повышения качества оценивания в рамках ГРМ, обеспечивающего выбор оптимального узла в области неопределенности $[\alpha, \beta]$.

Если для рассматриваемого примера необходимость обращения матриц отпадает, то в случае РМНК для всех гипотез $\Gamma_{(l)}$ находится единая векторная оценка $\gamma_{(\text{РМНК})}^* = [\gamma_{(\text{РМНК})1}^*, \gamma_{(\text{РМНК})2}^*]^T$, при этом требуется обращение матриц $\mathbf{C}_{(l)} = \Psi^T \mathbf{W}_{(l)} \Psi$, где

$$\Psi^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}.$$

Для семейства всех этих матриц находим их числа обусловленности $\nu_{(l)} = \nu(\mathbf{C}_{(l)})$ (в евклидовой норме): $\nu_{(1)} = 515,7839$, $\nu_{(2)} = 666,9735$, $\nu_{(3)} = 1101,7277$, $\nu_{(4)} = 1778,5476$, $\nu_{(5)} = 2789,8688$, $\nu_{(6)} = 4239,6586$. Видим, что даже для рассматриваемого простейшего тестового примера низкой размерности и малой выборки имеем дело с плохой обусловленностью матриц, а следовательно, с дополнительной вычислительной погрешностью при нахождении искомых оценок. Этот факт характерен для большинства задач, связанных с оцениванием в случае использования степенного базиса [27–29].

Пример 2. Пусть матрица $\mathbf{K} = \mathbf{K}(q) = \text{diag}[[1 + q(n - 1)]^{-2}, n = \overline{1, 5}]$ соответствует случаю некоррелированных нестационарных измерений малого объема. В этом случае $\mathbf{W}_{(l)} = \text{diag}[w_{nn}(q_{(l)}), n = \overline{1, 5}]$, где $w_{nn}(q_{(l)}) = [1 + q(n - 1)]^2 \left(\sum_{n=1}^5 [(1 + q(n - 1))]^2 \right)^{-1}$, что справедливо для нормы $\|\mathbf{W}_{(l)}\| = \sum_{n=1}^5 w_{nn(l)}$, где $w_{nn(l)} > 0$. Полагаем $[0, T] = [0, 4]$, $t_n = (n - 1)\Delta t$, $n = \overline{1, 5}$, $\Delta t = 1$, $\alpha = -0,25$, $\beta = 1$, $L = 6$ и $q_{(1)} = -0,2$, $q_{(2)} = -0,125$, $q_{(3)} = 0$, $q_{(4)} = 0,3$, $q_{(5)} = 0,7$, $q_{(6)} = 1$. В табл. 1 приводятся результаты оценивания коэффициента γ_1 для каждого узла из области неопределенности согласно ГРМ применительно к семейству характерных выборок $\{\mathbf{H}_k\}_{k=1}^5$, соответствующих различным вариантам появления НП (при конкретных значениях энергетического параметра $\{\varepsilon_{Ek}\}_{k=1}^5$ и пороге $\delta F_0 = 15\%$).

Таблица 1

$\varepsilon_{E1} = 5,44, \mathbf{H}_1 = [9,5\dot{:}11,5\dot{:}12,3\dot{:}14,1\dot{:}18,2]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 11,92$	$\gamma_{1(2)}^* = 10,11$	$\gamma_{1(3)}^* = 10,12$	$\gamma_{1(4)}^* = 10,11$	$\gamma_{1(5)}^* = 10,09$	$\gamma_{1(6)}^* = 10,09$
$F_{(1)} = 3,74$	$F_{(2)} = 0,37$	$F_{(3)} = 0,29$	$F_{(4)} = 0,21$	$F_{(5)} = 0,16$	$F_{(6)} = 0,15$
$\delta_{F(1)} = 100$	$\delta_{F(2)} = 6,13$	$\delta_{F(3)} = 3,90$	$\delta_{F(4)} = 1,67$	$\delta_{F(5)} = 0,28$	$\delta_{F(6)} = 0$
$\varepsilon_{E2} = 7,30, \mathbf{H}_2 = [9\dot{:}11,5\dot{:}10\dot{:}17,5\dot{:}13]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 11,92$	$\gamma_{1(2)}^* = 10,11$	$\gamma_{1(3)}^* = 10,12$	$\gamma_{1(4)}^* = 10,11$	$\gamma_{1(5)}^* = 10,09$	$\gamma_{1(6)}^* = 10,09$
$F_{(1)} = 2,37$	$F_{(2)} = 4,30$	$F_{(3)} = 7,36$	$F_{(4)} = 10,33$	$F_{(5)} = 11,59$	$F_{(6)} = 13,77$
$\delta_{F(1)} = 0$	$\delta_{F(2)} = 17$	$\delta_{F(3)} = 43,88$	$\delta_{F(4)} = 69,82$	$\delta_{F(5)} = 80,88$	$\delta_{F(6)} = 100$
$\varepsilon_{E3} = 3,28, \mathbf{H}_3 = [17\dot{:}16,5\dot{:}13\dot{:}14\dot{:}16]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 14,88$	$\gamma_{1(2)}^* = 13,91$	$\gamma_{1(3)}^* = 12,30$	$\gamma_{1(4)}^* = 10,47$	$\gamma_{1(5)}^* = 9,87$	$\gamma_{1(6)}^* = 9,67$
$F_{(1)} = 7,77$	$F_{(2)} = 11,31$	$F_{(3)} = 12,76$	$F_{(4)} = 9,09$	$F_{(5)} = 6,46$	$F_{(6)} = 5,46$
$\delta_{F(1)} = 31,64$	$\delta_{F(2)} = 80,19$	$\delta_{F(3)} = 100$	$\delta_{F(4)} = 49,72$	$\delta_{F(5)} = 13,66$	$\delta_{F(6)} = 0$
$\varepsilon_{E4} = 2,83, \mathbf{H}_4 = [9\dot{:}18,5\dot{:}7\dot{:}15,5\dot{:}18]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 11,04$	$\gamma_{1(2)}^* = 10,92$	$\gamma_{1(3)}^* = 10,60$	$\gamma_{1(4)}^* = 10,10$	$\gamma_{1(5)}^* = 10,06$	$\gamma_{1(6)}^* = 10,04$
$F_{(1)} = 21,78$	$F_{(2)} = 21,01$	$F_{(3)} = 17,84$	$F_{(4)} = 12,73$	$F_{(5)} = 9,99$	$F_{(6)} = 9,08$
$\delta_{F(1)} = 100$	$\delta_{F(2)} = 93,97$	$\delta_{F(3)} = 69,98$	$\delta_{F(4)} = 28,74$	$\delta_{F(5)} = 7,18$	$\delta_{F(6)} = 0$
$\varepsilon_{E5} = 6,89, \mathbf{H}_5 = [17\dot{:}11,5\dot{:}11\dot{:}14,8\dot{:}10]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 13,02$	$\gamma_{1(2)}^* = 11,81$	$\gamma_{1(3)}^* = 9,8$	$\gamma_{1(4)}^* = 7,52$	$\gamma_{1(5)}^* = 6,68$	$\gamma_{1(6)}^* = 6,39$
$F_{(1)} = 13,97$	$F_{(2)} = 18,95$	$F_{(3)} = 22,96$	$F_{(4)} = 20,24$	$F_{(5)} = 18,18$	$F_{(6)} = 17,24$
$\delta_{F(1)} = 0$	$\delta_{F(2)} = 55,39$	$\delta_{F(3)} = 100$	$\delta_{F(4)} = 71,74$	$\delta_{F(5)} = 46,82$	$\delta_{F(6)} = 36,37$

В табл. 2 приводятся результаты оценивания коэффициента для ГРМ при использовании алгоритмов (3.17), (3.18) и (3.20), где Δ_1 , $\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\overline{\Delta}}_1$ – абсолютные ошибки оценивания.

Таблица 2

$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{H}_2$	$\mathbf{H}_3$	$\mathbf{H}_4$	$\mathbf{H}_5$
$\gamma_{1(1)}^* = 10,09$	$\gamma_{1(1)}^* = 9,64$	$\gamma_{1(1)}^* = 9,67$	$\gamma_{1(1)}^* = 10,04$	$\gamma_{1(1)}^* = 13,02$
$\Delta_1 = 0,09$	$\Delta_1 = 0,36$	$\Delta_1 = 0,33$	$\Delta_1 = 0,04$	$\Delta_1 = 3,02$
$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 10,1$	$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 9,64$	$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 9,77$	$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 10,05$	$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 13,02$
$\overline{\Delta}_1 = 0,1$	$\overline{\Delta}_1 = 0,36$	$\overline{\Delta}_1 = 0,23$	$\overline{\Delta}_1 = 0,05$	$\overline{\Delta}_1 = 3,02$
$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 10,11$	$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 9,64$	$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 9,77$	$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 10,05$	$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 13,02$
$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 0,11$	$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 0,36$	$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 0,23$	$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 0,05$	$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 3,02$

Данные этой таблицы наглядно показывают возможность надежного оценивания ИП при наличии РП и НП во входном наблюдении.

В табл. 3 представлены результаты оценивания согласно МНК и РМНК в случае использования в алгоритмах обработки номинального значения $q_0 = q_{(3)} = 0$, где δ_1 – относительная ошибка, выраженная в процентах.

Таблица 3

$\varepsilon_{E1} = 5,44, \mathbf{H}_1 = [9,5:11,5:12,3:14,1:18,2]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 13,12$	$F = 8,63$	$\Delta_1 = 3,12$	$\delta_1 = 31,2$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 10,12$	$F = 0,29$	$\Delta_1 = 0,12$	$\delta_1 = 1,2$
$\varepsilon_{E2} = 7,30, \mathbf{H}_2 = [9:11,5:10:17,5:13]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 12,2$	$F = 8,86$	$\Delta_1 = 2,2$	$\delta_1 = 22$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 9,2$	$F = 7,36$	$\Delta_1 = 0,8$	$\delta_1 = 8$
$\varepsilon_{E3} = 3,28, \mathbf{H}_3 = [17:16,5:13:14:16]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 15,31$	$F = 2,36$	$\Delta_1 = 5,3$	$\delta_1 = 53$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 12,3$	$F = 12,76$	$\Delta_1 = 2,3$	$\delta_1 = 18,7$
$\varepsilon_{E4} = 2,83, \mathbf{H}_4 = [9:18,5:7:15,5:18]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 13,6$	$F = 22,34$	$\Delta_1 = 3,6$	$\delta_1 = 36$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 10,6$	$F = 17,84$	$\Delta_1 = 0,6$	$\delta_1 = 6$
$\varepsilon_{E5} = 6,89, \mathbf{H}_5 = [17:11,5:11:14,8:10]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 12,8$	$F = 6,66$	$\Delta_1 = 2,8$	$\delta_1 = 28$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 9,8$	$F = 22,96$	$\Delta_1 = 0,2$	$\delta_1 = 2$

Был рассмотрен также случай коррелированных нестационарных измерений большого объема ($N = 41$) с матрицей $\mathbf{K} = \mathbf{K}(q)$, у которой по диагонали стоят элементы $k_{nn}(q) = [1 + q\Delta t(n-1)]^{-2}$, $n = \overline{1, 41}$ (где $\Delta t = 0,1$), а вне диагонали $k_{nm} = \exp\{-|n-m|\Delta t\}$, $n, m = \overline{1, 41}$, $n \neq m$. С помощью датчика случайных чисел генерировалась тысяча выборок входного наблюдения, при этом в каждой выборке содержались РП и НП. Параметры q и ε_E рассматривались как случайные величины, распределенные по равномерному закону на отрезках от $-0,2$ до 1 и от $1,7$ до $2,5$ соответственно. Количество аномальных выбросов в каждой реализации соответствовало $\rho_{\mathbf{Z}} = 30\%$. Весь интервал наблюдения был разбит на три одинаковых по размеру участка (начальный, средний и конечный). В каждом эксперименте НП концентрировалась на одном из этих участков (использован равномерный закон распределения). По результатам моделирования получены следующие усредненные (по всем выборкам) абсолютные ошибки оценивания коэффициента γ_1 : для МНК – $\Delta_1 = 4,78$, для РМНК и МОИНО – $\Delta_1 = 2,11$, для ГРМ – $\Delta_1 = 0,32$.

РМНК и МОИНО по точности совпадают, поскольку рассматривается малоразмерный случай. Эффект от МОИНО, обусловленный декомпозицией алгоритма оценивания, проявляется лишь для задач большой размерности.

Таким образом, показано, что даже наличие одной степени свободы (параметр q является скалярным) при описании неопределенности можно существенно повысить точность оценивания ИП в условиях РП и НП. Очевидно, что при решении более сложных прикладных задач необходимо выбирать многомерную область неопределенности и соответствующее количество узлов $\mathbf{q}_{(l)}$, $l = \overline{1, L}$.

8. Заключение

Развитый ГРМ позволяет в условиях существенной неопределенности детально исследовать любую составляющую уравнения наблюдения с использованием ВЛФ, при этом обеспечив выполнение условия инвариантности результата оценивания к РП и максимально возможное (в рамках принятого критерия) ослабление воздействия НП на результаты оценивания. Появляется возможность организации нескольких каналов параллельных вычислений ВЛФ для всей области неопределенности относительно параметров корреляционной функции полуопределенного шума измерений. В пределах одного канала сохраняются все преимущества линейного оценивания без расширения вектора оцениваемых параметров. Получены конечные аналитические соотношения, позволяющие оценить потенциальные возможности ГРМ и условия его наиболее эффективного применения.

ГРМ можно модифицировать под другие известные задачи, например оценивание по выборке нарастающего объема, обнаружение, различение или разрешение сигналов, фильтрация (линейная или нелинейная) параметров сигналов. Он хорошо подходит к многоканальным информационно-измерительным системам, предназначенным для функционирования в реальном времени. Все вычислительные процедуры в каждом канале сводятся к простейшим математическим операциям над векторами и матрицами, допускается возможность комбинирования метода с традиционными подходами к решению прикладных задач, связанных с оптимальной и квазиоптимальной обработкой измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
2. Богданович В.А., Вострецов А.Г. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. М.: Физматлит, 2004.
3. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
4. Фомин А.Ф., Новоселов О.Н., Плющев А.В. Отбраковка аномальных результатов измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985.
5. Гаджиев Ч.М. Подход к отбраковке аномальных измерений, робастный к систематическим погрешностям // Автометрия. 2003. Т. 39. № 4. С. 39–46.

6. Булычев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др. Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение-Полет, 2016.
7. Денисов В.П., Дубинин Д.В., Мещеряков А.А. Исключение аномально больших ошибок пеленгования в процессе устранения неоднозначности измерений в фазовых пеленгаторах, реализующих метод максимального правдоподобия // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61. № 10. С. 957–963.
8. Шэнь К., Шахтарин Б.И., Неусыпин Б.И., Нгуен Д. Алгоритмические методы коррекции навигационной информации с использованием спутниковой радионавигационной системы в условиях аномальных измерений // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64. № 1. С. 31–37.
9. Иванов А.В., Шишкин В.Ю., Бойков Д.В. и др. Адаптивные алгоритмы обработки информации в навигационных комплексах подвижных наземных объектов // Радиотехника и электроника. 2021. Т. 66. № 8. С. 760–771.
10. Калянов А.А., Лукин О.В., Цыганова Ю.В. Об алгоритме адаптивной фильтрации параметров движения объекта // Автоматизация процессов управления. 2023. № 1(71). С. 75–87.
11. Gu T., Tu Y., Tang D., Luo T. A Robust Moving Total Least-Squares Fitting Method for Measurement Data // IEEE Transact. Instrument. Measurement. 2020. V. 69. No. 10. P. 7566–7573.
12. Gu T., Luo Z., Guo T., Luo T. A New Reconstruction Method for Measurement Data with Multiple Outliers // IEEE Transact. Instrument. Measurement. 2022. V. 71. P. 1–9.
13. Ji C., Song C., Li S., et. al. An Online Combined Compensation Method of Geomagnetic Measurement Error // IEEE Sensor. J. 2022. V. 22. No. 14. P. 14026–14037.
14. Gao G., Gao B., Gao S., et. al. Hypothesis Test-Constrained Robust Kalman Filter for INS/GNSS Integration with Abnormal Measurement // IEEE Transact. Vehicular Tech. 2023. V. 72. No. 2. P. 1662–1673.
15. Булычев Ю.Г., Елисеев А.В. Вычислительная схема инвариантно-несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
16. Булычев Ю.Г. Распознавание сигналов без расширения пространства состояний по результатам наблюдений, содержащих сингулярную помеху, с учетом нелинейности // АиТ. 2024. № 2. С. 81–102.
17. Булычев Ю.Г. Декомпозиционно-автокомпенсационное распознавание сигналов на базе принципов непрерывности, инвариантности, размножения и ранжирования с учетом регулярных и нерегулярных помех // АиТ. 2025. № 4. С. 34–54.
18. Sutti C. Local and global optimization by parallel algorithms for MIMD systems // Ann. Oper. Res. 1984. V. 1. P. 151–164.
19. Price W. L. Global optimization algorithms for a CAD workstation // J. Optim. Theory Appl. 1987. V. 55. P. 133–146.
20. Граничин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
21. Граничин О.Н., Шлымов Д.С., Аврос Р. и др. Рандомизированный алгоритм нахождения количества кластеров // АиТ. 2011. № 4. С. 86–98.
22. Куприянов А.И., Петренко П.Б., Сычев М.П. Теоретические основы радиоэлектронной разведки. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.

23. *Верба В.С., Татарский Б.Г.* Основы теории радиолокационных систем и комплексов. М.: Техносфера, 2024.
24. *Zekavat S., Buehrer R.* Handbook of Position Location: Theory, Practice and Advances. Second ed. Hoboken. New Jersey: Wiley-IEEE Press 2019.
25. *Wang X., Wang A., Wang D., et. al.* A modified Sage-Husa adaptive Kalman filter for state estimation of electric vehicle servo control system // Energy Reports. 2022. V. 8. No. 5. P. 20–27.
26. *Калянов А.А., Лукин О.В., Цыганова Ю.В.* Об алгоритме адаптивной фильтрации параметров движения объекта // Автоматизация процессов управления. 2023. № 1(71). С. 75–87.
27. *Peng L., Wenhui W., Junda Q., et. al.* Robust Generalized Labeled Multi-Bernoulli Filter and Smoother for Multiple Target Tracking using Variational Bayesian // KSII Transactions on Internet and Information Systems. 2022. V. 16. No. 3. P. 908–928.
28. *Татузов А.Л.* Нейронные сети в задачах радиолокации. М.: Радиотехника, 2009.
29. *Мансур М.Э., Степанов О.А.* Алгоритмы комплексной обработки в задаче коррекции показаний навигационных систем при наличии нелинейных измерений // Изв. Тульского ГУ. Технические науки. 2016. № 6. С. 89–102.
30. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С. и др.* Обоснование методов оптимального оценивания параметров движения цели в триангуляционной измерительной системе // ТиСУ. 2015. № 4. С. 94–110.
31. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С. и др.* Классификация инвариантов пассивной локации и их применение // ТиСУ. 2015. № 6. С. 133–143.
32. *Булычев Ю.Г.* Оптимизация кластерно-вариационного метода построения многопозиционной пеленгационной системы для условий априорной неопределенности // АиТ. 2023. № 4. С. 96–114.
33. *Гильбо Е.П., Челпанов И.Б.* Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора. М.: Сов. радио, 1977.
34. *Ежова Н.А., Соколинский Л.Б.* Обзор моделей параллельных вычислений // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2019. Т. 8. № 3. С. 58–91.
35. *Иванов А.И., Шпилевая С.Г.* О квантовых параллельных вычислениях // Вестник Балт. ун-та им. Канта. Серия «Физико-математические и технические науки». 2021. № 2. С. 95–99.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 03.06.2025

После доработки 22.12.2025

Принята к публикации 27.01.2026

Нелинейные системы

© 2026 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),
А.В. ЗУЕВ, д-р техн. наук (alvzuev@yandex.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
В.Ф. ФИЛАРЕТОВ, д-р техн. наук (filaretov@inbox.ru)
(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток),
И.В. ГОРНОСТАЕВ, канд. техн. наук (gornostaev_iv@mail.ru),
Д.В. КВАСОВ (kvasov.dv@dvfu.ru),
Д.Д. ДАНИЛОВ (danilov.dd@dvfu.ru)
(Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ¹

Рассматривается задача оценивания (идентификации) величины внешних воздействий на технические системы, описанные нелинейными динамическими моделями, с учетом шумов измерений, что необходимо для компенсации влияния этих воздействий. Решение задачи опирается на интервальные наблюдатели минимальной размерности, для построения которых получены соответствующие соотношения. На основе такого наблюдателя и дифференциатора выводятся соотношения, позволяющие получить интервальную оценку величины внешних воздействий. Теоретические положения проиллюстрированы практическим примером оценки величины внешних воздействий на электропривод манипуляционного робота. Проведенное моделирование на основе пакета Matlab продемонстрировало корректность теоретических результатов. Полученные соотношения можно использовать для построения отказоустойчивых систем.

Ключевые слова: нелинейные системы, внешние воздействия, идентификация, наблюдатели, интервальные методы.

DOI: 10.7868/S2413977726080027

1. Введение

Технические системы в процессе их эксплуатации могут быть подвержены различным внешним воздействиям, для компенсации которых применяются различные методы, большинство из которых используют информацию о величинах этих воздействий. Непосредственное измерение величин воздействий нередко наталкивается на значительные трудности. В этих случаях задача может быть решена на основе известных математических моделей этих

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-19-00590, <https://rscf.ru/project/25-19-00590/>).

систем и штатных датчиков, показания которых после соответствующей обработки поставляют искомую информацию.

Существуют различные способы обработки этой информации, большой популярностью пользуются подходы на основе скользящих наблюдателей, методы построения которых рассмотрены в [1–4] для различных классов систем. Как правило, для возможности построения скользящих наблюдателей на исходную систему накладываются различные ограничения, в частности требуется, чтобы она была минимально фазовой или детектируемой и должно выполняться условие согласования. Кроме того, такие наблюдатели чувствительны к различным помехам.

Интересный метод был предложен в [4] на основе так называемых интервальных наблюдателей, формирующих интервальные оценки рассматриваемых функций. Задача построения таких наблюдателей активно исследуется последние 20 лет, решения для различных классов систем и примеры практических приложений можно найти в [5–9]. Отметим, что в [4] решение задачи оценивания получено за счет наложения требования минимальной фазовости исходной линейной системы; кроме того, в [4] не учитываются шумы измерений, которые всегда присутствуют в реальных системах.

В настоящей работе ставится и решается задача использования интервальных наблюдателей для оценки величин внешних воздействий в нелинейных непрерывных динамических системах без требования минимальной фазовости при наличии шумов измерений. Подобная задача решалась в [9] для дискретных нелинейных систем, решение для непрерывных заметно отличается. Как и в [9], решение опирается на редуцированную модель исходной системы; это упрощает конструкцию интервального наблюдателя, уменьшает ширину интервала и дает возможность учесть шумы измерений. При этом требование минимальной фазовости системы не используется, а преобразования ограничиваются приведением модели к каноническому виду.

Цель работы – решить задачу построения средств оценивания величин внешних воздействий в технических системах, описываемых нелинейными динамическими моделями, с учетом шумов измерений.

Рассматриваются системы, описываемые нелинейной моделью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t) + w(t). \end{aligned}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F , G , C , H и L – постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $n \times q$, $l \times n$ и $n \times 1$ соответственно; $w(t) \in \mathbb{R}^l$ – шумы измерений, $\rho(t) \in \mathbb{R}$ – неизвестная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения. Предполагается, что $w(t)$ и $\rho(t)$ – ограниченные функции: $\underline{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$ и $\underline{\rho} \leq \rho(t) \leq \bar{\rho}$ при всех $t \geq 0$ для известных $\underline{w}$, $\bar{w}$ и $\underline{\rho}$, $\bar{\rho}$; неравенство “ $\leq$ ” для векторов понимается поэлементно. Предполагается также, что начальное состояние $x(0)$ удовлетворяет условию $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$ для некоторых $\underline{x}(0)$

и $\bar{x}(0)$. Нелинейный член $\Psi(x, u)$ имеет вид

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x, u) \\ \dots \\ \varphi_q(A_q x, u) \end{pmatrix},$$

$A_1, \dots, A_q$ – известные постоянные матрицы-строки, $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ – произвольные нелинейные функции.

Требуется построить наблюдатель для оценки функции $\rho(t)$. Границы $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$ рассматриваются как предварительные, которые уточняются в результате решения задачи. Задача по аналогии с [3, 9] решается не на основе исходной системы, а для ее редуцированной модели, нечувствительной к возмущению. Такая модель имеет меньшую размерность, нежели исходная система, что уменьшает вычислительную сложность. По аналогии с [4] будем предполагать, что выполняется условие согласования $\text{rank}(HL) = \text{rank}(L)$, которое, грубо говоря, означает, что функция $\rho(t)$ входит в уравнения для тех компонент вектора состояния, которые измеряются датчиками системы.

Вначале рассматривается линейный случай, когда $C = 0$.

2. Построение редуцированной модели

2.1. Общие соотношения

Редуцированная модель, о которой было сказано выше, имеет следующий вид:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* H x(t) + L_* \rho(t), \\ y_*(t) &= H_* x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ – вектор состояния, $y_*(t) \in \mathbb{R}$ – выход, F_* , G_* , J_* и L_* – подлежащие определению матрицы соответствующих размеров. Слагаемое $J_* H x(t)$ вместо ожидаемого $J_* y(t)$ введено для учета шумов измерений; в виде $J_* y(t)$ оно появится в интервальном наблюдателе.

Для построения интервального наблюдателя требуется, чтобы матрица F_* была устойчивой и мецлеровой, т.е. ее внедиагональные элементы должны быть неотрицательными. Поэтому F_* задается в диагональной жордановой форме

$$F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

которая обладает такими свойствами, если собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ выбраны отрицательными.

Известно [10], что если система (2.1) наблюдаема, то она всегда может быть приведена к виду с матрицей в идентификационной канонической форме,

когда

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В противном случае ее можно привести к виду с наблюдаемой подсистемой [10] и матрицу этой подсистемы искать в такой форме. В [11] показано, что от идентификационной формы всегда можно перейти к жордановой форме, вводя обратную связь с соответствующей матрицей обратной связи.

Для построения редуцированной модели предполагается, что существует такая матрица Φ , для которой при всех $t \geq 0$ выполняется условие $x_*(t) = \Phi x(t)$. Известно [9], что эта матрица вместе с матрицами, описывающими модель, подчиняется уравнениям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad \Phi G = G_*, \quad \Phi L = L_*.$$

Для принятого вида матрицы F_* первое из приведенных уравнений распадается на k независимых уравнений:

$$(2.2) \quad \Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k,$$

каждое из которых можно записать в виде

$$(2.3) \quad (\Phi_i \quad - J_{*i}) \begin{pmatrix} F - \lambda_i I_n \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где I_n — $n \times n$ единичная матрица. Для построения редуцированной модели выбирается такое значение $\lambda_i < 0$, что определяемая из уравнения (2.3) матрица Φ_i должна удовлетворять двум требованиям

$$(2.4) \quad \Phi_i L = L_* \neq 0, \quad R_i H = \Phi_i$$

для некоторой матрицы R_i , при этом $H_* = 1$. Для учета второго требования заменим в (2.2) Φ_i на $R_i H$:

$$R_i H F = \lambda R_i H + J_{*i} H$$

и перепишем его в виде

$$(R_i \quad - J_{*i}) \begin{pmatrix} H F - \lambda_i H \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

По аналогии с решением уравнения (2.3) выбирается такое значение $\lambda_i < 0$, при котором определяемая из уравнения матрица R_i удовлетворяет условию $L_* = R_i H L \neq 0$. Если оно выполняется, определяется $G_* = R_i H G$, на чем процедура построения линейной модели заканчивается. В противном случае задача рассмотренным методом решения не имеет.

2.2. Использование виртуальных датчиков

Независимость уравнений (2.2) друг от друга накладывает определенные ограничения на возможность решения задачи. Действительно, рассмотрим пример электропривода, описываемого следующими уравнениями:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= k_1 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t) + k_7 \text{sign}(x_2(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= k_4 x_2(t) + k_5 x_3(t) + k_6 u(t) + \rho(t), \end{aligned}$$

где коэффициенты k_1 – k_7 представляют параметры электропривода; возмущение $\rho(t)$ обусловлено изменением сопротивления обмоток якоря при его перегреве. Рассматриваемая модель описывается матрицами:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ k_7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что $y(t) = x_3(t) + w(t)$, т.е. $H = (0 \ 0 \ 1)$. Требуется найти оценку функции $\rho(t)$.

Уравнение (2.3) принимает вид

$$(\Phi - J_*) \begin{pmatrix} -\lambda & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $k_2 < 0$, оно имеет единственное решение $\lambda = k_2$ с матрицей $\Phi_1 = (0 \ 1 \ 0)$, которая не удовлетворяет условиям (2.4). Выход может быть найден за счет использования так называемого виртуального датчика, который представляет собой наблюдатель, оценивающий неизмеряемую компоненту вектора состояния исходной системы. В рассматриваемом случае редуцированная модель для построения такого датчика является частным случаем общей модели (2.1) и описывается уравнением

$$\dot{x}_{*1}(t) = k_2 x_{*1}(t) + k_3 H x(t) + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)),$$

где $x_{*1}(t) = \Phi_1 x(t)$. Отметим, поскольку измерение $y(t)$ зашумлено, показания этого датчика будут также подвержены шуму, ниже это учитывается интервальными методами. Принимая его состояние $x_{*1}(t)$ за показания такого датчика $y_v(t) = H_v x(t)$ с $H_v = (0 \ 1 \ 0)$, расширим уравнение (2.2):

$$\Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H + J_{*v} H_v, \quad i = 1, \dots, k,$$

которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$(\Phi - J_* - J_{*v}) \begin{pmatrix} -\lambda & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Теперь он имеет еще одно решение $\lambda = k_5 < 0$ с матрицами $\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $(J_* \ J_{*v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$; первая удовлетворяет условиям (2.3) с $R = 1$ и $L_* = 1$. Модель с виртуальным датчиком описывается уравнениями

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= k_2 x_{*1}(t) + k_3 Hx(t) + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= k_5 x_{*2}(t) + k_4 x_{*1}(t) + k_6 u(t) + \rho(t), \\ y_*(t) &= x_{*2}(t) = y(t). \end{aligned}$$

В общем случае виртуальных датчиков может быть несколько.

2.3. Получение оценки

Вначале рассмотрим случай, когда виртуальный датчик не требуется. Тогда для выбранного значения λ модель (2.1) является одномерной и принимает вид

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= \lambda x_*(t) + G_* u(t) + J_* Hx(t) + L_* \rho(t), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что если шумы измерения отсутствуют или ими можно пренебречь, то с учетом равенств $y_*(t) = x_*(t) = Ry(t)$ и $J_* Hx(t) = J_* y(t)$ возмущение $\rho(t)$ может быть оценено как

$$(2.8) \quad \hat{\rho}(t) = L_*^{-1}(\dot{y}_*(t) - (\lambda y_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t))).$$

Для вычисления производной $\dot{y}_*(t)$ может быть использован дифференциатор, предложенный в [12]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_0(t), \\ z_0(t) &= z_2(t) - \alpha_1 |z_1(t) - y_*(t)|^{1/2} \text{sign}(z_1(t) - y_*(t)), \\ \dot{z}_2(t) &= -\alpha_2 \text{sign}(z_1(t) - y_*(t)), \end{aligned}$$

где α_1, α_2 – положительные константы, выбираемые согласно рекомендациям [12]. Как показано в [12], $z_2(t)$ дает точную оценку $\dot{y}_*(t)$ за конечное время при отсутствии возмущений в $y_*(t)$. Если функция $y_*(t)$ подвержена шумам интенсивностью $w_y(t)$, то $|\dot{y}_*(t) - z_2(t)| \leq |w_y(t)|^{1/2}$.

Если функция $\rho(t)$ представляет собой вектор, то описанный подход должен быть применен к каждой его компоненте. По аналогии с [4] оценка $\hat{\rho}(t)$ может быть использована для оценки полного вектора $x(t)$ исходной системы на основе уравнения

$$\dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + L\hat{\rho}(t) + K(y(t) - H\hat{x}(t)),$$

где коэффициент усиления K выбирается из требования устойчивости матрицы $F - KH$.

Отметим, что аналогичная проблема рассматривается в [4] для линейных систем, но в отличие от простых соотношений (2.7) и (2.8) она решается с

помощью сложных аналитических преобразований исходной системы и использования интервальных наблюдателей, которые в данной работе не потребовались.

Если исходная система нелинейна, то в (2.7) добавляется слагаемое $\Psi_{**}(y_*, y, u)$, правила построения которого рассмотрены ниже, и (2.8) принимает вид

$$(2.9) \quad \hat{\rho}(t) = L_*^{-1}(\dot{y}_*(t) - (\lambda y_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + \Psi_{**}(y_*, y, u))).$$

При использовании виртуального датчика, описываемого уравнением

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \dot{x}_v(t) &= \lambda_v x_v(t) + G_v u(t) + J_v y(t), \\ y_v(t) &= x_v(t) \end{aligned}$$

(по предположению в него не входит $\rho(t)$), выражение (2.8) усложняется:

$$(2.11) \quad \hat{\rho}(t) = L_*^{-1}(\dot{y}_*(t) - (\lambda y_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_{*v} y_v(t))).$$

Наличие шумов измерений делает оценки (2.8) и (2.9) приближенными. В этом случае использование интервального наблюдателя позволяет найти гарантированные пределы (границы), в которых будет находиться оценка по аналогии с доверительным интервалом в математической статистике. Предполагается, что введенные ранее нижняя $\underline{\rho}$ и верхняя $\overline{\rho}$ границы функции $\rho(t)$ являются первым приближением, на основе которых требуется определить окончательные границы.

3. Интервальный наблюдатель и его использование

Вначале рассмотрим случай, когда виртуальный датчик не требуется. Интервальный наблюдатель строится на основе модели (2.1) и по аналогии с [5, 9] принимает вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{y}}_*(t) &= \lambda \underline{y}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho}, \\ \dot{\overline{y}}_*(t) &= \lambda \overline{y}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_*^- \overline{w} - J_*^+ \underline{w} + L_*^+ \overline{\rho} - L_*^- \underline{\rho}, \end{aligned}$$

где $Q^+ = \max\{0, Q\}$ и $Q^- = Q^+ - Q$ для произвольной матрицы Q ; нетрудно видеть, что Q^+ и Q^- неотрицательны.

По аналогии с [5, 9] можно показать, что из условия $\overline{x}(0) \geq x(0) \geq \underline{x}(0)$ следует $\overline{y}_*(t) \geq y_*(t) \geq \underline{y}_*(t)$ для всех $t \geq 0$. По аналогии с [4] нетрудно видеть, что тогда существует переменная $0 \leq \beta(t) \leq 1$ такая, что

$$(3.2) \quad y_*(t) = \underline{y}_*(t) + \beta(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) = \overline{y}_*(t) + (\beta(t) - 1)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t))$$

для всех $t \geq 0$. Заменив $y_*(t)$ на $Ry(t)$, получаем

$$(3.3) \quad \beta(t) = \frac{Ry(t) - \underline{y}_*(t)}{\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)},$$

где все переменные могут быть определены. Предполагается, что функция $\beta(t)$ дифференцируема.

Теорема 1. Окончательные верхняя $\overline{\rho}(t)$ и нижняя $\underline{\rho}(t)$ границы для $\rho(t)$ имеют вид

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \overline{\rho}(t) = & L_*^{-1}(\dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \\ & + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}))) \end{aligned}$$

и

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \underline{\rho}(t) = & L_*^{-1}(\dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \overline{\rho} - L_*^- \underline{\rho} + \\ & + (\beta(t) - 1)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}))) \end{aligned}$$

соответственно.

Доказательство. Вычислим $\dot{y}_*(t)$ на основе первой части равенства (3.2) и уравнения (3.1):

$$\begin{aligned} \dot{y}_*(t) = & \underline{\dot{y}}_*(t) + \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \beta(t) \frac{d}{dt}(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) = \\ = & \lambda \underline{y}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \\ & + \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \lambda \beta(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \\ & + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w})), \end{aligned}$$

где $|Q| = Q^+ + Q^-$ – матрица, составленная из абсолютных значений элементов матрицы Q . Заменим в полученном выражении переменную $\dot{y}_*(t)$ правой частью равенства (2.7):

$$\begin{aligned} & \lambda y_*(t) + G_* u(t) + J_* H x(t) + L_* \rho(t) = \\ = & \lambda \underline{y}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \\ & + \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \lambda \beta(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \\ & + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w})) \end{aligned}$$

и преобразуем его:

$$\begin{aligned} L_* \rho(t) = & \lambda(\underline{y}_*(t) - y_*(t)) + J_* w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \\ & + \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \lambda \beta(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \\ & + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w})) = \\ = & \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w})) + \\ & + J_* w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} J_* w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} &= J_*^+ w(t) - J_*^- w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} = \\ &= J_*^+(w(t) - \overline{w}) + J_*^-(\underline{w} - w(t)) \leq 0, \end{aligned}$$

то граница (3.4) получается удалением слагаемого $J_* w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w}$ из последнего выражения.

Аналогичные операции с второй частью равенства (3.2) дают такой результат:

$$\begin{aligned}\dot{y}_*(t) &= \dot{\bar{y}}_*(t) + \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + (\beta(t) - 1)\frac{d}{dt}(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) = \\ &= \lambda\bar{y}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + J_*^-\bar{w} - J_*^+\underline{w} + L_*^+\bar{\rho} - L_*^-\underline{\rho} + \\ &\quad + \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \lambda\beta(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) - \\ &\quad - \lambda(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + (\beta(t) - 1)(|L_*|(\bar{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\bar{w} - \underline{w}));\end{aligned}$$

замена $\dot{y}_*(t)$ и преобразования приводят к следующему:

$$\begin{aligned}L_*\rho(t) &= \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + (\beta(t) - 1)(|L_*|(\bar{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\bar{w} - \underline{w})) + \\ &\quad + J_*w(t) + J_*^-\bar{w} - J_*^+\underline{w} + L_*^+\bar{\rho} - L_*^-\underline{\rho}.\end{aligned}$$

Так как $J_*w(t) + J_*^-\bar{w} - J_*^+\underline{w} \geq 0$, то, удаляя это слагаемое, получаем границу (3.5). Нетрудно видеть, что

$$\underline{\underline{\rho}}(t) \leq \rho(t) \leq \bar{\bar{\rho}}(t).$$

Теорема доказана.

Для вычисления производной $\dot{\beta}(t)$ может быть использован дифференциатор, рассмотренный выше:

$$\begin{aligned}(3.6) \quad \dot{z}_1(t) &= z_0(t), \\ z_0(t) &= z_2(t) - \gamma_1|z_1(t) - \beta(t)|^{1/2}\text{sign}(z_1(t) - \beta(t)), \\ \dot{z}_2(t) &= -\gamma_2\text{sign}(z_1(t) - \beta(t)),\end{aligned}$$

где γ_1, γ_2 – положительные константы; переменная $z_2(t)$ дает точную оценку функции $\dot{\beta}(t)$ за конечное время при отсутствии возмущений в $\beta(t)$.

Если требуется виртуальный датчик, описываемый уравнением (2.10), то он также должен быть реализован интервально:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_v(t) &= \lambda_v\underline{x}_v(t) + G_vu(t) + J_vy(t) + J_v^-\underline{w} - J_v^+\bar{w}, \\ \dot{\bar{x}}_v(t) &= \lambda_v\bar{x}_v(t) + G_vu(t) + J_vy(t) + J_v^-\bar{w} - J_v^+\underline{w}, \\ \underline{y}_v(t) &= \underline{x}_v(t), \\ \bar{y}_v(t) &= \bar{x}_v(t).\end{aligned}$$

Интервальный наблюдатель (3.1) дополняется соответствующими элементами:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{y}}_*(t) &= \lambda\underline{y}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + J_*^-\underline{w} - J_*^+\bar{w} + L_*^+\underline{\rho} - \\ &\quad - L_*^-\bar{\rho} + J_{*v}^+\underline{y}_v(t) - J_{*v}^-\bar{y}_v(t), \\ \dot{\bar{y}}_*(t) &= \lambda\bar{y}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + J_*^-\bar{w} - \\ &\quad - J_*^+\underline{w} + L_*^+\bar{\rho} - L_*^-\underline{\rho} + J_{*v}^+\bar{y}_v(t) - J_{*v}^-\underline{y}_v(t),\end{aligned}$$

верхняя граница $\bar{\bar{\rho}}(t)$ корректируется:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\rho}}(t) &= L_*^{-1}(\dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+\underline{\rho} - L_*^-\bar{\rho} + \\ &\quad + \beta(t)(|L_*|(\bar{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\bar{w} - \underline{w}) + |J_{*v}|(\bar{y}_v(t) - \underline{y}_v(t)))).\end{aligned}$$

Аналогично корректируется нижняя граница.

4. Нелинейные системы

Метод построения редуцированной модели в нелинейном случае опирается на ранее построенную линейную модель и состоит в том, что для матрицы Φ выясняется возможность преобразования аргумента нелинейного слагаемого $\Psi(x, u)$ на основе следующих операций [3]. Для простоты ограничимся случаем отсутствия виртуального датчика; если он требуется и содержит нелинейную составляющую, она строится аналогично.

Вычисляется матрица $C_* = \Phi C$ и определяются номера $j_i, \dots, j_s$ ее ненулевых столбцов. Далее проверяется условие

$$(4.1) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A_j \end{pmatrix}, \quad j = j_i, \dots, j_s.$$

Если это условие выполняется, то нелинейная составляющая ищется в виде

$$\Psi_*(y_*, Hx, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{j_1}(A_{*j_1}\xi, u) \\ \dots \\ \varphi_{j_s}(A_{*j_s}\xi, u) \end{pmatrix},$$

где $\xi = \begin{pmatrix} y_* \\ Hx \end{pmatrix}$, матрицы $A_{*j_1}, \dots, A_{*j_s}$ определяются из линейных уравнений

$$A_j = A_{*j} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad j = j_i, \dots, j_s,$$

и составляющая $C_*\Psi_*(y_*, Hx, u)$ добавляется к линейной модели (2.1). Если условие (4.1) не выполняется, необходимо найти другое решение уравнения (2.3) и повторить описанную процедуру с новой матрицей Φ с прежней или увеличенной размерностью k . Если (4.1) не выполняется при всех k , необходимо использовать виртуальный датчик, добавление которого позволит удовлетворить условию (4.1).

Нелинейная модель описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= x_*(t) + J_* Hx(t) + G_* u(t) + C_* \Psi_*(y_*(t), Hx(t), u(t)) + L_* \rho(t), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

Если шумы измерения отсутствуют или ими можно пренебречь, то оценка описывается выражением (2.9). В противном случае строится интервальный наблюдатель, для чего необходимо принять следующее допущение для $\Psi_{**}(y_*, Hx, u) = C_*\Psi_*(y_*, Hx, u)$.

Допущение. Если $\underline{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$ для $\underline{w}, \bar{w} \in \mathbb{R}^l$, то

$$(4.2) \quad \underline{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \bar{y}, u) \leq \Psi_{**}(y_*, Hx, u) \leq \bar{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \bar{y}, u)$$

для некоторых функций $\underline{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \bar{y}, u)$ и $\bar{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \bar{y}, u)$ и всех u , где $\underline{y} = y - \bar{w}$ и $\bar{y} = y - \underline{w}$. Само по себе допущение справедливо для произвольных

функций, но согласно [13, 14] процедура вычисления границ $\underline{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \overline{y}, u)$ и $\overline{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \overline{y}, u)$ известна только для непрерывной функции $\Psi_{**}(y_*, Hx, u)$, она опирается на методы интервальной арифметики. В частных случаях, однако, условие (4.2) может быть установлено эвристически, см. пример ниже.

Интервальный наблюдатель принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\underline{y}}_*(t) &= \lambda \underline{y}_*(t) + G_{*i} u(t) + J_* y(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + \\ &\quad + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)), \\ \dot{\overline{y}}_*(t) &= \lambda \overline{y}_*(t) + G_{*i} u(t) + J_* y(t) + J_*^- \overline{w} - J_*^+ \underline{w} + \\ &\quad + L_*^+ \overline{\rho} - L_{*i}^- \underline{\rho} + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)).\end{aligned}$$

Теорема 2. Окончательные верхняя $\overline{\rho}(t)$ и нижняя $\underline{\rho}(t)$ границы без использования виртуального датчика определяются выражениями

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(t) &= L_*^{-1} \left(\dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}) + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \right. \\ &\quad \left. - \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t))) \right), \\ \underline{\rho}(t) &= L_*^{-1} \left(\dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \overline{\rho} - L_*^- \underline{\rho} + (\beta(t) - 1)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + \right. \\ &\quad \left. + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}) + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \right. \\ &\quad \left. - \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t))) \right).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Доказательство. С учетом нелинейного слагаемого оценка (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(t) &= L_*^{-1} (\dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}) + \\ &\quad + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)))) + \\ &\quad + \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \Psi_{**}(y_*, Hx, u)).\end{aligned}$$

Так как разность $\underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \Psi_{**}(y_*, Hx, u)$ согласно (4.2) отрицательна, то, удаляя ее из последнего выражения, получаем первую из формул (4.3). Аналогично оценка (3.5) принимает вид

$$\begin{aligned}\underline{\rho}(t) &= L_*^{-1} (\dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \overline{\rho} - L_*^- \underline{\rho} + \\ &\quad + (\beta(t) - 1)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}) + \\ &\quad + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)))) + \\ &\quad + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \Psi_{**}(y_*, Hx, u)).\end{aligned}$$

Поскольку согласно (4.2) $\overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \Psi_{**}(y_*, Hx, u) \geq 0$, то, удаляя эту разность, получаем вторую формулу в (4.3). Теорема доказана.

Нелинейность, входящая в виртуальный датчик, может быть учтена аналогичным образом с использованием соответствующего допущения вида (4.2).

5. Пример

Продолжим рассмотрение системы (2.5), для которой была построена модель (2.6), напомним ее:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= k_2 x_{*1}(t) + k_3 Hx(t) + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= k_5 x_{*2}(t) + k_4 x_{*1}(t) + k_6 u(t) + \rho(t), \\ y_*(t) &= x_{*2}(t) = y(t). \end{aligned}$$

Так как $k_4 < 0$, $k_3 > 0$ и $k_7 < 0$, то $k_3^+ = k_3$, $k_3^- = 0$, $k_4^+ = 0$, $k_4^- = |k_4|$, $k_7^+ = 0$, $k_7^- = |k_7|$, $L_* = 1$.

При отсутствии шумов измерений точная оценка возмущения $\rho(t)$ определяется выражением (2.11):

$$\hat{\rho}(t) = \dot{y}(t) - (k_5 y(t) + k_6 u(t) + k_4 x_{*1}(t)),$$

виртуальный датчик определяется первым уравнением в (5.1) с $Hx(t) = y(t)$. При наличии шумов необходимо строить интервальный наблюдатель (3.1), который вместе с виртуальным датчиком принимает вид

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_{*1}(t) &= k_2 \underline{x}_{*1}(t) + k_3 y(t) - k_3 \bar{w} - |k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t)), \\ \dot{\bar{x}}_{*1}(t) &= k_2 \bar{x}_{*1}(t) + k_3 y(t) - k_3 \underline{w} - |k_7| \text{sign}(\underline{x}_{*1}(t)), \\ \dot{\underline{y}}_*(t) &= k_5 \underline{y}_*(t) + k_6 u(t) - |k_4| \bar{x}_{*1}(t) + \underline{\rho}, \\ \dot{\bar{y}}_*(t) &= k_5 \bar{y}_*(t) + k_6 u(t) - |k_4| \underline{x}_{*1}(t) + \bar{\rho}. \end{aligned}$$

Введем ошибку $\underline{e}_1(t) = x_{*1}(t) - \underline{x}_{*1}(t)$. Нетрудно видеть, что из $\underline{x}(0) \leq \bar{x}(0)$ и $x_{*1}(t) = \Phi x(t)$ следует $\underline{x}_{*1}(0) \leq x_{*1}(0) \leq \bar{x}_{*1}(0)$ и $\underline{e}_1(0) \geq 0$. Далее, если $\underline{x}_{*1}(t) \leq x_{*1}(t) \leq \bar{x}_{*1}(t)$, то $\text{sign}(\underline{x}_{*1}(t)) \leq \text{sign}(x_{*1}(t)) \leq \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t))$, а так как $k_7 < 0$, то

$$-|k_7| \text{sign}(\underline{x}_{*1}(t)) \geq k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)) \geq -|k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t)),$$

т.е. $k_7 \text{sign}(x_{*1}(t))$ удовлетворяет допущению вида (4.2) с функциями

$$\underline{\Psi}_{**}(\underline{x}_{*1}, \bar{x}_{*1}) = -|k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}), \quad \bar{\Psi}_{**}(\underline{x}_{*1}, \bar{x}_{*1}) = -|k_7| \text{sign}(\underline{x}_{*1}).$$

Уравнение для ошибки $\underline{e}_1(t)$ имеет вид

$$\dot{\underline{e}}_1(t) = k_2 \underline{e}_1(t) - k_3 w(t) + k_3 \bar{w} + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)) + |k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t)).$$

Так как $k_2 < 0$, $\underline{e}_1(0) \geq 0$ и $-k_3 w(t) + k_3 \bar{w} + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)) + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)) \geq 0$, то согласно [13] по индукции получаем $\underline{e}_1(t) \geq 0$, т.е. $x_{*1}(t) \geq \underline{x}_{*1}(t)$ для всех $t \geq 0$. Подобными операциями доказывается, что $\bar{x}_{*1}(t) \geq x_{*1}(t)$ для всех $t \geq 0$.

Аналогичным образом на основе полученных соотношений и третьего и четвертого уравнений в (5.2) можно показать, что $\bar{y}_*(t) \geq y_*(t) \geq \underline{y}_*(t)$ для всех $t \geq 0$, а тогда можно определить функцию $\beta(t)$ в виде (3.3).

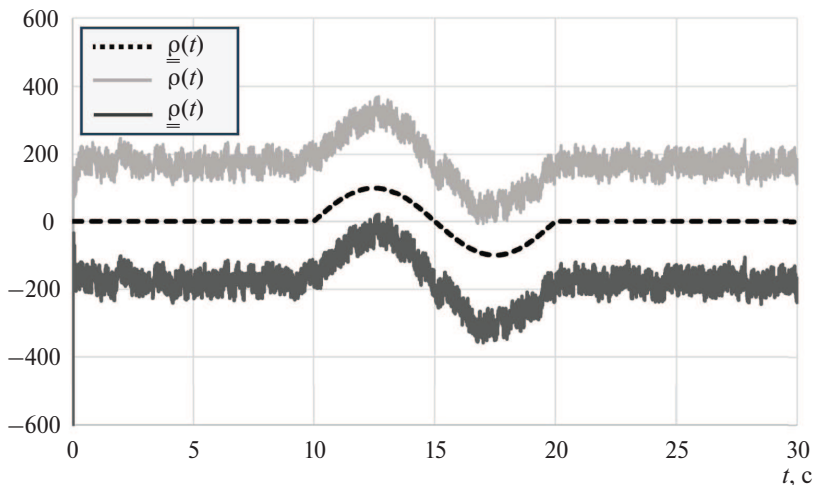


Рис. 1. Поведение возмущения и его нижней и верхней границ.

Окончательные нижняя $\underline{\rho}$ и верхняя $\bar{\rho}$ границы для $\rho(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \underline{\rho} + \beta(t)(\bar{\rho} - \underline{\rho} + |k_3|(\bar{w} - \underline{w}) + \\ &\quad + |k_4|(\bar{x}_{*1}(t) - \underline{x}_{*1}(t)) - |k_7|(\text{sign}(\underline{x}_{*1}) - \text{sign}(\bar{x}_{*1}))), \\ \underline{\rho} &= \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \bar{\rho} + (\beta(t) - 1)(\bar{\rho} - \underline{\rho} + |k_3|(\bar{w} - \underline{w}) + \\ &\quad + |k_4|(\bar{x}_{*1}(t) - \underline{x}_{*1}(t)) - |k_7|(\text{sign}(\underline{x}_{*1}) - \text{sign}(\bar{x}_{*1}))).\end{aligned}$$

Производная $\dot{\beta}(t)$ вычисляется по формуле (3.6) с $Ry = y$.

Для моделирования приняты следующие параметры модели: $k_1 = 0,01$, $k_2 = -10$, $k_3 = 100$, $k_4 = -25$, $k_5 = -100$, $k_6 = 1000$, $k_7 = -0,02$; шум измерения представлен случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-0,3; 0,3]$, т.е. $\underline{w} = -0,3$ и $\bar{w} = 0,3$; возмущение $\rho(t) = 100 \sin(\pi t/5)$ при $10 \leq t \leq 20$, $\rho(t) = 0$ в противном случае, откуда $\underline{\rho} = -100$ и $\bar{\rho} = 100$. Результаты моделирования с $u(t) = 2 \sin(t/5) + 2$ приведены на рисунке. Из-за присутствия шумов измерений, а также большой величины коэффициента k_3 окончательные границы $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$ сильно зашумлены; их средние значения объясняются принятыми предварительными значениями границ $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$.

6. Заключение

В работе решена задача оценки (идентификации) величин внешних возмущений в системах, описываемых нелинейными моделями в присутствии шумов измерений. В отличие от известных методов решения этой задачи с использованием работающих в скользящих режимах наблюдателей разработанный в статье подход позволяет расширить класс систем, для которых идентификация может быть осуществлена. Это объясняется тем, что метод построения наблюдателей, работающих в скользящих режимах, накладывает ограничения на системы, для которых требуется решить задачу идентификации внешних возмущений. Отметим также, что внешние возмущения могут

быть интерпретированы как дефекты в динамике системы, что позволяет использовать предложенные методы для построения отказоустойчивых систем путем компенсации оцененной величины дефекта системой управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edwards C., Spurgeon S., Patton R.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 541–553.
2. *Fridman L., Levant A., Davila J.* Observation of linear systems with unknown inputs via high order sliding-modes // *Int. J. Syst. Sci.* 2007. V. 38. P. 773–791.
3. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Сергиенко О., Шумский А.Е.* Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей // *АиТ*. 2022. № 2. С. 63–89.
4. *Zhu F., Fu Y., Dinh T.* Asymptotic convergence unknown input observer design via interval observer // *Automatica*. 2023. № 1. P. 3–13.
5. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ*. 2016. № 2. С. 5–49.
6. *Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L.* Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
7. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2013. Т. 56. № 4. С. 42–46.
8. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир.* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2022. № 5. С. 3–13.
9. *Жиравок А.Н., Зуев А.В.* Интервальные наблюдатели для оценивания неизвестных входов в дискретных стационарных динамических системах // *АиТ*. 2024. № 8. С. 3–19.
10. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
11. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф. и др.* Интервальные наблюдатели для непрерывных систем с параметрическими неопределенностями // *АиТ*. 2023. № 11. С. 3–16.
12. *Levant A.* Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // *Int. J. Control*. 2003. V. 76. P. 924–941.
13. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval observers for continuous-time LPV systems with L_1/L_2 performance // *Automatica*. 2015. V. 58. P. 82–89.
14. *Efimov D., Raissi T., Chebotarev S., Zolghadri A.* Interval state observer for nonlinear time varying systems // *Automatica*. 2013. V. 49. P. 200–206.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Базтадзе.

Поступила в редакцию 09.09.2025

После доработки 17.12.2025

Принята к публикации 29.12.2025

© 2026 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ СИСТЕМЫ И ИХ СТАБИЛИЗАЦИЯ

Рассматривается лагранжева система, подверженная действию позиционных сил. Предполагается, что частоты малых колебаний для равновесия несоизмеримы. Устанавливается существование в окрестности равновесия многочастотных симметричных колебаний, образующих семейства от одного параметра. Дается продолжение семейства по параметру на глобальное семейство указанных колебаний; семейства заполняют всю область фазового пространства, примыкающую к равновесию. Доказывается нелокальное продолжение семейства по параметру системы. В случае консервативной системы находится автономное управление и решается задача стабилизации (в большом) симметричного многочастотного колебания. При этом строится обратная связь по потенциальной энергии.

Ключевые слова: лагранжева система, позиционные силы, обратимость, симметричное многочастотное колебание, рождение, глобальное семейство, нелокальное продолжение по параметру, консервативная система, обратная связь, адаптивная схема, стабилизация.

DOI: 10.7868/S2413977726080035

1. Введение

Многочастотные колебания являются важнейшим предметом исследования в нелинейной динамике (см. [1–4], другие книги и многочисленные статьи). Для исследования колебаний применяются универсальные асимптотические методы и теория возмущений. К последней можно отнести теорему Л.С. Понтрягина [5] об управлении колебаниями посредством построения предельного цикла. Пример качественной перестройки фазового портрета при малом возмущении находим в исследованных Ван дер Полем [6] релаксационных режимах (при отсутствии вынуждающей силы) регеративного приемника. А.А. Андронов (1929) обнаружил, что физическим воплощением кривых Пуанкаре являются построенные им и независимо Ван дер Полем устойчивые автоколебания. А. Пуанкаре [7, гл. VI] (1881) ввел понятие предельного цикла для системы на плоскости. Теория автоколебаний развита в школе А.А. Андропова [8].

Качественная перестройка наблюдается [9] в общем случае скорректированной консервативной системы. В построенной автономной системе управления обратная связь реализуется путем отслеживания потенциальной энер-

гии в текущей точке траектории. В данной статье идея из [9] применяется для стабилизации симметричных многочастотных колебаний. Для стабилизации колебания с выбранной энергией h^* в [9] применяется адаптивная схема [10] стабилизации, в которой коэффициент $K(h^*)$ в управлении выбирается в зависимости от значения h^* . Вычисление $K(h^*)$ связано в [9] со знанием глобального семейства Σ_1 одночастотных симметричных колебаний, построенного для всех допустимых значений энергии h . Семейство Σ_1 получается глобальным продолжением симметричного локального ляпуновского семейства, существование которого дается аналогом [11, 12] теоремы Ляпунова [13] о центре для обратимых механических систем. Для симметричного многочастотного колебания глобальное семейство строится в данной статье.

В статье вводится понятие симметричного многочастотного колебания лагранжевой системы с n степенями свободы, подверженной действию позиционных сил, доказывается теорема о рождении k -частотных колебаний ($1 \leq k \leq n$), дается их продолжение в фазовом пространстве на глобальное семейство Σ_k ($1 \leq k \leq n$) таких колебаний, доказывается нелокальное продолжение Σ_k по параметру системы, а также решаются другие вопросы. В результате развивается глобальная теория, что позволяет решить задачу стабилизации в большом.

Согласно А.М. Ляпунову [13] задачу устойчивости выбранного решения всегда можно привести к исследованию нулевого решения. При этом для решения автономной системы, включая многочастотное колебание, получается особый случай в теории устойчивости. Для периодического решения автономной системы применяется теорема Андронова–Витта [14] об устойчивости.

В автономной системе решение представляет собой семейство по параметру β – сдвигу начальной точки на траектории. Поэтому различаются две задачи стабилизации: стабилизация всего семейства решений и стабилизация выбранного решения из указанного семейства. Обычно решается вторая из задач, при этом используются управления, зависящие явно от времени. Некоторые такие постановки задач управления одночастотными колебаниями даются в [15–21].

При стабилизации всего семейства решений необходимо, чтобы траектории управляемой системы притягивались к семейству; это накладывает требование сохранения автономности исходной системы и применения автономного управления. При этом используются известные понятия: устойчивость по части переменных [22], характеризующая отклонение траекторий семейства от остальных траекторий, орбитальная устойчивость и орбитальная асимптотическая устойчивость, притяжение [23]. В теореме Андронова–Витта [14] притяжение обеспечивается наличием корней характеристического уравнения в левой полуплоскости.

Действие управления приводит к тому, что замкнутая система уже не допускает исходное решение. Поэтому в управляемой системе стабилизируется близкое к исходному решение. Близость замкнутой системы к исходной систе-

ме обеспечивается применением управления с малым коэффициентом усиления регулятора. Такой подход характерен для теории возмущений; впервые его применил Л.С. Понтрягин [5]. Притяжение к семейству (решению) дается диссипацией – силой, линейной по скорости и действующей в каждой точке траектории. При этом управлением одновременно обеспечивается изолированность стабилизируемого колебания. Хрестоматийным примером такой стабилизации является уравнение Ван дер Поля [6]. Обзор дальнейших исследований по применению диссипации типа Ван дер Поля приводится в [9] и включает библиографию в статье. Рассматривались только одночастотные колебания.

2. Симметричные многочастотные колебания лагранжевой системы, подверженной действию позиционных сил

Рассматривается гладкая система, описываемая уравнениями Лагранжа второго рода

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s(q_1, \dots, q_n), \quad s = 1, \dots, n,$$

и подверженная действию позиционных сил Q_s . В общем случае сила $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ является суммой потенциальной силы и неконсервативной позиционной силы. Кинетическая энергия T представляется положительно определенной квадратичной формой скоростей; уравнениями (1) описывается динамика в инерциальной системе координат. Система (1) инвариантна относительно преобразования $(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, -\dot{q}, -t)$ и принадлежит к классу обратимых механических систем. Фазовое пространство системы (1) симметрично относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$. Равновесие системы (1) находится на M . Симметричные движения пересекают множество M : в точке пересечения скорость $\dot{q} = 0$. Несимметричные движения реализуются в паре; они расположены симметрично друг другу относительно M , а направления движений в паре взаимно противоположны. Дважды пересекающее множество M симметричное движение представляет собой одночастотное симметричное колебание.

Пусть для равновесия $q = (q_1, \dots, q_n) = 0$. В системе (1) корни характеристического уравнения разбиваются на пары $\pm \lambda_s$. Система (1) изучается в предположении, что все λ_s считаются чисто мнимыми, а числа $|\lambda_s| > 0$ – несоизмеримыми. Тогда все движения в линеаризованной системе близ равновесия будут описываться квазипериодическими функциями с k частотами, где $1 \leq k \leq n$. Они представляют собой симметричные колебания (СК). При $k = 1$ имеем одночастотное колебание, при $k > 1$ говорят о многочастотном колебании.

СК начинается в точке $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \in M$ при $t = 0$ и описывается функцией $q(q^0, t)$, в которой произвольный сдвиг β начальной точки на траектории полагается нулевым. В следующий раз СК по координате q_s будет иметь нулевую скорость $\dot{q}_s$ в момент времени t_s . В исследуемом случае числа t_s пред-

полагаются несоизмеримыми. Поэтому на СК для скоростей $\dot{q}_s$ в моменты времени $t = t_s$ выполняются равенства

$$(2) \quad \dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, t) = 0, \quad t = t_s; \quad s = 1, \dots, n.$$

В левых частях равенств (2) записаны скорости $\dot{q}_s$ для решения системы (1) как функции начальной точки q^0 и времени t . Равенства (2) означают, что по каждой переменной q_s в фазовом пространстве имеется замкнутая кривая. Условия (2) будут необходимыми и достаточными для существования СК исследуемой системы (1). Они могут выполняться в (2) по k скоростям $\dot{q}_s$, $s = 1, \dots, k$, $k \leq n$. При $k = n$ система (1) допускает СК с максимально возможным числом частот, при $k < n$ в начальной точке q^0 ускорения равны $\ddot{q}_{k+1} = \dots = \ddot{q}_n = 0$ и $t_{k+1} = \dots = t_n$, поэтому система имеет СК с $k < n$ частотами: при $k = 1$ получается одночастотное СК. Каждая координата q_s дается $2t_s$ -периодической функцией времени t , поэтому СК описывается квазипериодической функцией $(q(q^0, t), \dot{q}(q^0, t))$ с k частотами. При $k = 1$ функция будет периодической. При $k = n$ траектория в фазовом пространстве принадлежит прямому произведению n замкнутых кривых – симметричному n -тору; при $k < n$ получаются k -мерные симметричные торы.

В равенствах (2) по каждой переменной q_s отсчитывается свое время t_s . Единое время γ по всем переменным СК вводится по формуле $t_s = \nu_s \gamma$. По времени γ происходит одновременное обращение всех скоростей в нуль: многочастотное СК можно исследовать как *воображаемое* симметричное периодическое движение с индивидуальным временем по каждой переменной. Равенства (2) записаны для фиксированных чисел $t_s = t_s^*$. Значит, при $t_s^* = \nu_s \gamma^*$ число γ^* , как и в случае одночастотного СК периода $2\gamma^*$, имеет смысл момента времени пересечения траекторией неподвижного множества M . Поэтому с введением единого времени γ возникает понятие *общего периода* по всем переменным многочастотного СК. Оно равно $2\gamma^*$, и это число выделяет рассматриваемое СК в семействе. Число γ^* обозначается через τ и называется параметром СК. Оно характеризует переход одного СК к другому и зависит от начальной точки q^0 для СК.

Понятия единого времени и общего периода позволяют строить теорию многочастотного СК подобно теории для симметричного периодического движения. Последнее представляет собой СК с $k = 1$; на нем полупериод выполняет роль параметра τ .

Равенства (2) представляются в виде

$$(3) \quad \dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \nu_s \tau) = 0, \quad s = 1, \dots, n.$$

Условие несоизмеримости чисел в множестве $\{t_s^*\}$ переходит к набору $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$: ν называется *базисом* (частот) СК. При переходе одного СК к другому меняется точка $q^0 \in M$. Равенства (2) рассматриваются как система уравнений для нахождения чисел $t_s = \nu_s \tau$. В равенствах (3) с параметром τ находится начальная точка q^0 , а базис ν необходимо будет определяться с точностью до множителя $\delta(q^0)$ и таким образом сохраняется. Раз равенства (3)

числом n связывают $n + 1$ переменных $q_1^0, \dots, q_n^0, \tau$, то они приводят к семейству СК размерности n с параметром τ . В случае $k < n$ равенств в (3) размерность семейства СК равняется k .

При продолжении семейства СК по параметру τ меняется проекция СК на неподвижное множество M ; на интервале $\Delta\tau$ проекция приводит к области q^0 начальных точек для локального семейства СК. Это множество также получается путем пропорционального изменения элементов базиса ν с сохранением несоизмеримости множества чисел ν_s в базисе. При этом базис, определяемый с точностью до множителя δ , не меняется. Получается другой способ локального продолжения СК. Оба способа приводят к одному результату.

3. Рождение СК из равновесия

Рассмотрим СК с k частотами и начальной точкой $q^0 \in M$. Для него справедливы равенства (3). Они связывают переменные q^0 и τ . В точке q^0 вычисляется матрица Якоби

$$(4) \quad J(q^0, \tau) = \left\| \frac{\partial \dot{q}_s(q^0, \tau)}{\partial q_j^0} \right\|.$$

Определение 1. Симметричное колебание с k частотами ($1 \leq k \leq n$), для которого выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$, называется невырожденным.

Для невырожденного СК выполняются локальные свойства продолжения.

1°. Невырожденное СК локально продолжается по параметру τ .

Пусть справедливы (3). Для данного невырожденного СК составим уравнения в отклонениях $\Delta q^0, \Delta\tau$ в линейном приближении. Получим линейную систему уравнений

$$(5) \quad \frac{\partial \dot{q}_s(q^0, \tau)}{\partial q_1^0} \Delta q_1^0 + \dots + \frac{\partial \dot{q}_s(q^0, \tau)}{\partial q_n^0} \Delta q_n^0 + \frac{\partial \dot{q}_s(q^0, \tau)}{\partial \tau} \Delta \tau = 0, \quad s = 1, \dots, n.$$

В этой системе основная матрица совпадает с $J(q^0, \tau)$, а правая часть представляется вектором ускорения со знаком минус, вычисленным на M . Для невырожденного СК справедливо неравенство $\det J(q^0, \tau) \neq 0$: вектор ускорения равен нулю только для равновесия. Поэтому система совместна, а СК получает локальное продолжение по $\Delta\tau$ как в сторону увеличения, так и уменьшения $\Delta\tau$. Одновременное приращение получает множитель $\delta(q^0)$.

2°. Невырожденное СК локально продолжается по параметру системы μ .

Для системы с параметром μ система (5) содержит этот параметр и, кроме этого, в систему добавляется слагаемое с приращением $\Delta\mu$. Для невырожденного СК матрица Якоби невырождена, поэтому продолжение проводится по τ и μ . Ограничиваясь только приращением по μ , получаем свойство 2°.

В окрестности равновесия система (1) записывается в виде

$$(6) \quad \ddot{q}_s + \sum_{j=1}^n a_{sj} q_j + \tilde{Q}_s(q, \dot{q}) = 0, \quad \tilde{Q}_s(q, \dot{q}) = \tilde{Q}_s(q, -\dot{q}), \quad s = 1, \dots, n,$$

где $\|a_{sj}\|$ – постоянная матрица, $\tilde{Q}_s$ – нелинейные функции.

Справедлива

Теорема 1 (о рождении СК). *Окрестность равновесия системы (6) с несоизмеримыми частотами ν_s , $s = 1, \dots, n$, линейной системы заполняется семействами невырожденных СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Они параметризуются расстоянием от равновесия.*

Доказательство. Выполним замену $(q, \dot{q}) \rightarrow (\varepsilon \xi, \varepsilon \dot{\xi})$. Тогда в переменных ξ_s получается квазилинейная система, которая в линейном приближении совпадает с линейным приближением в системе (6).

При $\varepsilon = 0$ полученная система допускает невырожденное СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Для нее матрица $J(0, 0) = -\|a_{sj}\|_1^n$, $\text{rank } J(0, 0) = n$, а базис для колебаний с k частотами содержит k чисел из набора $\nu(0) = \{\nu_s(0)\}$, $\nu_s(0) = |\lambda_s|$. При этом система, содержащая СК с k частотами, описывается k переменными и базис СК включает k чисел.

Для всех систем выполняется свойство продолжения СК линейной системы по параметру ε : квазилинейная система обладает семействами по ε невырожденных СК со всеми частотами: $1 \leq k \leq n$. При рассмотрении СК со всеми возможными частотами k , $1 \leq k \leq n$, окрестность равновесия системы (6) полностью заполняется семействами невырожденных СК, параметризованных расстоянием ε от равновесия. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Для $k = 1$ выводится [11, 12] обратимый аналог теоремы Ляпунова о центре [13].

Замечание 2. В условиях теоремы 1 равновесие системы устойчиво.

4. Глобальное семейство невырожденных СК в фазовом пространстве

Невырожденное СК обладает локальным свойством продолжения по параметру семейства τ . В следующей теореме 2 формулируется результат о глобальном продолжении СК по параметру τ .

Определение 2. *Семейство по параметру τ невырожденных СК называется глобальным семейством СК, если параметр τ принимает все возможные для этого семейства значения.*

Теорема 2 (о глобальном семействе СК в фазовом пространстве). *Пусть лагранжева система, подверженная действию позиционных сил, допускает невырожденный СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Тогда СК всегда продолжается по параметру семейства τ на глобальное семейство Σ_k невырожденных СК, на котором параметр τ меняется монотонно. На глобальном семействе выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$. На границе семейства это условие нарушается.*

Доказательство. При локальном продолжении невырожденного СК с k частотами по τ его начальная точка $q^0(\tau)$ будет функцией τ . При этом на неподвижном множестве M образуется область $\Upsilon_k(q^0, \tau)$, для точек которой выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$. Применим свойство локальной продолжимости невырожденного СК к точкам области $\Upsilon_k(q^0, \tau)$. Тогда возникают две ситуации. В первой ситуации область $\Upsilon_k(q^0, \tau)$ не приобрела новых точек. Тогда глобальное семейство Σ_k построено. Во второй ситуации область $\Upsilon_k(q^0, \tau)$ увеличилась, что сопровождается монотонным изменением параметра τ . Опять возникают две ситуации.

В результате на каком-то шаге итерации глобальное семейство Σ_k строится или же процесс построения продолжается с бесконечным приближением к границе области начальных точек $\Upsilon_{\sigma k}(q^0, \tau)$ для глобального семейства Σ_k . В каждой точке этой области выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$. Монотонное изменение СК семейства Σ_k по параметру τ следует из построения. Теорема доказана.

Замечание 3. Доказательство теоремы 2 справедливо для СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Для одночастотного колебания ($k = 1$) результат описан в [24].

Замечание 4. Для аналитической системы (6) при условии несоизмеримости чисел $\nu_1, \dots, \nu_n$ в [25] строится формальное преобразование к системе с многообразиями размерности k , $1 \leq k \leq n$. Система (6) обладает свойством обратимости; условия сходимости этого преобразования приводятся в [25] (с. 185, теорема 2). В результате фазовое пространство содержит n многообразий, на каждом из которых реализуется одночастотное СК.

5. Глобальное продолжение невырожденного СК в параметрическом пространстве системы

Невырожденное СК обладает свойством локального продолжения по параметру системы μ . Таким образом, в теории возмущений СК системы (1) вместе с невырожденным СК всегда существует невырожденное возмущенное СК. Вопрос границы существования невырожденного СК по параметру μ в теории возмущений не решается. В приложениях граница обычно находится прямым вычислением.

В следующей теореме 3 формулируется результат о глобальном продолжении невырожденного СК по параметру μ . В общем случае параметр $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ является вектором.

Теорема 3. Пусть лагранжева система с параметром μ , подверженная действию позиционных сил, допускает СК с параметром μ , невырожденное при $\mu = \mu^*$. Тогда данное СК продолжается глобально на всю область изменения μ . На глобальном по параметру μ семействе невырожденных СК выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$. На нем базис ν сохраняется. На границах глобального семейства условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$ нарушается.

Доказательство. Для СК с параметром μ , невырожденного при $\mu = \mu^*$, выполняется свойство 2°. Оно применяется для глобального продолжения по μ точно также, как и при глобальном продолжении невырожденного СК по параметру τ с применением свойства 1°. Продолжение по μ выполняется до тех пор, пока не исчерпается вся область по μ , в которой $\det J(q^0(\mu), \tau) \neq 0$.

Замечание 5. Теорема 3 касается параметра μ , от которого зависит СК. Возможность другой ситуации демонстрируется в примере 2 данной статьи.

Применение теорем 2 и 3 к невырожденному СК приводит к такому выводу.

Общее положение. Если лагранжева система, подверженная действию позиционных сил, допускает невырожденное СК, то оно продолжается глобально в параметрически-фазовом пространстве.

Замечание 6. В статье применяется подход Л.С. Понтрягина [26] к автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям, в котором равны параметры и фазовые переменные.

6. Область колебаний и задача стабилизации СК системы (6)

Рассматривается система (6) с несоизмеримыми частотами $\nu_1, \dots, \nu_n$ в линейной системе. В окрестности равновесия по теореме 1 рождаются СК с k частотами, $1 \leq k \leq n$, которые заполняют всю окрестность равновесия. Продолжение СК по параметру τ (теорема 2) приводит в фазовом пространстве к области колебаний Ω , примыкающей к равновесию и заполненной глобальными семействами СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Они обозначены через Σ_k : число семейств равно сочетанию C_n^k . Семейство Σ_k заполняет интегральное многообразие $\tilde{\Sigma}_k$. Каждое СК в семействе Σ_k выделяется значением параметра τ .

В данной статье подход в [9], предложенный для одночастотного СК, развивается для многочастотных СК. В задаче стабилизации СК для системы (6) строится автономная управляемая система, ε -близкая к (6), в которой выделяется изолированное колебание (ИК). В возмущенной системе многообразию $\tilde{\Sigma}_k$ отвечает многообразие $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$: $\tilde{\Sigma}_k = \tilde{\Sigma}_k(0)$. С выделением ИК одновременно решается задача его орбитальной асимптотической устойчивости. Обычно ставится локальная задача притяжения, в которой к ИК притягиваются траектории из его окрестности. Однако структура области Ω позволяет ставить задачу притяжения всех траекторий из $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$, а также из окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ [9]. Таким образом происходит, например, в уравнении Ван дер Поля [6] ($k = 1$). В консервативной системе с одной степенью свободы притягиваются все траектории из области колебаний [9].

В консервативной системе кинетическая энергия на множестве M равна нулю. При переходе от одного к другому СК семейства меняется потенциальная энергия $\Pi(q)$, вычисленная на M . Поэтому в качестве параметра СК вместо τ можно выбирать значение функции $\Pi(q)$ на M или постоянную h

полной механической энергии E . В силу монотонного изменения параметра τ на глобальном семействе энергия h меняется монотонно. Задавая значение h , получим все СК, принадлежащие данному уровню энергии. На графике функции $\Pi(q)$ значению $h = 0$ отвечает равновесие, при $h > 0$ рождающиеся СК с k частотами продолжают на глобальные семейства Σ_k неограниченно вместе с энергией h .

В консервативной системе СК в семействе Σ_k параметризуются постоянной h и образуют интегральные многообразия $\tilde{\Sigma}_k$ размерности k : $1 \leq k \leq n$. Поэтому данному значению h соответствуют СК всех размерностей k . По указанной причине находится управление, не зависящее от числа частот в СК. При этом для значения энергии $h = h^*$ исследуется притяжение к ИК на $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ со всеми номерами k : $1 \leq k \leq n$.

В случае $k = 1$ семейство Σ_1 описывается системой с одной степенью свободы. Поэтому задача стабилизации естественным образом распадается [9]: сначала решается задача притяжения на $\tilde{\Sigma}_1(\varepsilon)$, а в системе $(n - 1)$ -го порядка обеспечивается локальное притяжение к нулевому решению, которому отвечает ИК на $\tilde{\Sigma}_1(\varepsilon)$. Для него $h = h^*$.

Для СК с $k > 1$ частотами размерность $\tilde{\Sigma}_k$ равна k . Локальное притяжение к нулевому решению обеспечивается в системе $(n - k)$ -го порядка. Независимо от числа частот k нулевому решению в задаче отвечает ИК, соответствующее в управляемой системе энергии $h = h^*$.

В консервативной системе с n степенями свободы число стабилизируемых ИК управляемой системы с k частотами равно числу сочетаний без повторений C_n^k . Сумма по всем k будет числом всех стабилизируемых ИК.

7. Стабилизация СК консервативной системы

Рассмотрим управляемую (скорректированную) систему

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \varepsilon [1 - K \Pi_\varphi] \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}, \quad L = T - \Pi, \quad s = 1, \dots, n,$$

заданную уравнениями Лагранжа второго рода. Здесь T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия; вычисленная на семействе СК она обозначается через Π_φ . Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ система (7) допускает множество Σ_σ , содержащее все глобальные семейства СК, рожденные из равновесия с несоизмеримыми частотами $\nu_1, \dots, \nu_n$. Выбирается $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 – некоторое конечное число для Σ_σ ; h^* – значение энергии, отвечающее выделенному колебанию: равновесию соответствует значение $h = 0$. В системе (7) используется число K , которое равно значению $K(h^*)$ функции $K(h)$ для стабилизируемого колебания. Сама зависимость $K(h)$ будет определена далее в статье.

Система управления (7) применялась в [9] для адаптивной схемы стабилизации симметричного периодического движения ($k = 1$). Стоящее в правой

части равенства (7) управление является универсальным для стабилизации СК с $k = 1$. Оно представляется нелинейной силой, линейной по скорости. Система (7) при $\varepsilon = 0$ принадлежит к классу обратимых механических систем. Обратная связь реализуется через отслеживание в текущей точке траектории замкнутой системы значения потенциальной энергии $\Pi(q)$.

В задаче стабилизации важно понимать, что в исследуемой системе (при $\varepsilon = 0$) в множестве глобальных семейств Σ_σ реализуется единственное семейство Σ_k . Более того, на семействе Σ_k реализуется единственное СК, которое отвечает параметру τ (в консервативной системе – энергии h). Поэтому ставится задача стабилизации единственного СК, отвечающего выделенному значению энергии $h = h^*$. Для этого СК переменные $q_{k+1} = \dots = q_n = 0$.

Далее приводятся вычисления, справедливые для всех глобальных семейств Σ_k с k частотами, $1 \leq k \leq n$, независимо от числа частот k колебаний.

Для системы (7) при $\varepsilon = 0$ определяется полная механическая энергия – функция

$$(8) \quad E \equiv T(q, \dot{q}) + \Pi(q).$$

Она принимает постоянное значение h на решениях консервативной системы. Для системы (7) справедливо равенство

$$(9) \quad \frac{dE}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi_\varphi]T(q, \dot{q}).$$

При $\varepsilon = 0$ имеем: $E = h(\text{const}) > 0$. На СК координата $q = \varphi$. СК образуют глобальное семейство Σ_k , принадлежащее инвариантному интегральному многообразию $\tilde{\Sigma}_k$. Стабилизируется СК с параметром $\tau = \tau^*$ ($h = h^*$).

Энергия E будет суммой двух слагаемых: $E = E_\varphi + E_\varepsilon$, где E_φ вычисляется на решениях в $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$, а E_ε – на решениях в окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$. В законе для E_ε используется кинетическая энергия при движении в ε -окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$. Она является квадратичной формой скоростей $\dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n$. Таким образом, движение в окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ отслеживается потенциальной энергией СК на Σ_k .

Для $\varepsilon > 0$ записываются выражения

$$\Pi(q) = \Pi(\varphi) + h\varepsilon\rho(\varepsilon, h, q), \quad T = E - \Pi(q) = h - \Pi(\varphi) + h\varepsilon\sigma(\varepsilon, h, q)$$

($\Pi(\varphi) = \Pi_\varphi$) с функциями ρ и σ порядка единицы. В результате в правой части равенства (9) выделяется главное слагаемое

$$f = \varepsilon[(1 - K(h^*)\Pi_\varphi)](h - \Pi(\varphi)),$$

которое вычисляется на СК; оно не содержит t в явном виде.

Для СК в разделе 2 вводилось *единое* для всех переменных q_s время γ . Тем самым многочастотное СК в функции E рассматривается здесь как одночастотное СК с *общим периодом*, равным 2τ . Время γ определяется с точностью до множителя. В едином времени скорость изменения переменной q_s

приобретает свой индивидуальный множитель ν_s такой, чтобы в наборе $\{\nu_s\}$ числа были несоизмеримыми. Наконец, потенциальная энергия в функции f вычисляется на СК $q = \varphi$: f также меняется, как функция γ .

В едином времени γ скорость изменения энергии пропорциональна ее скорости по времени t . Поэтому приращение $\Delta E_\varphi(\varepsilon, h)$ энергии по γ вычисляется по правой части (9) как интеграл за период 2τ по переменной γ . Получается формула

$$(10) \quad \Delta E_\varphi(\varepsilon, h) = \varepsilon 2\tau(h)[I(h) + \varepsilon h \Phi(\varepsilon, h)],$$

справедливая на всем глобальном семействе Σ_k . Семейство Σ_k состоит из СК, причем каждому значению h отвечает только одно СК. Если в точке $h = h^*$ выполняется равенство $\Delta E_\varphi(\varepsilon, h^*) = 0$, то значение h^* соответствует k -частотному колебанию. Колебание будет несимметричным, так как для симметричного колебания $\varepsilon = 0$. Для изолированного корня h^* колебание будет изолированным. Получается изолированное колебание (ИК), которое в случае $k = 1$ является циклом. ИК является однопараметрическим семейством по сдвигу начальной точки для колебания.

Функция $I(h)$ имеет вид

$$(11) \quad I(h) \equiv \int_0^{2\tau^*} [1 - K(h^*)\Pi_\varphi](h - \Pi(\varphi))d\gamma$$

и дает амплитудное (бифуркационное) уравнение $I(h) = 0$ для многочастотного СК. Как и в случае симметричного периодического движения в [9], простой корень h^* уравнения (11) приводит в точке $h = h^*$ семейства k -частотного СК к бифуркации и рождению k -частотного ИК.

В интеграле (11) функция $\Pi(\varphi)$ на семействе СК вычисляется через координату $q = \varphi(h, \gamma)$, заданную в едином для СК времени γ . При замене в интеграле (11) переменной γ на $\tilde{\gamma} = (\tau^*/\tau(h))\gamma$, где $\tau^* = \tau(h^*)$ для стабилизируемого с энергией h^* колебания, координата q будет напрямую зависеть от $\tilde{\gamma}$.

В случае $k = 1$ семейство нелинейных колебаний приводится к изохронному семейству в [9].

Потенциальная энергия на СК меняется как функция $\tilde{\gamma}$, поэтому с учетом равенства $\Pi(\varphi(h, 0)) = h$ она записывается в виде $\Pi(\varphi(h, \tilde{\gamma})) = hz(\tilde{\gamma})$, $0 \leq z \leq 1$. В результате интеграл (11) принимает вид

$$(12) \quad I(h) \equiv 2h \int_0^1 (1 - K(h^*)hz(\tilde{\gamma}))(1 - z(\tilde{\gamma}))d\tilde{\gamma}$$

и представляется квадратичной функцией без свободного члена

$$(13) \quad I(h) = 2h(\alpha - \beta h), \quad \alpha = \int_0^1 (1 - z)d\tilde{\gamma}, \quad \beta = -K(h^*) \int_0^1 z(1 - z)d\tilde{\gamma}.$$

Из записи (13) становится ясным, что уравнение $I(h) = 0$ допускает единственный корень $h^* = \alpha/\beta$, отличный от нулевого. Корень h^* отвечает многочастотному ИК управляемой системы (7). Это колебание ε -близко к СК со значением энергии $h = h^*$, однако колебание не является симметричным.

Заметим, что каждому числу $K(h^*)$ однозначно ставится в соответствие корень $h = h^*$ и наоборот. Таким образом, определяется функция

$$K(h) = \frac{b}{h}, \quad b = \text{const}, \quad b > 0.$$

Кинетическая энергия на неподвижном множестве M равна нулю, поэтому по постоянной b различаются на СК потенциальные энергии исследуемых систем.

Вычисления корня уравнения $I(h) = 0$ проводятся для однопараметрического по h семейства Σ_k траекторий в ε -скорректированной системе. Корень h^* соответствует неподвижной точке отображения, заданной на многообразии $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$, а его изолированность свидетельствует о том, что существование корня выводится посредством линейных по ε (главных) слагаемых. Поэтому $\Delta E_\varphi(\varepsilon, h^*) = 0$. Как следствие, справедливо равенство $\Phi(\varepsilon, h^*) = 0$.

Лемма 1. Уравнение

$$(14) \quad I(h) + \varepsilon h \Phi(\varepsilon, h) = 0$$

при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет единственный корень, где ε_0 – не зависящее от h^* число.

Доказательство. Подробная процедура нахождения числа ε_0 полностью совпадает с той, которая описана для одночастотного колебания в [9, Лемма 1].

Далее скорректированная система (7) исследуется при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Рассматривается интегральное многообразие $\tilde{\Sigma}_k$, содержащее глобальное семейство СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Оно получено продолжением по параметру h малых колебаний с несоизмеримыми частотами.

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть консервативная система описывается уравнениями Лагранжа второго рода и допускает равновесие с несоизмеримыми частотами малых колебаний. Тогда система имеет интегральное многообразие $\tilde{\Sigma}_\sigma$, содержащее множество Σ_σ из глобальных семейств Σ_k колебаний с k частотами, которые заполняют многообразия $\tilde{\Sigma}_k$: $1 \leq k \leq n$. Для скорректированной системы (7) всегда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система (7) обладает ИК с k частотами, $1 \leq k \leq n$, ε – близкое к колебанию консервативной системы с энергией $h = h^$. Число ИК колебаний с k частотами дается сочетанием C_n^k . Каждое ИК притягивает траектории из $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ и траектории из ε -окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$. Закон изменения энергии $E = T + \Pi$ консервативной системы на решениях скорректированной системы дается равенством (9).*

Доказательство. Существование глобального семейства Σ_σ при условии несоизмеримости частот для равновесия следует из теорем 1, 2. Граничное число ε_0 устанавливается леммой 1. Формула (10) справедлива для СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Проведенный анализ формулы (10) свидетельствует о существовании изолированного колебания с k частотами, ε -близкого к колебанию консервативной системы с энергией h^* . В системе (7) вся область начальных точек для решений, отличных от равновесия, принадлежит $\tilde{\Sigma}_\sigma$.

Формула (9) справедлива по отдельности для E_φ и E_ε . При этом скорость изменения E_φ по знаку совпадает со скоростью изменения энергии E_ε : применяются разные кинетические энергии. В результате при стремлении $h \rightarrow h^*$ одновременно справедливы пределы

$$\Delta E_\varphi(\varepsilon, h) \rightarrow \Delta E_\varphi(\varepsilon, h^*) = 0, \quad \Delta E_\varepsilon(\varepsilon, h) \rightarrow \Delta E_\varepsilon(\varepsilon, h^*) = 0.$$

Первый предел означает, что в управляемой системе (7) для точек из $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ все траектории стремятся к ИК, отвечающему СК с энергией h^* из Σ_k . Согласно второму пределу траектории из окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ стремятся к $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ с нулевым предельным значением соответствующей кинетической энергии. Поэтому эти траектории также стремятся к ИК.

Число ИК с k частотами совпадает с числом сочетаний C_n^k интегральных многообразий, на которых реализуются k -частотные СК.

Теорема 4 доказана.

Замечание 7. Теорема 4 справедлива для СК с частотами k : $1 \leq k \leq n$. Для частного случая $k = 1$ она установлена в [9]: в ней условия на корни характеристического уравнения ослабляются.

Пример 1. Распознавание источников сигнала выделением частот. Рассматриваются два линейных осциллятора с частотами ω_x и ω_y . В системе они обладают семействами симметричных двухчастотных колебаний, вырождающихся в два семейства одночастотных колебаний. Для стабилизации ИК управляемой системы применяется замкнутая система

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} + \omega_x^2 x &= \varepsilon(1 - K(h^*)\Pi)\dot{x}, \\ \dot{y} + \omega_y^2 y &= \varepsilon(1 - K(h^*)\Pi)\dot{y}, \quad \Pi = (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)/2, \end{aligned}$$

в которой коэффициент $K(h^*)$ вычисляется по значению энергии $h = h^*$ всей системы. Стабилизация всех ИК происходит по одному сценарию. Система (15) содержит два инвариантных многообразия, на которых стабилизируются отдельные осцилляторы.

Сигнал улавливается по энергии. В системе (15) в принятом сигнале выделяются частоты колебаний и по частотам распознаются их источники. При этом с ростом числа осцилляторов в системе возможности распознавания растут.

Симметричное колебание гармонического осциллятора с частотой ω дается формулой $r = A \cos(\omega t)$, $A^2 = h/2$. В случае одного осциллятора формула для коэффициента будет $K(h) = 2/h$.

В (15) имеем базис частот $\nu = (\omega_x, \omega_y)$, единое время $\gamma = t$. Поэтому система из двух осцилляторов колеблется как один гармонический осциллятор с частотой ω . Формула $K(h) = 2/h$ остается справедливой для системы (15). Поэтому в системе (15) полагается:

$$K(h^*) = 2/h^* = 1/(A_x^2\omega_x^2 + A_y^2\omega_y^2),$$

где A_x и A_y – амплитуды колебаний осцилляторов соответственно с энергиями h_x^* и h_y^* .

Пример 2. Пусть система из двух осцилляторов из примера (15) является линейным приближением гладкой системы

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{x} + \omega_x^2 x &= X(x, y), \\ \dot{y} + \omega_y^2 y &= Y(x, y), \quad X(0, 0) = Y(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Для пристального изучения окрестности нуля увеличим масштаб для наблюдения системы: $x = \varepsilon\xi$, $y = \varepsilon\eta$. В результате приходим к квазилинейной системе

$$(17) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega_x^2 \xi &= \varepsilon X(\varepsilon, \xi, \eta), \\ \ddot{\eta} + \omega_y^2 \eta &= \varepsilon Y(\varepsilon, \xi, \eta), \quad X(\varepsilon, 0, 0) = Y(\varepsilon, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$ система (17) допускает одночастотные и двухчастотные СК: последние имеют базис (ω_x, ω_y) . По теореме 1 при $\varepsilon > 0$ окрестность равновесия заполняется семействами СК с одним и двумя частотами. По теореме 2 каждое локальное семейство СК продолжается в системе (16) на глобальное семейство СК и заполняет область колебаний в системе.

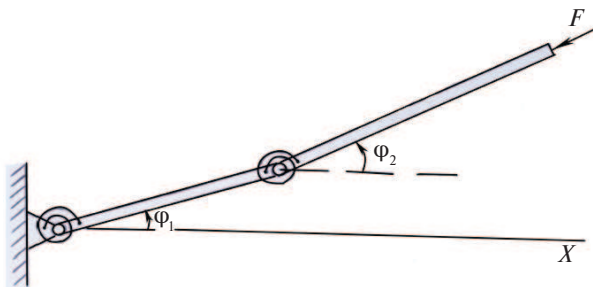
Пример 3. Модель упругого стержня под действием следящей силы [27, с. 204].

Колебания балок, канатов, тросов часто изучаются на основе адекватных дискретных стержневых моделей. Рассматривается частный случай из [27], когда механическая система состоит из двух идентичных стержней с массой m и длиной l , связанных шарниром и линейной пружиной с жесткостью c_2 (см. рисунок).

Первый стержень прикреплен шарниром и пружиной с жесткостью c_1 к неподвижной точке O . На конец второго стержня действует постоянная сила F , направленная вдоль оси стержня. Система расположена на гладкой горизонтальной плоскости. Отклонения стержней от оси x задаются соответственно углами φ_1 , φ_2 , отсчитываемыми от прямой x , для равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Кинетическая энергия T и обобщенные силы Q_1, Q_2 равны

$$(18) \quad \begin{aligned} T &= \frac{ml^2}{6} [4\dot{\varphi}_1^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_2^2], \\ Q_1 &= c_1\varphi_1 + c_2(\varphi_2 - \varphi_1) - Fl \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad Q_2 = c_2(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$



Модель упругого стержня под действием следящей силы.

Имеем лагранжеву систему с двумя степенями свободы, подверженную действию позиционных сил. При $F = 0$ система будет консервативной.

В равновесии силы $Q_1 = Q_2 = 0$: система допускает единственное (нулевое) равновесие. Составим характеристическое уравнение для равновесия:

$$(19) \quad 7\lambda^4 + \frac{6a}{ml^2}\lambda^2 + \frac{36}{m^2l^4}c_1c_2 = 0, \quad a = 2c_1 + 16c_2 - 5Fl.$$

При выполнении условия $a^2 > 28c_1c_2$ корни уравнения будут чисто мнимыми $\lambda = \pm\omega_{1,2}$, а квадраты частот даются формулами

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3}{7ml^2}(a \pm \sqrt{a^2 - 28c_1c_2}).$$

При этом находится граничное значение следящей силы F для устойчивости прямолинейной конфигурации стержня в линейном приближении. Интересно, как поведут себя колебания стержня при конечных углах отклонения?

Согласно теореме 1 при условии несоизмеримости частот окрестность равновесия заполняется семействами невырожденных одночастотных и двухчастотных СК, которые продолжаются по теореме 2 на глобальные семейства невырожденных СК. Тем самым к окрестности равновесия примыкает только область колебаний, заполненная невырожденными СК. Равновесие системы является устойчивым в целом.

Теорема 2 применяется к системе с фиксированным параметром F , для которого выполняется условие несоизмеримости частот. В теореме 3 нелокальное продолжение многочастотного колебания по параметру проводится с сохранением базиса. При $F > 0$ числа $\omega_{1,2}$ зависят от F , базис меняется, поэтому теорема 3 не применима. Найденные невырожденные СК для счетных значений следящей силы F не реализуются.

Заметим, что качественные выводы для модели не зависят от числа стержней, а амплитуда колебаний ограничивается только жесткостью пружин.

При $F = 0$ симметричные колебания существуют; стабилизация этих колебаний происходит согласно теореме 4 в адаптивной схеме (7).

8. Заключение

Лагранжева система, подверженная действию позиционных сил, инвариантна при преобразовании $(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, -\dot{q}, -t)$ (относится к классу обратимых механических систем). Фазовое пространство системы симметрично относительно множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$. Анализируется равновесие, допускающее малые колебания с несоизмеримыми частотами. Окрестность равновесия заполняется симметричными колебаниями (СК) с k частотами: $1 \leq k \leq n$ (n – число степеней свободы системы). Других движений в окрестности нет. Все СК продолжаются на глобальные семейства СК и образуют область глобальных колебаний Ω , примыкающую к равновесию. Семейства СК глобально продолжаются по параметру системы. Приведенные сведения установлены в статье и характеризуют предмет задачи стабилизации.

В автономной системе решения образуют семейство по сдвигу начальной точки на траектории. Различаются задачи стабилизации всего семейства решений и отдельного решения из семейства. Вторая задача решается управлением, зависящим явно от времени. Семейство решений стабилизируется конструированием скорректированной системы – управляемой системы с автономным управлением, которое действует с малым коэффициентом регулятора.

Результаты, изложенные в статье, стимулировались задачей стабилизации многочастотных колебаний обратимой механической системы. Ранее задача не ставилась. Сам предмет стабилизации ранее был известен только в части теории возмущений Пуанкаре.

В данной статье впервые описана глобальная теория симметричных многочастотных колебаний (симметричных условно-периодических решений, симметричных квазипериодических движений, симметричных условно-периодических орбит). Введены основные понятия, найдены необходимые и достаточные условия существования симметричного колебания, установлены локальные свойства о продолжении СК. Доказаны теоремы о рождении СК и его продолжении на глобальное семейство СК, теорема о глобальном продолжении СК по параметру системы. Теория основана на новых оригинальных идеях, что позволило дать доступное изложение теории без привлечения специальных знаний. Таким образом, построена завершенная теория симметричных многочастотных колебаний для лагранжевой системы, подверженной действию позиционных сил.

На основе построенной теории поставлена и решена задача стабилизации (в большом) многочастотных колебаний консервативной системы. В статье применяется обратная связь, идея которой предложена недавно автором [9] и опробована для одночастотных колебаний. Предлагается система управления (7), которая не зависит от числа частот в СК. В адаптивной схеме стабилизируется изолированное колебание (ИК) управляемой системы. Для случая k частот находится ИК, близкое к СК с желаемой энергией h^* : СК при-

надлежит глобальному семейству Σ_k СК с k частотами. Стабилизация обеспечивается притяжением траекторий к ИК.

Применяемое автономное управление является универсальным: применяется к любой лагранжевой системе и стабилизирует колебания с k частотами: $1 \leq k \leq n$, где n – число степеней свободы системы. При этом построена скорректированная консервативная система, где через обратную связь отслеживается текущая потенциальная энергия на траектории многочастотного СК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
<https://mechmath.ipmnet.ru/lib/?s=asymptotic>
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейшатам А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985.
<https://mechmath.ipmnet.ru/lib/?s=ode>
4. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987.
5. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
6. *Van der Pol.* On relaxation-oscillations in the circuit with non-linear resistance // Philos. Mag. 1927. Ser. 7. V. 3. No. 13. P. 65–80.
7. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. Пер. с фр. <https://search.rsl.ru/ru/record/01006011393>
8. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. Переработка и доп. Н.А. Железцова. 2-е изд.
<https://search.rsl.ru/ru/record/01005974002>
9. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний в автономной скорректированной консервативной системе путем конструирования притягивающего цикла // АиТ. 2025. № 6. С. 43–60.
Tkhai V.N. Stabilization of Oscillations in an Autonomous Corrected Conservative System by Constructing an Attracting Cycle // Autom. Remote Control. 2025. V. 86. No. 6. P. 43–60. <https://doi.org/10.31857/S0005117925060037>
10. *Тхай В.Н.* Адаптивная схема стабилизации колебаний автономной системы // АиТ. 2024. № 9. С. 77–92. <https://doi.org/10.31857/S0005231024090046>
Tkhai V.N. An Adaptive Stabilization Scheme for Autonomous System Oscillations // Autom. Remote Control. 2024. V. 85. No. 9. P. 795–804.
<https://doi.org/10.1134/S000511792470019X>
11. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к N -планетной задаче // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 56–72.
12. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 56–72.

13. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения / Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263. <https://search.rsl.ru/ru/record/01005581860>
14. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // Журн. эксп. теор. физики. 1933. Вып. 5. С. 373–374.
15. *Boubaker O.* The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: a survey // Int. J. Adv. Robot. Syst. 2013. V. 10. No. 5. <https://doi.org/10.5772/55058>
16. *Fradkov A.L.* Swinging control of nonlinear oscillations // Int. J. Control. 1996. V. 64. Iss. 6. P. 1189–1202. <https://doi.org/10.1080/00207179608921682>
17. *Åström K.J., Furuta K.* Swinging up a pendulum by energy control // Automatica. 2000. V. 36. Iss. 2. P. 287–295. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00140-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00140-5)
18. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraints approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.852568>
19. *Kant K., Mukherjee R., Khalil H.* Stabilization of energy level sets of underactuated mechanical systems exploiting impulsive braking // Nonlinear Dynam. 2021. V. 106. P. 279–293. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06831-3>
20. *Guo Yu., Hou B., Xu Sh., et.al.* Robust stabilizing control for oscillatory base manipulators by implicit Lyapunov method // Nonlinear Dynam. 2022. V. 108. P. 2245–2262. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07321-w>
21. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // Космические исследования. 2022. Т. 60. № 5. С. 404–412. <https://doi.org/10.31857/S002342062204001X>
22. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению части переменных // Вест. МГУ. Серия Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1957. № 4. С. 9–16.
23. *Пуш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. Пер.с англ. М.: Мир, 1980.
24. *Тхай В.Н.* Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 165–179.
25. *Бруно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
26. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
27. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 24.08.2025

После доработки 12.01.2026

Принята к публикации 19.01.2026

Управление в технических системах

© 2026 г. Д.А. ВОРОНЦОВ (vorontsov.da@phystech.edu)

(Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет);

ООО “НТЦ АКТОР”, Москва),

Н.А. КОРГИН, д-р техн. наук (nkorgin@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УСИЛИТЕЛЕЙ D-КЛАССА В МИКРОГРИД-СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКОЙ

Рассматриваются современные методы борьбы с нелинейными искажениями напряжения инвертора в маломощных микрогрид-системах: пропорционально резонансный/мультирезонансный регулятор (ПР/МПР), виртуальный импеданс и Droop control, двойной инвертор напряжения, самоосциллирующий усилитель D-класса. Описаны их основные свойства и принцип подавления паразитных гармоник. Особое внимание уделено количеству регуляторов, необходимых для реализации каждого из методов, эффективности подавления нелинейных искажений посредством исследования количества гармоник и снижению коэффициента нелинейных искажений с применением каждого из методов и без. Также проведен анализ совместимости каждого из методов с контроллером выходной мощности. Проанализированы плюсы и минусы существующих методов, а также перспективы использования самоосциллирующего усилителя D-класса для контроля нелинейных искажений в микрогрид-системах.

Ключевые слова: микрогрид, инвертор напряжения, коэффициент нелинейных искажений, качество электроэнергии, нелинейная нагрузка.

DOI: 10.7868/S2413977726080043

1. Введение

В настоящее время активно развиваются исследования в области автономной энергетики и дополнительного накопления и отдачи в сеть переменного тока электроэнергии (ЭЭ). Система, состоящая из источника ЭЭ и преобразователя, для параллельного включения с другой такой же системой или с системой электроснабжения общего назначения называется микрогрид-системой. Наиболее удобной для распространения электроэнергии системой является система переменного тока. В основе переменного микрогрида лежит инвертор напряжения, совершающий преобразование постоянного тока в переменный – DC/AC (англ. direct current to alternating current) преобразование. В последние годы микрогрид-инверторы напряжения значительно

развились. Существующие методы синхронизации [1, 2] позволяют не только работать нескольким инверторам параллельно друг другу, но и подключаться к общей сети электроснабжения (СЭС) для подкачки электроэнергии, а также контролировать выходную мощность благодаря технологии Droop control [3]. Однако в изолированных системах, состоящих из нескольких источников и инверторов, а также в маломощных сетях, отключенных от крупномасштабных электросетей, остро стоит вопрос контроля нелинейных искажений. Подключение нагрузки, обладающей высоким показателем нелинейности, может привести к сильному искажению напряжения сети. Показатель нелинейности коэффициент нелинейных искажений (англ. Total harmonic distortion, THD) регламентирован ГОСТ [4] и должен составлять не более 8%. Нарушение данного показателя качества электроэнергии может привести как к выходу из строя подключаемого электрооборудования, так и к некорректной работе фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) (англ. Phase locked loop, PLL) и рассинхронизации работы инвертора напряжения. Целью данной работы является составление обзора современных методов контроля нелинейных искажений для микрогрид-инверторов напряжения, поддерживающих стабильную работу энергосистемы. Особое внимание уделено самоосциллирующему усилителю D-класса как потенциально новой топологии микрогрид-инвертора напряжения. На основе данного инвертора планируется проектирование микрогрид-системы, обладающей инвариантностью относительно подключаемой нагрузки с помощью методов, предложенных в [5]. Одной из важных характеристик электрической системы переменного тока является количество фаз в такой системе: чаще всего – это трехфазная или однофазная. Говоря о маломощных сетях, чувствительных к подключению нелинейных нагрузок, чаще всего речь идет об однофазных системах, однако наиболее удобные в использовании методы синхронизации [1, 2] чаще всего применяются в трехфазной сети, поэтому многие исследования основываются на системах управления такими сетями. Работы [6–8] описывают наиболее эффективные методы приведения трехфазного контроллера синхронизации к однофазному, что позволяет сравнивать трехфазные и однофазные системы в вопросе подавления нелинейных гармоник.

2. Современный микрогрид-инвертор напряжения

2.1. Изолированный инвертор напряжения

Перед тем как переходить к сравнению методов подавления нелинейных искажений, необходимо провести описание исследуемой системы, к которой применяются эти методы. Инвертор напряжения по определению [9] – это преобразователь, осуществляющий переход от постоянного тока к переменному [10]. Современные DC-AC преобразователи основываются на мостовой или полумостовой схемах [11]. Принципиально управление мостовой и полумостовой схемами не имеет существенных отличий. Основное отличие этих схем – количество силовых переключателей, чаще всего для этого используются

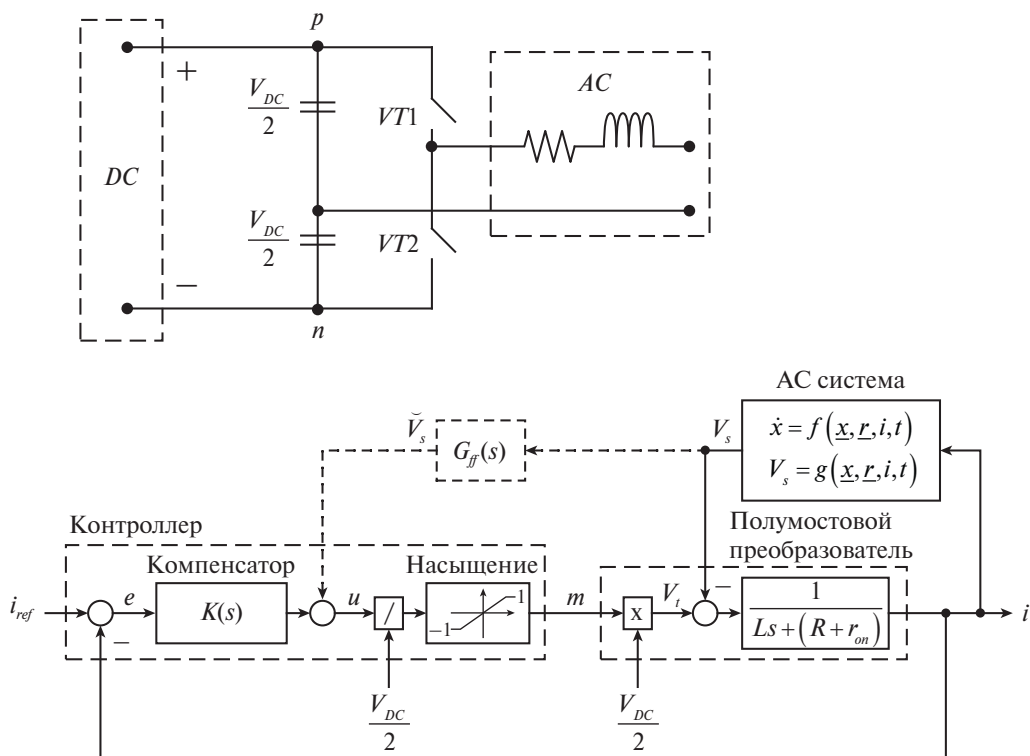


Рис. 1. Полумостовой преобразователь.

транзисторы. Из-за этого различия на инвертор накладываются ограничения по максимальному DC напряжению и току через каждое плечо преобразователя. В микрогрид-инверторах чаще используются полумостовые схемы, требующие большего входного напряжения, поскольку работа с альтернативными источниками ЭЭ, такими как ветряная или солнечная энергии, зачастую предполагает большие напряжения постоянного тока. На рис. 1 представлена классическая схема полумостового преобразователя и контура управления. Для корректной работы данной схемы необходим по меньшей мере [11] один регулятор тока для формирования опорного сигнала и широтно-импульсной модуляции (ШИМ), подаваемого на затворы переключателей. В общем случае функции f, g могут быть произвольными нелинейными функциями собственных переменных. В классическом случае данные функции описывают синусоидальный сигнал:

$$i_{ref}(t) = I \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Компенсатор чаще всего представляет из себя пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор. В случае синхронизации инверторов с такими же инверторами или с сетью описание AC системы не может быть задано произвольно, синусоидальный сигнал должен быть синхронизирован относительно наблюдаемого в сети.

2.2. Фазовая автоподстройка частоты

Наиболее широко используемым методом формирования опорного сигнала по имеющемуся напряжению АС сети является фазовая автоподстройка частоты (ФАПЧ, англ. Phase locked loop, PLL). Блок-схема классического метода ФАПЧ для трехфазной сети [1, 2] приведена на рис. 2. Важно, что напряжение регулируется во вращающемся $dq0$ базисе, переход к которому осуществляется с помощью преобразований Кларка и Парка [12]. Угол θ , полученный в результате работы метода, угол поворота квадратурного базиса сети. Проще говоря, данный угол – фазовый угол первой фазы. Для однофазной сети данный метод также применим, необходимо искусственно создать ортогональный сигнал β , отстающий от исходного на $\pi/2$ [6–8, 13]. Одним из наиболее быстродействующих методов является метод SOGI (англ. Second order generalised integrator) PLL [7], использующий интегратор второго порядка, примененный к исходному сигналу. Таким образом, полученный с помощью метода PLL фазовый угол можно использовать для обратного преобразования Парка–Кларка. В сочетании с методом управления, изложенным в предыдущем разделе, имеем минимально необходимое количество регуляторов для параллельной работы инвертора напряжения и произвольной электросети переменного тока, однако такой метод управления обладает существенным недостатком. Несмотря на возможность контролировать выходной ток инвертора, полученный контур управления не позволяет контролировать величины активной и реактивной выходных мощностей. Для возможности точного управления выходной мощностью в систему добавляется droop controller.

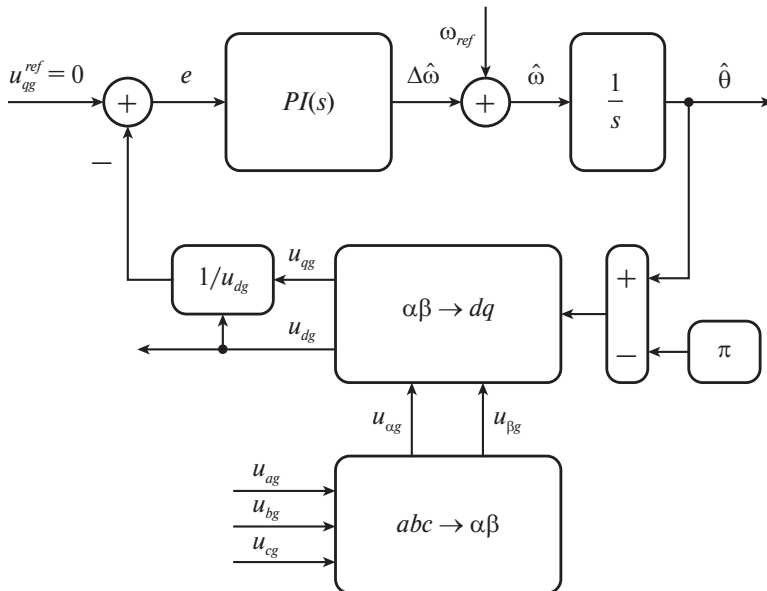


Рис. 2. ФАПЧ синхронизация трехфазной сети.

2.3. Droop control

Для контроля активной и реактивной мощности необходимо внести по меньшей мере два регулятора, управляющих изменением мощности. Классический метод droop control можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f &= f_0 - mP, \\ U &= U_0 - nQ, \end{aligned}$$

где f и U – значение частоты и напряжения опорного сигнала соответственно, f_0 и U_0 – уставки напряжения и частоты, в случае СЭС общего назначения $f_0 = 50\text{Гц}$, $U_0 = 230\text{ В}$; m, n – коэффициенты контроллера, P, Q – измеренные активная и реактивная мощность. При работе в dq0 базисе мгновенные значения мощности удобно рассчитать по формуле:

$$\begin{aligned} P &= V_d I_d + V_q I_q, \\ Q &= V_q I_d - V_d I_q. \end{aligned}$$

Структурная схема управления инвертором с использованием блока ФАПЧ и droop control представлена на рис. 3. Данная схема управления имеет суммарно минимум четыре пропорциональных или ПИ-регулятора. В [14–16] предлагается добавить или усложнить регуляторы droop control для улучшения

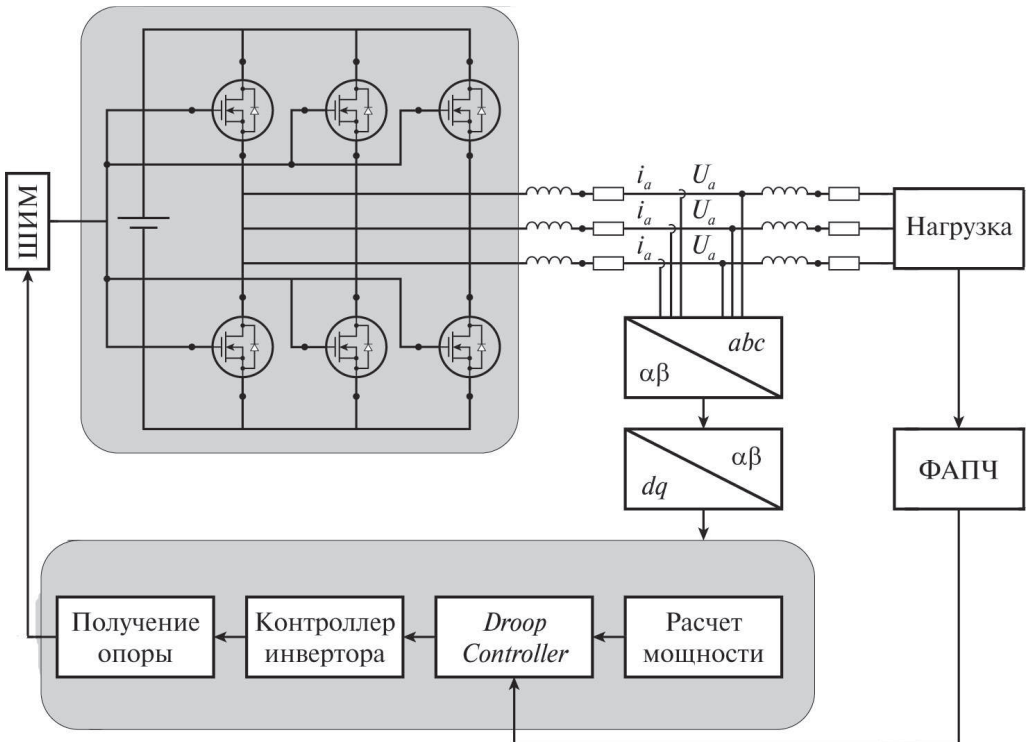


Рис. 3. Классическая схема управления микрогрид-инвертором напряжения.

переходных характеристик и увеличения точности регулирования выходной мощности, однако в рамках сравнения методов контроля нелинейных гармоник опустим дополнительные регуляторы droop controller в случае, если метод подавления гармоник не предполагает обратного. В дальнейшем при проведении сравнения количества регуляторов, необходимых для реализации того или иного метода, будем исходить из модификаций схемы управления, представленной на рис. 3.

3. Методы борьбы с нелинейными искажениями

Перед тем как переходить непосредственно к методам борьбы с нелинейными искажениями в инверторах напряжения, введем несколько важных определений. Нелинейной нагрузкой называется любая нагрузка, ток которой зависит от напряжения нелинейно. Паразитные или нелинейные гармоники – составляющие напряжения на частотах, отличных от основной частоты, в случае СЭС общего назначения – любые гармоники напряжения, отличные от 50 Гц. Для оценки уровня нелинейных искажений используются различные метрики, такие как: коэффициент нелинейных искажений THD – отношение среднеквадратичного (англ. Root mean square, RMS) значения паразитных гармоник к RMS основной; коэффициент искажения тока (англ. Total rated current distortion, TRD) – вычисляется также как THD, но для тока нагрузки; коэффициент искажений спроса (англ. Total demand distortion) – отношение среднеквадратичного паразитных гармоник тока к RMS значению тока нагрузки. Данные метрики регламентируются международными стандартами IEEE 519 и IEEE 1547, а также ГОСТ32144-2013 [4]. Наиболее чувствительным в отношении нелинейных искажений является сигнал напряжения, поскольку сильные искажения могут привести к некорректной работе блока ФАПЧ, что может привести к выходу из строя инвертора.

Методы борьбы с нелинейными гармониками можно условно разделить на две основные категории: регуляторные и топологические. Регуляторные включают в себя методы, основывающиеся на изменении контура управления системы, тем самым подавляя нелинейности напряжения. Эти методы можно условно разделить на две категории: методы, использующие резонансные регуляторы (вносящие в контур управления ПР- или МПР-регуляторы [17–21]), и методы, модифицирующие droop controller – с помощью внесения дополнительных регуляторов и изменения droop controllera удалось добиться улучшения сигнала напряжения [14, 22–27]. Отдельно стоит упомянуть H_∞ контроллер, который также позволяет бороться с нелинейными искажениями, хотя в настоящее время данный контроллер практически не используется. Топологические же методы обращаются к модификации топологии инвертора, отходя от классической полумостовой схемы. Так, в [28] использована схема встречного включения двух инверторов для контроля гармоник. В [5, 29] в качестве инвертора используется самоосциллирующий усилитель D-класса,

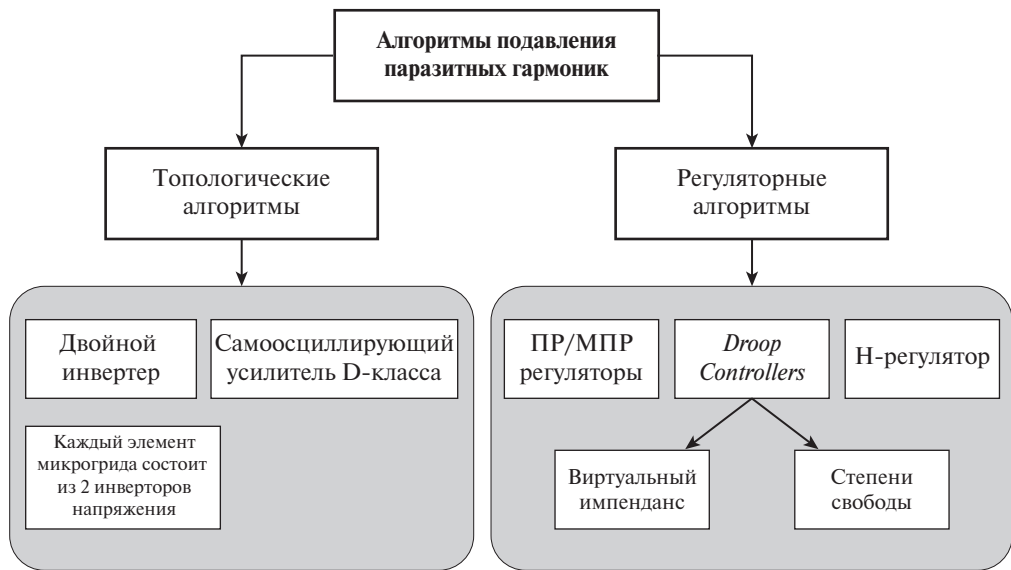


Рис. 4. Категоризация методов подавления нелинейных гармоник.

однако такой метод малоизучен в области микрогрид. Условное разбиение современных методов представлено на рис. 4.

3.1. ПР- и МПР-регуляторы

Одним из наиболее распространенных методов улучшения качества электроэнергии в микрогрид-инверторах можно считать использование ПР-регулятора вместо классического ПИ-регулятора тока [17–19]. Такой регулятор имеет бесконечное усиление в случае, когда входной сигнал обладает резонансной частотой. В реальных системах добиться такой передаточной функции невозможно, помимо этого в реальной ситуации частота сигнала будет незначительно отличаться от несущей ввиду неизбежного наличия гармоник более высокого порядка. Для описания реального ПР-регулятора вводится демпфирующая частота $\omega_c \ll \omega_0$, где ω_0 – частота, ограничивающая усиление вблизи резонансной частоты. Передаточная функция такого регулятора записывается в виде

$$W(s) = K_p + \frac{2K_r\omega_c s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

В [18, 19, 21] подробно описан процесс проектирования инвертора с ПР-регулятором для улучшения качества ЭЭ. На рис. 5 представлена структурная схема управления таким инвертором. В [30] проведен сравнительный анализ работы инвертора с ПИ- и ПР-регуляторами в трехфазных системах с несбалансированной нагрузкой, проведен анализ показателя THD. Несбалансированная нагрузка способна вносить малые нелинейные искажения в сигнал напряжения, которые хорошо подавляет добавленный в схему управления

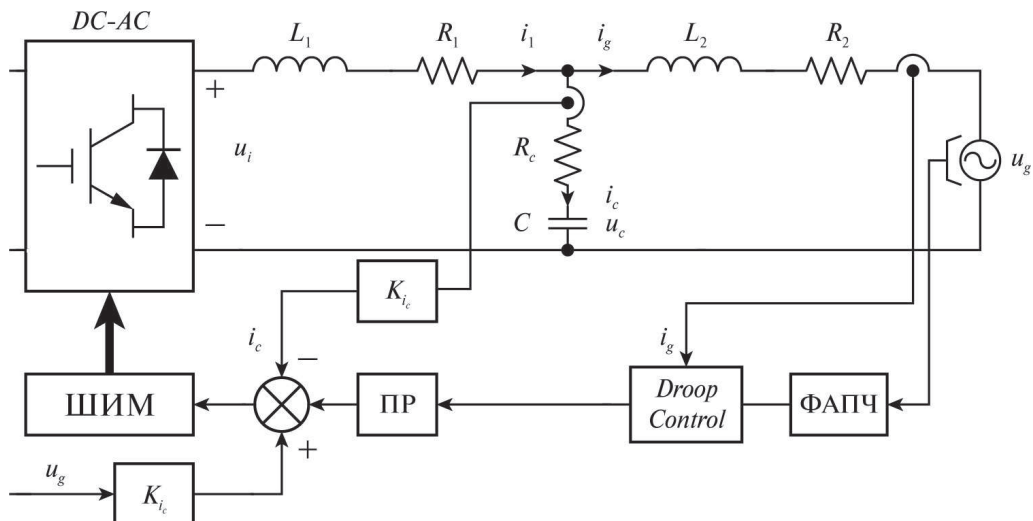


Рис. 5. Структурная схема управления инвертором с ПР-регулятором.

ПР-регулятор. Однако при высокой степени искажений в [31, 32] предлагается использовать мультрезонансный регулятор. К передаточной функции простого ПР-регулятора предлагается добавить дополнительные компоненты, работающие на $n\omega_0$, где n – номер гармоники, вносящей сильные нелинейные искажения. Таким образом, добавочный компонент регулятора имеет тем выше усиление, чем выше амплитуда n -ой паразитной гармоники. Передаточная функция такого регулятора описывается формулой:

$$W(s) = K + \frac{2K_r\omega_c s}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_n \frac{2K_{r,n}\omega_c s}{s^2 + 2\omega_c s + n\omega_0}.$$

В формуле используется сумма по гармоникам, кратным несущей, в общем случае частотой добавочного резонанса может быть произвольная частота, вносящая искажения в сигнал, однако в электрических системах паразитные гармоники кратны основной, что позволяет упростить применение регулятора. Рассмотрим преимущества и недостатки данных регуляторов.

Преимущества:

- ПР-регулятор подавляет малые искажения без добавления и настройки дополнительных регуляторов.
- МПР-регулятор позволяет подавлять даже сильные нелинейные искажения.
- Оба регулятора показывают хорошие результаты при работе с несбалансированной нагрузкой.
- Методы широко исследованы в различных научных работах, существуют подробные руководства по проектированию микрогрид-инверторов с использованием ПР- и МПР-регуляторов.

Недостатки:

- При необходимости подавления значительно возрастает количество резонансных компонентов, каждый из которых требует дополнительной настройки. В [20, 22] предложен метод для автоматической настройки, однако настройка все равно необходима.

- При большом количестве резонансных компонентов регулятора значительно возрастает вычислительная сложность системы. В случае использования автоматической настройки коэффициентов вычислительная мощность увеличивается кратно.

3.2. Droop control методы

Второй большой группой регуляторных компенсаторов можно считать методы компенсации нелинейных гармоник, основывающиеся на модификации droop controller. Их можно условно разделить на метод модификации виртуального импеданса [22, 24] и метод контроллера с множеством степеней свободы [23].

Рассмотрим методы, использующие виртуальный импеданс [26]. Изначально данный метод применялся для улучшения показателей стабильности микрогид-системы с подключением реактивных нагрузок. Суть метода заключается в искусственном формировании импеданса в системе и добавлении его к результату работы модуля droop control. Это позволяет точнее контролировать выходную мощность системы, а также согласно [14] увеличивает стабильность системы в случае неправильной настройки droop коэффициентов. На рис. 6 приведена базовая схема построения виртуального импеданса. В [25] предлагается использовать два droop controller (до и после добавления

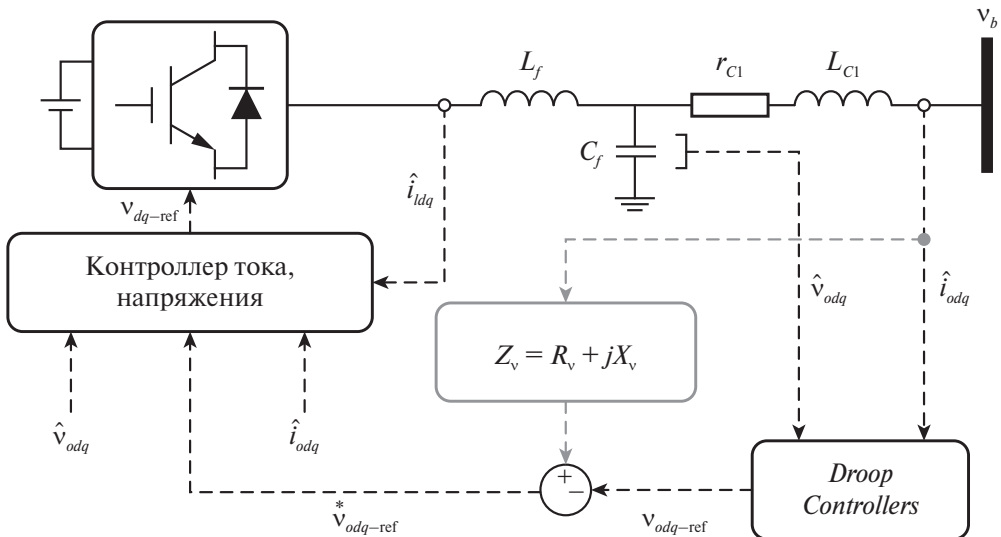


Рис. 6. Структурная схема контроллеров виртуального импеданса.

виртуального импеданса), а также дополнительные регуляторы, контролирующие величину создаваемого виртуального импеданса. В результате работы системы на выпрямительную нагрузку с RC цепочкой удалось снизить показатель TRD на 22,70%. В [26] предложена двухэтапная схема формирования виртуального импеданса, состоящая из классического формирователя виртуального импеданса, на вход которого подается ток нагрузки. Вторая часть формирователя представляет собой формирователь активной составляющей импеданса на основе тока выхода инвертора. В исследовании также применены ПР-регуляторы тока и напряжения, в результате чего THD системы снижается на 12,5%. Наиболее быстродействующий метод подавления предлагается в [27]. Регуляторы тока и напряжения при использовании виртуального импеданса в данной работе используют матрицу разделенных гармоник, каждый элемент предложенной матрицы несет в себе информацию о конкретной гармонике, как функции остальных гармоник сигнала и амплитуды данной гармоники. В результате экспериментов, проведенных в данном исследовании, выявлено высокое быстродействие такой системы при подключении нелинейной нагрузки. Показатель THD при этом снижается до 2%. Подытожим преимущества и недостатки использования данных методов.

Преимущества:

- Позволяет подавлять сильные нелинейные искажения, при определенной настройке позволяет также контролировать значение THD выходного напряжения.

- Основывается на методе droop control, что гарантирует возможность контролировать выходную мощность инвертора.

- Методы широко исследованы в различных научных работах.

Недостатки:

- Для использования данного метода требуется внести по меньшей мере три дополнительных регулятора для применения современных методов, основанных на контроле виртуального импеданса, также требуется использование дополнительных контуров управления напряжением или droop controller.

- Использование метода [27] требует крайне сложных вычислительных операций, что значительно увеличивает потребность в вычислительной мощности управляющего процессора.

Перейдем теперь к методу droop controller с множеством степеней свободы [23]. В работе предлагается разделить классический метод на несколько составных частей, каждая из которых будет отвечать за конкретную гармонику. Регулятор для каждой гармоники можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_i &= -n_i P_i, \\ \omega_i &= n\omega - m_i Q_i, \end{aligned}$$

где n_i, m_i – коэффициенты контроллера для каждой гармоники, P_i, Q_i – мощность i -й гармоники. Структурная схема данного метода представлена на

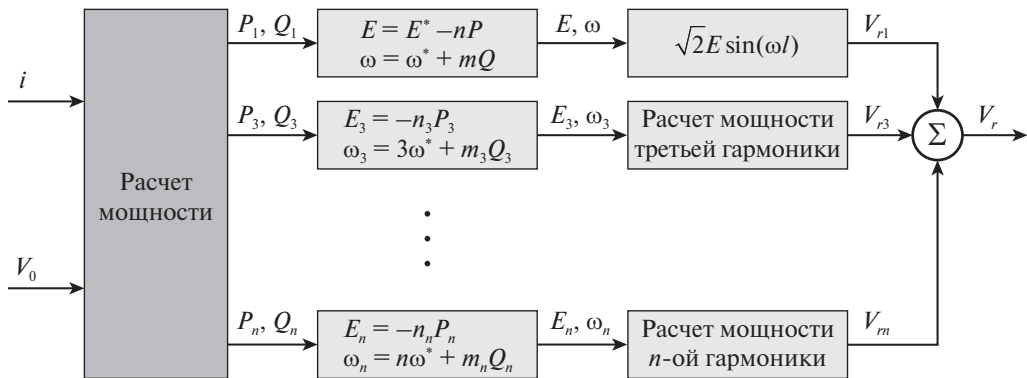


Рис. 7. Droop controller с множеством степеней свободы.

рис. 7. При этом для вычисления мощности i -й гармоники используется метод отдельного расчета мощности [33]. В итоге работы регулятора получается уставка напряжения инвертора с учетом подавления паразитных гармоник. Показана эффективность данного метода при работе с изолированными микрогрид-системами, однако данный метод обладает как преимуществами, так и существенными недостатками.

Преимущества:

- Позволяет подавлять произвольные нелинейные искажения, вызванные различными нелинейными нагрузками.
- Позволяет подавлять отдельные гармоники внесением только одного дополнительного звена вычислений.
- Основывается на методе droop control, что позволяет с высокой точностью контролировать выходную мощность инвертора.

Недостатки:

- Для подавления большого числа паразитных гармоник требует дополнительной настройки регуляторов для каждой гармоники, что значительно увеличивает требования к вычислительной мощности.
- Расчет активной и реактивной мощности для каждой отдельной гармоники требует больших вычислительных мощностей.
- Сложная настройка регуляторов для каждой из гармоник.
- Метод малоисследован, что может привести к сложностям проектирования системы.

3.3. H_∞ -регулятор

В [34] предложен метод управления инвертором, основанный на использовании H_∞ -регулятора тока и внутреннего фильтра нижних частот. Предлагаемая стратегия состоит из каскадного регулятора тока, напряжения и контуров управления, которые созданы на H_∞ -регуляторах. Проведено моделирование работы как с изолированной сетью, так и с подключением к

СЭС общего назначения. Предложенные методы обладают как рядом преимуществ, так и недостатков.

Преимущества:

- Предложенный метод справляется с малыми нелинейными искажениями сети.
- Регулятор обеспечивает плавный переход от автономной работы к работе с подключением к сети.
- Регулятор не требует высоких вычислительных мощностей, настройка регулятора сводится к выпуклой задаче.

Недостатки:

- Применение данного метода малоизучено, работы основываются на математическом моделировании.
- ∞ контроллер сложно реализуется в дискретных системах.
- Не исследована возможность подключения droop control в предложенной системе.

3.4. Двойной инвертор напряжения

Перейдем теперь к топологическим методам контроля паразитных гармоник. Отдельного внимания заслуживает метод, предложенный в [28]. В основу метода ложится изменение топологии инвертора. Так, вместо классической полумостовой схемы используются два инвертора напряжения. Первый – основной инвертор обеспечивает полезную нагрузку и синхронизируется с помощью PLL метода. Дополнительный инвертор работает встречно основному и создает сигнал, который при сложении с сигналом от основного инвертора обеспечивает общий выходной сигнал с минимизированными искажениями. Для работы дополнительного инвертора, помимо обычной схемы управления, задающей опорное напряжение и компенсирующей нелинейные искажения, требуется учет омических потерь на выходе инвертора, для этого в контур управления вносится дополнительный ПИ-регулятор, на вход которого подается разность целевого напряжения инвертора и постоянного напряжения DC шины. Полная схема управления предложенным двойным инвертором представлена на рис. 8. Согласно проведенным в работе экспериментам, предложенный микрогрид-инвертор отлично справляется с подавлением нелинейных гармоник и обеспечивает уменьшение THD более чем в 8 раз. Преимущества такого инвертора:

- Высокая стабильность выходного напряжения, обеспечиваемая компенсирующим дополнительным инвертором.
- Низкая потребность в вычислительной нагрузке, поскольку данный инвертор требует внесения дополнительно пяти регуляторов для управления дополнительным инвертором.
- Возможность подавления произвольных гармоник, путем задания специального опорного сигнала для дополнительного инвертора.

Рис. 8. Контур управления двойным инвертором напряжения.

Недостатки:

- Потребность в проектировании дополнительного инвертора напряжения на основе полумостовой схемы, а также дополнительного выходного фильтра.
- Повышенное энергопотребление, вызванное омическими потерями на выходе дополнительного инвертора.
- Высокая стоимость системы из-за использования двух инверторов.

3.5. Самоосциллирующий усилитель D-класса

Один из методов борьбы с нелинейными искажениями на выходе инвертора основывается на использовании самоосциллирующего усилителя D-класса [9]. Схема такого усилителя ранее не использовалась в микрогрид-системах. Данный усилитель хорошо себя показал в акустических системах. Данная топология отлично справляется с подавлением помех при усилении акустического сигнала [35]. В [29] предложен способ использования такого инвертора в качестве силового микрогрид-инвертора, а в [5] проведено моделирование работы инвертора D-класса в составе как изолированной, так и подключенной СЭС микрогрид-системы. Проведен анализ работы на нелинейную выпрямительную нагрузку и сравнение с классическим инвертором, описанным в разделе 2 настоящей статьи.

3.5.1. Управление усилителем

Остановимся подробнее на системе управления самоосциллирующим усилителем D-класса. На рис. 9 представлены электрическая и структурная схемы автогенерирующего усилителя D-класса в операторном виде. Здесь операторы $W_1 - W_8$ – частотные передаточные функции цепи, состоящей из пассивных элементов, а $W_n(A)$ – частотная передаточная функция последовательно включенных компаратора D2 и полумостового преобразователя D3, где A – амплитуда автогенерации. В данной системе условием автоколебаний являются удовлетворения уравнения гармонического баланса к частотным передаточным функциям силового переключателя $W_n(A)$ и линейной части системы $W_t(2\pi jf)$, т.е. наличие чисто мнимого корня линеаризованной системы:

$$(1) \quad W_n(A)W_t(2\pi jf) = -1.$$

В результате решения уравнения (1), полученного в [29], условие автогенерации выполняется на частоте $f_0 = 92,5$ кГц. Запишем передаточные функции усилителя:

$$(2) \quad W_{fb} = W_5W_6W_7W_n(-1),$$

$$(3) \quad W_d = \frac{W_{fb}W_4}{1 + W_{fb}W_8}.$$

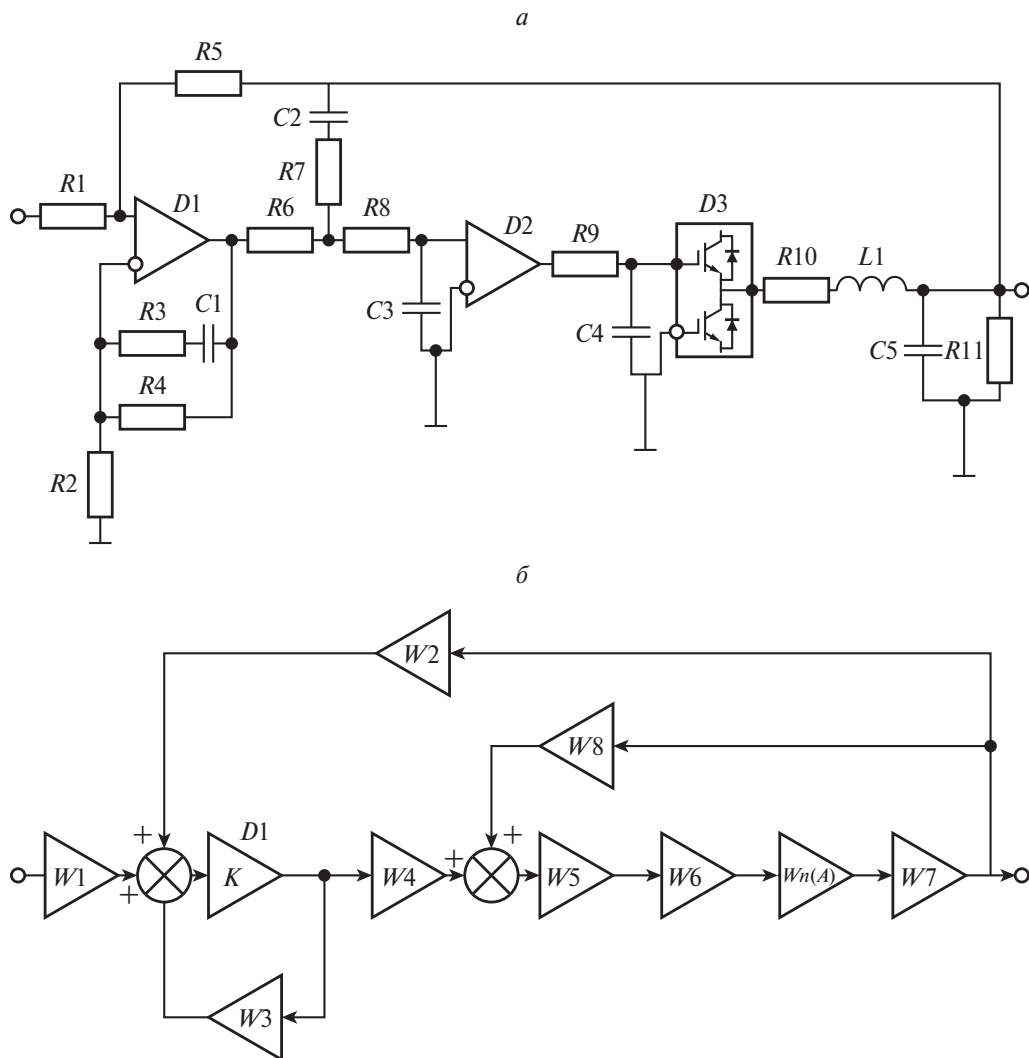


Рис. 9. *a* – Электрическая схема, *б* – структурная схема самоосциллирующего усилителя D-класса.

Здесь (2) – передаточная функция усилителя D-класса, не охваченного обратными связями, а уравнение (3) – частотная передаточная функция с учетом отрицательной обратной связи W_8 и интегрирующего звена W_4 . Система, описываемая в соотношении (3), имеет существенный недостаток: коэффициент передачи такого усилителя меняется более чем в 4 раза, а фазовый сдвиг составляет от $\pi/2$ до π радиан. Введение дополнительной обратной связи W_2 , замкнутый через операционный усилитель D_1 , охваченный собственной обратной связью W_3 , позволяют решить данную проблему. Из частотной передаточной функции идеального операционного усилителя (коэффициент усиления $K \rightarrow \infty$) (4) и передаточной функции усилителя получим передаточ-

ную функцию системы (5):

$$(4) \quad W_o = \frac{K}{1 + KW_3} \approx \frac{1}{W_3},$$

$$(5) \quad W = \frac{W_d W_1}{W_3 (1 + \frac{W_d}{W_3} W_2)}.$$

Работы [5, 29] посредством моделирования показывают высокую устойчивость самоосциллирующего усилителя D-класса к нелинейным искажениям, вносимым выпрямительной емкостной нагрузкой, по результатам моделирования показатель ТНД системы снизился более чем в 10 раз. Примечательно также, что генерация ШИМ и контур управления током в данном инверторе реализованы аналоговым способом, а на вход усилителя подается синусоидальный сигнал малой амплитуды.

3.5.2. Управление синхронизацией

Остановимся теперь подробнее на методе синхронизации самоосциллирующего усилителя класса D для формирования изолированной микрогидросистемы. Одной из основных особенностей данного метода управления инвертором является аналоговая схема ШИМ, из-за этого в отличие от вышеперечисленных методов управления на вход электрической системы подается аналоговый синусоидальный сигнал малой амплитуды, который впоследствии формирует дискретные сигналы на затворах силовых транзисторов. Данная особенность позволяет значительно снизить частоту обработки петли ФАПЧ. При проектировании ФАПЧ для данного инвертора также стоит учитывать наличие постоянного смещения выходного сигнала относительно входного на угол $\Delta\varphi$. На рис. 10 представлена структурная схема управления ФАПЧ для самоосциллирующего усилителя D-класса. Как видим, основное отличие от классического однофазного ФАПЧ является наличие фазового сдвига на выходе петли. Помимо учета фазового сдвига при работе с аналоговым ШИМ необходимо также учитывать разность амплитуды входного сигнала ФАПЧ, измеряемого непосредственно на выходе инвертора напряжения (в случае бытовой сети амплитуда такого сигнала будет составлять 310В) и входного сиг-

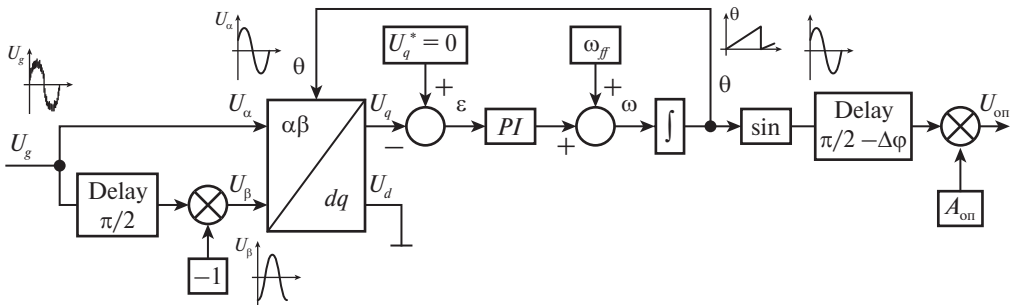


Рис. 10. Схема ФАПЧ для синхронизации самоосциллирующего усилителя D-класса.

нала усилителя. Данные моделирования [5] и экспериментов показывают, что этот сигнал изменяется в диапазоне 3–5В. Поэтому на выход петли ФАПЧ добавлен перемножитель, что позволяет сформировать опорный сигнал по формуле:

$$U_{\text{оп}} = A_{\text{оп}} \sin(\theta + 2\pi - \Delta\varphi),$$

где $A_{\text{оп}}$ рассчитывается при запуске преобразователя до включения в общую сеть микрогрид по формуле:

$$A_{\text{оп}} = \frac{U_{\text{вх}}}{U_{\text{вых}}}\bigg|_{U_{\text{вых}}=220\text{В}}.$$

Как видим, для управления синхронизацией инвертора на базе усилителя D-класса используется простая модификация классической схемы управления ФАПЧ с вычислительно простыми модификациями, учитывающими особенности работы самоосциллирующего усилителя класса D.

3.5.3. Плюсы и минусы метода

Рассмотрим преимущества и недостатки данного метода борьбы с нелинейными искажениями в микрогрид-инверторе напряжения.

Преимущества:

- Подавление нелинейных гармоник независимо от подключаемой нагрузки без использования дополнительных регуляторов.
- Аналоговая реализация обратной связи по току и напряжению и генерация ШИМ, позволяющая значительно снизить вычислительную нагрузку на управляющий процессор.
- Возможность формирования опорного сигнала с применением метода droop control и виртуального импеданса.
- Подавление произвольного числа паразитных гармоник.

Недостатки:

- Более сложное проектирование электрической схемы инвертора.
- Недостаточно исследован в области микрогрид-инверторов.
- Необходимость генерации аналогового опорного сигнала для управления инвертором.

4. Сравнение описанных методов

Было описано несколько методов подавления нелинейных искажений в микрогрид-инверторах напряжения. Каждый из перечисленных методов представляет как определенное количество преимуществ, так и недостатков. ПР-, МПР-и регуляторы виртуального импеданса в настоящее время хорошо изучены и справляются с подавлением нелинейных нагрузок, однако чем более искажен сигнал напряжения, тем большие вычислительные мощности для этого требуются. Н ∞ -регулятор отлично показывает себя при переходе

от автономной работы к работе с сетью, а также справляется с подавлением нелинейных искажений, при этом реализация Н ∞ контроллера в дискретной системе требует дополнительного изучения. Также инвертор на основе такого регулятора требует дополнительных экспериментальных исследований, поскольку большинство современных исследований в этой области описывают математические модели системы. Топология двойного инвертора напряжения позволяет подавлять любые нелинейные искажения без существенного увеличения вычислительной нагрузки, однако требует проектирования двух силовых инверторов, что также увеличивает потери системы. Самоосциллирующий усилитель D-класса ранее не использовался в микрогрид-системах, однако хорошо показал себя при изолированной работе на нелинейные нагрузки и по результатам моделирования способен работать в составе микрогрид, не теряя своих свойств. Помимо этого, простое аналоговое управление током и генерацией ШИМ уменьшает вычислительную нагрузку на систему. Для дальнейшего сравнения предложенных методов определим основные параметры, по которым можно сделать выбор в пользу использования того или иного метода подавления нелинейных гармоник.

1) Количество регуляторов. Данный параметр отражает вычислительную нагрузку на управляющий процессор, а также сложность настройки конечной системы. Меньшее количество регуляторов отвечает меньшей потребности системы в вычислительной мощности. Для справедливого оценивания в разделе 2 было приведено минимальное количество регуляторов для управления каждым инвертором, при этом аналоговая реализация данных регуляторов не будет учитываться в общем количестве регуляторов, поскольку не несет вычислительной нагрузки при работе инвертора.

2) Подавляемые гармоники. Данный параметр позволяет оценить сложность подключаемой в рамках эксперимента нелинейной нагрузки. Данный параметр особенно критичен для методов, использующих дополнительные регуляторы для подавления каждой гармоники напряжения.

3) Падение коэффициента THD%. Позволяет оценить общую полезность метода в вопросе подавления нелинейных гармоник. Конечный показатель THD согласно ГОСТ [4] обязательно должен быть менее 8% для корректной работы системы.

4) Относительное изменение показателя THD. Вычисляется как отношение показателя THD без использования того или иного метода к показателю THD с использованием этого метода. Позволяет количественно оценить эффективность каждого метода в вопросе подавления нелинейных искажений.

5) Droop control совместимость. Потенциально каждый из методов совместим с методом Droop control, однако в рамках современных исследований не к каждому из описанных методов была применена данная технология, что, в свою очередь, может открыть путь к новым исследованиям.

6) Исследованные нелинейные нагрузки. В большинстве исследований описывается использованная нелинейная нагрузка. Понимание топологии нагрузки значительно поможет в проектировании устойчивого к искажениям

Сравнение описанных методов подавления нелинейных искажений

Критерий	МПР	Виртуальный импеданс	Двойной инвертор	Н ∞ -регулятор	Множество степеней свободы	D-класс инвертор
Количество регуляторов	³ $N + 3$	Мин. 8, макс. $N^2 + 3$	7	² 5	$N + 3$	¹ 3
Подавление гармоник	³ До 11	¹ До 15	³ До 11	² До 13	1, 5, 7, 11	¹ До 15
Падение THD, %	5,28–2,806	29,85–6,37	28,37–3,22	5,31–2,00	Н/У	11,75–1,16
Относительное изменение THD	1,88	³ 4,69	² 8,81	2,655	Н/У	¹ 10,13
Совместимость с <i>droop control</i>	¹ Совместима	Обязательна	² Не исследована	² Не исследована	Обязательна	² Не исследована
Исследуемая нагрузка	² Диодный мост + R , RL , RC	¹ Диодный мост + R , RL , RC , LC	Н/У	³ Диодный мост + RL , LC	Асимметричная реактивная нагрузка	² Диодный мост + R , RL , RC

инвертора напряжения. Наиболее опасной для работы инвертора является выпрямительная нагрузка с RC цепочкой; инверторы, хорошо справляющиеся с такой нагрузкой, наиболее устойчивы к нелинейным искажениям напряжения.

В таблице приведена сравнительная характеристика предложенных методов подавления нелинейных гармоник. Индексами 1, 2, 3 в таблице помечены те ячейки, параметры методов которых наиболее эффективны по данному критерию; чем меньше индекс – тем эффективнее метод. Для методов, использующих регуляторы для подавления каждой из гармоник, в первом критерии использовано обозначение N – количество регуляторов гармоник.

4.1. Перспективы применения усилителя D-класса

Опишем основные преимущества и перспективы для использования самоосциллирующего усилителя класса D в микрогрид-системах.

1) Как видим из сравнительной характеристики, приведенной в таблице, самоосциллирующий усилитель класса D требует наименьшего количества регуляторов для обеспечения работы контура управления. Поскольку в каждом из методов используются регуляторы обратной связи, схожие по своему действию, вычислительную нагрузку, вносимую каждым из регуляторов, можем считать аддитивной. Ввиду этого можно говорить о том, что самоосциллирующий усилитель D-класса требует наименьших вычислитель-

ных затрат для реализации контура управления микрогрид-инвертором с возможностью подавления нелинейных гармоник.

2) По результатам сравнения количества подавляемых гармоник, а также снижения уровня коэффициента THD можно сделать вывод о том, что использование самоосциллирующего усилителя класса D эффективнее многих современных методов в вопросе качества подавления нелинейных нагрузок, что говорит о возможности использования не только в микрогрид-системах с жесткими требованиями по допустимой вычислительной мощности, но и в системах с высокими требованиями к качеству поставляемой электроэнергии.

3) Ввиду использования аналоговой генерации ШИМ для управления синхронизацией самоосциллирующего усилителя класса D не требуется расчет длины импульса дискретного сигнала, подаваемого на затвор силовых транзисторов. Данный фактор также позволяет уменьшить вычислительные нагрузки на систему управления, поскольку допустимо значительное снижение частоты работы контура управления.

Из вышесказанного можно сделать вывод об основных направлениях использования самоосциллирующего усилителя D-класса в микрогрид-системах: это системы, требующие обеспечения стабильного синусоидального сигнала в условиях высокой нелинейности подключаемой нагрузки, например зарядных устройств высокой мощности; это микрогрид-системы, накладывающие ограничения на вычислительные мощности, например малогабаритные. Самоосциллирующий усилитель класса D позволяет обеспечить работу в микрогрид-системах с описанными требованиями.

5. Заключение

Исходя из результатов, приведенных в таблице, можно сделать вывод о необходимости дальнейших исследований самоосциллирующего усилителя D-класса в рамках микрогрид-систем. Такой инвертор напряжения требует меньших вычислительных мощностей, при этом отлично справляется с регулированием в условиях высокой нелинейности подключаемой нагрузки. Экспериментальное подтверждение результатов, представленных в [5], следующий этап исследований. Также для такого инвертора необходимо провести исследование совместимости с технологией droop control. При проектировании маломощных подключенных к сети микрогрид-систем, а также изолированных, основанных только на одинаковых инверторах напряжения, крайне важно свойство инвариантности работы системы относительно подключаемой нагрузки. Использование самоосциллирующего усилителя D-класса в основе такой системы позволит эффективно справиться с этой задачей, причем для этого потребуется меньшая вычислительная мощность, чем при использовании других методов подавления нелинейных искажений.

Помимо исследований самоосциллирующего усилителя D-класса следует также обратить внимание на исследование H_∞ контроллера. Экспериментальное подтверждение результатов, представленных в [34], а также исследо-

вание метода droop control в составе такого инвертора потенциально позволит открыть преимущества данного метода в сравнении с наиболее часто используемыми.

Показатель подавления THD для метода двойного инвертора [28] также заслуживает отдельного внимания. Малым увеличением вычислительной мощности авторам удалось добиться лучшего показателя, чем при использовании методов МПР и виртуального импеданса. Дальнейшие исследования в этой области также могут открыть дополнительные преимущества предложенного метода.

Большинство предложенных методов согласно [36] потенциально применимы в вопросе контроля встречных токов, возникающих в результате параллельной работы нескольких инверторов. Исследования в данной области также крайне актуальны в настоящее время, поскольку контроль и минимизация встречных токов позволит повысить эффективность работы системы и снизит омические потери.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kulkarni S.V., Gaonkar D.N.* An investigation of PLL synchronization techniques for distributed generation sources in the grid-connected mode of operation // *Electric Power Systems Research*. 2023. V. 223. P. 109535.
2. *Adzic E., Porobovic V., Dumnic B., et. al.* PLL synchronization in grid-connected converters // *15th International Power Electronics and Motion Control Conference (EPE/PEMC)* Novi Sad, 2012. P. 1–7.
3. *Tayab U.B., Roslan M.A.B., Hwai L.J., Kashif M.* A review of droop control techniques for microgrid // *Renew. Sustain. Energy Rev.* 2017. V. 76. P. 717–727.
4. ГОСТ 32144-2013. Государственный стандарт Российской Федерации. Электрическая энергия. 01.07.2014.
5. *Воронцов Д.А.* Моделирование параллельной работы усилителей D-класса в качестве микрогрид-инвертора напряжения // *Управление большими системами*. 2025. № 118. С. 300–324.
6. *Karimi-Ghartemani M., Ooi B.-T., Bakhshai. A.* Application of Enhanced Phase-Locked Loop System to the Computation of Synchrophasors // *IEEE Transactions on Power Delivery*. 2011. V. 26. No. 1. P. 22–32.
7. *Hackl C.M., Landerer M.* Modified Second-Order Generalized Integrators With Modified Frequency Locked Loop for Fast Harmonics Estimation of Distorted Single-Phase Signals // *IEEE Transaction on Power Electronics*. 2020. V. 35. No. 3. P. 3298–3309.
8. *Du H., Sun Q., Cheng Q., et.al.* An Adaptive Frequency Phase-Locked Loop Based on a Third Order Generalized Integrator // *Energies*. 2019. V. 12. P. 309.
9. *Поташов Р., Кузнецов С.* Новые усилители класса D на основе технологии UCD // *Новости электроники*. 2007. № 2. С. 20–24.
10. *Мелешин В.И.* Транзисторная преобразовательная техника. М.: Техносфера, 2005. С. 374–390.
11. *Yazdani A., Iravani R.* DC/AC Half-Bridge Converter // *Voltage-Sourced Converters in Power Systems: Modeling, Control, and Applications*. IEEE, 2010. P. 21–47.

12. *Chattopadhyay S., Mitra M., Sengupta S.* Clarke and park transform // Electric Power Quality. 2011. P. 89–96.
13. *Ciobotaru M., Teodorescu R., Blaabjerg F.* Improved PLL structures for single-phase grid inverters // Proc. Power Electronics and Intelligent Control for Energy Conservation Conference (PELINCEC), 2005. P. 1–6.
14. *Keyvani-Boroujeni B., Fani B., Shahgholian G., et. al.* Virtual Impedance-Based Droop Control Scheme to Avoid Power Quality and Stability Problems in VSI-Dominated Microgrids // IEEE Access. 2021. V. 9. P. 144999–145011.
15. *Fan B., Li Q., Yao G., et al.* A Novel Droop Control Strategy of Reactive Power Sharing Based on Adaptive Virtual Impedance in Microgrids // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2022. V. 69. No. 11. P. 11335–11347.
16. *AlSadat M., Vlasov Y., Vorobev P., et.al.* Improving Transients for Droop-Controlled Inverters // 2023 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC). 2023. P. 1003–1008.
17. *Nowak M., Binkowski T., Pirog S.* Proportional-Resonant Controller Structure with Finite Gain for Three-Phase Grid-Tied Converters // Energies. 2021. V. 14. P. 6726.
18. *Nazeri A.A., Zacharias P., Ibanez F.M., Somkun S.* Design of Proportional-Resonant Controller with Zero Steady-State Error for a Single-Phase Grid-Connected Voltage Source Inverter with an LCL Output Filter // 2019 IEEE Milan PowerTech. 2019. P. 1–6.
19. *Cha H., Vu T.-K., Kim J.-E.* Design and control of Proportional-Resonant controller based Photovoltaic power conditioning system // 2009 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition. 2009. P. 2198–2205.
20. *Hu P., He Z., Li S., Guerrero J.M.* Non-Ideal Proportional Resonant Control for Modular Multilevel Converters Under Sub-Module Fault Conditions // IEEE Transactions on Energy Conversion. 2019. V. 34. No. 4. P. 1741–1750.
21. *Zhang N., Tang H., Yao C.* A Systematic Method for Designing a PR Controller and Active Damping of the LCL Filter for Single-Phase Grid-Connected PV Inverters // Energies. 2014. V. 7. P. 3934–3954.
22. *Buraimoh E., Aluko A.O., Oni O.E., et.al.* Decentralized Virtual Impedance-Conventional Droop Control for Power Sharing for Inverter-Based Distributed Energy Resources of a Microgrid // Energies. 2022. Vol. 15. P. 4439.
23. *Alghamdi S., Sindi H.F., Al-Durra A., et.al.* Reduction in Voltage Harmonics of Parallel Inverters Based on Robust Droop Controller in Islanded Microgrid // Mathematics. 2023. V. 11. P. 172.
24. *Wang L., Li T., Cheng Z., et.al.* Unified droop control of AC microgrids under different line impedances: Revisiting droop control and virtual impedance method // Frontiers in Energy Research. 2023. Vol. 11. P. 1168235
25. *Micallef A., Apap M., Spiteri-Staines C., Guerrero J.M.* Mitigation of Harmonics in Grid-Connected and Islanded Microgrids Via Virtual Admittances and Impedances // IEEE Transactions on Smart Grid. 2017. V. 8. No. 2. P. 651–661.
26. *Shan P., Sun Y., Song Y., et.al.* Adaptive Parameter Tuning and Virtual Impedance Injection Control for Coupled Harmonic Mitigation of Photovoltaic Converter // IEEE Transactions on Power Electronics. 2025. V. 40. No. 1. P. 162–175.
27. *Li Y., He J., Liu Y., et.al.* Decoupled Mitigation Control of Series Resonance and Harmonic Load Current for HAPFs With a Modified Two-Step Virtual Impedance

Shaping // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2023. V. 70. No. 8. P. 8064–8074.

28. *Kshatri A., Bhatta A., Ksherti B.T., Poudel A.* THD analysis of Microgrids using Dual Voltage Source Inverters strategy under Nonlinear Loads // Authorea. August 30, 2024.
29. *Воронцов А.В.* Автогенераторный усилитель в силовом инверторе // Электронные информационные системы. 2020. № 2. С. 50-61.
30. *Gadde P.H., Brahma S.* Comparison of PR and PI Controllers for Inverter Control in an Unbalanced Microgrid // 2020 52nd North American Power Symposium (NAPS). 2021. P. 1–6.
31. *Veretennikov I., Vlasov Y., Ibanez F.M., et. al.* Proportional Multiresonant Controller with Automatic Gains Adjustment for Grid-Connected Inverters // 2023 IEEE Belgrade PowerTech. 2023. P. 1–6.
32. *Moosavi M., Farivar G., Iman-Eini H., Shekarabi S.M.* A voltage balancing strategy with extended operating region for cascaded H-bridge converters // IEEE Trans. Power Electron. 2014. Vol. 29. No. 9. P. 5044–5053.
33. *Ulinuha A., Masoum M.A.S., Islam S.M.* Harmonic power flow calculations for a large power system with multiple nonlinear loads using decoupled approach // 2007 Australasian Universities Power Engineering Conference. 2007. P. 1–6.
34. *Hornik T., Zhong Q.C.* A Current-Control Strategy for Voltage-Source Inverters in Microgrids Based on H_∞ and Repetitive Control // IEEE Transactions on Power Electronics. 2011. V. 26. No. 3. P. 943–952.
35. *Joshi S., Tripathi R., Badoni M., et.al.* Design and Development of Non-Linearly Controlled Class-D Audio Amplifier // Electronics. 2022. V. 11. P. 77.
36. *Khan I., Vijay A.S., Doolla S.* Nonlinear Load Harmonic Mitigation Strategies in Microgrids: State of the Art // IEEE Systems Journal. 2022. V. 16. No. 3. P. 4243–4255.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 27.06.2025

После доработки 26.12.2025

Принята к публикации 17.02.2026

Управление в технических системах

© 2026 г. П.П. БОБРИК, канд. физ.-мат. наук (Bobrikpp@mail.ru)
(Институт проблем транспорта РАН им. Н.С. Соломенко, Москва)

ОПТИМАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ В РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ С МАЛЫМИ ПРОБКАМИ¹

Рассматриваются вопросы организации движения в транспортных сетях. Упор делается на наиболее простые и дешевые решения. Ищется оптимальная узловая навигация в сети с незначительными пробками. Доказано, что для квадратной решетки наибо́льшее движение в начало координат будет получаться при стремлении маршрута к координатным диагоналям с дальнейшим навиванием на них.

Ключевые слова: потоки на графе, гипподамова система, узловая навигация, малые пробки, управление с неполной информацией, задача быстрого действия, стоимость управления.

DOI: 10.7868/S2413977726080050

1. Введение

В настоящее время при движении автомобилей в городах практически повсеместным стало использование навигаторов. Они решают сразу несколько базовых задач: доступ к карте города, определение текущего местоположения, получение в реальном режиме времени информации о пробках и других характеристиках потоков и их регулирования, выбор наибо́льшего маршрута, целеуказания водителю в режиме реального времени.

Как правило, такие навигаторы бесплатны для пользователей, по крайней мере в своих простейших тарифах, из-за чего вопросы их стоимости редко поднимаются. Тем не менее на их функционирование постоянно идут существенные расходы. Это уличные камеры, средства связи, сбор информации в режиме реального времени, вычислительное оборудование, штат сотрудников различных структур организации движения, налоги и т.д. Другими словами, хотя конечные пользователи не видят этих затрат, они есть и проходят по бухгалтериям сторонних структур. И они порой достаточно существенны в пересчете на каждое единичное перемещение. В такой ситуации естественна постановка вопроса о сокращении подобных расходов.

Хотя данные проблемы наиболее явно и остро проявляются в автомобильных потоках мегаполисов, но в той или иной степени они характерны для

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания ИПТ РАН на 2026 г. (№ 075-00605-26-00).

всех транспортных сетей. В самом общем случае вопрос надо ставить так: как организовать движение с наименьшими сопутствующими затратами при выборе маршрута и следовании по нему?

Вопросы транспортного планирования в настоящее время настолько обширны и нетривиальны, что оформились в отдельную научную дисциплину [1]. Хотя алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего маршрута в графе является полиномиальным [2, 3], для крупных городов с миллионами узлов эта задача стала достаточно громоздкой. Отдельные водители без сложных информационно-вычислительных систем уже не могут ее хорошо решить. В результате потоки становятся все более хаотичными и подверженными влиянию посторонних информационных факторов, а сами перемещения по городу теряют эффективность. Вместо выбора оптимальных решений при прогнозе потоков все чаще стали использоваться вероятностные подходы, основанные на соображениях повторов прошлых ситуаций. При этом моделирование транспортных потоков в режиме реального времени получает все большее распространение в мире [4, 5].

Надежды последних лет на использование современных нейронных сетей, даже встроенных в базовые механизмы дедуктивных рассуждений [6, 7], также только частично могут помочь справиться со сложностью. Скажем, для них нужны примеры особенностей архитектурной застройки, которых нет в явном виде в исходных данных, используемых для обучения нейросети.

Все это невольно подталкивает к мысли, что задача чрезмерно усложнена [8]. И надо стараться ее максимально упростить. Как это нередко бывает, большинство транспортных проблем обуславливается внетранспортными причинами. Например, для городов пробки, как правило, обуславливаются неверными архитектурными и планировочными решениями, которые накапливаются столетиями, когда для свободного движения потока элементарно не хватает соответствующего объема дорог [9]. Соответственно в этих условиях многие транспортные решения по факту также являются внетранспортными. В качестве примера можно указать на перехватывающие парковки или фискальные ограничения на владельцев транспортных средств с целью снижения их числа в городах.

Одним из главных подходов для организации качественных перемещений по территории является формирование соответствующей городской застройки на горизонте планирования в десятки лет. И прежде всего создание правильной топологии улично-дорожной сети. Можно показать, что во многих случаях в качестве целевых целесообразно выбирать регулярные сети, т.е. сети с повторяющейся структурой [10]. Они являются оптимальными по многим параметрам, в том числе и внетранспортным. Их ценность подтверждается тем фактом, что они широко применяются на практике с древних времен.

В данной статье будет рассмотрена простейшая квадратная сеть. Хотя она не самая эффективная среди регулярных [11], но наиболее простая по структуре и поэтому наиболее удобная для выстраивания. Ее можно рассматри-

вать как целевую для многих территорий, позволяющую достичь высокого качества перемещений.

Как и в любой другой сети, в квадратной сети также могут возникать пробки. Поэтому для нее также актуальна задача перемещений в условиях неполной информации. В статье предлагается очень простой вариант навигации по квадратной сети без использования навигаторов или каких-либо других устройств. Доказывается, что он приводит к наибыстрейшему перемещению.

2. Постановка задачи

Рассмотрим некоторый конечный взвешенный граф $G(V, E, L)$, где $V = \{v_i\}$ – множество его вершин; $E = \{e_i\}$ – множество ребер, соединяющих его вершины; $L = \{l_i\}$, $l_i > 0$ – положительные длины ребер [2]. Будем считать, этот граф описывает некоторую транспортную сеть: улично-дорожную сеть мегаполиса, сеть железных дорог или даже грядки на поле. В общем случае ставится задача нахождения таких правил выбора движения из некоторой начальной вершины $u \in V$, чтобы в конечном итоге попасть в некоторую конечную вершину $v \in V$.

Рассмотрим вначале простейшую квадратную регулярную сеть, которая состоит из вертикальных и горизонтальных дорог. Выберем без ограничения общности такие единицы длины, чтобы координаты вершин описывающего ее графа имели бы целочисленные значения, а длина ребер между вершинами была бы равна единице. Тогда дороги описываются линиями:

$$(1) \quad x_i = \pm n, \quad y_j = \pm m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Расстояния между дорогами также равны единице.

Такая сеть имеет большое практическое значение при проектировании реальных транспортных систем. Например, при ее выборе возникают классические кварталы городов. Такая сеть даже получила в урбанистике специальное название гипподамова, по имени греческого архитектора Гипподама, применившего ее при восстановлении разрушенного в ходе греко-персидских войн Милета [12]. При проектировании транспортных коридоров в масштабах регионов и целых континентов нередко используется широтно-меридиональный принцип, который также приводит к квадратной сети. И даже грядки на полях появляются как разновидность этого подхода.

По дорогам сети можно перемещаться. Выберем такую единицу времени, чтобы скорость движения была бы равна единице. Тогда время движения между смежными узлами будет также единичным.

Без ограничения общности начальную точку отправления маршрута $u(n, m)$ разместим в первом координатном октанте, т.е. с положительными координатами, $n > 0$, $m > 0$. А в начало координат $v(0, 0)$ поместим конечную точку маршрута. Для такой сети требуется определить правила выбора

направления движения в каждом узле, чтобы самым коротким способом добраться из некоторой точки $u \in V$ в начало координат. Это, например, можно сделать, если в каждом узле выбирать такое ребро, движение по которому приводит к уменьшению расстояния до начала координат [13].

Отметим несколько простейших свойств этой сети.

Утверждение 1. В гипподамовой сети для любой пары точек, не лежащих на одной прямой сети, существует несколько кратчайших маршрутов одинаковой длины.

Следствие 1. При нарушениях проезда по какому-либо одному участку сети для вершин, не лежащих на одной прямой, найдется его обезд с такой же длиной маршрута.

Тем самым для гипподамовой сети характерно свойство устойчивости длины трафика при нарушениях, которое оказывается очень важным для практических приложений.

Определение 1. Расстоянием или длиной $l_{n,m} = n + m$ узла сети (n, m) будем называть протяженность его кратчайшего маршрута до начала координат узла в квадратной сети.

3. Случай пробок с малой вероятностью

Усложним теперь задачу. Пусть на некоторых ребрах графа могут возникать какого-либо рода препятствия свободному перемещению, которые далее будем называть пробками. Заранее расположения пробок неизвестно. То есть изначально это задача управления в условиях неполной информации. Но приходя в любой узел, получаем дополнительную информацию как о самом узле, так и о пробках на смежных ему ребрах: например, просто посмотрев на соответствующую дорогу; или на светофоре помимо цвета, разрешающего или запрещающего проезд, может показываться некоторое число этого же цвета, которое будет характеризовать интенсивность пробки; или каким другим способом. Другими словами, для водителя это локальная информация, доступная только в точке присутствия.

В такой постановке задачи информация, используемая для выбора дальнейшего направления движения, а также для ориентации и положения в сети, намного более простая и поэтому более дешевая, чем информация о всем графе G . При этом автоматически исключаются такие достаточно затратные задачи, как сбор информации о строении графа и текущем расположении пробок; не требуется использование бортового вычислительного устройства, обеспечение его связью с поставщиком информации; не нужно определять оптимальный маршрут (в случае большого графа с миллионами вершин это отдельная длительная задача) и убеждаться в его существовании, организовывать следование по маршруту. С этой точки зрения такое управление движением намного более простое и дешевое. Далее будет показано, что в условиях столь скудной информации такое управление существует. И оно да-

же будет приводить к оптимальным движениям. Но это становится возможным только за счет очень простой и повторяющейся структуры регулярной сети [14].

Будем предполагать, что для события, что на ребре обнаружится пробка, существует некоторая вероятность p , далее будем считать ее малой величиной.

На практике пробки могут быть очень разнообразными по своим свойствам. В данной работе будем считать, что пробка всегда проходима, т.е. начав движение по ребру с пробкой, обязательно попадем в смежный узел. Но время прохождения ребра в этом случае увеличивается на некоторую величину $d < 1$.

Утверждение 2. Если нет информации о наличии пробки на ребре, то математическое ожидание времени прохождения этого ребра будет равно $1 + pd$.

Доказательство. Есть два варианта. Либо на этой дороге будет пробка, либо нет. Если на ней будет пробка, то время движения составит $1 + d$, если нет пробки, то 1. Вероятности этих событий соответственно p и $1 - p$. Тогда математическое ожидание времени $M(e)$ прохождения ребра будет равно:

$$(2) \quad M(e) = p(1 + d) + (1 - p) \cdot 1 = 1 + pd.$$

Следствие 2. Ожидаемое среднее время прохождения ребра будет превышать время прохождения свободного ребра на величину не более первого порядка малости.

Как говорилось ранее, по условию задачи заранее не известно, где и когда возникнут пробки. В такой постановке задачи нельзя заранее объехать пробки, поскольку информация (не вся) о состоянии сети поступает только по мере движения. Соответственно, и задачу выбора дальнейшего направления движения вынуждены решать по мере движения.

Определение 2. Движение из точки в точку, когда время от времени выбирается направление движения, будем называть навигационным.

Отличительной особенностью навигации является то, что заранее маршрут не известен, даже когда уже началось движение, даже уже начав движения [15, 16]. Это будет зависеть от поступающей во время движения информации о пробках, т.е. задача является разновидностью адаптивного управления.

Если выбор направления происходит только в узлах сети, то такая навигация называется узловой. Узловая навигация характерна для многих реальных сетей: железные и автомобильные дороги, маршрутизаторы в компьютерных сетях, электрические сети, газо- и нефтепроводы и т.д. Она имеет большое практическое значение, почему имеет смысл выделить ее отдельным названием.

Определение 3. Будем называть правилами выбора π любой алгоритм выбора в каждом узле следующего ребра для движения.

В данной статье правила выбора необязательно должны быть однозначными. В случае вероятностных правил, они будут определять вероятностную динамику потоков на сети, как в сетях Маркова.

4. Задача быстродействия

Для движения в условиях пробок прежний критерий качества – минимальная длина маршрута – становится неактуальным. Теперь следует рассматривать задачу быстродействия. Ставится задача найти такие правила π выбора маршрута, чтобы достичь начала координат за минимальное время. Далее будут рассматриваться только такие правила π , которые всегда приводят к конечной точке маршрута.

Определение 4. Будем обозначать выражением $t_\pi(u) = t_\pi(n, m)$ математическое ожидание времени достижения начала координат из точки $u(n, m)$ при правилах выбора π . Индекс π в дальнейшем будем опускать, если он подразумевается из контекста. Если правила π являются оптимальными, то $t(u) = t(n, m) = t_{n,m}$ является математическим ожиданием наименьшего возможного времени. Наименьшую величину $t_{n,m}$ будем называть временем узла, а разницы величин типа $t_{n,m} - t_{n-1,m}$ или $t_{n,m} - t_{n,m-1}$ временами соответствующих ребер для движения из точки (n, m) .

По условию задачи возникновение пробок на ребрах никак не зависит друг от друга, что реально наблюдается при редких пробках. Поэтому в соответствии с принципом динамического программирования само понятие времени узла корректно.

В дальнейшем будет очень полезна

Лемма 1. Для каждого достаточно малого p вокруг начала координат существует область σ , в которой для каждого узла сети время равно $t_{n,m} = n + m + O(p) = l_{n,m} + O(p)$.

Доказательство. Доказательство следует из малости величины p и утверждения 2.

Другими словами, метрика в окрестности начала координат будет незначительно отличаться от исходной гипподамовой для квадратной сети. Соответственно, чем меньше p , тем больше будет область σ . Для любых двух точек u_1 и v_1 будет верно

Следствие 3. В области σ если $l(u) < l(v)$, то $t(u) < t(v)$.

Далее будем рассматривать лишь узлы сети, которые находятся справа и ниже диагонали первого октанта, включая его границы, т.е. узлы $u(n, m)$, координаты которых будут удовлетворять соотношениям $0 \leq m \leq n$. Для узлов из верхней диагональной половины рассуждения будут аналогичны.

Следствие 4. Если штраф $d < 1$, то в области σ наибо́льшие маршруты могут выходить из узлов только по левому и нижнему ребрам.

Доказательство. При движении вверх или вправо длина узла увеличивается на единицу. Для возврата на тот же уровень расстояний требуется еще потратить не меньше единицы длины. Поскольку в области σ сохраняется иерархия расстояний до начала координат, то прохождение через пробку будет быстрее, чем ее возможный обход.

Отметим, что для сохранения большинства выводов ограничение $d < 1$ сверху единицей можно значительно улучшить до величин, близких к 2. Но это сильно усложнит изложение без получения новых качественных преимуществ. Нужно будет исследовать размеры области σ , форму ее границ, после чего формулировки утверждений станут намного более громоздкими.

Следствие 4 позволяет найти оптимальное управление в виде правил выбора направлений движения в узлах. Рассмотрим вначале два частных случая узлов на оси абсцисс и на диагонали первого координатного октанта.

Пример 1. Найдём значения $t_{n,0}$. Рассмотрим вначале узел $(1, 0)$ на оси абсцисс справа от начала координат. Ввиду симметричности задачи относительно координатных осей и их диагоналей аналогичные рассуждения можно привести для точек $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$. Приближает к началу координат только движение по дороге влево, поскольку движение вниз увеличивает расстояние $l(u)$. В соответствии с утверждением выше, математическое ожидание времени движения по ней равно $t(1, 0) = 1 + pd$.

Для других точек на оси абсцисс типа $(n, 0)$ для оптимального управления требуется аналогично выбирать только направление влево ввиду неоптимальности объезда пробок в области σ . Тогда $t_{n,0} = n(1 + pd)$.

Следствие 5. Времена ребер на координатных осях больше длин ребер на величину первого порядка малости.

Пример 2. Найдём значения времени узла $t_{1,1}$ на диагонали координатного октанта. В соответствии с принципом динамического программирования, для нахождения наименьшего времени движения из каждой точки следует выбирать то направление, которое даст наилучший результат с учетом уже известных оптимальных маршрутов.

По следствию 4 среди направлений дальнейшего движения выбирать надо либо по ребру вниз, либо по ребру влево. Из примера 1 известно, что наименьшие математические ожидания времен для точек $(1, 0)$ и $(0, 1)$ одинаковы и равны $1 + pd$. В точке $(1, 1)$ возможны следующие четыре варианта. Оба нужных направления будут с пробками. Нижнее ребро будет с пробкой, а левое свободно. На левом будет пробка, нижнее свободно. Оба ребра будут свободны от пробок. Соответственно вероятности этих событий будут равны p^2 , $p(1 - p)$, $(1 - p)p$, $(1 - p)^2$.

Сформулируем правила выбора направления π , заключающиеся в том, что будем выбирать ребро без пробок всегда, когда это возможно. Если оба ребра

свободны или оба с пробками, то выбираем любое с одинаковой вероятностью. При таком выборе в трех из четырех случаев будет выбрано свободное ребро. Тогда математическое ожидание времени диагонального узла будет равно:

$$(3) \quad \begin{aligned} t_{1,1} = & p^2(1 + d + t_{1,0}) + p(1 - p)(1 + t_{1,0}) + \\ & + (1 - p)p(1 + t_{0,1}) + (1 - p)^2(1 + t_{0,1}). \end{aligned}$$

Поскольку $t_{1,0} = t_{0,1} = 1 + pd$, то выражение упрощается до:

$$(4) \quad t_{1,1} = (1 + pd) + 1 + p^2d = 2 + pd + p^2d.$$

Поскольку $t_{1,0} = 1 + pd$, то время вертикального ребра $t_{1,1} - t_{1,0}$ равно $1 + p^2d$. А поскольку вероятность p является малой величиной, то времена нижнего $t_{1,1} - t_{1,0}$ и левого $t_{1,1} - t_{0,1}$ ребер из узла $(1,1)$ превышают их длины на величины не первого, а уже второго порядка малости. Другими словами, они более быстрые, чем ребра на осях координат. Далее будет показано, что подобное свойство можно обеспечить для всех точек вне осей координат.

5. Оптимальная навигация

Рассмотрим теперь общий случай произвольного узла $u(n, m)$, координаты которого будут удовлетворять соотношениям $0 < m \leq n$, т.е. расположенного в половине октанда без оси абсцисс.

Определение 5. Правила выбора направления движения π назовем диагональными, если:

- 1) *Выбор делается только между нижним и левым ребрами;*
- 2) *Если левое ребро свободно, то выбирается оно;*
- 3) *Если на левом ребре пробка, а нижнее свободно, то выбирается нижнее;*
- 4) *Если на обоих ребрах пробки, то выбираем левое.*

Другими словами, при наличии одновременно пары свободного ребра и ребра с пробкой выбирается всегда свободное ребро. В прочих случаях преимущество всегда имеет левое ребро. При таких правилах движение стремится по направлению к диагонали октанда, откуда и взялось его название.

Если во всех узлах использовать диагональные правила выбора, то в соответствии с принципом динамического программирования вокруг начала координат будут однозначно определены времена узлов. Рассмотрим некоторый узел (n, m) . Время левого от него узла $(n - 1, m)$ обозначим $t_{left} = t_{n-1,m}$, а время нижнего $(n, m - 1)$ узла – как $t_{down} = t_{n,m-1}$.

Утверждение 3. Для диагональных правил π верно рекуррентное соотношение

$$(5) \quad t_{n,m} = t_{left} + 1 + (p - p^2)(t_{down} - t_{left}) + p^2d.$$

Доказательство. Математическое ожидание времени для диагональных правил собирается из вероятностей всех возможных состояний ребер:

$$(6) \quad \begin{aligned} t_{n,m} = & p^2(t_{left} + 1 + d) + p(1 - p)(t_{left} + 1) + \\ & + (1 - p)p(t_{down} + 1) + (1 - p)^2(t_{left} + 1). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые, получаем искомое выражение.

Согласно лемме 1 времена узлов t_{left} и t_{down} отличаются от их длин на величины первого порядка малости. Но длины этих узлов равны. Поэтому разность времен t_{down} и t_{left} будет также первого порядка малости. А слагаемое $(p - p^2)(t_{down} - t_{left})$ будет уже второго порядка малости. Поэтому время левого ребра отличается от единицы на величину второго порядка малости.

Напомним, что на оси абсцисс времени ребер были больше длин на величины первого порядка малости.

Следствие 6. Для нулевого и первого горизонтальных слоев узлов сети верно $t_{n-1,1} < t_{n,0}$.

Утверждение 4. Если $t_{n-1,m} < t_{n,m-1}$, то диагональные правила π являются оптимальным управлением движения задачи быстрогодействия в узле (n, m) , где $0 < m \leq n$.

Доказательство. Для узла $(1, 1)$ выше было непосредственно найдено оптимальное управление и его время. Для узла $(1, 1)$ непосредственно проверяется, что диагональные правила выбора также дают оптимальное управление. Рассмотрим произвольный узел (n, m) . Доказательство основано на непосредственной проверке каждой комбинации пробок на нижнем и левом ребрах. Если оба ребра свободны, то выбирается левое ребро, поскольку время левой вершины меньше, чем нижней, а времена ребер одинаковы и равны единице. Если свободно левое ребро, а нижнее с пробкой, то и время левого ребра меньше, и время левого узла меньше. Если левое с пробкой, а нижнее свободно, то выбирается нижнее, поскольку по условиям задачи величина штрафа d при прохождении по левому ребру будет больше, чем разница времен левого и нижнего узлов, поскольку в области σ эта разность имеет первый порядок малости. Если на обоих ребрах пробки, то выбираем левое, поскольку времена ребер одинаковы, а время левого узла меньше.

Утверждение 4 верно и в обратную сторону.

Лемма 2. При диагональных правилах выбора π в области σ будет выполняться $t_{n-1,m} < t_{n,m-1}$.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. База индукции. Рассмотрим узлы $(2, 2)$ и $(3, 1)$. Для них верно:

$$(7) \quad \begin{aligned} t_{2,2} = & (1 - p)^2(1 + t_{1,2}) + (1 - p)p(1 + t_{1,2}) + \\ & + p(1 - p)(1 + t_{2,1}) + p^2(1 + d + t_{2,1}), \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} t_{3,1} = & (1 - p)^2(1 + t_{2,1}) + (1 - p)p(1 + t_{2,1}) + \\ & + p(1 - p)(1 + t_{3,0}) + p^2(1 + d + t_{2,1}). \end{aligned}$$

Как для узлов, симметричных относительно диагонали, ввиду симметричности задачи будет верно $t_{1,2} = t_{2,1}$. А $t_{3,1} < t_{4,0}$ по следствию 6, поскольку последний узел лежит на оси абсцисс. Сравнивая выражения по каждому слагаемому, получаем, что $t_{2,2} < t_{3,1}$. Таким образом получаем три последовательных узла по косой диагонали с временами $t_{2,2}$, $t_{3,1}$, $t_{4,0}$ в порядке неубывания и роста для последней пары. Далее будем называть такие тройки узлов косыми. Также есть два горизонтальных слоя, где времена узлов верхнего слоя по косой диагонали меньше времен узлов нижнего слоя.

Шаг индукции. Пусть для некоторой тройки узлов верно $t_{n-2,m} \leq t_{n-1,m-1} < t_{n,m-2}$, а также для любых положительных i выполняется $t_{n-1+i,m-1} < t_{n+i,m-2}$. Рассмотрим два узла $(n-1, m)$ и $(n, m-1)$ справа и вверху от этой тройки. Их времена определяются по рекуррентным формулам

$$(9) \quad \begin{aligned} t_{n-1,m} &= (1-p)^2(1+t_{n-2,m}) + (p-p^2)(1+t_{n-2,m}) + \\ &+ (p-p^2)(1+t_{n-1,m-1}) + p^2(1+d+t_{n-2,m}), \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} t_{n,m-1} &= (1-p)^2(1+t_{n-1,m-1}) + (p-p^2)(1+t_{n-1,m-1}) + \\ &+ (p-p^2)(1+t_{n,m-2}) + p^2(1+d+t_{n-1,m-1}). \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых верхнего выражения будет больше либо равно аналогичного слагаемого нижней формулы. Причем знак равенства может быть только для узлов типа $(k-1, k)$ и $(k, k-1)$ вокруг диагонали октанда. Подставляя эти неравенства, получаем доказываемое утверждение. Поэтому, если есть косая тройка, то справа от нее также будет косая тройка. То есть они располагаются слоями по горизонтали. С другой стороны, если есть не менее двух горизонтальных слоев $y = k$ и $y = k-1$ где $t_{i,k} < t_{i+1,k-1}$, то всегда найдется косая тройка выше над ними. Это будет тройка узлов типа $(k+1, k+1)$, $(k+2, k)$, $(k+3, k-1)$, т.е. начинающаяся с координатной диагонали. Доказательство аналогично по формулам выше, только надо учитывать, что ввиду симметричности задачи имеет место строгое равенство $t_{k,k+1} = t_{k+1,k}$.

Теорема 1. Диагональные правила выбора являются оптимальным управлением движения для области σ без координатных осей.

Как видно из предыдущего изложения, времена всех ребер, кроме лежащих на координатных осях, превосходят их длины на величину не более чем величины второго порядка малости. Другими словами, для большинства случаев диагональные правила обеспечивают очень высокое качество управления, практически устраняющие влияние пробок при движении.

Сам принцип стремления маршрута к области, где существует наибольшее число вариантов продолжения движения и соответственно объезда пробок, имеет фундаментальный характер. Поэтому весьма правдоподобно, что он может быть использован при гораздо менее суровых ограничениях. Рассмотрим некоторые направления для обобщения результатов.

6. Конечные значения вероятности p

Хотя формально вероятность возникновения пробки в данной постановке задачи считается бесконечно малой величиной, но для практических приложений интересны случаи с конечными значениями. В частности, интересен вопрос, насколько далеко может простираться область σ . Здесь будет полезно следующее

Утверждение 5. Время любого ребра более 1 и не более $1 + pd$.

Это вытекает из утверждения 2 при замечании, что при подходе к любому узлу становится доступной дополнительная информация, которая может сократить математическое ожидание времени движения по нему.

Согласно следствию 3 в области σ если $l(u) < l(v)$, то $t(u) < t(v)$. Это можно считать за альтернативное определение области применимости диагональных правил выбора. Само понятие области σ существует по определению лишь при предельном переходе по вероятности p , что не позволяет вычислять его границы при каком-то конечном p . Напротив, данное свойство достаточно легко проверяется. Это позволяет получить количественные оценки на размер и форму области, где предлагаемое управление движением будет оптимальным.

Одной из грубых оценок на протяженность области σ может являться условие $t(u) < l(u) + 1$, которое делает объезды неэффективными. В соответствии с утверждением 5 при $d < 1$, область будет включать все узлы с $l(u) < 1/p$. Например, при вероятности пробки, равной одной сотой, диаметр такой области в городе будет порядка 200 кварталов. Немного мегаполисов в мире такой протяженности. Другими словами, это хотя и грубая оценка, но уже имеющая практический смысл.

При высоких значениях вероятности p возникает другая трудность. Может начаться цепная реакция порождения пробками других пробок из-за снижения пропускной способности всей сети. Тогда одновременное появление пробки на левом и нижнем ребре может начать возникать последовательно при движении, что потребует уже учета не только ближайших ребер, но и более удаленных. А это требует как более обширной информации о текущем состоянии графа, так и модификации самих правил выбора. То есть меняется сама постановка задачи. Насколько сильно можно увеличивать параметр p – вопрос остается открытым.

7. Штраф за проезд пробки

В текущей постановке задачи предполагалось, что пробка всегда проходима. А нежелательность ее прохождения задавалась величиной временного штрафа d , который выбирался меньше единицы. Это было сделано для того, чтобы объезд был неоптимальным. Действительно, диагональные правила приводят к маршрутам с последовательным уменьшением длин проходимых узлов. В них уже заложен принцип объезда пробок на горизонте наблюдаемости. А любой объезд вне диагональных направлений приводит к перепробегу по длине на 2 единицы.

Варианты постановок задачи с большими значениями d также возможны. И они реально возникают на практике, что обуславливает интерес к ним. Но при таких величинах становятся оптимальными объезды пробок. А это требует дополнительных допущений к исходной постановке задачи на методологическом уровне.

При выборе объезда крайне желательно расширение зоны информирования водителей о более удаленных ребрах, а не только смежных. А это противоречит целям данной статьи, где, наоборот, упор делается на упрощение движения и снижение стоимости его сопровождения. При этом информировать также можно по-разному. Например, можно давать информацию о состоянии ребер, удаленных от текущего положения через одну вершину. А можно и весь текущий граф сети. В зависимости от выбранного варианта возникает целое множество независимых постановок задач со своими особенностями и областью применения.

Надо различать типы пробок. Например, они могут быть постоянными, а могут изменяться через какой-то промежуток времени. В последнем случае надо явно указывать закон возникновения и исчезновения заторов. Это приводит к новым сериям математических моделей. Отдельный случай возникает при запрете движения через ребро, например из-за закрытия участка дороги на ремонт или из-за какой-то другой непреодолимой причины. В этом случае может вообще не существовать никакого маршрута в начало координат, т.е. задача становится некорректной.

Несмотря на указанные и прочие трудности, случаи объездов пробок очень важны для практики. Но в настоящее время не существует единого подхода к решению такой задачи. В городах наиболее часто используются навигаторы с отображением расположения пробок и их интенсивностей. При этом надо помнить, что подобная информация поступает с запаздыванием. Иногда помогают явные указатели объездов. В центрах управления дорожным движением очень часто задействуются дорогостоящие методы моделирования и прогнозирования. При этом используются вероятностные подходы и экспертные оценки, основанные на знании о прошлых аналогичных ситуациях.

В наиболее запущенных случаях высокие значения p и d будут приводить к ситуациям, когда в некоторых частях сети будет вообще останавливаться движение. Тогда уже возникает задача не выбора движения, а вообще наличия хотя бы одного возможного маршрута. Например, возникают задачи протекания в перколяционном кластере [17], которые очень сложны даже для теоретического исследования.

Отсутствие хорошего дешевого решения говорит о том, что дорожных сетей с высокими значениями вероятности возникновения пробки и высокими стоимостями штрафов надо всячески избегать. В том числе использовать вне-транспортные методы: архитектурные и планировочные решения, ограничения трафика, стимулирование малых размеров автомобилей, снижение числа владельцев автомобилей, компактные города и т.д.

8. Заключение

Диагональные правила порождают оптимальную узловую навигацию при движении в квадратной сети с малыми пробками в некоторой области вокруг начала координат.

Диагональные правила допускают очень простую и удобную для практического использования интерпретацию. Она заключается в стремлении к диагоналям координатного октанда. По достижении диагонали начинается навивание маршрута на диагональ. Это позволяет двигаться по сети оптимальным образом без использования каких-либо дополнительных вычислительных или информационных устройств. Такое становится возможным, поскольку при таких правилах выбора достигается наибольшее число вариантов объезда пробок.

Предлагаемое управление может выбираться целевым при построении реальных транспортных сетей с регулярной топологией ввиду своей простоты, устойчивости длины трафика и дешевизны. Такой подход является альтернативой существующим трендам по усложнению механизмов контроля и управления реальными транспортными потоками, и соответственно роста затрат на них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якимов М.Р., Нестерова А.С., Попов Ю.А. Транспортное планирование: транспорт общего пользования: монография. М.: Агентство РАДАР, 2024.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И. и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
4. Швецов В.И. Алгоритмы распределения транспортных потоков // АиТ. 2009. № 10. С.148–157.
5. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013.
6. Бетин В.Н., Иващенко В.А., Супрун А.П. Использование регулярных особенностей частично определенных функциональных нейронных сетей при поиске решения // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. 2024. № 4. С. 1–8.
7. Бетин В.Н., Демьянов А.Е., Иващенко В.А. и др. Некоторые подходы к созданию гибридных систем, ориентированных на работу со знаниями, путем встраивания в них искусственных нейронных сетей // Информатизация и связь. 2021. № 6. С. 20–26.
8. Евин И.А. Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. № 2. С. 121–141.
9. Тархов. Эволюционная морфология транспортных сетей. Смоленск-Москва: Изд-во «Универсум», 2005.

10. *Бобрик П.П.* Сравнение эффективности треугольной и квадратной регулярных транспортных сетей // Транспорт: наука, техника, управление. 2000. № 7. С. 26–31.
11. *Бобрик П.П.* О преимуществе треугольной топологии транспортной сети над квадратной // Транспорт: наука, техника, управление. 2005. № 3. С. 32–34.
12. *Глазычев В.Л.* Урбанистика. М.: Европа, 2008.
13. *Бобрик П.П.* Навигация в сетях и ее информационное обеспечение // Информатизация и связь. 2024. № 2. С. 7–13.
14. *Бобрик П.П.* Навигация в регулярных транспортных сетях // Труды конференции 14-ой Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Изд-во ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», СПб., 2007.
15. *Бобрик П.П.* Система указателей выбора маршрута, обеспечивающая в транспортной сети поток минимальной стоимости. Транспорт России: проблемы и перспективы – 2008 // Труды всероссийской научно-практической конференции. М.: МИИТ, 2008. С. 44–45.
16. *Бобрик П.П.* Об одном методе управления транспортными потоками // Программа четвертой международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO-07), 29 января–1 февраля 2007 / М.: Изд-во ИПУ, 2007. С. 25. докл. 4204.
17. *Тарасевич Ю.Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: Учебное пособие. М.: Едиториал УРСС, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.В. Мещеряковым.

Поступила в редакцию 14.09.2025

После доработки 05.02.2026

Принята к публикации 16.02.2026

Управление в медико-биологических системах

© 2026 г. В.Я. КИСЕЛЕВСКАЯ-БАБИНИНА (silvaze@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАСПРОСТРАНЕННОСТИ ХРОНИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ НА СМЕРТНОСТЬ ОТ COVID-19¹

Представлена модель эпидемии COVID-19 в неоднородной по хроническим неинфекционным заболеваниям популяции. Воссоздается синтетическая популяция с сохранением причинно-следственной связи между хроническими заболеваниями, полом и возрастом. Имитируется заражение индивидов популяции и моделируется эффект зависимости течения COVID-19 от наличия и вида конкретных хронических заболеваний у зараженных индивидов. Проведено сравнение результатов моделирования эпидемии в исходной популяции и в популяциях со сниженными распространенностями хронических неинфекционных заболеваний. Определены заболевания, снижение распространенности которых приводит к наибольшему снижению смертности от COVID-19, числу потерянных лет жизни и нагрузки на ресурсы здравоохранения.

Ключевые слова: байесовская сеть, марковская модель, синтетическая популяция.

DOI: 10.7868/S2413977726080068

1. Введение

Одним из параметров уязвимости населения к инфекционным заболеваниям является распространенность в популяции хронических неинфекционных заболеваний, отражающих износ организма и снижение его устойчивости. С увеличением числа хронических заболеваний у человека наблюдается ухудшение прогноза при инфекционном заболевании [1, 2]. Структура хронических заболеваний популяции является одним из значимых факторов, определяющих различия в уровне смертности от COVID-19 в разных странах [3]. Эффективное управление хроническими заболеваниями и разработка политик, направленных на снижение их распространенности, поможет снизить негативные последствия от эпидемии инфекционного заболевания.

Исследования влияния хронических заболеваний на эпидемию COVID-19 проводились при помощи математических моделей на основе системы дифференциальных уравнений и при помощи агентного моделирования. Метод,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2025-347).

применяемый в моделях на основе системы дифференциальных уравнений, заключается в разделении всей популяции на группы людей с хроническими заболеваниями и без хронических заболеваний [4–6]. В [5] показано, что наиболее экономически эффективная стратегия лечения COVID-19 – это снижение заражаемости пациентов с хроническими заболеваниями из-за их высокой уязвимости. Агентные модели чаще всего учитывают хронические заболевания индивидов опосредованно через возраст [7]. Однако в [8] показано, что условная вероятность госпитализации индивида при COVID-19 при учете коморбидностей и возраста выше, чем при учете одного только возраста.

Математические модели в основном не учитывают вид и число хронических заболеваний индивидов, в то время как данные наблюдений отмечают разное увеличение рисков летального исхода при разных заболеваниях, а также наличие нелинейного кумулятивного эффекта [9]. Хроническое заболевание, увеличивающее вероятность тяжелого состояния и госпитализации, может не оказывать влияния на вероятность летального исхода [10]. Моделирование нескольких заболеваний одновременно осложняется тем, что хронические заболевания образуют причинно-следственную сеть, в которой появление одного заболевания увеличивает вероятность появления со временем определенного вида других [11–13].

В данной работе представлена математическая модель, учитывающая сложные механизмы взаимодействия нескольких хронических заболеваний и инфекционного заболевания. Цель работы – определение того, как распространенность различных хронических заболеваний в популяции влияет на смертность популяции от COVID-19. В работе проводится серия вычислительных экспериментов со сниженными уровнями распространенности разных хронических заболеваний для определения их вклада в смертность населения и загруженность ресурсов здравоохранения в период эпидемии COVID-19.

2. Механизмы модели

Разработанная модель нацелена на воспроизведение эпидемии COVID-19 в популяции большого города, основой для модели служила эпидемия COVID-19 в Москве в 2020–2021 гг. Процесс заражения индивидов популяции COVID-19 рассматривался как случайный с равномерным распределением вероятности, а популяция – как равномерно перемешанная, неоднородная по таким характеристикам, как пол, возраст и хронические заболевания.

Наличие у индивидов разных хронических заболеваний в данной модели являлось зависимой случайной величиной. С возрастом увеличивается вероятность развития хронических заболеваний и их число. Также возникновение у человека определенного вида хронических заболеваний зависит от пола и наличия других хронических заболеваний. Исследования отмечают группы заболеваний, которые возникают вместе с вероятностью, большей возникновения одного заболевания [12]. Последовательность возникновения хрониче-

ских заболеваний образует собой сеть с выделяющимися группами. Для воспроизведения этих зависимостей была создана байесовская сеть и оценены ее параметры.

Заражение COVID-19 вызывает разрушение клеток легочного эпителия, что приводит к нарушению функции дыхания и необходимости госпитализации пациента. При большом поражении легких COVID-19 приводит к развитию пневмонии L-типа, затем, в случае дальнейшего ухудшения состояния, – H-типа [14]. При пневмонии L-типа рекомендуется выполнение дыхательной поддержки при помощи неинвазивной вентиляции легких, при пневмонии H-типа – при помощи инвазивной вентиляции легких (ИВЛ). Эти методы применяются в условиях наблюдения пациента в реанимации. Длительность лечения COVID-19 составляет в среднем от 2 до 6 недель [15]. Течение COVID-19 у зараженного моделировалось как серия переходов по степеням тяжести состояния при помощи марковской модели. В качестве состояний в модели использовались типы дыхания пациента: самостоятельное дыхание, применение неинвазивной или инвазивной вентиляции легких.

Течение COVID-19 зависит от наличия хронических заболеваний. При этом степень усугубления COVID-19 зависит и от вида хронических заболеваний, и от их количества. В данной модели был создан индекс предрасположенности к тяжелому течению COVID-19, значение индекса составляло сумму весов имеющихся у индивида заболеваний, чем больше значение, тем хуже прогноз. Для каждого заболевания определен относительный вес, отображающий вклад заболевания в увеличение вероятности летального исхода. Для моделирования зависимости переходные вероятности марковской модели являлись зависимыми величинами от значения индекса.

3. Математическое описание модели

В данном разделе последовательно описываются построение индекса предрасположенности к тяжелому течению COVID-19, построение марковской модели течения COVID-19, создание синтетической популяции при помощи байесовской сети и общий ход вычислительного эксперимента. Такой порядок обуславливается тем, что при создании индекса был определен список хронических заболеваний, которые должны присутствовать у индивидов, а при создании модели – возможные состояния индивидов в начальный момент времени. Эта информация в дальнейшем используется при построении синтетической популяции. Для построения индекса предрасположенности, марковской модели и байесовской сети использовались данные пациентов, пролеченных с COVID-19 в инфекционном отделении Москвы с марта 2020 г. по июнь 2021 г. [16].

3.1. Индекс предрасположенности к тяжелому течению COVID-19

В качестве индекса предрасположенности был использован индекс, описанный в [17].

Рассмотрим $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ – список характеристик индивида. Предрасположенность индивида к тяжелому течению заболевания может быть воспроизведена функцией $\phi_{\Pi} = f(\mathbf{x})$, $\phi \in \mathbb{R}$, где $f(\mathbf{x})$ является функцией упорядочения. Если у пациента $\mathbf{x}_1$ предрасположенность больше, чем у пациента $\mathbf{x}_2$, то соответствующие значения функций будут:

$$\phi_{\Pi_1} = f(\mathbf{x}_1) > \phi_{\Pi_2} = f(\mathbf{x}_2).$$

Задача построения функции предрасположенности состоит в отыскании характеристик $(x_1, \dots, x_n)$ пациента, влияющих на течение инфекционного заболевания, и вида функции $f(\mathbf{x})$. В частности, поиск функции $f(\mathbf{x})$ может быть среди аддитивных функций, включающих в себя сумму одномерных операторов $[A]$ от каждой характеристики:

$$\varphi = f(\mathbf{x}) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n.$$

Рассмотрим операторы $\{A_i\}$ в виде

$$A_ix_i = k_ix_i, \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

В качестве x_i будем рассматривать $x_i \in \{0, 1\}$, где 1 – наличие, а 0 – отсутствие хронического заболевания i .

Тогда

$$(1) \quad \phi_{\Pi} = \sum_i k_ix_i.$$

Назовем ϕ_{Π} индексом предрасположенности к тяжелому течению заболевания, а k_i – весом хронического заболевания i . Для удобства применения в клинической практике k_i лежат в области целых чисел.

Рассмотрим логистическую регрессию, в которой зависимой величиной является летальный исход заболевания, а независимыми – характеристики $\mathbf{x}$

$$(2) \quad P(y|\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{-z(\mathbf{x})}},$$

где

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n + b, \quad \mathbf{w}, b \in \mathbb{R},$$

$z(\mathbf{x})$ – это монотонная функция от линейной комбинации. Таким образом,

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}_1 > \mathbf{w}^T \mathbf{x}_2 \Rightarrow P(y|\mathbf{x}_1) > P(y|\mathbf{x}_2).$$

Поэтому операторы $A_i = w_i$ могут быть рассмотрены в качестве функции упорядочения для статуса здоровья. Поскольку $w_i, b \in \mathbb{R}$ – вещественные, а $k_i \in \mathbb{Z}$ – целочисленные, то

$$(3) \quad k_i = [w_i].$$

Для построения ϕ_{Π} в качестве характеристик $\mathbf{x}$ были отобраны хронические заболевания, которые имели относительный шанс летального исхода достоверно более 1,2 или менее 0,8. Была построена логистическая регрессия (формула 2) от $\mathbf{x}$, параметры регрессии $\mathbf{w}$ и b были определены методом наибольшего правдоподобия, получены веса заболеваний (формула 3). Итоговый список $\mathbf{x}$ содержит 13 заболеваний (ишемическая болезнь сердца, гипертония, аритмия, цереброваскулярное заболевание, тромбозы сосудов, анемия, хроническая болезнь почек 1–3 стадии, эмфизема легких, жировой гепатоз печени, метастатический рак и аутоиммунное заболевание) с весами k_i от -4 до 1 .

3.2. Марковская модель течения COVID-19

Моделирование лечения COVID-19 в стационаре было проведено при помощи марковской модели течения COVID-19 [18].

$\{S_t, t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – однородная цепь Маркова, определенная в измеримом пространстве $(E, \mathfrak{F})$, с переходными вероятностями

$$\mathbb{P}(s, B) = \mathbb{P}(D = S_{t+1} \in B | S_t = s), \quad s \in E, \quad B \in \mathfrak{F},$$

и начальным распределением вероятностей

$$(4) \quad \pi_0(B) = \mathbb{P}(S_0 \in B), \quad B \in \mathfrak{F}.$$

Пространство состояний E для марковской модели течения COVID-19 было составлено из пяти состояний: пребывание в стационаре без респираторной поддержки s_1 , пребывание на неинвазивной искусственной вентиляции легких s_2 , пребывание на инвазивной искусственной вентиляции легких s_3 , выздоровление s_4 и смерть в стационаре s_5 . Матрица переходных вероятностей модели

$$T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } p_{ij} = \mathbb{P}(S_{t+1} = s_j | S_t = s_i).$$

Переходные вероятности p_{ij} модели были оценены методом мультиномиальных логистических регрессий, в которых зависимыми переменными являлись переходные вероятности из текущего состояния $P(S_t, B)$, а независимой переменной – значение ϕ_{Π} индекса предрасположенности к тяжелому течению (формула 1):

$$(5) \quad \begin{aligned} p_{il}(\phi_{\Pi}) &= \mathbb{P}(S_{t+1} = s_l | S_t = s_i) = \frac{e^{-\beta_{0l}^i - \beta_l^i \phi_{\Pi}}}{1 + \sum_{k=1}^5 e^{-\beta_{0k}^i - \beta_k^i \phi_{\Pi}}}, \\ p_{i5}(\phi_{\Pi}) &= \mathbb{P}(S_{t+1} = s_5 | S_t = s_i) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^5 e^{-\beta_{0k}^i - \beta_k^i \phi_{\Pi}}}, \end{aligned} \quad l = 1, \dots, 4, \forall i.$$

Прогноз течения для одного индивида n с шагом в один день

$$S_{t,n} = T^t(\phi_{П,n})S_{0,n}.$$

Оценки параметров $\{\beta\}$ для переходных вероятностей p_{ij} были получены методом наибольшего правдоподобия при помощи данных пациентов, пролеченных в стационаре с COVID-19.

3.3. Создание популяции

Была рассмотрена популяция $\mathcal{P}$ индивидов $\{a_n\}_{n=1}^N$, каждый индивид имел список V^n случайных величин, обозначающих характеристики индивидов. Список характеристик включал V_1^n – возрастную группу, V_2^n – пол, V_{3-16}^n – хронические заболевания, часть из которых соответствовала характеристикам x_i индекса предрасположенности из формулы 1, и $V_{17}^n = S_0^n$ – тип дыхания на момент госпитализации в стационар, соответствующий первому состоянию марковской модели π_0 в формуле 4.

Для создания синтетической популяции была использована байесовская сеть [19]. Байесовская сеть представляла собой направленный ациклический граф, вершинами которого являлись случайные величины – характеристики V_i индивидов, а ребрами r_i обозначались условные зависимости случайных величин друг от друга. В каждой корневой вершине задается распределение вероятности значений соответствующей случайной величины $\mathbb{P}(V_i)$. В каждой дочерней вершине задаются распределения условных вероятностей значений случайных величин в зависимости от значения родительской вершины: $\mathbb{P}(V_i | \text{parents}(V_i))$.

Безусловная совместная вероятность всех случайных величин сети выражается через произведение всех вероятностей родителей и родителей родителей вершин:

$$(6) \quad \mathbb{P}(V_1, \dots, V_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(V_i | \text{parents}(V_i)).$$

Эта формула позволяет создать список индивидов с заданными характеристиками последовательным вычислением.

Байесовская сеть рассматриваемой синтетической популяции была создана в три этапа. На первом этапе была создана основная сеть, для которой были использованы данные системы наблюдения за поведенческим фактором риска (Behavioral Risk Factor Surveillance System, BRFS) за 2021 г., собранные Центрами по контролю и профилактике заболеваний США. Данные представляют собой результаты телефонных опросов 438 693 жителей США о наличии у них установленных лечащими врачами хронических заболеваний, поведении, питании, условиях проживания, а также информацию о штате проживания, поле, возрасте, дате опроса и прочую информацию. Из данных отобрали ответы респондентов по полу, возрастной группе, наличию высокого

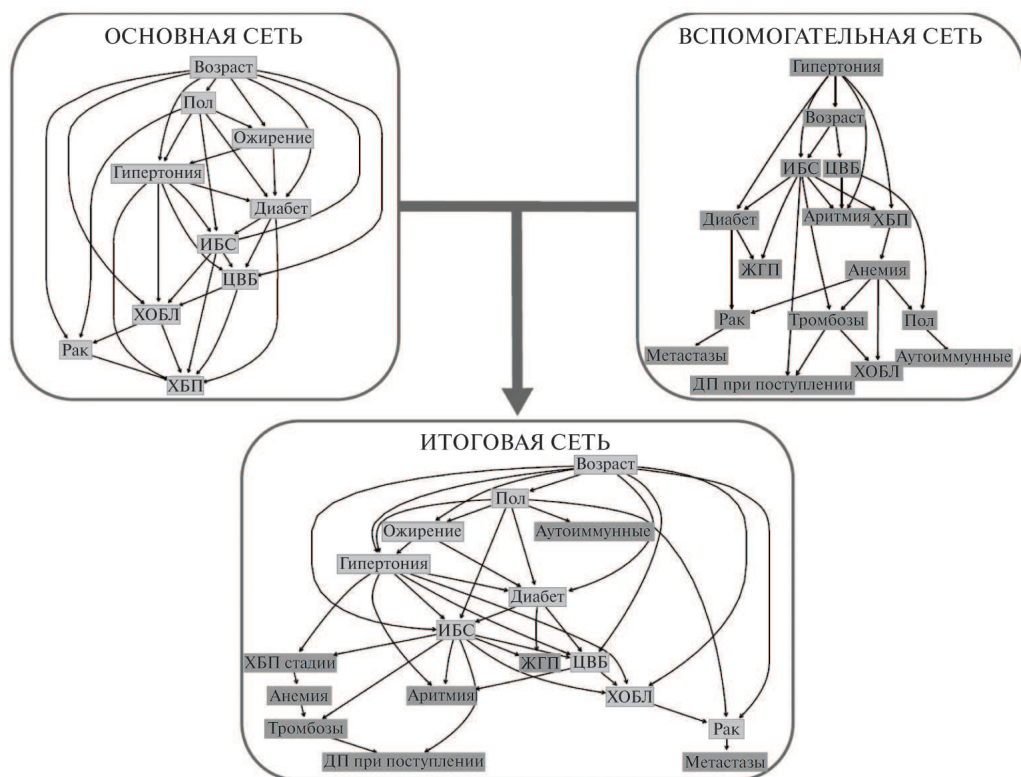


Рис. 1. Схема объединения графа байесовской сети по опросникам и графа байесовской сети по госпитализированным пациентам. ИБС – ишемическая болезнь сердца, ЦВБ – цереброваскулярная болезнь сердца, ХОБЛ – хроническая обструктивная болезнь легких, ХБП – хроническая болезнь почек, ЖГП – жировой гепатоз печени.

давления (гипертонии), инфаркта миокарда и ишемической болезни сердца, инсульта, рака, хронической обструктивной болезни легких, хронических болезней почек, диабета и ожирения; эти характеристики составили вершины основной байесовской сети. Всего в основной сети было 10 вершин. Однако эти данные не содержали сведений о всех необходимых хронических заболеваниях, входящих в индекс ϕ_{Π} .

На втором этапе была создана вспомогательная сеть, для которой были использованы данные пациентов, пролеченных с COVID-19 в инфекционном отделении Москвы с марта 2020 г. по июнь 2021 г. [16]. Данные содержат пол, возраст пациента, дату госпитализации, длительность лечения, применение респираторной поддержки за каждый день лечения, исход лечения и имеющиеся хронические заболевания. Для вспомогательной байесовской сети отобрали данные по возрасту, полу; заболеваниям, присутствующим в BRFSS опроснике (гипертония, ишемическая болезнь сердца, инсульт, хроническая болезнь почек, диабет, рак, хроническая обструктивная болезнь легких); заболеваниям, входящим в индекс ϕ_{Π} (мерцательная аритмия, тромбозы сосу-

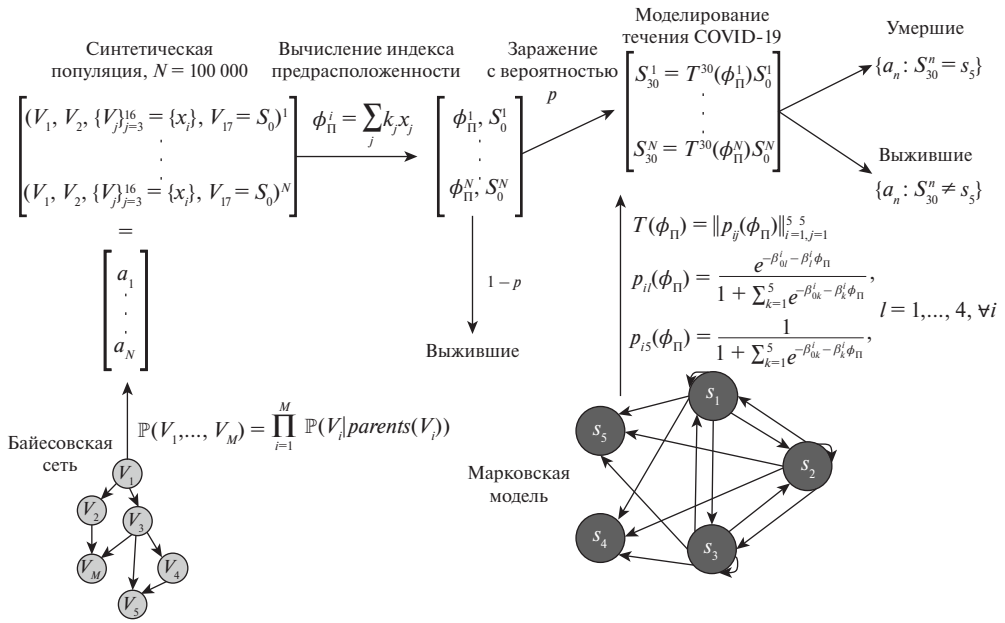


Рис. 2. Схема вычислительного эксперимента: создание популяции при помощи байесовской сети, вычисление для каждого индивида значения индекса предрасположенности, случайное заражение части популяции, моделирование течения COVID-19 у зараженных индивидов при помощи марковской модели.

дов, анемия, жировой гепатоз печени, метастазы, аутоиммунные заболевания); первоначальный тип дыхания пациента s_0 на момент поступления в стационар. Возраст пациентов разбили на группы, соответствующие группам BRFSS опросника. Эти характеристики составили 16 вершин вспомогательной сети.

Оптимизацию основной и вспомогательной сетей производили методом восхождения к вершине при помощи максимизации Байесовского информационного критерия

$$BIC(G|D) = \ln(P(D|G, \Theta)) - \frac{d}{2} \log m \xrightarrow{g, \Theta} \max,$$

где G – структура графа, D – данные наблюдений, Θ – оцененные параметры для выбранной структуры, d – число ребер графа, m – размер выборки D .

На третьем этапе обе байесовские сети были объединены в одну путем добавления к основной сети шести недостающих вершин из вспомогательной сети с сохранением родительских ребер и условных вероятностей (рис. 1).

3.4. Схема вычислительного эксперимента

Общая схема эксперимента представлена на рис. 2. По формуле 6 была создана популяция из 100 000 индивидов со случайно определенными характеристиками. Для каждого индивида было вычислено значение индекса

предрасположенности к тяжелому течению $\phi_{\Pi}^n = \sum_j k_j x_j^n$. Доля популяции p считалась зараженной COVID-19, и течение COVID-19 для всех зараженных индивидов было промоделировано при помощи марковской модели. Вероятность заражения p была оценена как отношение общего числа выявленных случаев COVID-19 по состоянию на январь 2025 г. к общей численности жителей Москвы за 2025 г. и составила 0,295. Для каждого зараженного индивида были вычислены переходные вероятности в зависимости от его значения индекса (формула 5); на основании переходных вероятностей за каждый шаг по времени в 1 день для каждого зараженного следующее состояние в модели выбиралось случайным образом. Прогноз для зараженного вычислялся на 30 дней.

Были получены оценки числа выживших и умерших, их пол и средний возраст, средние длительности лечения. Были определены распространенность хронических заболеваний среди умерших индивидов, относительные риски летального исхода для разных заболеваний. Для умерших индивидов были получены оценки потерянных лет жизни на основе ожидаемой продолжительности жизни в возрастных группах по данным о смертности населения в Москве за 2014 г. базы данных о человеческой смертности (Human Mortality Database). Для получения достоверных оценок было проведено 100 случайных прогонов модели, результаты были усреднены с вычислением доверительных интервалов.

Была проведена серия моделирования эпидемии COVID-19 в популяции со сниженной распространенностью хронических заболеваний. В исходной байесовской сети были на 50% понижены условные вероятности $\mathbb{P}(V_i | \text{parents}(V_i))$ в одной или нескольких вершинах V_i , соответствующих хроническим заболеваниям, была создана новая синтетическая популяция. Для индивидов новой популяции было промоделировано случайное заражение COVID-19 и смоделирована траектория лечения в стационаре на протяжении 30 дней, получены летальность, сумма потерянных лет жизни и длительности пребывания. Были воспроизведены сценарии популяций со сниженной распространенностью гипертонии, ожирения, диабета, рака, ишемической болезни сердца, хронической обструктивной болезни легких, цереброваскулярных заболеваний. Также было промоделировано снижение распространенности нескольких заболеваний одновременно: гипертонии и диабета; гипертонии, ишемической болезни сердца и цереброваскулярных заболеваний; всех сердечно-сосудистых заболеваний (гипертония, ишемическая болезнь сердца, цереброваскулярные заболевания, анемия, мерцательная аритмия, тромбозы сосудов); всех заболеваний популяции. Полученные таким образом оценки сравнивались с оценками, полученными на исходной популяции.

4. Результаты моделирования

После 100 прогонов модели среднее число госпитализированных среди 100 000 индивидов составило 29 470 человек, число умерших после госпитализации – 3682 человек. Таким образом, общая летальность от COVID-19 в

синтетической популяции составила 0,037, летальность госпитализированных индивидов – 0,125. Средний возраст умершего индивида составил 57,6 лет, средний возраст умерших женщин был на 2 года старше. Число потерянных лет жизни в среднем составило 23,61 лет на человека, самое большое число потерянных лет жизни пришлось на возрастную группу от 60 до 69 лет.

Относительные изменения параметров эпидемии при снижении распространенности хронических заболеваний в синтетической популяции на 50%

Заболевание со сниженной распространенностью	Изменение числа умерших	Изменение числа пациентов на ИВЛ в первый день	Изменение числа дней ИВЛ	Изменение потерянных лет жизни
Гипертония	–8,73%	–2,57%	–3,31%	–6,9%
Ожирение	–1,38%	–0,47%	–0,49%	–1,3%
Диабет	–0,51%	–0,82%	–0,37%	–0,3%
Рак	–0,52%	=	–0,26%	–0,4%
ИБС	–4,61%	–5,87%	–3,31%	–2,9%
ХОБЛ	–1,96%	=	–1,02%	–1,5%
ЦВБ	–1,25%	=	–0,59%	–0,9%
Гипертония и диабет	–9,06%	–3,20%	–3,58%	–7,1%
Гипертония, ЦВБ, ИБС	–12,97%	–7,45%	–6,31%	–9,6%
Все сердечно-сосудистые заболевания	–22,31%	–20,74%	–12,95%	–19,5%
Все заболевания	–23,1%	–21,24%	–12,35%	–19,7%

Результаты проведенных численных экспериментов в исходной популяции и в популяции с пониженной распространенностью хронических заболеваний на 50% приведены в таблице. Наибольший эффект наблюдался при снижении условной вероятности гипертонии: уменьшение числа индивидов с гипертонией с 39 018 человек до 19 603 привело к снижению числа умерших на 8,73% и числа потерянных лет жизни на 6,9%. Если сравнивать эффект относительно числа индивидов, наибольший эффект наблюдался при снижении условной вероятности ишемической болезни сердца: уменьшение числа индивидов с ишемической болезнью сердца с 8096 до 4021 привело к снижению числа умерших на 4,61% и числа потерянных лет жизни на 2,9%; также наблюдался наибольший эффект снижения числа зараженных, нуждающихся в искусственной вентиляции легких в первый день лечения, – на 6%. Снижения распространенности ИБС и гипертонии оказали одинаковый эффект на снижение числа дней использования ИВЛ – на 3,31%.

Заболевания, не оказывающие прямого эффекта на тяжесть COVID-19, способствовали смертности опосредованно, будучи причинами других патологий с прямым негативным вкладом. Так, снижение распространенности ожирения или диабета, которые не вошли в индекс предрасположенности к тя-

желому течению COVID-19, приводило к снижению смертности от COVID-19 из-за их связи с другими заболеваниями в байесовской сети.

Снижение распространенностей нескольких заболеваний одновременно имеет меньший эффект, чем сумма эффектов снижения распространенностей заболеваний по отдельности. Снижение распространенности всех заболеваний на 50% привело к снижению числа умерших на 23%, числа дней задерживания аппарата искусственной вентиляции легких на 12%, потерянных лет жизни на 20%. То есть снижение доли лиц с хроническими заболеваниями на 1% приводит к уменьшению числа летальных исходов от COVID-19 на 0,4%. При этом до 96% смертности были обусловлены высокой распространенностью сердечно-сосудистых заболеваний.

Результаты моделирования показали, что высокая распространенность хронических болезней в популяции значительно увеличивает смертность от инфекционного заболевания. Кроме того, хронические заболевания увеличивают нагрузку на ресурсы здравоохранения, что проявляется, в частности, в длительном применении аппарата искусственной вентиляции легких и реанимационного оборудования в связи с повышенной вероятностью тяжелого состояния на момент госпитализации. Эффект снижения потерянных лет жизни был меньше, чем снижения числа летальных исходов. Это обуславливается тем, что в основном происходит снижение числа умерших в старших возрастных группах.

5. Заключение

Разработана модель эпидемии COVID-19 в неоднородной по хроническим заболеваниям популяции. Результаты моделирования подтвердили, что высокая распространенность хронических неинфекционных заболеваний является одним из значимых факторов риска повышенной смертности от инфекционных болезней в популяции.

Модель позволила определить основные заболевания, оказывающие наибольшее влияние на смертность, – гипертония и ИБС. Было отмечено, что снижение распространенности ожирения и диабета, не имеющих прямого влияния на течение COVID-19, также приводит к снижению смертности от COVID-19 в популяции.

Определено соотношение снижения распространенности хронических заболеваний к уменьшению числа летальных исходов от COVID-19 как 1% к 0,4%. При этом до 96% смертности были обусловлены наличием сердечно-сосудистых заболеваний.

Данная работа является одной из первых работ по изучению зависимости параметров инфекции в популяции от распространенности хронических заболеваний. Данный анализ может быть применен при разработке политики снижения бремени хронических заболеваний среди населения. Предложенный подход может быть расширен и применен к изучению влияния хронических заболеваний на течение и исходы других инфекционных заболеваний, например гриппа, риновируса, гепатита С.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верткин А.Л., Румянцев М.А., Скотников А.С.* Коморбидность // Клиническая медицина. 2012. Т. 90. № 10. С. 4–11.
2. *Glezen W.P.* Impact of Respiratory Virus Infections on Persons With Chronic Underlying Conditions // JAMA. 2000. V. 283. No. 4. P. 499–505.
<https://doi.org/10.1001/jama.283.4.499>
3. *Corrao G., Rea F., Blangiardo G.C.* Lessons from COVID-19 Mortality Data across Countries // Journal of Hypertension. 2021. V. 39. No. 5. P. 856–860.
<https://doi.org/10.1097/HJH.0000000000002833>
4. *Das P., Upadhyay R.K., Misra A.K., et al.* Mathematical Model of COVID-19 with Comorbidity and Controlling Using Non-Pharmaceutical Interventions and Vaccination // Nonlinear Dynamics. 2021. V. 106. No. 2. P. 1213–1227.
<https://doi.org/10.1007/s11071-021-06517-w>
5. *Omame A., Sene N., Nometa I., et al.* Analysis of COVID-19 and Comorbidity Co-infection Model with Optimal Control // Optimal Control Applications and Methods. 2021. V. 42. No. 6. P. 1568–1590. <https://doi.org/10.1002/oca.2748>
6. *Ssebuliba J., Nakakawa J.N., Ssematimba A., et al.* Mathematical Modelling of COVID-19 Transmission Dynamics in a Partially Comorbid Community // Partial Differential Equations in Applied Mathematics. 2022. V. 5. P. 100212.
<https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100212>
7. *Kerr C.C., Stuart R.M., Mistry D., et al.* Covasim: An agent-based model of COVID-19 dynamics and interventions // PLOS Computational Biology. 2021. V. 17. No. 7. P. e1009149. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1009149>
8. *Hadley E., Rhea S., Jones K., et al.* Enhancing the prediction of hospitalization from a COVID-19 agent-based model: A Bayesian method for model parameter estimation // PLOS ONE. 2022. V. 17. No. 3. P. e0264704.
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0264704>
9. *Guan W., Liang W., Zhao Y., et al.* Comorbidity and Its Impact on 1590 Patients with COVID-19 in China: A Nationwide Analysis // European Respiratory Journal. 2020. V. 55. No. 5. P. 2000547. <https://doi.org/10.1183/13993003.00547-2020>
10. *Terada M., Ohtsu H., Saito S., et al.* Risk Factors for Severity on Admission and the Disease Progression during Hospitalisation in a Large Cohort of Patients with COVID-19 in Japan // BMJ Open. 2021. V. 11. No. 6. P. e047007.
<https://doi.org/10.1136/bmjopen-2020-047007>
11. *Jones P.J., Ma R., McNally R.J.* Bridge Centrality: A Network Approach to Understanding Comorbidity // Multivariate Behavioral Research. 2021. V. 56. No. 2. P. 353–367. <https://doi.org/10.1080/00273171.2019.1614898>
12. *Lappenschaar M., Hommersom A., Lucas P.J.F., et al.* Multilevel Temporal Bayesian Networks Can Model Longitudinal Change in Multimorbidity // Journal of Clinical Epidemiology. 2013. V. 66. No. 12. P. 1405–1416.
<https://doi.org/10.1016/j.jclinepi.2013.06.018>
13. *Aguado A., Moratalla-Navarro F., López-Simarro F., et al.* MorbiNet: Multimorbidity Networks in Adult General Population. Analysis of Type 2 Diabetes Mellitus Comorbidity // Scientific Reports. 2020. V. 10. No. 1. P. 2416.
<https://doi.org/10.1038/s41598-020-59336-1>

14. *Gattinoni L., Chiumello D., Caironi P., et al.* COVID-19 Pneumonia: Different Respiratory Treatments for Different Phenotypes? // *Intensive Care Medicine*. 2020. V. 46. No. 6. P. 1099–1102. <https://doi.org/10.1007/s00134-020-06033-2>
15. *Bar-On Y.M., Flamholz A., Phillips R., et al.* SARS-CoV-2 (COVID-19) by the Numbers // *eLife*. 2021. V. 9. P. e57309. <https://doi.org/10.7554/eLife.57309>
16. *Киселевская-Бабина В.Я., Попугаев К.А., Молодов В.А. и др.* Использование ресурсов инфекционного коечного фонда в период эпидемии COVID-19 в зависимости от характеристик пациентов // *Журнал им. Н.В. Склифосовского “Неотложная медицинская помощь”*. 2023. Т. 12. № 3. С. 481–488. <https://doi.org/10.23934/2223-9022-2023-12-3-481-488>
Kiselevskaya-Babinina V.Ya., Popugaev K.A., Molodov V.A., et al. The Use of Infectious Diseases Hospital Resources During the COVID-19 Epidemic Depending on Patient Characteristics // *Russian Sklifosovsky Journal “Emergency Medical Care”*. 2023. V. 12. No. 3. P. 481–488.
17. *Киселевская-Бабина В.Я., Санникова Т.Е.* Разработка индекса коморбидности CoRS-COVID и его валидация при помощи марковской модели // *Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD’2023): труды Шестнадцатой международной конференции*. 2023. № 1. С. 1544–1552. <https://doi.org/10.25728/mlsd.2023.1544>
18. *Киселевская-Бабина В.Я., Романюха А.А., Санникова Т.Е.* Математическая модель течения COVID-19 и прогноз тяжести инфекции // *Математическое моделирование*. 2023. Т. 35. № 5. С. 31–46. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-05-03>
Kisselevskaya-Babinina V.Y., Romanyukha A.A., Sannikova T.E. Mathematical model of COVID-19 course and severity prediction // *Math Models Comput Simul*. 2023. V. 15. No. 6. P. 987–998. <https://doi.org/10.1134/S2070048223060121>
19. *Sun L., Erath A.* A Bayesian network approach for population synthesis // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2015. V. 61. P. 49–62. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2015.10.010>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 03.11.2025

После доработки 26.01.2026

Принята к публикации 29.01.2026

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2026 г. А.П. НЕЛЮБИН, канд. физ.-мат. наук (nelubin@gmail.com)
(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва),
В.В. ПОДИНОВСКИЙ, д-р техн. наук (podinovski@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ПО ВАЖНОСТИ ГРУППАМИ КРИТЕРИЕВ (II). РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА¹

Для многокритериальных задач принятия решений по аналогии с качественной вероятностью введены понятия полной и частичной качественной важности как бинарных отношений, обладающих постулируемыми свойствами. Предложено новое определение отношения нестрогого предпочтения на множестве вариантов решений, порождаемое качественной важностью. Исследованы его свойства. Указаны аналитические правила, позволяющие попарно сравнивать варианты по предпочтительности. Проведено сравнение новых отношений предпочтения с разработанными ранее для задач, когда изначально упорядочены по важности лишь отдельные критерии. Выяснено, что в случае полного упорядочения всех критериев по важности оба указанных отношения предпочтения совпадают.

Ключевые слова: многокритериальные задачи принятия решений, упорядочение критериев по важности, теория важности критериев.

DOI: 10.7868/S2413977726080076

1. Введение

Настоящая статья является продолжением статьи авторов [1], где был дан обзор состояния литературы по теории важности критериев (ТВК) для задач, в которых упорядочены по важности группы критериев, показана актуальность и указаны направления дальнейших исследований. В настоящей статье на основе результатов, недавно полученных для однокритериальных задач принятия решений в условиях неопределенности при качественной вероятности и ординальной полезности [2], для многокритериальных задач с порядковыми критериями вводятся расширенные отношения предпочтения и безразличия на множестве векторных оценок (и тем самым на множестве вариантов решений), изучаются свойства таких отношений, указываются простые

¹ Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и Государственного задания Минобрнауки России для ИМАШ РАН (FFGU-2024-0016).

решающие правила, позволяющие сравнивать варианты решений по предпочтительности. Подробно исследуется взаимосвязь новых отношений нестрогого предпочтения с использовавшимися ранее отношениями для задач, в которых упорядочены по важности только отдельные критерии.

2. Математическая модель и базовые определения из теории важности критериев

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия индивидуального решения [1]:

$$\langle X, f, Z_0, R \rangle,$$

где X – множество *вариантов* решений; $f = (f_1, \dots, f_m)$ – векторный критерий, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев f_i ; $Z_0 \subseteq (-\infty, +\infty)$ – область значений критериев («шкала критериев»); R – отношение нестрогого предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Под критерием f_i понимается функция, определенная на X и принимающая значения из Z_0 . Каждый вариант x из множества X характеризуется своей *векторной оценкой* $y(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Множество всех векторных оценок есть $Z = Z_0^m$. Далее полагается, что шкала критериев порядковая: известно лишь, что предпочтения вдоль их шкалы возрастают: чем больше оценка $z \in Z_0$, тем она предпочтительнее.

Предпочтения ЛПР моделируются на Z при помощи отношения нестрогого предпочтения R (yRz означает, что векторная оценка y не менее предпочтительна, чем z). Отношение R является (частичным) квазипорядком, т.е. оно рефлексивно и транзитивно, и порождает отношение безразличия I и (строгого) предпочтения P следующим образом: $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$; $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge \neg zRy$ (т.е. zRy неверно). Отношение R неизвестно и подлежит восстановлению на основе информации о предпочтениях ЛПР. При отсутствии такой информации на множестве векторных оценок Z можно задать лишь отношение строгого предпочтения $P^\varnothing$ (*отношение Парето*): $yP^\varnothing z \Leftrightarrow (y_i \geq z_i, i = 1, \dots, m, y \neq z)$. Пусть $R^\varnothing$ есть объединение $P^\varnothing$ и отношения равенства векторов.

Для расширения отношения $P^\varnothing$ требуется дополнительная информация Ω о предпочтениях ЛПР, в роли которой будут выступать сведения о важности критериев, например сообщение типа «Одна группа критериев важнее другой». Приведем базовые определения равенства и превосходства в важности для непересекающихся групп критериев. Далее для простоты записи критерии f_i будем обозначать также и их номерами i , так что, например, под i будем понимать критерий f_i , а под $A = \{i_1, \dots, i_q\}$ будем понимать группу (множество) критериев с номерами $i_1, \dots, i_q$.

Пусть A и B – непересекающиеся непустые группы номеров, или группы критериев, в векторной оценке y все компоненты y_i с номерами из A равны между собой и все компоненты y_i с номерами из B равны между собой

(т.е. $y_i = y_j$ при $i, j \in A$ и при $i, j \in B$). Векторные оценки такой структуры будем обозначать как y^{AB} . Обозначим через $y^{A \leftrightarrow B}$ векторную оценку, полученную из y^{AB} путем замены каждой компоненты y_j , $j \in B$, на (любую) компоненту y_i , $i \in A$, и замены каждой компоненты y_i , $i \in A$, на (любую) компоненту y_j , $j \in B$.

Определение 1. Группы критериев A и B равноважны ($A \sim B$), когда всякие векторные оценки y^{AB} и $y^{A \leftrightarrow B}$ одинаковы по предпочтительности (безразличны).

Определение 2. Группа критериев A важнее группы критериев B ($A \succ B$), когда всякая векторная оценка y^{AB} , в которой $y_i > y_j$ при $i \in A$ и $j \in B$, предпочтительнее, чем $y^{A \leftrightarrow B}$.

Согласно этим определениям сообщения $A \sim B$ и $A \succ B$ задают на множестве Z соответственно отношения безразличия $I^{A \sim B}$ и предпочтения $P^{A \succ B}$:

$$(1) \quad \begin{aligned} y I^{A \sim B} z &\Leftrightarrow y = y^{AB}, z = y^{A \leftrightarrow B}, y_i \neq y_j, i \in A, j \in B; \\ y P^{A \succ B} z &\Leftrightarrow y = y^{AB}, z = y^{A \leftrightarrow B}, y_i > y_j, i \in A, j \in B. \end{aligned}$$

С другой стороны, информация Ω задает на множестве 2^M подмножеств множества (номеров) критериев $M = \{1, \dots, m\}$ отношение важности $\succsim^\Omega$:

$$A \sim^\Omega B \text{ при } A \sim B \in \Omega \text{ или } B \sim A \in \Omega; \quad A \succ^\Omega B \text{ при } A \succ B \in \Omega.$$

Каждое соотношение важности $A \sim^\Omega B$ и $A \succ^\Omega B$ порождает на множестве векторных оценок Z согласно (1) соответствующее отношение R^ω , а именно отношение предпочтения P^ω или безразличия I^ω . На основе этой информации на множестве Z определяется отношение нестрогого предпочтения R^Ω (рефлексивное и транзитивное отношение) как транзитивное замыкание объединения всех отношений R^ω и отношения $R^\emptyset$:

$$(2) \quad R^\Omega = T \left[\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} R^\omega \right) \cup R^\emptyset \right],$$

где T – символ операции транзитивного замыкания бинарного отношения. Согласно (2) соотношение $y R^\Omega z$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка вида

$$(3) \quad y R^{\omega_1} u^1, u^1 R^{\omega_2} u^2, \dots, u^{r-1} R^{\omega_r} z,$$

где u^k – векторные оценки, а ω_k – сообщения из Ω (так что R^{ω_k} есть P^{ω_k} или I^{ω_k} в зависимости от смысла ω_k) или же символ $\emptyset$. Отношение нестрогого предпочтения R^Ω порождает указанным выше образом отношения предпочтения P^Ω и безразличия I^Ω .

3. Качественная важность критериев

Под *качественной важностью* будем понимать бинарное отношение $\succsim$ на множестве 2^M подмножеств множества (номеров) критериев $M = \{1, \dots, m\}$: запись $A \succsim B$ означает, что группа критериев A не менее важна, чем группа критериев B . Это отношение порождает отношения строгого превосходства в важности $\succ$ и равноважности $\sim$. Качественная важность называется *полной*, если она обладает такими свойствами (они постулируются как аксиомы):

C1. *Сравнимость*: для любых A и B выполнено по крайней мере одно из $A \succsim B$ или $B \succsim A$.

C2. *Транзитивность*: из $A \succsim B$ и $B \succsim C$ следует $A \succsim C$.

C3. *Существенность*: для любого $A \neq \emptyset$ выполнено $A \succ \emptyset$.

C4. *Аддитивность*: если $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то соотношения $A \succsim B$ и $A \cup C \succsim B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно.

Отметим, что из справедливости свойств C1–C4 следует справедливость свойства

C5. *Рефлексивность*: для любого A выполнено $A \succsim A$.

Качественная важность называется *частичной*, если она обладает свойствами C2–C5.

Следует отметить, что постулированные свойства качественной важности аналогичны аксиомам качественной вероятности. (Подробно со свойствами качественной вероятности (а они зачастую необычны и далеко не очевидны) можно ознакомиться по [3].) Различие состоит только в формулировке аксиомы существенности: для качественной вероятности требуется выполнение требования лишь нестрогого превосходства в вероятности $\succcurlyeq$ для каждого события A , и поэтому допускается $A \sim \emptyset$ при $A \neq \emptyset$. Это объясняется тем, что аксиома существенности для вероятности позволяет охватить встречающиеся на практике случаи наличия невозможных элементарных событий. Для качественной важности выполнение $A \sim \emptyset$ означает учет критерия, не имеющего вообще никакой важности. Но если набор критериев сформирован с выполнением известных требований к его формированию, в число которых входят неизбыточность и минимальная размерность, то такой результат нужно рассматривать как следствие нарушения указанных требований. Это будет означать, что нужно скорректировать математическую модель проблемной ситуации, удалив соответствующий критерий из состава векторного критерия. Поэтому для качественной важности естественно принять требование, что $A \succ \emptyset$ для каждого $A \neq \emptyset$ (т.е. практически – для каждого критерия).

Положительные числа $\beta_1, \dots, \beta_m$ называются *качественными (аддитивными) величинами важности критериев*, согласованными с качественной важностью $\succsim$, если они обладают таким свойством:

$$A \sim B \Rightarrow \sum_{i \in A} \beta_i = \sum_{i \in B} \beta_i; \quad A \succ B \Rightarrow \sum_{i \in A} \beta_i > \sum_{i \in B} \beta_i.$$

Если величины важности критериев нормированы, т.е. в сумме равны 1, то они называются *качественными коэффициентами важности критериев* и обозначаются $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Теория качественной вероятности указывает, что при $m > 4$ качественных величин (и, разумеется, коэффициентов) важности может не существовать [2, 3].

Полную или только частичную важность критериев можно оценить путем проведения (с той или иной степенью полноты) процедуры парных сравнений непустых непересекающихся групп критериев A и B , сравнивая по предпочтительности соответствующие векторные оценки вида y^{AB} и $y^{A \leftrightarrow B}$ и используя такие же соображения и порядок, как при получении информации о качественной важности отдельных критериев. Процедура подробно описана в [3]. Получив достаточный объем информации Ω , необходимо проверить ее на непротиворечивость и при необходимости скорректировать [1]. И, наконец, построить $\succsim$ как аддитивно-транзитивное замыкание отношения важности $\succsim^\Omega$, например, матричным методом, указанным в [1].

4. Отношения предпочтения и безразличия

Вначале расширим определения равенства и превосходства в важности на общий случай, когда группы критериев могут пересекаться или быть пустыми. Пусть A, B – две группы критериев. Далее, пусть $y \in Z$ – векторная оценка такая, что $y_i = a$ для $i \in A \cup B$, т.е. все ее компоненты с номерами из A и B равны $a \in Z_0$. Пусть $b \in Z_0$ и $y' = (y \parallel y_i = b, i \in A) \in Z$ – векторная оценка, полученная из y заменой на b всех ее компонент с номерами из A , а $y'' = (y \parallel y_j = b, j \in B) \in Z$ – векторная оценка, полученная из y заменой на b всех ее компонент с номерами из B .

Определение 3. Группы критериев A и B равноважны ($A \sim B$), когда всякие векторные оценки y' и y'' одинаковы по предпочтительности.

Определение 4. Непустая группа критериев A важнее группы критериев B ($A \succ B$), когда всякая векторная оценка y' при $b > a$ предпочтительнее векторной оценки y'' .

Отметим, что согласно определению 3 верно $A \sim A$, и по определению 4, если $A \supset B$, то $A \succ B$; в частности, если $A \neq \emptyset$, то $A \succ \emptyset$.

Определение отношений $R^\succsim$, а тем самым и отношений $P^\succsim$ и $I^\succsim$ на множестве векторных оценок $Z = Z_0^m$ на основе заданной качественной важности $\succsim$ (полной или только частичной) введем аксиоматически, т.е. укажем систему аксиом, которым должны удовлетворять эти отношения. Вначале ограничим, как указывалось выше, класс бинарных отношений.

Аксиома 1. Отношение $R^\succsim$ рефлексивно.

Аксиома 2. Отношение $R^\succsim$ транзитивно.

При выполнении для $R^\succsim$ этих аксиом отношение $P^\succsim$ оказывается строгим частичным порядком, а отношение $I^\succsim$ – эквивалентностью.

Аксиома 3 (аксиома Парето). Если первая векторная оценка покомпонентно не меньше второй векторной оценки y , причем хотя бы одна из компонент первой больше соответствующей компоненты второй, то первая векторная оценка предпочтительнее второй: если $y_i \geq z_i$, $i = 1, \dots, t$, $y \neq z$, то $y P^{\sim} z$.

Пусть A, B – две группы критериев. Далее, пусть $y, z \in Z$ – две векторные оценки такие, что $y_i = z_j = a$, $i \in A, j \in B$, т.е. все их компоненты с номерами из A и B равны $a \in Z_0$. Пусть $b \in Z_0$ и $y' = (y \parallel y_i = b, i \in A) \in Z$ и $z' = (z \parallel z_j = b, j \in B) \in Z$. Будем говорить, что векторные оценки y и z изменены (соответственно улучшены, ухудшены) одинаковым образом по группам критериев A и B , если они заменены на y' и z' при произвольных b и a (соответственно при $b > a$, при $b < a$).

Аксиома 4 (сохранение предпочтительности). Пусть две векторные оценки одинаковым образом улучшены по двум равноважным группам критериев A и B ; если эти векторные оценки одинаковые по предпочтительности, то они и останутся таковыми; если же первая векторная оценка предпочтительнее второй, то она останется предпочтительнее второй: при $A \sim B$ и $a < b$ из $y I^{\sim} z$ следует $y' I^{\sim} z'$, а из $y P^{\sim} z$ следует $y' P^{\sim} z'$.

Аксиома 5 (усиление предпочтительности). Если две векторные оценки, первая из которых не менее предпочтительна, чем вторая, одинаковым образом улучшены по двум группам критериев, первая из которых важнее второй, то первая из полученных векторных оценок будет предпочтительнее второй: если $A \succ B$ и $a < b$, то из $y R^{\sim} z$ следует $y' P^{\sim} z'$.

Аксиомы 4 и 5 выражают следующую простую идею, которая яснее всего формулируется для случая двух критериев. Предположим, имеется возможность изменить предпочтительность каждой из двух векторных оценок за счет изменения исходных одинаковых значений только одного из двух критериев на одну и ту же величину. Если критерии равноважны, то безразлично, значение какого критерия изменять. Если же первый критерий важнее второго, то предпочтительнее улучшать значения более важного критерия, а ухудшать значения менее важного критерия. В еще более общем виде идея хорошо известна: если решаются две задачи (например, штурм двух опорных пунктов) и полнота их решения одинакова, то дополнительные неделимые ресурсы (резервы) разумно бросить на решение более важной задачи. Если же задачи одинаково важны, то оба способа использования ресурсов одинаковы по предпочтительности.

Система из аксиом 1–5 задает рекурсивное (индуктивное) определение отношений $R^{\sim}, P^{\sim}, I^{\sim}$, если начинать с соотношений $y I^{\sim} y$, верных для любых $y \in Z$.

Пример 1. Пусть для трехкритериальной задачи ($m = 3$) с $Z_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ получена очевидно непротиворечивая информация о важности критериев: $1 \succ 2$, $2 \sim 3$, $\{2, 3\} \succ 1$. На ее основе методом аддитивно-транзи-

тивного замыкания, как нетрудно понять, получается следующая полная качественная важность:

$$\{1, 2, 3\} \succ \{1, 2\} \sim \{1, 3\} \succ \{2, 3\} \succ 1 \succ 2 \sim 3 \succ \emptyset.$$

Начнем с $y = (2, 2, 2)$. Поскольку $\{2, 3\} \succ 1$, то по аксиоме 5 верно $(2, 3, 3)P^{\sim}(3, 2, 2)$. А так как $1 \succ 2$, то $(4, 3, 3)P^{\sim}(3, 4, 2)$. Удобно представить проведенные выкладки в виде двойной цепочки (стрелки проводятся от более предпочтительных векторных оценок к менее предпочтительным), поскольку приходится изменять векторные оценки в каждой паре согласованно:

$$\begin{array}{ccccc} (2, 2, 2) & \leftarrow & (2, 3, 3) & \leftarrow & (4, 3, 3) \\ & & \downarrow_{23 \succ 1} & & \downarrow_{1 \succ 2} \\ (2, 2, 2) & \leftarrow & (3, 2, 2) & \leftarrow & (3, 4, 2). \end{array}$$

Поэтому $(4, 3, 3)P^{\sim}(3, 4, 2)$. *Двойные цепочки*, подобные представленной, можно назвать *объяснительными*: они наглядно показывают, почему одна из векторных оценок предпочтительнее другой (или же почему они безразличны).

Если группы A и B не пусты и не пересекаются, то для векторных оценок, участвующих в формулировках аксиом 4 и 5, при $y = z$ выполнено $z' = y'^{A \leftrightarrow B}$. Следовательно, в общем случае отношение $R^{\sim}$ шире отношения R^{Ω} (см. (2)).

Примечание. В аналогах аксиом 4 и 5 можно учесть и ухудшение векторных оценок:

Аксиома 4*: при $A \sim B$ и $a > b$ из $yI^{\sim}z$ следует $y'I^{\sim}z'$, а из $yP^{\sim}z$ следует $y'P^{\sim}z'$.

Аксиома 5*: при $A \prec B$ и $a > b$ из $yR^{\sim}z$ следует $y'P^{\sim}z'$.

Можно показать, что система аксиом 1, 2, 3, 4*, 5* оказывается эквивалентной системе аксиом 1–5 в том смысле, что она определяет те же отношения $R^{\sim}$, $P^{\sim}$, $I^{\sim}$. Двойные цепочки при использовании аксиом 4* и 5* получаются убывающими. Таким образом, аксиомы 4* и 5* можно использовать вместо аксиом 4 и 5. Совместное использование аксиом 4, 5, 4* и 5* не расширяет отношения $R^{\sim}$, $P^{\sim}$, $I^{\sim}$.

В основе приведенных ниже решающих правил лежит развитие идей теории качественной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений [1]. Для их формулировки каждой паре векторных оценок y и z поставим в соответствие упорядоченное по неубыванию множество, состоящее из их компонент:

$$W(y, z) = \{y_1\} \cup \dots \cup \{y_m\} \cup \{z_1\} \cup \dots \cup \{z_m\} = \{w_1, \dots, w_q\},$$

где $q \leq 2m$ и зависит от y и z , $w_1 < \dots < w_q$. Векторным оценкам поставим в соответствие $2(q-1)$ множеств номеров компонент:

$$M_k(y) = \{i \in M \mid y_i \geq w_k\}, \quad M_k(z) = \{i \in M \mid z_i \geq w_k\}, \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

$$L_k(y) = \{i \in M \mid y_i \leq w_k\}, \quad L_k(z) = \{i \in M \mid z_i \leq w_k\}, \quad k = q-1, q-2, \dots, 1.$$

Следующие две теоремы являются по сути переформулировками соответствующих теорем из [2] применительно к многокритериальным задачам.

Теорема 1. Соотношение $yR^{\succsim}z$ верно тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$(4) \quad M_k(y) \succsim M_k(z), \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

При этом если в (4) все $\succsim$ суть $\sim$, то $yI^{\succsim}z$. В противном случае (когда в (4) имеется $\succ$) верно $yP^{\succsim}z$.

Теорема 2. Соотношение $yR^{\succsim}z$ верно тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$(5) \quad L_k(y) \precsim L_k(z), \quad k = q-1, q-2, \dots, 1.$$

При этом если в (5) все $\precsim$ суть $\sim$, то $yI^{\succsim}z$. В противном случае (когда в (5) имеется $\prec$) верно $yP^{\succsim}z$.

Отметим, что если имеем множество $Z_0 = \{1, \dots, q\}$, то его можно использовать в роли $W(y, z)$.

Пример 2. В условиях примера 1 сравним по предпочтительности векторные оценки $y = (4, 3, 3)$ и $z = (3, 4, 2)$ при помощи теоремы 1. Имеем $W(y, z) = \{2, 3, 4\}$, $q = 3$ и

$$\begin{aligned} k = 2, \quad w_2 = 3, \quad M_2(y) = \{1, 2, 3\} \succ \{1, 2\} = M_2(z); \\ k = 3, \quad w_3 = 4, \quad M_3(y) = \{1\} \succ \{2\} = M_3(z). \end{aligned}$$

Поэтому верно $yP^{\succsim}z$. Сравним теперь векторные оценки $u = (1, 2, 3)$ и $v = (3, 1, 1)$, применяя теорему 2. Имеем: $W(u, v) = \{1, 2, 3\}$, $q = 3$ и

$$\begin{aligned} k = 2, \quad w_2 = 2, \quad L_2(u) = \{1, 2\} \succ \{2, 3\} = L_2(v); \\ k = 1, \quad w_1 = 1, \quad L_1(u) = \{1\} \prec \{2, 3\} = L_1(v). \end{aligned}$$

Следовательно, векторные оценки u и v не сравнимы по предпочтительности.

Пусть критерии $f_1, \dots, f_m$ имеют количественную «физическую» шкалу, не менее совершенную, чем интервальная [4] (например денежные доходы), и $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – качественные коэффициенты важности, согласованные с качественной важностью $\succsim$. Построим взвешенную сумму

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(f_i(x)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(y_i),$$

где φ – возрастающая числовая функция (в обобщенных критериях называемая нормирующей). Значение взвешенной суммы кратко обозначим как $y(\alpha)$.

Теорема 3. Если верно $yR^{\succsim}z$, то верно и $y(\alpha) \geq z(\alpha)$, причем если $yP^{\succsim}z$ или $yI^{\succsim}z$, то $y(\alpha) > z(\alpha)$ или $y(\alpha) = z(\alpha)$ соответственно.

Эта теорема, доказательство которой, как и следующих теорем, вынесено в Приложение, показывает возможность применения, при необходимости, аддитивных функций ценности (в частности, обобщенных критериев) для проведения дальнейшего анализа многокритериальной задачи, решаемой с использованием ТВК.

5. Задачи с упорядоченными по важности отдельными критериями

Далее будем рассматривать задачи, в которых сравнимы по важности только отдельные критерии, т.е. множество Ω может содержать только сообщения вида $i \succ j$ и $i \sim j$. Под *порядковой важностью* будем понимать бинарное отношение $\tilde{\succsim}$ на множестве (номеров) критериев M , которое удовлетворяет аксиомам рефлексивности и транзитивности. При этом если упорядочены все критерии, то важность называется *полной*, в противном случае – *частичной*.

Система из аксиом 1–5, если в их формулировках полагать $A, B \in M$, на основе заданной порядковой важности $\tilde{\succsim}$ (полной или только частичной) определяет отношение $R^{\tilde{\succsim}}$ на множестве векторных оценок Z . Оказывается, это отношение совпадает с $R^{\tilde{\succsim}}$ в случае, когда информация Ω касается важности лишь отдельных критериев, т.е. когда качественная важность $\tilde{\succsim}$ является расширением (продолжением) порядковой важности $\tilde{\succsim}$ на 2^M .

Теорема 4. В случае порядковой важности верно равенство $R^{\tilde{\succsim}} = R^{\tilde{\succsim}}$.

Следующий пример показывает, что отношения $R^{\tilde{\succsim}}$ и $R^{\tilde{\succsim}}$ для качественной важности $\tilde{\succsim}$ и порядковой важности $\tilde{\succsim}$, порождаемых информацией Ω , могут быть шире, чем отношение R^{Ω} .

Пример 3. Пусть $m = 4$, $Z_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $\Omega = \{1 \succ 3, 2 \succ 3, 2 \succ 4\}$. Здесь, как нетрудно убедиться, операция транзитивного замыкания не изменяет отношения $\tilde{\succsim}^{\Omega}$. Частичное отношение качественной важности $\tilde{\succsim}$ выписывать не будем: справедливость возникающих в процессе анализа соотношения с $\succ$ для рассматриваемых пар множеств (с учетом свойств C2 и C4) будет очевидна. Для $y = (3, 4, 1, 2)$ и $z = (2, 1, 4, 3)$ имеем $W(y, z) = Z_0$, $q = 4$. С учетом теоремы 1 получаем:

$$k = 2, \quad w_2 = 2 : M_2(y) = \{1, 2, 4\} \succ \{1, 3, 4\} = M_2(z);$$

$$k = 3, \quad w_3 = 3 : M_3(y) = \{1, 2\} \succ \{3, 4\} = M_3(z);$$

$$k = 4, \quad w_4 = 4 : M_4(y) = \{2\} \succ \{3\} = M_4(z),$$

так что верно $yP^{\tilde{\succsim}}z$. По теореме 4 верно и $yP^{\tilde{\succsim}}z$. Однако объясняющей цепочки (3) построить невозможно, так что y и z не сравнимы по R^{Ω} .

Оказывается, однако, что в случае, когда информация Ω касается важности лишь отдельных критериев и на ее основе можно упорядочить по важности все критерии, отношения $R^{\tilde{\succsim}}$ и R^{Ω} совпадают.

Теорема 5. В случае полной порядковой важности верно равенство $R^{\sim} = R^{\Omega}$.

Пример 4. Пусть в примере 3 дополнительно стало известно, что $4 \succ 1$. Тогда все критерии оказываются упорядоченными по важности: $2 \succ 4 \succ 1 \succ 3$. Теперь уже появляется объясняющая цепочка (3):

$$y = (3, 4, 1, 2)P^{1 \succ 3}(1, 4, 3, 2)P^{2 \succ 3}(1, 3, 4, 2)P^{2 \succ 4}(1, 2, 4, 3)P^{2 \succ 1}(2, 1, 4, 3) = z,$$

так что y предпочтительнее, чем z . Этот же результат получается при добавлении к Ω соотношения $4 \sim 1$, что также позволяет полностью нестрого упорядочить все критерии по важности: $2 \succ 4 \sim 1 \succ 3$.

Таким образом, теорема 5 показывает, что в случае полной порядковой важности отношение нестрогого предпочтения, введенное ранее в ТВК, не расширяется, и поэтому можно использовать любые подходящие ранее разработанные решающие правила из этой теории.

6. Заключение

В статье введены понятия полной и частичной качественной важности и аксиоматически задано основанное на них определение отношения нестрогого предпочтения на множестве вариантов решений. Оно в общем случае оказывается более широким, чем аналогичное по смыслу отношение, введенное ранее в теории важности критериев (ТВК).

Представленные достаточно простые решающие правила позволяют анализировать прикладные многокритериальные задачи, когда имеется информация об относительной важности не только отдельных критериев, но и групп критериев с порядковой шкалой.

Показано, что в случае полного упорядочения только отдельных критериев по важности отношение нестрогого предпочтения, введенное ранее в ТВК, не расширяется, и можно использовать любые подходящие ранее разработанные решающие правила из этой теории.

Полученные результаты являются базой для дальнейшего развития ТВК для задач с упорядоченными по важности группами критериев, имеющих более совершенные шкалы, чем порядковая.

Представленные результаты являются полезными для проведения первых этапов анализа задач принятия политических, социальных и иных решений, в которых информация о предпочтениях (важности критериев и их шкалах) изначально естественно оказывается качественной (нечисловой).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Если верно $yR^{\sim}z$, то существует двойная цепочка, в которой первое звено состоит из двух равных векторных оценок $y^0 = z^0$, а последнее – из y и z .

Рассмотрим два произвольно выбранных смежных звена двойной цепочки, в первом ее звене участвуют векторные оценки s и t , а во втором — u и v и используется соотношение $A \gtrsim B$, так что $\sum_{i \in A} \alpha_i \geq \sum_{i \in B} \alpha_i$ или $\sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i - \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \geq 0$, причем неравенства строгие, если $A \succ B$, и обращаются в равенства, когда $A \sim B$. В векторных оценках u и v в качестве компонент с номерами из A и B выступает некоторое одно и то же число c , так что:

$$u_i = \begin{cases} c+l, & i \in A, \\ c, & i \in B \setminus A, \\ s_i, & i \notin A \cup B; \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} c+l, & i \in B, \\ c, & i \in A \setminus B, \\ t_i, & i \notin A \cup B. \end{cases}$$

Справедливы равенства (заметим, что если множество индексов, по которым идет суммирование, пусто, то сумма по определению равна нулю):

$$\begin{aligned} & [u(\alpha) - v(\alpha)] - [s(\alpha) - t(\alpha)] = \\ & = \left[\sum_{i \in M} \alpha_i \varphi(u_i) - \sum_{i \in M} \alpha_i \varphi(v_i) \right] - \left[\sum_{i \in M} \alpha_i \varphi(s_i) - \sum_{i \in M} \alpha_i \varphi(t_i) \right] = \\ & = \left[\left(\sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in A \cap B} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in M \setminus (A \cup B)} \alpha_i \varphi(s_i) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in A \cap B} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in M \setminus (A \cup B)} \alpha_i \varphi(t_i) \right) \right] - \\ & \quad - \left[\left(\sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in A \cap B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in M \setminus (A \cup B)} \alpha_i \varphi(s_i) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in A \cap B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in M \setminus (A \cup B)} \alpha_i \varphi(t_i) \right) \right] = \\ & = \sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c) - \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c+l) - \sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c) = \\ & = (\varphi(c+l) - \varphi(c)) \left(\sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i - \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \right) = \delta \geq 0, \end{aligned}$$

так что

$$u(\alpha) - v(\alpha) \geq s(\alpha) - t(\alpha) + \delta.$$

Поскольку для первого звена двойной цепочки имеем $y^0(\alpha) - z^0(\alpha) = 0$, то разность $u(\alpha) - v(\alpha)$ при движении по цепочке вправо не уменьшается и остается неотрицательной. Поэтому $y(\alpha) \geq z(\alpha)$. При этом если $yP^{\sim}z$, то при формировании цепочки хотя бы раз встретится соотношение вида $A \succ B$ и потому будет верно $y(\alpha) > z(\alpha)$; в противном случае, когда $yI^{\sim}z$, все соотношения будут типа $A \sim B$ и окажется справедливым равенство $y(\alpha) = z(\alpha)$. Теорема 3 доказана.

Для доказательства теорем 4 и 5 понадобится одно вспомогательное утверждение, характеризующее структуру связанных качественной важностью пар групп критериев в рассматриваемом случае порядковой важности.

Лемма 1. Если качественная важность $\dot{\succsim}$ получена расширением порядковой важности $\dot{\succsim}$ на 2^M , то в любом соотношении $A \dot{\succsim} B$ группы критериев A и B можно разбить на отдельные критерии следующим образом:

$$(П.1) \quad \begin{aligned} A &= i_1 \cup i_2 \cup \dots \cup i_{n_A}, \quad i_p \neq i_r \text{ при } p \neq r; \\ B &= j_1 \cup j_2 \cup \dots \cup j_{n_B}, \quad j_p \neq j_r \text{ при } p \neq r; \\ n_A &\geq n_B; \quad i_p \dot{\succsim} j_p, \quad p = 1, \dots, n_B. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1. Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть на первом шаге построения отношения $\dot{\succsim}$ оно состоит из всех пар $(i, j) \in \dot{\succsim}$ и $(i, \emptyset), i \in M$, для которых выполняются условия леммы 1. На каждом следующем шаге будем добавлять к полученному отношению одно новое соотношение, применяя правила аддитивности или транзитивности к уже имеющимся соотношениям.

Предположим, что на k -м шаге построения отношения $\dot{\succsim}$ для всех имеющих в нем соотношений $A \dot{\succsim} B$ выполняются условия леммы 1. Пусть на $(k+1)$ -м шаге применяется правило аддитивности: если $A \dot{\succsim} B$ и $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то $A \cup C \dot{\succsim} B \cup C$. Разбиение (П.1) для соотношения $A \cup C \dot{\succsim} B \cup C$ можно построить на основе существующего разбиения (П.1) для соотношения $A \dot{\succsim} B$, просто добавив пары $i_p \dot{\succsim} i_p$ для всех $i_p \in C$.

Пусть на $(k+1)$ -м шаге применяется правило аддитивности: если $A \dot{\succsim} B$ и $A \supseteq C, B \supseteq C$, то $A \setminus C \dot{\succsim} B \setminus C$. Разбиение (П.1) для соотношения $A \setminus C \dot{\succsim} B \setminus C$ можно построить на основе существующего разбиения (П.1) для соотношения $A \dot{\succsim} B$, преобразовав его сначала так, чтобы оно содержало пары $i_p \dot{\succsim} i_p$ для всех $i_p \in C$, а затем исключив все эти пары. Такое преобразование всегда можно осуществить. Предположим, в разбиении (П.1) для $A \dot{\succsim} B$ и некоторого $i \in C$ присутствует две пары $i \dot{\succsim} j$ и $t \dot{\succsim} i$. Тогда с учетом транзитивности $\dot{\succsim}$ их можно заменить на пары $i \dot{\succsim} i$ и $t \dot{\succsim} j$. И так следует проделать с каждым номером $i \in C$.

Пусть на $(k+1)$ -м шаге применяется правило транзитивности: если $A \dot{\succsim} B$ и $B \dot{\succsim} C$, то $A \dot{\succsim} C$. Разбиение (П.1) для соотношения $A \dot{\succsim} C$ можно построить на основе существующих разбиений (П.1) для соотношений $A \dot{\succsim} B$ и $B \dot{\succsim} C$.

Имеем:

$$A = i_1 \cup i_2 \cup \dots \cup i_{n_A}, \quad i_p \neq i_r \text{ при } p \neq r;$$

$$B = j_1 \cup j_2 \cup \dots \cup j_{n_B}, \quad j_p \neq j_r \text{ при } p \neq r;$$

$$C = t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_{n_C}, \quad t_p \neq t_r \text{ при } p \neq r;$$

$$n_A \geq n_B \geq n_C; \quad i_p \dot{\prec} j_p, \quad p = 1, \dots, n_B; \quad j_p \dot{\prec} t_p, \quad p = 1, \dots, n_C.$$

Из транзитивности отношения $\dot{\prec}$ для соотношения $A \dot{\prec} C$ следует требуемое разбиение (П.1): $i_p \dot{\prec} t_p, p = 1, \dots, n_C$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 4. Поскольку $\dot{\prec} \subseteq \dot{\prec}$ на 2^M , то $R^{\dot{\prec}} \subseteq R^{\dot{\prec}}$. Следовательно, достаточно доказать $R^{\dot{\prec}} \supseteq R^{\dot{\prec}}$. Пусть для некоторых векторных оценок $y, z \in Z$ выполняется $y R^{\dot{\prec}} z$. Тогда по теореме 1 выполняются соотношения (4). Введем в рассмотрение векторные оценки y^k и z^k , $k = 1, \dots, q - 1$:

$$y_i^k = \begin{cases} y_i, & y_i \leq w_k, \\ w_k, & y_i > w_k; \end{cases} \quad z_i^k = \begin{cases} z_i, & z_i \leq w_k, \\ w_k, & z_i > w_k. \end{cases}$$

Построим двойную цепочку, начинающуюся с векторных оценок $y^1 = z^1 = (w_1, \dots, w_1)$ и использующую только сообщения $i \dot{\prec} j$. Для соотношения $M_2(y) \dot{\prec} M_2(z)$ из (4) по лемме 1 существует разбиение вида (П.1). Для удобства обозначим: $n = |M_2(z)|$. Положим $u^1 = y^1, v^1 = z^1$. Для каждой пары $i_p \dot{\prec} j_p, p = 1, \dots, n$, из (П.1) поочередно улучшим одинаковым образом от $a = w_1$ до $b = w_2$ векторные оценки u^p и $v^p, p = 1, \dots, n$, по критериям i_p и j_p . По аксиомам 4 и 5 при каждом таком улучшении получим $u^{p+1} R^{\dot{\prec}} v^{p+1}, p = 1, \dots, n$. Заметим, что $y^2 R^{\emptyset} u^{n+1}$, а $z^2 = v^{n+1}$. По аксиоме 2 транзитивности получаем $y^2 R^{\dot{\prec}} z^2$.

Далее аналогично строим двойную цепочку, начинающуюся с векторных оценок y^2 и z^2 , и используем соотношение $M_3(y) \dot{\prec} M_3(z)$ из (4). При этом улучшение одинаковым образом от $a = w_2$ до $b = w_3$ векторных оценок по критериям из $M_3(y)$ и $M_3(z)$ возможно, так как $M_2(y) \supseteq M_3(y)$ и $M_2(z) \supseteq M_3(z)$. В результате аналогично получаем $y^3 R^{\dot{\prec}} z^3$. И так далее, пока на шаге $k = q$ с использованием соотношения $M_q(y) \dot{\prec} M_q(z)$ из (4) не получим $y^q R^{\dot{\prec}} z^q$, что значит $y R^{\dot{\prec}} z$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. В общем случае $R^{\dot{\prec}} \supseteq R^{\Omega}$, поэтому достаточно доказать, что в случае полной порядковой важности выполняется $R^{\dot{\prec}} \subseteq R^{\Omega}$. Воспользуемся известным аналитическим решающим правилом для проверки $y R^{\Omega} z$ в случае полной порядковой важности. В этом случае существуют порядковые, или ординальные, коэффициенты важности критериев – положительные в сумме равные единице числа $\alpha_1^o, \dots, \alpha_m^o$, для которых выполняются условия: $i \dot{\sim} j \Rightarrow \alpha_i^o = \alpha_j^o, i \dot{>} j \Rightarrow \alpha_i^o > \alpha_j^o$. Введем в рассмотрение числа

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} \alpha_i^o, & y_i \geq w_k, \\ 0, & y_i < w_k \end{cases}, \quad i \in M, \quad k = 2, \dots, q.$$

В векторе $\alpha^k(y) = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{mk})$ упорядочим все компоненты по невозрастанию, полученный вектор обозначим как $\alpha_{\searrow}^k(y)$. Имеет место решающее правило [3]:

$$(П.2) \quad yR^{\Omega}z \Leftrightarrow \alpha_{\searrow}^k(y) \geq \alpha_{\searrow}^k(z), \quad k = 2, \dots, q,$$

где $\geq$ – знак векторного нестрогого неравенства для n -мерных векторов ($n \geq 2$): $a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i, i = 1, \dots, n$.

Пусть для некоторых векторных оценок $y, z \in Z$ выполняется $yR^{\searrow}z$. Тогда по теореме 1 выполняются соотношения (4). Для произвольного $k = 2, \dots, q$ докажем, что из соотношения $M_k(y) \succsim M_k(z)$ следует $\alpha_{\searrow}^k(y) \geq \alpha_{\searrow}^k(z)$. Заметим, что числа $\alpha_{ik}(y)$ не равны нулю при $i \in M_k(y)$. Поэтому вектор $\alpha^k(y)$ состоит из ненулевых компонент с номерами из $M_k(y)$. По лемме 1 для соотношения $M_k(y) \succsim M_k(z)$ существует разбиение П.1. Поэтому и для компонент векторов $\alpha^k(y)$ и $\alpha^k(z)$ существует соответствующее попарное разбиение компонент:

$$\alpha_{i_1k}(y) \geq \alpha_{j_1k}(z), \alpha_{i_2k}(y) \geq \alpha_{j_2k}(z), \dots, \alpha_{i_mk}(y) \geq \alpha_{j_mk}(z).$$

Следовательно, должно выполняться и $\alpha_{\searrow}^k(y) \geq \alpha_{\searrow}^k(z)$. Тогда согласно (П.2) верно $yR^{\Omega}z$. Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности группами критериев // АиТ. 2022. № 7. С. 119–136.
2. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Теоретические основы и методы анализа решений в условиях неопределенности при качественных оценках вероятностей и предпочтений // АиТ. 2026. № . С.
3. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2022.
4. Пфаницагль И. Теория измерений. М.: Мир, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 08.12.2025

После доработки 27.01.2026

Принята к публикации 02.02.2026



КИБЗУН АНДРЕЙ ИВАНОВИЧ

31.07.1951—06.05.2026

**Лауреат Премии Правительства
Российской Федерации
в области науки и техники,
доктор физико-математических наук,
профессор**

6 мая 2026 г. на 75-м году жизни скончался профессор Андрей Иванович Кибзун – выдающийся российский ученый в области теории вероятностей, оптимизации стохастических систем, вероятностных методов системного анализа, стохастического программирования и оптимизации вероятностных и квантильных показателей качества, талантливый педагог, замечательный коллега и добрый друг.

Андрей Иванович Кибзун родился 31 июля 1951 г. в Хабаровске. В 1968 г. он окончил физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ под руководством академика А.Н. Колмогорова. В 1974 г. он с отличием окончил факультет «Летательные аппараты» Московского авиационного института, а в 1975 г. также с отличием окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Сочета-

ние сильной инженерной и математической подготовки позволило Андрею Ивановичу начать активную исследовательскую работу в Московском авиационном институте, где он в 1978 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 1987 г. – докторскую диссертацию. В 1989 г. А.И. Кибзуну было присвоено ученое звание профессора. Важно отметить, что уже в кандидатской диссертации Андрея Ивановича были заложены идеи нового научного направления, которые получили развитие в его докторской диссертации и далее в работах его учеников. В 1990 г. профессор А.И. Кибзун достойно принял эстафету у создателя кафедры «Теория вероятностей и математическая статистика» академика В.С. Пугачёва, основателя советской школы статистической теории управления. Профессор А.И. Кибзун сохранил традиции этой школы и приумножил их за счет привлечения на кафедру первоклассных ученых в области стохастических систем, теории управления, методов статистического оценивания и оптимизации. В последние годы основными достижениями этой школы и лично Андрея Ивановича стали новые алгоритмы решения одноэтапных и двухэтапных задач вероятностной и квантильной оптимизации, основанные на сведениях к детерминированным задачам смешанного целочисленного программирования, а также анализ этих аппроксимаций с точки зрения точности и сходимости. Под руководством А.И. Кибзуна защищены 10 докторских и 20 кандидатских диссертаций по физико-математическим наукам. Усилия возглавляемого им научного коллектива поддержаны более чем 20 различными международными и российскими грантами, в том числе РФФИ, РНФ и Минобрнауки РФ.

Основные научные результаты А.И. Кибзуна изложены в трех монографиях, посвященных задачам стохастического программирования с вероятностными критериями, и в более 100 научных статьях. А.И. Кибзуном и его учениками разработан комплекс методов решения задач стохастического программирования с вероятностными и квантильными критериями, среди которых доверительный метод, метод детерминированного эквивалента, стохастические квазиградиентные методы, метод выборочных аппроксимаций и др.

А.И. Кибзун большое внимание уделял методической работе и обучению студентов. Написанный совместно с коллегами учебник по теории вероятностей и математической статистике отражает разработанную кафедрой методику преподавания этой дисциплины студентам инженерных и экономических специальностей. Долгие годы для студентов кафедры теории вероятностей А.И. Кибзун вел специальный курс «Прикладное стохастическое программирование», в котором излагались как достижения мировой науки в этой области, так и результаты, полученные научной школой кафедры.

Профессор А.И. Кибзун долгие годы являлся членом редколлегии журнала «Автоматика и телемеханика», где он подготовил 12 тематических номеров журнала по современным проблемам оптимизации (в 1998, 2003, 2004, 2007, 2011, 2012, 2017 гг.). Он активно работал в редколлегиях журналов «Вестник компьютерных и информационных технологий» и «Applied Stochastic Models in Business and Industry», был членом Научно-методического совета по

математике при Минобрнауки РФ и вице-президентом Консорциума аэрокосмических вузов России.

Профессор А.И. Кибзун на протяжении 20 лет активно участвовал в научно-экспертной деятельности, являясь членом экспертного совета по управлению, вычислительной технике и информатике Высшей аттестационной комиссии при Минобрнауки России. Он формировал политику аттестации научных кадров высшей квалификации, готовил паспорта специальностей в области системного анализа, обработки информации, математического моделирования, был требовательным и чутким оппонентом, показывал пример молодым ученым в строгости математических формулировок, добросовестности и преданности науке.

Российское правительство высоко оценило заслуги Андрея Ивановича, которому в составе авторского коллектива была присуждена премия Правительства Российской Федерации 1999 г. в области науки и техники за разработку и внедрение в практику методологии высокоточного отделения космических аппаратов различного назначения и присвоено звание «Лауреата Премии Правительства Российской Федерации».

Вся жизнь Андрея Ивановича Кибзуна, его высокий профессионализм, служение своему делу, отношение к людям, жизнелюбие, оптимизм, трудолюбие, забота о близких будут нам хорошим примером в жизни. Его мудрые и добрые советы помогали коллегам, друзьям и его ученикам. Его неизменная готовность выслушать и поддержать коллег создавала вокруг него атмосферу подлинного уважения и доверия.

Светлая память о выдающемся ученом и прекрасном педагоге Андрее Ивановиче Кибзуне навсегда останется в сердцах его родных и близких, коллег, учеников и друзей.

Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика», коллеги и друзья.

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

Булычев Ю.Г. Гибридно-робастный метод оценивания значений линейных функционалов в условиях существенной неопределенности и нелинейного фактора	3
Жиравок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Горностаев И.В., Квасов Д.В., Данилов Д.Д. Идентификация внешних воздействий на нелинейные системы на основе интервальных методов	28
Тхай В.Н. Симметричные многочастотные колебания лагранжевой системы и их стабилизация	42

Управление в технических системах

Воронцов Д.А., Коргин Н.А. Перспективы использования усилителей D-класса в микрогрид-системах с нелинейной нагрузкой	60
Бобрик П.П. Оптимальная навигация в регулярных транспортных сетях с малыми пробками	83

Управление в медико-биологических системах

Киселевская-Бабинина В.Я. Моделирование влияния распространенности хронических заболеваний на смертность от COVID-19	97
---	----

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности группами критериев (II). Решающие правила	110
Некролог	124

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

Bulychev Yu.G. A Hybrid-Robust Method for Estimating the Values of Linear Functionals under Conditions of Significant Uncertainty and a Nonlinear Factor	3
Zhirabok A.N., Zuev A.V., Filaretov V.F., Gornostaev I.V., Kvasov D.V., Danilov D.D. Unknown Input Identification in Nonlinear Systems Based on Interval Observers	28
Tkhai V.N. Symmetrical Multifrequency Oscillations of the Lagrangian System and Their Stabilization	42

Control in Technical Systems

Vorontsov D.A., Korgin N.A. Prospects of Using Class D Amplifiers in Microgrid Systems with Nonlinear Loads	60
Bobrik P.P. Optimal Navigation in Regular Transport Networks with Minor Traffic Congestion.....	83

Control in Social Economic Systems, Medicine, and Biology

Kisselevskaya-Babinina V.Ya. Modelling the Impact of Chronic Disease Prevalence on COVID-19 Mortality	97
--	----

Intellectual Control Systems, Data Analysis

Nelyubin A.P., Podinovski V.V. Multi-Criteria Problems with Groups of Criteria Ordered by Importance (II). Decision Rules	110
Obituary	124