

© 2026 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychhev@yandex.ru)
(АО «Концерн Радиоэлектронные технологии», Москва)

ГИБРИДНО-РОБАСТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И НЕЛИНЕЙНОГО ФАКТОРА

Применительно к задачам вторичной обработки информации развивается гибридно-робастный метод оптимального оценивания различных числовых характеристик (линейных функционалов) при наличии факторов параметрической неопределенности по отношению к информационному процессу, регулярной и нерегулярной помехам, а также корреляционной функции (в том числе и с нелинейными параметрами) шума измерений. Метод полностью или частично инвариантен к указанным факторам и позволяет формировать искомые оценки, не прибегая к процедуре расширения вектора оцениваемых параметров и без привлечения процедур линеаризации. Приводится сравнение с известными методами оценивания, анализируются случайные и методические погрешности, а также достигаемый вычислительный эффект. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: вторичная обработка информации, существенная неопределенность, векторный линейный функционал, спектральные коэффициенты, нелинейный фактор, гибридно-робастный метод, условие инвариантности, условная оптимизация, семейство гипотез, расширенный метод наименьших квадратов, декомпозиция.

DOI: 10.7868/S2413977726080019

1. Введение

При решении широкого круга задач вторичной обработки информации с использованием косвенных измерений (когда сняты проблемы, связанные с обнаружением, различением и распознаванием сигналов) зачастую возникает существенная неопределенность. Она может быть связана с отсутствием достоверных знаний о законах распределения ошибок измерений, наличием аномальных одиночных и групповых ошибок и т.д. (см., например, [1–32]). С подобными ситуациями зачастую приходится сталкиваться, например, при определении движения летательных аппаратов по результатам траекторных измерений в ракетно-космической области [3].

Основу алгоритмов обработки для данных этапов составляют классические вероятностные методы максимума апостериорной плотности вероятности или максимального правдоподобия, как правило, в расширенном вариан-

те (см., например, [1–4]). Этот вариант предполагает включение всех неизвестных параметров неопределенности в расширенный вектор состояния, однако процедура расширения приводит на практике к резкому росту вычислительных затрат, известному эффекту «размазывания точности» и проблемам со сходимостью и устойчивостью формируемых оценок. Анализ показывает, что для условий существенной неопределенности классические вероятностные методы оценивания зачастую малопригодны, однако их можно эффективно использовать для создания гибридно-робастных алгоритмов или на этапе математического моделирования для исследования потенциальных возможностей измерительных систем.

Существуют и другие методы оценивания, которые можно использовать в условиях неопределенности. К ним относятся: расширенный метод наименьших квадратов (РМНК) [3], методы минимума различных геометрических и кинематических невязок [30], метод инвариантов [31], всевозможные методы линейной и нелинейной фильтрации (например, калмановской) [1, 3, 10, 14, 25, 26], различные адаптивные методы с подстройкой параметров [9, 26], робастные [1, 14, 27], рандомизированные [20, 21], кластерные [21, 32] и нейросетевые [28] методы, а также большое число эвристических методов (см., например, [5, 8, 11, 13, 29]). При выполнении ряда ограничений на условия наблюдения указанные методы позволяют преодолевать факторы неопределенности, например бороться с аномальными ошибками. Однако в условиях существенной неопределенности данные методы сталкиваются с различными непредвиденными ограничениями и жесткими требованиями к алгоритмам обработки измерений, которые значительно сужают сферу их применения. Кроме того, они, как правило, гарантируют сходимость в среднем (либо по ансамблю реализаций, либо по одной достаточно длинной реализации), но не гарантируют качество формируемой оценки по одной выборке малого или среднего объема. При этом в большинстве известных процедур оценивания в основном используется весовая обработка, в которой расчет весовых коэффициентов осуществляется априорно на основании большого объема доступной статистической информации. Если такая информация отсутствует или оказывается недостоверной, то необходимо прибегать к апостериорным весовым коэффициентам, которые должны варьироваться от одной выборки измерений к другой.

Рассмотренные выше методы, как правило, направлены на решение задач оценивания спектральных коэффициентов информационных процессов (ИП) либо нахождения их сглаженных значений. Однако в практике измерений весьма актуальна более общая задача, связанная с оптимальным оцениванием различных числовых характеристик ИП. Речь идет о векторе линейных функционалов (ВЛФ), в качестве координат которого могут рассматриваться, например, производные различных порядков от ИП для решения задач, связанных с прогнозированием движения летательных аппаратов и их идентификацией в системах гражданского и военного назначения.

Для достаточно благоприятных условий наблюдения оценка ВЛФ также может осуществляться на базе классических вероятностных методов, например на основе методов максимума апостериорной плотности вероятности или максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов (МНК) и его расширенного аналога РМНК, а также их различных модификаций. При наличии в наблюдениях помех регулярной структуры (представимых в виде линейной оболочки заданной системы базисных функций с неизвестными спектральными коэффициентами) для оптимальной оценки ВЛФ применим метод обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания (МОИНО) [15, 16], который приводит к декомпозиции вычислений и обращению матриц меньшей размерности (по сравнению с РМНК), а в качестве априорных данных использует информацию о нулевом математическом ожидании и заданной корреляционной функции шума измерений.

При наличии в наблюдениях не только регулярных (РП), но и нерегулярных помех (НП), для которых не существует компактных (с точки зрения числа степеней свободы) математических моделей, можно использовать модифицированный метод ОИНО для спектрального анализа составляющих входного наблюдения [17]. Данная модификация дает хороший результат на выборках такого объема, когда можно создать достаточное количество редуцированных временных сеток, среди которых найдутся такие, которые не связаны с НП. Однако для большого класса прикладных задач, в которых приходится оперировать с выборками среднего и малого объема, применение такого метода зачастую оказывается достаточно проблематичным. Кроме того, модифицированный метод ОИНО ориентирован на случай, когда априорно известна корреляционная матрица шума входного наблюдения. Но на практике данный шум может быть полупределенным, т.е. нецентрированным (с неизвестным математическим ожиданием) и характеризоваться параметризованной корреляционной функцией, заданной с точностью до структуры. Для ее параметров (как линейных, так и нелинейных) указывается лишь некоторая область неопределенности. Указанная неопределенность относительно характеристик шума измерений, а также параметров РП и НП зачастую приводит к существенному искажению результатов оценивания. Поэтому требуется разработка более совершенного метода оценивания ВЛФ применительно к условиям неопределенности.

В настоящей статье развивается такой гибридно-робастный метод (ГРМ), учитывающий как априорные, так и апостериорные данные, не требующий проведения процедур линеаризации и расширения вектора оцениваемых параметров. Он сохраняет все достоинства известного метода ОИНО [15, 16] и его модификации [17] в плане декомпозиции, использует лишь простейшие операции сложения, умножения и обращения матриц, а для построения результирующей оценки ВЛФ применяет несложную операцию объединения множества условно оптимальных частных оценок, соответствующих семейству используемых альтернативных гипотез. Термин «декомпозиция» применяется в том смысле, что возможно независимое (раздельное) оценивание

любой числовой характеристики (линейного функционала) для каждой составляющей входного наблюдения, представимой конечной линейной комбинацией заданных базисных функций с неизвестными спектральными коэффициентами. К числу таких составляющих относятся ИП и РП.

ГРМ ориентирован, в первую очередь, на измерительные системы с параллельными вычислениями, чтобы обеспечить требуемую оперативность для организации режима реального времени при обработке входных наблюдений. Именно такие вычисления позволяют эффективно бороться с проблемой нелинейности путем организации большого числа каналов обработки данных для сформированного семейства альтернативных гипотез относительно нелинейного фактора неопределенности.

2. Основные понятия, модели и ограничения

Обозначим через $x_{\text{ИП}}(t) = x_1(t)$ и $x_{\text{РП}}(t) = x_2(t)$ соответственно ИП и РП:

$$(2.1) \quad x_i(t) = \boldsymbol{\psi}_i^T(t) \boldsymbol{\gamma}_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad t \in [0, T],$$

где $\boldsymbol{\psi}_i(t) = [\psi_{im}(t), m = \overline{1, V_i}]^T$ – вектор заданных базисных функций, $\boldsymbol{\gamma}_i = [\gamma_{im}, m = \overline{1, V_i}]^T$ – вектор неизвестных спектральных коэффициентов.

Также вводится НП $z(t)$, присутствующая в измерениях (в том или ином виде) и практически не поддающаяся компактному аналитическому описанию, с небольшим числом степеней свободы. Она, например, может содержать составляющие «хвостов» функциональных бесконечных рядов, используемых для описания ИП и РП, а также неизвестное математическое ожидание шума измерений. Кроме того, $z(t)$ может включать в себя различные ошибки измерений, например аномальные (одиночные или групповые) как естественные, так и преднамеренные. Кроме того, в различных условиях наблюдения могут возникнуть заранее не ожидаемые медленно и (или) быстроменяющиеся составляющие НП, природа которых заранее не известна. Бороться с такой помехой крайне сложно, так как она не соответствует ожидаемым условиям измерительного эксперимента, ее можно характеризовать коэффициентом засоренности [17].

Сформируем уравнение наблюдений (в непрерывном времени)

$$(2.2) \quad h(t) = x_1(t) + x_2(t) + z(t) + \xi(t), \quad t \in [0, T],$$

где $\xi(t)$ – центрированный полуопределенный шум измерений, характеризующийся нулевым математическим ожиданием и параметризованной (заданной с точностью до параметров) корреляционной функцией $k(t', t'', \mathbf{q})$, где $t', t'' \in [0, T]$, $\mathbf{q} = [q_r, r = \overline{1, Q}]^T$ – вектор постоянных параметров.

При реализации известных методов оценивания (МНК, РМНК и МОИНО) в качестве $\mathbf{q}$ традиционно выбирается некоторое номинальное фиксированное значение $\mathbf{q}_0$.

Если рассматривать нецентрированный шум $\tilde{\xi}(t)$, то и в этом случае несложно воспользоваться уравнением (2.2), включив ненулевое математическое ожидание либо в РП (если оно описывается небольшим набором базисных функций), либо непосредственно в НП (если оно имеет расширенное спектральное представление). На координаты вектора $\mathbf{q}$ накладываются ограничения для области возможной неопределенности $\alpha_r \leq q_r \leq \beta_r$, где $\alpha_r > 0$ и $\beta_r > 0$, при этом $\mathbf{q}_0$ принадлежит данной области.

Введем ВЛФ (набор числовых характеристик) $\mathbf{\Omega} = [\mathbf{\Omega}_1^T, \mathbf{\Omega}_2^T]^T = [\varsigma_j, j = \overline{1, M_1 + M_2}]^T$, где

$$\mathbf{\Omega}_i = \mathbf{\Omega}_i\{x_i(t)\} = [\omega_{ir}\{x_i(t)\}, r = \overline{1, M_i}]^T = [\varsigma_{ir}, r = \overline{1, M_i}]^T, \quad i \in \{1, 2\},$$

где ς_{ir} – r -я числовая характеристика для составляющей $x_i(t)$ из (2.1).

Рассматривается общий случай, когда для каждой составляющей $x_1(t)$ или $x_2(t)$ могут раздельно вычисляться свои числовые характеристики (линейные функционалы).

Ставится задача нахождения оптимальной оценки $\mathbf{\Omega}_i^* = \mathbf{P}_i^{\Omega} \mathbf{H}$ для ВЛФ $\mathbf{\Omega}_i$. Здесь $\mathbf{P}_i^{\Omega}$ – матрица линейного оценивания, $\mathbf{H}$ – вектор наблюдений (дискретная выборка для функции $h(t)$ на временной сетке $\{t_1, \dots, t_N\}$):

$$(2.3) \quad \mathbf{H} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z} + \mathbf{\Xi},$$

где $\mathbf{X}_i = [x_{in}, n = \overline{1, N}]^T$, $x_{in} = x_i(t_n)$, $i \in \{1, 2\}$, $\mathbf{Z} = [z_n, n = \overline{1, N}]^T$, $\mathbf{\Xi} = [\xi_n, n = \overline{1, N}]^T$, $z_n = z(t_n)$, $\xi_n = \xi(t_n)$, $t_n \in [0, T]$.

НП можно характеризовать коэффициентом засоренности $\rho_{\mathbf{Z}} = 100 \times N_{\mathbf{Z}}/N$ [%], где $N_{\mathbf{Z}}$ – количество всех тех координат вектора $\mathbf{Z}$, которые могут существенно повлиять на результаты оценивания, если использовать любые оптимальные алгоритмы обработки измерений, не учитывающие НП. В дальнейшем полагаем, что объем выборки (2.3) как минимум превосходит общее число степеней свободы принятых математических моделей (т.е. $N \geq V_1 + V_2 + Q + N_{\mathbf{Z}}$, а для практики зачастую $N \gg V_1 + V_2 + Q + N_{\mathbf{Z}}$) и обеспечивает необходимый сглаживающий эффект (по отношению к шуму $\mathbf{\Xi}$).

С учетом принятых моделей для составляющих $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выборку (2.3) представим в следующем виде:

$$(2.4) \quad \mathbf{H} = \mathbf{\Psi}_1 \mathbf{\gamma}_1 + \mathbf{\Psi}_2 \mathbf{\gamma}_2 + \mathbf{Z} + \mathbf{\Xi} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\gamma} + \mathbf{Z} + \mathbf{\Xi},$$

где

$\mathbf{\Psi}_i = [\psi_{imn}, n = \overline{1, N}, m = \overline{1, V_i}]$ – базисная матрица составляющей $x_i(t)$, $\psi_{imn} = \psi_{im}(t_n)$,

$\mathbf{\Psi} = [\mathbf{\Psi}_1; \mathbf{\Psi}_2]$ – объединенная базисная матрица для двух составляющих уравнения наблюдения (2.3),

$$\mathbf{\gamma} = [\mathbf{\gamma}_1^T, \mathbf{\gamma}_2^T]^T = [\gamma_j, j = \overline{1, V_1 + V_2}]^T.$$

Матрица $\mathbf{P}_i^\Omega = [p_{imn}^\Omega, m = \overline{1, M_i}, n = \overline{1, N}]$ должна обеспечивать выполнение ряда условий.

Первое условие (инвариантность оценки по отношению к $\mathbf{X}_j$):

$$(2.5) \quad \mathbf{P}_i^\Omega \mathbf{X}_j = \mathbf{P}_i^\Omega \Psi_j \gamma_j = [\mathbf{0}]_{M_i \times 1}, \quad i \neq j.$$

Второе условие (несмещенность оценки):

$$(2.6) \quad \mathbf{P}_i^\Omega \mathbf{X}_i = \mathbf{P}_i^\Omega \Psi_i \gamma_i = \Omega_i.$$

Третье условие (минимизация следа корреляционной матрицы $\mathbf{K}_i^\Omega = [k_{ilp}^\Omega, l, p = \overline{1, M_i}]$ ошибок оценивания):

$$(2.7) \quad Sp \mathbf{K}_i^\Omega = Sp [\mathbf{P}_i^\Omega \mathbf{K} (\mathbf{P}_i^\Omega)^T] \rightarrow \min,$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{q}) = [k(t_n, t_m, \mathbf{q}), n, m = \overline{1, N}]$ – корреляционная матрица шума Ξ .

Условие (2.5) показывает, что при оценивании ВЛФ для $x_i(t)$ другая составляющая $x_j(t)$ рассматривается как помеха и наоборот. Условия (2.6) и (2.7) соответствуют любой процедуре оптимального линейного оценивания [1–4].

Помимо временной сетки $\{t_1, \dots, t_N\}$ используем также многомерную сетку узлов $\{\mathbf{q}_{(1)}, \dots, \mathbf{q}_{(L)}\}$, которая покрывает область $[\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_Q, \beta_Q]$ (например, равномерно) таким образом, чтобы мощности L хватало для качественного описания функции $k(t', t'', \mathbf{q})$ на всей области определения $[0, T] \times [0, T] \times [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_Q, \beta_Q]$. Матрица $\mathbf{P}_i^\Omega$ зависит от $\mathbf{q}$, следовательно, $\mathbf{P}_i^\Omega = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})$ и $\Omega_i^* = \Omega_i^*(\mathbf{q})$. Таким образом, выбор оптимального значения $\mathbf{q}^*$ для параметра $\mathbf{q}$ должен осуществляться в рамках дополнительного решающего правила, учитывающего присутствие в (2.3) составляющей $\mathbf{Z}$ и результаты построения множества частных оценок параметров γ_1 и γ_2 для семейства узлов $\{\mathbf{q}_{(1)}, \dots, \mathbf{q}_{(L)}\}$.

Требуется с учетом (2.1)–(2.7) разработать ГРМ оценивания значений ВЛФ Ω_i (где $i \in \{1, 2\}$) в условиях факторов неопределенности относительно векторных параметров γ_1 , γ_2 , $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{q}$. В такой общей постановке задача оценивания является нелинейной, поскольку некоторые координаты вектора $\mathbf{q}$ могут входить в функцию $k(t', t'', \mathbf{q})$ нелинейно.

Предлагаемый ГРМ должен позволить обойти указанные проблемы, связанные с нелинейностью, и быть ориентированным на применение простейших операций сложения, умножения и обращения матриц в линейном варианте. В отличие от известного метода ОИНО [15, 16] и его известной модификации [17] рассматривается более общая задача, связанная не только со спектральным анализом, но и с оцениванием ВЛФ, шум измерений является полуопределенным (имеем параметрическую неопределенность при описании его корреляционной функции с учетом нелинейного фактора) и, кроме того, в наблюдении присутствует НП $\mathbf{Z}$. Также должна обеспечиваться возможность раздельного оценивания любой координаты (числовой характеристики) ВЛФ как для ИП, так и для РП.

3. Основные расчетные соотношения

Обозначим через $\mathbf{P}_{ir}^\Omega = [p_{irn}^\Omega, n = \overline{1, N}]^T$ вектор-столбец, который состоит из элементов r -й строки матрицы $\mathbf{P}_i^\Omega$. Данный вектор используется для нахождения оценки $\zeta_{ir}^* = (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \mathbf{H}$ отдельной координаты (числовой характеристики) ζ_{ir} ВЛФ Ω_i .

Для фиксированного значения $\mathbf{q}$, с учетом ранее сформулированных условий (2.5)–(2.7), задача поиска вектора оптимального оценивания $\mathbf{P}_{ir}^\Omega = \mathbf{P}_{ir}^\Omega(\mathbf{q})$ связана с нахождением минимума функции (полагая здесь и далее $i \neq j$)

$$(3.1) \quad J(\mathbf{P}_{ir}^\Omega, \boldsymbol{\varphi}_{ir}, \boldsymbol{\theta}_{ir}) = (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \mathbf{K} \mathbf{P}_{ir}^\Omega + (\boldsymbol{\varphi}_{ir})^T (\boldsymbol{\Psi}_j)^T \mathbf{P}_{ir}^\Omega + \\ + \left\{ \omega_r^T \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} - (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \boldsymbol{\Psi}_i \right\} \boldsymbol{\theta}_{ir},$$

где

$[\boldsymbol{\varphi}_{ir}]_{V_j \times 1}$ и $[\boldsymbol{\theta}_{ir}]_{V_i \times 1}$ – векторные множители Лагранжа (здесь и далее квадратными скобками с нижними индексами будут указываться размерности соответствующих матриц и векторов),

$\omega_r \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} = [\omega_r \{ \psi_{im} \}, m = \overline{1, M_i}]^T$ – вектор значений скалярного функционала $\omega_r \{ \cdot \}$ на всех базисных функциях составляющей $x_i(t)$ из (2.1).

Функция (3.1) соответствует эквивалентным (ранее сформулированным) условиям:

$$(3.2) \quad \omega_r^T \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} - (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \boldsymbol{\Psi}_i = [\mathbf{0}]_{1 \times V_i}$$

– первое условие,

$$(3.3) \quad \boldsymbol{\Psi}_j^T \mathbf{P}_{ir}^\Omega = [\mathbf{0}]_{V_j \times 1}$$

– второе условие,

$$(3.4) \quad \min_{\mathbf{P}_{ir}^\Omega} (\sigma_{ir}^\Omega)^2 = \min_{\mathbf{P}_{ir}^\Omega} (\mathbf{P}_{ir}^\Omega)^T \mathbf{K} \mathbf{P}_{ir}^\Omega$$

– третье условие (где $(\sigma_{ir}^\Omega)^2$ – дисперсия ошибки оценивания числовой характеристики ζ_{ir}).

Опуская несложные, но достаточно громоздкие выкладки, получаем решение задачи условной оптимизации (3.1)–(3.4) в виде (по аналогии с [17])

$$(3.5) \quad \mathbf{P}_{ir}^\Omega = \boldsymbol{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i (\boldsymbol{\Psi}_i^T \boldsymbol{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i)^{-1} \omega_r \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \},$$

$$(3.6) \quad \boldsymbol{\Lambda}_j = \mathbf{E} - \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_j \left[(\boldsymbol{\Psi}_j)^T \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_j \right]^{-1} (\boldsymbol{\Psi}_j)^T,$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица размером $N \times N$.

С учетом (3.5) находим искомую матрицу $\mathbf{P}_i^\Omega = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})$ для линейного оценивания ВЛФ:

$$(3.7) \quad \mathbf{P}_i^\Omega = \left[\boldsymbol{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i (\boldsymbol{\Psi}_i^T \boldsymbol{\Lambda}_j \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_i)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} \right]^T,$$

где $\boldsymbol{\Omega} \{ \boldsymbol{\psi}_i(t) \} = [\omega_r \{ \psi_{im}(t) \}, m = \overline{1, V_i}, r = \overline{1, M_i}] = [\zeta_{irm}^\Psi, m = \overline{1, V_i}, r = \overline{1, M_i}]$.

Следует помнить, что все составляющие в (3.5)–(3.7) зависят от параметра $\mathbf{q}$.

В частном случае, когда $M_i = V_i$ и $\Omega_i = \gamma_i$ (т.е. в качестве ВЛФ рассматривается вектор спектральных коэффициентов составляющей $x_i(t)$), с учетом (3.7) получаем следующую матрицу линейного оценивания:

$$(3.8) \quad \mathbf{P}_i^Y = \left[\Lambda_j \mathbf{K}^{-1} \Psi_i (\Psi_i^T \Lambda_j \mathbf{K}^{-1} \Psi_i)^{-1} \right]^T.$$

Для фиксированных значений i и $\mathbf{q}$ строим оптимальную оценку для ВЛФ

$$(3.9) \quad \Omega_i^*(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q}) \mathbf{H}.$$

Ей отвечает следующая корреляционная матрица ошибок оценивания:

$$(3.10) \quad \mathbf{K}_i^\Omega(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q}) \mathbf{K}(\mathbf{q}) [\mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})]^T.$$

В частном случае, используя матрицу $\mathbf{P}_i^Y(\mathbf{q})$, находим оптимальную оценку

$$(3.11) \quad \gamma_i^*(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^Y(\mathbf{q}) \mathbf{H}$$

и корреляционную матрицу

$$(3.12) \quad \mathbf{K}_i^Y(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^Y(\mathbf{q}) \mathbf{K}(\mathbf{q}) [\mathbf{P}_i^Y(\mathbf{q})]^T.$$

Следует отметить, что при $\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$ указанные выше оценки окажутся смещенными.

Для фиксированного $\mathbf{q}$ можно найти невязку (с учетом двух оценок $\gamma_1^*(\mathbf{q})$ и $\gamma_2^*(\mathbf{q})$)

$$(3.13) \quad \Delta(\mathbf{q}) = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{H} - \Psi \gamma^*(\mathbf{q}),$$

где $\gamma^*(\mathbf{q}) = \left[[\gamma_1^*(\mathbf{q})]^T, [\gamma_2^*(\mathbf{q})]^T \right]^T = \left[\gamma_j^*(\mathbf{q}), j = \overline{1, V_1 + V_2} \right]^T$ – оценка для вектора $\gamma(\mathbf{q}) = \left[\gamma_1^T(\mathbf{q}), \gamma_2^T(\mathbf{q}) \right]^T = \left[\gamma_j(\mathbf{q}), j = \overline{1, V_1 + V_2} \right]^T$.

Поскольку есть произвол в выборе значения $\mathbf{q}$, то для преодоления нелинейного фактора и частичной компенсации влияния НП $\mathbf{Z}$ на результаты оценивания поступим следующим образом. Сформируем семейство гипотез $\{\Gamma_{(l)}\}_{l=1}^L$, каждая из которых соответствует наиболее предпочтительному (в соответствии с гипотезой $\Gamma_{(l)}$) фиксированному узлу $\mathbf{q}_{(l)}$, входящему в область неопределенности $[\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_Q, \beta_Q]$. Следовательно, для каждого $\mathbf{q}_{(l)}$ можно найти частную оценку $\gamma_{(l)}^* = \gamma^*(\mathbf{q}_{(l)})$ и частную невязку

$$\Delta_{(l)}^* = \Delta(\gamma_{(l)}^*) = \mathbf{H} - \mathbf{H}_{(l)}^* = \mathbf{H} - \Psi \gamma_{(l)}^*.$$

С учетом (2.3) и (3.11) преобразуем эту невязку к виду

$$\begin{aligned}
 \Delta_{(l)}^* &= \mathbf{H} - \left(\Psi_1 \gamma_{1(l)}^* + \Psi_2 \gamma_{2(l)}^* \right) = \\
 (3.14) \quad &= \mathbf{Z} + \Xi - \left(\Psi_1 \mathbf{P}_{1(l)} + \Psi_2 \mathbf{P}_{2(l)} \right) (\mathbf{Z} + \Xi) = \\
 &= [\mathbf{E} - (\Psi_1 \mathbf{P}_{1(l)} + \Psi_2 \mathbf{P}_{2(l)})] (\mathbf{Z} + \Xi) = \vartheta_{(l)} (\mathbf{Z} + \Xi),
 \end{aligned}$$

где $[\vartheta_{(l)}]_{N \times N}$ – матрица коэффициентов влияния составляющей $\mathbf{Z} + \Xi$.

Математическое ожидание невязки:

$$(3.15) \quad M \left\{ \Delta_{(l)}^* \right\} = \vartheta_{(l)} \mathbf{Z}.$$

Следует отметить, что при построении матриц линейного оценивания $\mathbf{P}_{ir}^\Omega(\mathbf{q}_{(l)})$ (для всех узлов многомерной сетки) используется только априорная статистическая информация и принятые математические модели. Набор таких матриц позволяет сформировать семейства частных оценок $\Omega_{1(l)}^* = \mathbf{P}_{1(l)}^\Omega \mathbf{H}$, $\Omega_{2(l)}^* = \mathbf{P}_{2(l)}^\Omega \mathbf{H}$, $\Omega_{(l)}^* = \left[\left(\Omega_{1(l)}^* \right)^T, \left(\Omega_{2(l)}^* \right)^T \right]^T$ и $\gamma_{1(l)}^* = \mathbf{P}_{1(l)}^\gamma \mathbf{H}$, $\gamma_{2(l)}^* = \mathbf{P}_{2(l)}^\gamma \mathbf{H}$, $\gamma_{(l)}^* = \left[\left(\gamma_{1(l)}^* \right)^T, \left(\gamma_{2(l)}^* \right)^T \right]^T$, где $l = \overline{1, L}$.

В свою очередь, результирующие оценки γ^* и Ω^* , формируемые на базе частных оценок, находятся в рамках ГРМ с использованием некоторого оператора $\mathcal{J}_{\text{opt}}$ с учетом всей имеющейся априорной и апостериорной информации:

$$(3.16) \quad \mathcal{J}_{\text{opt}} : \left(\left\{ \gamma_{(l)}^* \right\}_{l=1}^L, \left\{ \Omega_{(l)}^* \right\}_{l=1}^L \right) \rightarrow (\gamma^*, \Omega^*).$$

Например, в качестве $\mathcal{J}_{\text{opt}}$ может быть принят оператор, обеспечивающий минимум квадратичной формы $F_{(l)} = \left(\Delta_{(l)}^* \right)^T \mathbf{W}_{(l)} \Delta_{(l)}^*$ (алгоритм поиска экстремума):

$$(3.17) \quad \gamma^* = \gamma_{(l^*)}^*, \quad \Omega^* = \Omega_{(l^*)}^*, \quad l^* = \arg \min_l F_{(l)},$$

где l^* – оптимальный номер узла $\mathbf{q}_{(l^*)}$, $l^* \in \{1, \dots, L\}$.

В (3.17) под $\mathbf{W}_{(l)}$ понимается весовая нормированная матрица

$$\mathbf{W}_{(l)} = \mathbf{W}(\mathbf{q}_{(l)}) = \left\| \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}_{(l)}) \right\|^{-1} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}_{(l)}), \quad \|\mathbf{W}_{(l)}\| = 1 \quad \forall l = \overline{1, L},$$

где $\|\cdot\|$ – любая из норм, используемых при обработке измерений.

Алгоритм (3.17), несмотря на оптимальность, имеет основной недостаток: для его реализации необходимо иметь оценки всех координат расширенного вектора γ^* , необходимых для формирования невязки $\Delta_{(l)}^* = \mathbf{H} - \Psi \gamma_{(l)}^*$. Кроме того, квадратичная форма, рассматриваемая как функция аргумента l ,

должна иметь один глобальный минимум. Если имеется несколько конкурирующих узлов $\mathbf{q}_{(l_1)}, \dots, \mathbf{q}_{(l_d)}$ (где $l_1, \dots, l_d \in \{1, \dots, L\}$, $d \leq L$) с приблизительно одинаковыми локальными минимумами, то для отбора таких узлов необходимо ввести параметр (выраженный в процентах)

$$\delta_{F(l)} = 100(F_{(l)} - F_{\min})(F_{\max} - F_{\min})^{-1},$$

где $F_{\min} = \min_l F_{(l)}$, $F_{\max} = \max_l F_{(l)}$.

Если задать числовой порог δ_{F0} (также выраженный в процентах), то критерий формирования конкурирующих узлов соответствует выполнению условия $\delta_{F(l)} \leq \delta_{F0}$. Для таких узлов в качестве $\mathcal{J}_{\text{opt}}$ целесообразно применять оператор $\bar{\mathcal{J}}_{\text{opt}}$, обеспечивающий усреднение конкурирующих частных оценок (*алгоритм усреднения*):

$$(3.18) \quad \bar{\boldsymbol{\gamma}}^* = d^{-1} \sum_{k=1}^d \boldsymbol{\gamma}_{(l_k)}^*, \quad \bar{\boldsymbol{\Omega}}^* = d^{-1} \sum_{k=1}^d \boldsymbol{\Omega}_{(l_k)}^*.$$

Для устранения основного недостатка оптимального алгоритма (3.17) целесообразно использовать квазиоптимальный оператор $\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\text{opt}}$ робастного мажоритарного оценивания [33], например, на основе метода выборочной медианы (с использованием вариационного ряда для четного или нечетного случая (*мажоритарный алгоритм*)).

Так применительно к вектору $\boldsymbol{\gamma}$ все одноименные координаты $\gamma_{j(l)}^*, \dots, \gamma_{j(L)}^*$ векторов $\left\{ \boldsymbol{\gamma}_{(l)}^* = [\gamma_{j(l)}^*, j = \overline{1, V_1 + V_2}]^T \right\}_{l=1}^L$ для каждого фиксированного $j \in \{1, \dots, V_1 + V_2\}$ выстраиваются в вариационные ряды: $\gamma_{j[1]}^*, \gamma_{j[2]}^*, \dots, \gamma_{j[L]}^*$, где $\gamma_{j[1]}^* < \gamma_{j[2]}^* < \dots < \gamma_{j[L]}^*$. Аналогично строятся ряды $\zeta_{j[1]}^*, \zeta_{j[2]}^*, \dots, \zeta_{j[L]}^*$ для векторов $\boldsymbol{\Omega}_{(l)}^* = \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_{1(l)}^* \right)^T, \left(\boldsymbol{\Omega}_{2(l)}^* \right)^T \right]^T = \left[\zeta_{j(l)}^*, j = \overline{1, M_1 + M_2} \right]^T$.

Оптимальная результирующая оценка каждой координаты γ_j вектора $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_1^T, \boldsymbol{\gamma}_2^T]^T = [\gamma_j, j = \overline{1, V_1 + V_2}]^T$ и каждой координаты ζ_j вектора $\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\Omega}_1^T, \boldsymbol{\Omega}_2^T]^T = [\zeta_j, j = \overline{1, M_1 + M_2}]^T$ находится по правилу

$$(3.19) \quad \bar{\bar{\gamma}}_j^* = 2^{-1}(\gamma_{j[L/2]}^* + \gamma_{j[L/2+1]}^*), \quad \bar{\bar{\zeta}}_j^* = 2^{-1}(\zeta_{j[L/2]}^* + \zeta_{j[L/2+1]}^*)$$

– для четного L (т.е. оценка соответствует среднему от двух центральных членов вариационного ряда),

$$(3.20) \quad \bar{\bar{\gamma}}_j^* = \gamma_{j[(L-1)/2-1]}^*, \quad \bar{\bar{\zeta}}_j^* = \zeta_{j[(L-1)/2-1]}^*$$

– для нечетного L (т.е. оценка совпадает с центральным членом вариационного ряда).

Мажоритарный алгоритм для случаев (3.19) и (3.20) основан на отбрасывании «хвостов» данного ряда и обладает высокой степенью устойчивости к факторам неопределенности. Для его реализации нет необходимости оценивания всех координат вектора $\boldsymbol{\gamma}$, построения невязок $\boldsymbol{\Delta}_{(l)}^*$ и минимизации квадратичной формы $F_{(l)} = \left(\boldsymbol{\Delta}_{(l)}^*\right)^T \mathbf{W}_{(l)} \boldsymbol{\Delta}_{(l)}^*$ по аргументу l .

Оптимальная результирующая оценка ВЛФ $\boldsymbol{\Omega}_i$ применительно к составляющей $x_i(t)$ находится как

$$(3.21) \quad \boldsymbol{\Omega}_{i(l^*)}^* = \mathbf{P}_{i(l^*)}^\Omega \mathbf{H}.$$

Данной оценке соответствует следующая корреляционная матрица ошибок оценивания:

$$(3.22) \quad \mathbf{K}_{i(l^*)}^\Omega = \mathbf{P}_{i(l^*)}^\Omega \mathbf{K}_{(l^*)} \left(\mathbf{P}_{i(l^*)}^\Omega\right)^T.$$

Можно показать, что построение оценки (3.21) для ВЛФ $\boldsymbol{\Omega}_i$, в первую очередь, связано с нахождением оптимальной результирующей оценки (для вектора $\boldsymbol{\gamma}$)

$$(3.23) \quad \boldsymbol{\gamma}_{i(l^*)}^* = \mathbf{P}_{i(l^*)}^\gamma \mathbf{H}$$

с корреляционной матрицей ошибок оценивания

$$(3.24) \quad \mathbf{K}_{i(l^*)}^\gamma = \mathbf{P}_{i(l^*)}^\gamma \mathbf{K}_{(l^*)} \left(\mathbf{P}_{i(l^*)}^\gamma\right)^T.$$

Это вытекает из того, что

$$(3.25) \quad \boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\Omega}\{x_i(t)\} = \boldsymbol{\Omega}\{\boldsymbol{\psi}_i^T(t)\boldsymbol{\gamma}_i\} = \boldsymbol{\Omega}\{\boldsymbol{\psi}_i^T(t)\}\boldsymbol{\gamma}_i.$$

С учетом (3.21) имеем

$$(3.26) \quad \boldsymbol{\Omega}_{i(l^*)}^* = \boldsymbol{\Omega}\{\boldsymbol{\psi}_i^T(t)\}\boldsymbol{\gamma}_{i(l^*)}^* = \boldsymbol{\Omega}\{\boldsymbol{\psi}_i^T(t)\}\mathbf{P}_{i(l^*)}^\gamma \mathbf{H}.$$

Таким образом, для сравнительного анализа различных методов оценивания ВЛФ достаточно ограничиться случаем, когда $M_i = V_i$ и $\boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\gamma}_i$, т.е. рассматривать задачу оценивания спектральных коэффициентов составляющей $x_i(t)$.

Следует отметить, что сформированные результирующие оценки при $\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$ также окажутся смещенными, но с учетом (3.16)–(3.20) появляется возможность минимизации этого смещения для каждой фиксированной выборки $\mathbf{H}$.

Соотношения (3.1)–(3.26) составляют основу ГРМ.

В следующем разделе обсуждаются условия применимости ГРМ и его сравнительный анализ с МНК и РМНК.

4. Математические аспекты исследования эффективности предлагаемого метода

Рассмотрим вопрос, связанный с возможным смещением оценки ВЛФ относительно истинного значения, обусловленным влиянием НП $\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$ и неопределенностью относительно параметра $\mathbf{q}$. Примем $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$, где $\Delta\mathbf{q}$ будем рассматривать в качестве «возмущения». Определим его влияние на результат оценивания. Теперь, вместо $\mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})$, оперируем с матрицей

$$\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}}),$$

где $\Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}})$ – матрица «возмущений», при этом выполняется условие $\Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$.

Найдем невязку, обусловленную наличием $\Delta\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Delta\Omega_i(\tilde{\mathbf{q}}) &= \Omega_i^*(\tilde{\mathbf{q}}) - \Omega_i^*(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})\mathbf{H} + \Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}})\mathbf{H} - \mathbf{P}_i^\Omega(\mathbf{q})\mathbf{H} = \\ &= \Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}}) (\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_j + \mathbf{Z} + \Xi). \end{aligned}$$

Математическое ожидание данной ошибки

$$(4.2) \quad M \{ \Delta\Omega_i(\tilde{\mathbf{q}}) \} = \Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}}) (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}).$$

Применяя любую из норм $\|\cdot\|$, можно воспользоваться неравенством

$$(4.3) \quad \Delta_i^\Omega \leq \Delta_i^P \eta_i,$$

где $\Delta_i^\Omega = \max_{\tilde{\mathbf{q}}} \|M \{ \Delta\Omega_i(\tilde{\mathbf{q}}) \}\|$, $\Delta_i^P = \max_{\tilde{\mathbf{q}}} \|\Delta\mathbf{P}_i^\Omega(\tilde{\mathbf{q}})\|$,

$$\eta_i = \max_{\gamma_1, \gamma_2, \mathbf{Z}} \|\Psi_1\gamma_1 + \Psi_2\gamma_2 + \mathbf{Z}\|.$$

При расчете Δ_i^Ω и Δ_i^P максимум находится для всей области неопределенности $[\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_Q, \beta_Q]$, а для вычисления η_i – с учетом области возможных значений векторов γ_1 , γ_2 и $\mathbf{Z}$.

Рассмотрим три оценки: $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ – раздельная оценка для γ_1 на основе МНК (без учета РП и НП), $\gamma_{(\text{РМНК})}^*$ – единая оценка для $\gamma = [\gamma_1^T, \gamma_2^T]^T$ на базе РМНК (без учета НП), $\gamma_{(\text{ГРМ})i}^*$ – раздельная оценка для γ_i на основе разработанного ГРМ (с целью сокращения записей параметр $\mathbf{q}$ ниже опускается). Опираясь на [3], дадим комплексную оценку этих методов с точки зрения их корректности в постановке измерительного эксперимента в условиях отсутствия и присутствия РП и НП.

Применительно к МНК, не использующего процедуру расширения, определим влияние объединенной помехи $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z} = \Psi_2\gamma_2 + \mathbf{Z}$ на оценку $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ вектора γ_1 спектральных коэффициентов ИП. Применяя оператор нахождения математического ожидания $M\{\cdot\}$, несложно показать, что

$$(4.4) \quad M \{ \gamma_{(\text{МНК})1}^* \} = \gamma_1 + \mathbf{C}_1^{-1} \Psi_1^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Y}_2 = \gamma_1 + \mathbf{C}_1^{-1} \Psi_1^T \mathbf{K}^{-1} (\Psi_2\gamma_2 + \mathbf{Z}),$$

где $\mathbf{C}_1 = \Psi_1^T \mathbf{K}^{-1} \Psi_1$.

Второе слагаемое в (4.4) соответствует смещению оценки $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ относительно истинного значения γ_1 , если не учитывать вклад объединенной помехи $\mathbf{Y}_2$. Разброс $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ относительно γ_1 (без учета $\mathbf{Y}_2$) находится как

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{(\text{МНК})1}^\gamma &= M \left\{ \left(\gamma_{(\text{МНК})1}^* - \gamma_1 \right) \left(\gamma_{(\text{МНК})1}^* - \gamma_1 \right)^T \right\} = \\ &= \mathbf{C}_1^{-1} + \mathbf{B}_1 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_2^T \mathbf{B}_1^T = \\ &= \mathbf{C}_1^{-1} + \mathbf{B}_1 (\Psi_2 \gamma_2 + \mathbf{Z}) (\Psi_2 \gamma_2 + \mathbf{Z})^T \mathbf{B}_1^T, \end{aligned}$$

где $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1^{-1} \Psi_1^T \mathbf{K}^{-1}$.

В свою очередь, разброс оценки $\gamma_{(\text{МНК})1}^*$ относительно математического ожидания (4.4) (для МНК без учета $\mathbf{Y}_2$) вычисляется так:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}_{(\text{МНК})1}^\gamma &= \\ &= M \left\{ \left(\gamma_{(\text{МНК})1}^* - M \left\{ \gamma_{(\text{МНК})1}^* \right\} \right) \left(\gamma_{(\text{МНК})1}^* - M \left\{ \gamma_{(\text{МНК})1}^* \right\} \right)^T \right\} = \mathbf{C}_1^{-1}. \end{aligned}$$

В (4.6) под $\mathbf{K}_{(\text{МНК})1}^\gamma$ понимается корреляционная матрица ошибок оценивания спектральных коэффициентов ИП.

Прибегнем теперь к РМНК, который позволяет сформировать единую оценку $\gamma_{(\text{РМНК})}^*$ для вектора $\gamma = [\gamma_1^T, \gamma_2^T]^T$ спектральных коэффициентов ИП и РП (без учета НП $\mathbf{Z}$):

$$(4.7) \quad \gamma_{(\text{РМНК})}^* = \mathbf{C}^{-1} \Psi^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H},$$

где $\mathbf{C} = \Psi^T \mathbf{K}^{-1} \Psi$.

Математическое ожидание такой оценки (по аналогии с (4.4))

$$(4.8) \quad M \left\{ \gamma_{(\text{РМНК})}^* \right\} = \gamma + \mathbf{C}^{-1} \Psi^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Z},$$

где второе слагаемое характеризует ее смещение, обусловленное наличием НП.

Корреляционная матрица ошибок оценивания РМНК в этом случае имеет вид

$$(4.9) \quad \mathbf{K}_{(\text{РМНК})}^\gamma = \mathbf{C}^{-1} = (\Psi^T \mathbf{K}^{-1} \Psi)^{-1},$$

а матрица разброса оценки $\gamma_{(\text{РМНК})}^*$ относительно истинного значения γ по аналогии с (4.5) находится как

$$(4.10) \quad \tilde{\mathbf{K}}_{(\text{РМНК})}^\gamma = \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \mathbf{B}^T,$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \Psi^T \mathbf{K}^{-1}$.

Поскольку РМНК и ГРМ относятся к классу линейных оптимальных оценок, то они наследуют одни и те же потенциальные возможности (в плане точности). Поскольку матрица $\tilde{\mathbf{K}}_{(\text{РМНК})}^Y$ содержит четыре блока, т.е.

$$(4.11) \quad \tilde{\mathbf{K}}_{(\text{РМНК})}^Y = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix},$$

то выполняются условия $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{K}_1^Y = \mathbf{P}_1^Y \mathbf{K} [\mathbf{P}_1^Y]^T$ и $\mathbf{S}_{22} = \mathbf{K}_2^Y = \mathbf{P}_2^Y \mathbf{K} [\mathbf{P}_2^Y]^T$.

Допустим теперь, что объединенная помеха $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}$ (это сумма РП и НП) допускает конечно-аналитическое представление $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}$, где $\mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}}$ – заданная базисная матрица РП и НП, $\mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}$ – вектор неизвестных спектральных коэффициентов. Когда одновременно оцениваются векторы $\mathbf{\gamma}_1$ и $\mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}$ в рамках РМНК, то можно найти корреляционную матрицу ошибок совместного оценивания:

$$(4.12) \quad \mathbf{K}_{(\text{РМНК})1}^Y = \mathbf{C}_1^{-1} + \mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{D}_1 (\mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}})^T,$$

где

$$\mathbf{D}_1 = (\mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} - \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{\Psi}_1 \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{\Psi}_1^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}})^{-1}.$$

Для практики интересен вопрос, связанный с необходимостью расширения вектора оцениваемых параметров с учетом объединенной помехи $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}$. Пусть сформированы следы $\tilde{\chi} = Sp[\mathbf{B}_1 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_2^T \mathbf{B}_1^T]$ и $\chi = Sp[\mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{D}_1 (\mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}})^T]$ вторых матричных слагаемых из выражений (4.10) и (4.12) соответственно. Учитывая, что в $\tilde{\chi}$ фигурирует неизвестный векторный параметр $\mathbf{Y}_2$, можно заменить след $\tilde{\chi}$ его оценкой $\tilde{\chi}^* = Sp[\mathbf{B}_1 \mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}^* (\mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}} \mathbf{\gamma}_{\text{РП+НП}}^*)^T \mathbf{B}_1^T]$. Далее проверяем выполнение условия

$$(4.13) \quad \tilde{\chi}^* > \chi.$$

В случае невыполнения данного условия можно считать, что влияние объединенной помехи $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}$ на оценку $\mathbf{\gamma}_1^*$ вектора $\mathbf{\gamma}_1$ достаточно мало и процедура расширения вектора оцениваемых параметров не нужна. В противном случае необходимо применять РМНК, а для ГРМ потребуется обеспечить выполнение условия инвариантности к $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}$ с учетом объединенной базисной матрицы $\mathbf{\Psi}_{\text{РП+НП}}$.

Соотношения (4.1)–(4.13) могут быть использованы на практике для сравнительного анализа трех методов и ответа на многие интересующие вопросы, связанные с постановкой измерительного эксперимента.

Анализ соотношений (3.5) и (3.6) показывает, что в ГРМ необходимо обращение матриц размером $V_1 \times V_1$ и $V_2 \times V_2$ соответственно, а в РМНК обращается матрица размером $(V_1 + V_2) \times (V_1 + V_2)$. Следовательно, с точки

зрения вычислительной устойчивости оценивание на базе ГРМ более предпочтительно, поскольку обращаются матрицы меньшего размера. Достигается также декомпозиция вычислительного процесса, поскольку оценивание ВЛФ осуществляется для каждой составляющей $x_i(t)$ независимо (раздельно) в своем канале обработки измерений.

Используя (4.1)–(4.13), можно подобрать необходимые параметры ГРМ, обеспечивающие минимизацию результирующей ошибки оценивания ВЛФ в каждом конкретном случае. Необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи оценивания в рамках ГРМ требуют невырожденности и соблюдения некоторых ограничений на ранги ряда матриц (по аналогии с [15–17]). Выполнение заданных условий на практике обеспечивается рациональным выбором используемых функциональных базисов, числа степеней свободы в принятых моделях, а также заданием соответствующих условий наблюдения. Все эти вопросы относятся к планированию вычислительного эксперимента и далее не рассматриваются, поскольку требуют отдельных исследований в каждом конкретном случае.

5. Алгоритм распознавания при наличии регулярной и нерегулярной погрешностей

Шаг 1. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ строим базисные матрицы $\Psi_{i(l)} = \Psi_i(\mathbf{q}_{(l)})$ и $\Psi_{j(l)} = \Psi_j(\mathbf{q}_{(l)})$, где $i \neq j$.

Шаг 2. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ с учетом (3.6) находим матрицу $\Lambda_{j(l)} = \Lambda_j(\mathbf{q}_{(l)})$.

Шаг 3. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ с учетом (3.8) находим матрицу весового оценивания $\mathbf{P}_{i(l)}^\gamma = \mathbf{P}_i^\gamma(\mathbf{q}_{(l)})$.

Шаг 4. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ с учетом (3.11) находим оптимальную оценку $\gamma_{i(l)}^* = \gamma_i^*(\mathbf{q}_{(l)})$.

Шаг 5. Для каждого узла $\mathbf{q}_{(l)}$ с учетом (3.13) формируем невязку $\Delta_{(l)} = \Delta(\mathbf{q}_{(l)})$.

Шаг 6. Для случая, когда функция $\Delta_{(l)}$ аргумента l имеет точку минимума согласно алгоритму поиска экстремума (3.17) находим оптимальный номер l^* узла $\mathbf{q}_{(l^*)}$, в котором достигается этот минимум, и результирующую оценку $\gamma^* = \gamma_{(l^*)}^*$.

Шаг 7. Этот шаг применяется в случае, когда нет явно выраженной точки минимума. Тогда результирующая оценка γ^* находится любым другим способом, например согласно алгоритму усреднения (3.18) либо мажоритарному алгоритму (3.19), (3.20).

Шаг 8. С учетом (3.21) вычисляем оптимальную результирующую оценку $\Omega_{i(l^*)}^*$ для ВЛФ Ω_i применительно к составляющей $x_i(t)$.

Шаг 9. С учетом (3.22) и (3.24) находим корреляционные матрицы $\mathbf{K}_{i(l^*)}^\Omega = \mathbf{K}_i^\Omega(\mathbf{q}_{(l^*)})$ и $\mathbf{K}_{i(l^*)}^\gamma = \mathbf{K}_i^\gamma(\mathbf{q}_{(l^*)})$.

6. Некоторые обобщения и практические рекомендации

Предлагаемый ГРМ можно трактовать и для более широких условий, если в качестве $\mathcal{I}_{\text{opt}}$ использовать оператор, обеспечивающий максимум соответствующей условной плотности вероятности (например, апостериорной или функции правдоподобия), зависящей от корреляционной матрицы $\mathbf{K}(\mathbf{q})$, заданной в параметрическом виде. Так, для гауссова шума измерений в качестве $\mathcal{I}_{\text{opt}}$ может быть принят оператор, обеспечивающий максимум функции правдоподобия

$$p\left(\mathbf{H}/\gamma_{(l)}^*\right) = (2\pi)^{-N/2} (\det \mathbf{K}(\mathbf{q}_{(l)}))^{-1/2} \exp \left\{ \left(\Delta_{(l)}^* \right)^T (\mathbf{q}_{(l)}) \Delta_{(l)}^* \right\}$$

по параметру l .

При этом в отличие от алгоритма (3.17) отпадает необходимость построения весовой нормированной матрицы $\mathbf{W}_{(l)}$, так как требуемая нормировка осуществляется естественным путем (с учетом свойств любой плотности вероятности).

Рассмотренный ГРМ к оцениванию ВЛФ можно распространить и на модели наблюдений более общего вида. Например, можно рассматривать в (2.1) базисные функции $\psi_{jm}(t, \mu_{jm})$, которые нелинейно зависят от векторного параметра μ_{jm} . В этом случае необходимо задавать общую область неопределенности для всех нелинейных параметров задачи оценивания и выбирать соответствующую мощность L числовой сетки покрытия этой области, достаточную для обеспечения заданной точности (см., например, [16]). При этом выбор размерностей всех моделей ИП и РП должен быть согласован с объемом N выборки (2.3).

Очевидно, что такой подход к оцениванию ВЛФ должен отвечать ресурсу используемой вычислительной среды, который напрямую зависит от количества рассматриваемых альтернативных гипотез. Чтобы уменьшить требования к этому ресурсу, целесообразно минимизировать количество нелинейных параметров (что эквивалентно уменьшению числа гипотез), а также повышать размерность вектора линейных параметров. Но и в этом случае надо добиваться разумного компромисса, чтобы исключить возможные парадоксы, связанные с оцениванием ВЛФ на практике. Ответы на подобные вопросы находятся в компетенции общей теории планирования измерительного эксперимента (см., например, [3]).

Возможно комплексирование ГРМ и метода оценивания [17], ориентированного на формирование семейства редуцированных сеток, соответствующих всем возможным вариантам появления НП в узлах исходной сетки $\{t_1, \dots, t_N\}$. При достаточно большом объеме данной сетки такое комплексирование может существенно снизить влияние РП и НП на результаты оценивания. Для ГРМ это приведет к дальнейшему увеличению объема семейства рассматриваемых альтернативных гипотез, при этом формируемая результирующая оценка будет соответствовать оптимальной редуцированной сетке,

для которой соответствующая невязка будет минимальна. В [17] приводятся критерий и алгоритм нахождения такой сетки, кроме того, рассмотрены различные варианты формирования семейства редуцированных сеток, согласованные с имеющимися вычислительными ресурсами.

Нормированную весовую матрицу можно задавать в виде $\mathbf{W}(q)$, где скалярный аргумент $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ отвечает различным вариантам наблюдения. Среди них можно предусмотреть такие варианты, которые учитывают не только свойства шума измерений, но и НП. Например, соответствующим подбором диагональных элементов матрицы $\mathbf{W}(q)$ зачастую удается добиться частичной компенсации НП (за счет ее режекции во временной области) и сглаживания шума.

Современный прогресс в области построения ЭВМ параллельного действия (особенно на новых принципах [34, 35]) позволяет надеяться, что предложенный ГРМ не станет препятствием для перспективных систем реального времени. Однако далеко не для всех существующих систем возможен такой подход, который на выборках большого объема и значительном числе альтернативных гипотез может потребовать огромного числа каналов параллельной обработки данных и существенных вычислительных затрат. В [15–17] приводятся расчетные соотношения, которые могут быть полезны при обосновании вычислительных затрат на реализацию ГРМ.

7. Тестовые примеры

Ограничимся простыми, но имеющими прикладное значение примерами, характерными, например, для высотомеров некоторых типов воздушных объектов и связанными со сглаживанием траекторных измерений малого объема [3]. В модели (2.2) в качестве $x_1(t) = \gamma_1 = \text{const}$, например, можно рассматривать высоту барражирующего объекта (параметр γ_1 есть скалярный линейный функционал), а в качестве $x_2(t) = \gamma_2 t^2$ (где $\gamma_2 = \text{const}$) – медленно меняющуюся степенную РП. Эта помеха зачастую обусловлена несовершенством системы управления объекта или связана с воздействием помех различного происхождения на боковые лепестки диаграммы направленности антенны высотомера.

Для каждой фиксированной выборки измерений далее рассматривается относительный энергетический коэффициент

$$\varepsilon_E = \varepsilon_E(\mathbf{H}) = E_1 (E_2 + E_{\mathbf{Z}} + E_{\mathbf{\Xi}})^{-1} = \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} + \mathbf{\Xi}^T \mathbf{\Xi})^{-1},$$

который будет учитываться при сравнительной оценке развиваемого метода.

Пример 1. Данный пример предназначен только для более подробной демонстрации алгоритмических особенностей ГРМ и оценки его потенциальных возможностей. Неопределенность в отношении нестационарного некоррелированного шума измерений будем характеризовать матрицей $\mathbf{K} = \mathbf{K}(q) = \text{diag}[2 \exp\{-q(n-1)\}, n = \overline{1, N}]$, где $q > 0$, $\alpha \leq q \leq \beta$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Рассматривается задача спектрального анализа, связанная с нахождением оценки γ_1^* коэффициента γ_1 (для ИП) и оценки γ_2^* коэффициента γ_2 (для РП). Для упрощения (соответствующим масштабированием) все параметры задачи приведены к безразмерным величинам.

Для наглядной демонстрации ГРМ и его сравнительного анализа ограничимся малой выборкой ($N = 5$), при этом $[0, T] = [0, 5]$, $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = \overline{1, 5}$, $\Delta t = 1$.

Полагаем, что в (2.3): $V_1 = 1$, $\boldsymbol{\gamma}_1 = [\gamma_{11}]$, $\boldsymbol{\psi}_1(t) = [\psi_{11}(t)]$, $\psi_{11}(t) \equiv 1$, $\gamma_{11} = \gamma_1$, $V_2 = 1$, $\boldsymbol{\gamma}_2 = [\gamma_{21}]$, $\boldsymbol{\psi}_2(t) = [\psi_{21}(t)]$, $\psi_{21}(t) = t^2$, $\gamma_{21} = \gamma_2$, $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{11}, \gamma_{21}]^T = [\gamma_1, \gamma_2]^T$, $M_1 = 1$, $\boldsymbol{\Omega}\{x_1(t)\} = [\omega_1\{x_1(t)\}] = [\varsigma_{11}] = [\gamma_1]$, $M_2 = 1$, $\boldsymbol{\Omega}\{x_2(t)\} = [\omega_1\{x_2(t)\}] = [\varsigma_{21}] = [\gamma_2]$, $Q = 1$, $\mathbf{q} = [q_1]^T$, $q_1 = q$, $q > 0$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$.

Зададимся истинными значениями параметров для уравнения наблюдения (2.3): $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 10^{-1}$, $\alpha = 0$, $\beta = 9 \times 10^{-1}$, $L = 6$, $q_{(1)} = 0$, $q_{(2)} = 10^{-1}$, $q_{(3)} = 3 \times 10^{-1}$, $q_{(4)} = 5 \times 10^{-1}$, $q_{(5)} = 7 \times 10^{-1}$, $q_{(6)} = 9 \times 10^{-1}$. То есть рассматривается одномерная область неопределенности $[0, 5]$ для параметра q , в которой расположены равномерно шесть узлов. В рассматриваемом примере $\boldsymbol{\Psi}_1^T = [1, 1, 1, 1, 1]$ и $\boldsymbol{\Psi}_2^T = [1, 4, 9, 16, 25]$.

Сначала согласно (3.8) находим векторы $\mathbf{P}_{1(l)}^Y$ коэффициентов, необходимые для построения линейной оценки $\gamma_{1(l)}^*$ коэффициента γ_1 , инвариантной к РП:

$$\mathbf{P}_{1(1)}^Y = [0,4941; 0,4059; 0,2588; 0,0529; -0,2118]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(2)}^Y = [0,4495; 0,4118; 0,2985; 0,0876; -0,2474]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(3)}^Y = [0,3620; 0,4107; 0,3790; 0,1802; -0,3320]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(4)}^Y = [0,2803; 0,3923; 0,4547; 0,3066; -0,4339]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(5)}^Y = [0,2082; 0,3584; 0,5175; 0,4666; -0,5510]^T,$$

$$\mathbf{P}_{1(6)}^Y = [0,1482; 0,3133; 0,5605; 0,6550; -0,6771]^T.$$

Убеждаемся в выполнении условий несмещенности $\mathbf{P}_{1(l)}^Y \mathbf{X}_1 = \gamma_1$ (где $\mathbf{X}_1 = [10; 10; 10; 10; 10]^T$) и инвариантности $\mathbf{P}_{1(l)}^Y \mathbf{X}_2 = 0$ (где $\mathbf{X}_2 = [0,1; 0,4; 0,9; 1,6; 2,5]^T$) для всех $l = \overline{1, 6}$. При нахождении векторов строились матрицы $\boldsymbol{\Lambda}_{2(l)}$ для $\boldsymbol{\Lambda}_2$ из формулы (3.6). Например, для $l = 1$ имеем

$$\boldsymbol{\Lambda}_{2(1)} = \begin{bmatrix} 0,9990 & -0,0041 & -0,0092 & -0,0163 & -0,0255 \\ -0,0041 & 0,9837 & -0,0368 & -0,0654 & -0,1021 \\ -0,0092 & -0,0368 & 0,9173 & -0,1471 & -0,2298 \\ -0,0163 & -0,0654 & -0,1471 & 0,7385 & -0,4086 \\ -0,0255 & -0,1021 & -0,2298 & -0,4086 & 0,3616 \end{bmatrix}.$$

Далее, с учетом (3.12) находим дисперсии ошибок оценивания коэффициента γ_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_{1(1)}^2 &= 1,0471, & \sigma_{1(2)}^2 &= 0,9503, & \sigma_{1(3)}^2 &= 0,7625, \\ \sigma_{1(4)}^2 &= 0,5888, & \sigma_{1(5)}^2 &= 0,4364, & \sigma_{1(6)}^2 &= 0,3103.\end{aligned}$$

Видим, что для рассматриваемой области неопределенности (по параметру q) разброс дисперсий ошибок оценивания меняется в 3,37 раза. Это показывает, что точность оценивания γ_1 для ГРМ существенно зависит от выбранной гипотезы семейства $\{\Gamma_{(l)}\}_{l=1}^6$.

Если вместо векторов $\mathbf{P}_{1(l)}^\gamma$ использовать векторы $\bar{\mathbf{P}}_{1(l)}^\gamma$, не учитывающие РП $\mathbf{X}_2$ (что характерно для простого МНК), то получаем следующие смещения оценки γ_1^* :

$$\begin{aligned}\left(\bar{\mathbf{P}}_{1(1)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,1000, & \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(2)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,2207, & \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(3)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,4591, \\ \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(4)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,6733, & \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(5)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 1,8540, & \left(\bar{\mathbf{P}}_{1(6)}^\gamma\right)^T \mathbf{X}_2 &= 2,8015.\end{aligned}$$

Таким образом, игнорируя РП, можно получить ошибку до 28% при оценке коэффициента γ_1 на базе МНК.

Поскольку для реализации оптимального алгоритма (3.17) необходимо иметь также оценки $\gamma_{2(l)}^*$ для γ_2 , то были найдены соответствующие векторы весовых коэффициентов:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{2(1)}^\gamma &= [-0,0267; -0,0187; -0,0053; 0,0134; 0,0374]^T, \\ \mathbf{P}_{2(2)}^\gamma &= [-0,0235; -0,0191; -0,0082; 0,0107; 0,0401]^T, \\ \mathbf{P}_{2(3)}^\gamma &= [-0,0179; -0,0189; -0,0134; 0,0046; 0,0456]^T, \\ \mathbf{P}_{2(4)}^\gamma &= [-0,0133; -0,0177; -0,0177; -0,0028; 0,0515]^T, \\ \mathbf{P}_{2(5)}^\gamma &= [-0,0095; -0,0159; -0,0210; -0,0113; 0,0577]^T, \\ \mathbf{P}_{2(6)}^\gamma &= [-0,0066; -0,0137; -0,0231; -0,0206; 0,0639]^T.\end{aligned}$$

При нахождении данных векторов строились матрицы $\mathbf{\Lambda}_{1(l)}$ для $\mathbf{\Lambda}_1$ из формулы (3.6). Например, для $l = 3$ имеем следующую матрицу:

$$\mathbf{\Lambda}_{1(3)} = \begin{bmatrix} 0,8995 & -0,1005 & -0,1005 & -0,1005 & -0,1005 \\ -0,1356 & 0,8644 & -0,1356 & -0,1356 & -0,1356 \\ -0,1831 & -0,1831 & 0,8169 & -0,1831 & -0,1831 \\ -0,2472 & -0,2472 & -0,2472 & 0,7528 & -0,2472 \\ -0,3336 & -0,3336 & -0,3336 & -0,3336 & -0,6664 \end{bmatrix}.$$

Далее, с учетом (3.12) находим дисперсии ошибок оценивания параметра $\gamma_2 \times 10^{-3}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{2(1)}^2 &= 5,3476, & \sigma_{2(2)}^2 &= 4,2002, & \sigma_{2(3)}^2 &= 2,6396, \\ \sigma_{2(4)}^2 &= 1,6881, & \sigma_{2(5)}^2 &= 1,0861, & \sigma_{2(6)}^2 &= 0,6955.\end{aligned}$$

В данном случае разброс дисперсий ошибок оценивания меняется в 7,69 раза.

Приведенные данные показывают, что реализация как ГРМ, так и известных методов (МНК, РМНК и МОИНО) с использованием лишь одного заранее фиксированного (номинального) значения $q_0 \in [\alpha, \beta]$ может приводить к существенному разбросу формируемых оценок. Это говорит о возможности существенного повышения качества оценивания в рамках ГРМ, обеспечивающего выбор оптимального узла в области неопределенности $[\alpha, \beta]$.

Если для рассматриваемого примера необходимость обращения матриц отпадает, то в случае РМНК для всех гипотез $\Gamma_{(l)}$ находится единая векторная оценка $\gamma_{(\text{РМНК})}^* = [\gamma_{(\text{РМНК})1}^*, \gamma_{(\text{РМНК})2}^*]^T$, при этом требуется обращение матриц $\mathbf{C}_{(l)} = \Psi^T \mathbf{W}_{(l)} \Psi$, где

$$\Psi^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}.$$

Для семейства всех этих матриц находим их числа обусловленности $\nu_{(l)} = \nu(\mathbf{C}_{(l)})$ (в евклидовой норме): $\nu_{(1)} = 515,7839$, $\nu_{(2)} = 666,9735$, $\nu_{(3)} = 1101,7277$, $\nu_{(4)} = 1778,5476$, $\nu_{(5)} = 2789,8688$, $\nu_{(6)} = 4239,6586$. Видим, что даже для рассматриваемого простейшего тестового примера низкой размерности и малой выборки имеем дело с плохой обусловленностью матриц, а следовательно, с дополнительной вычислительной погрешностью при нахождении искомых оценок. Этот факт характерен для большинства задач, связанных с оцениванием в случае использования степенного базиса [27–29].

Пример 2. Пусть матрица $\mathbf{K} = \mathbf{K}(q) = \text{diag}[[1 + q(n - 1)]^{-2}, n = \overline{1, 5}]$ соответствует случаю некоррелированных нестационарных измерений малого объема. В этом случае $\mathbf{W}_{(l)} = \text{diag}[w_{nn}(q_{(l)}), n = \overline{1, 5}]$, где $w_{nn}(q_{(l)}) = [1 + q(n - 1)]^2 \left(\sum_{n=1}^5 [(1 + q(n - 1))]^2 \right)^{-1}$, что справедливо для нормы $\|\mathbf{W}_{(l)}\| = \sum_{n=1}^5 w_{nn(l)}$, где $w_{nn(l)} > 0$. Полагаем $[0, T] = [0, 4]$, $t_n = (n - 1)\Delta t$, $n = \overline{1, 5}$, $\Delta t = 1$, $\alpha = -0,25$, $\beta = 1$, $L = 6$ и $q_{(1)} = -0,2$, $q_{(2)} = -0,125$, $q_{(3)} = 0$, $q_{(4)} = 0,3$, $q_{(5)} = 0,7$, $q_{(6)} = 1$. В табл. 1 приводятся результаты оценивания коэффициента γ_1 для каждого узла из области неопределенности согласно ГРМ применительно к семейству характерных выборок $\{\mathbf{H}_k\}_{k=1}^5$, соответствующих различным вариантам появления НП (при конкретных значениях энергетического параметра $\{\varepsilon_{Ek}\}_{k=1}^5$ и пороге $\delta F_0 = 15\%$).

Таблица 1

$\varepsilon_{E1} = 5,44, \mathbf{H}_1 = [9,5\dot{:}11,5\dot{:}12,3\dot{:}14,1\dot{:}18,2]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 11,92$	$\gamma_{1(2)}^* = 10,11$	$\gamma_{1(3)}^* = 10,12$	$\gamma_{1(4)}^* = 10,11$	$\gamma_{1(5)}^* = 10,09$	$\gamma_{1(6)}^* = 10,09$
$F_{(1)} = 3,74$	$F_{(2)} = 0,37$	$F_{(3)} = 0,29$	$F_{(4)} = 0,21$	$F_{(5)} = 0,16$	$F_{(6)} = 0,15$
$\delta_{F(1)} = 100$	$\delta_{F(2)} = 6,13$	$\delta_{F(3)} = 3,90$	$\delta_{F(4)} = 1,67$	$\delta_{F(5)} = 0,28$	$\delta_{F(6)} = 0$
$\varepsilon_{E2} = 7,30, \mathbf{H}_2 = [9\dot{:}11,5\dot{:}10\dot{:}17,5\dot{:}13]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 11,92$	$\gamma_{1(2)}^* = 10,11$	$\gamma_{1(3)}^* = 10,12$	$\gamma_{1(4)}^* = 10,11$	$\gamma_{1(5)}^* = 10,09$	$\gamma_{1(6)}^* = 10,09$
$F_{(1)} = 2,37$	$F_{(2)} = 4,30$	$F_{(3)} = 7,36$	$F_{(4)} = 10,33$	$F_{(5)} = 11,59$	$F_{(6)} = 13,77$
$\delta_{F(1)} = 0$	$\delta_{F(2)} = 17$	$\delta_{F(3)} = 43,88$	$\delta_{F(4)} = 69,82$	$\delta_{F(5)} = 80,88$	$\delta_{F(6)} = 100$
$\varepsilon_{E3} = 3,28, \mathbf{H}_3 = [17\dot{:}16,5\dot{:}13\dot{:}14\dot{:}16]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 14,88$	$\gamma_{1(2)}^* = 13,91$	$\gamma_{1(3)}^* = 12,30$	$\gamma_{1(4)}^* = 10,47$	$\gamma_{1(5)}^* = 9,87$	$\gamma_{1(6)}^* = 9,67$
$F_{(1)} = 7,77$	$F_{(2)} = 11,31$	$F_{(3)} = 12,76$	$F_{(4)} = 9,09$	$F_{(5)} = 6,46$	$F_{(6)} = 5,46$
$\delta_{F(1)} = 31,64$	$\delta_{F(2)} = 80,19$	$\delta_{F(3)} = 100$	$\delta_{F(4)} = 49,72$	$\delta_{F(5)} = 13,66$	$\delta_{F(6)} = 0$
$\varepsilon_{E4} = 2,83, \mathbf{H}_4 = [9\dot{:}18,5\dot{:}7\dot{:}15,5\dot{:}18]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 11,04$	$\gamma_{1(2)}^* = 10,92$	$\gamma_{1(3)}^* = 10,60$	$\gamma_{1(4)}^* = 10,10$	$\gamma_{1(5)}^* = 10,06$	$\gamma_{1(6)}^* = 10,04$
$F_{(1)} = 21,78$	$F_{(2)} = 21,01$	$F_{(3)} = 17,84$	$F_{(4)} = 12,73$	$F_{(5)} = 9,99$	$F_{(6)} = 9,08$
$\delta_{F(1)} = 100$	$\delta_{F(2)} = 93,97$	$\delta_{F(3)} = 69,98$	$\delta_{F(4)} = 28,74$	$\delta_{F(5)} = 7,18$	$\delta_{F(6)} = 0$
$\varepsilon_{E5} = 6,89, \mathbf{H}_5 = [17\dot{:}11,5\dot{:}11\dot{:}14,8\dot{:}10]^T$					
$\gamma_{1(1)}^* = 13,02$	$\gamma_{1(2)}^* = 11,81$	$\gamma_{1(3)}^* = 9,8$	$\gamma_{1(4)}^* = 7,52$	$\gamma_{1(5)}^* = 6,68$	$\gamma_{1(6)}^* = 6,39$
$F_{(1)} = 13,97$	$F_{(2)} = 18,95$	$F_{(3)} = 22,96$	$F_{(4)} = 20,24$	$F_{(5)} = 18,18$	$F_{(6)} = 17,24$
$\delta_{F(1)} = 0$	$\delta_{F(2)} = 55,39$	$\delta_{F(3)} = 100$	$\delta_{F(4)} = 71,74$	$\delta_{F(5)} = 46,82$	$\delta_{F(6)} = 36,37$

В табл. 2 приводятся результаты оценивания коэффициента для ГРМ при использовании алгоритмов (3.17), (3.18) и (3.20), где Δ_1 , $\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\overline{\Delta}}_1$ – абсолютные ошибки оценивания.

Таблица 2

$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{H}_2$	$\mathbf{H}_3$	$\mathbf{H}_4$	$\mathbf{H}_5$
$\gamma_{1(1)}^* = 10,09$	$\gamma_{1(1)}^* = 9,64$	$\gamma_{1(1)}^* = 9,67$	$\gamma_{1(1)}^* = 10,04$	$\gamma_{1(1)}^* = 13,02$
$\Delta_1 = 0,09$	$\Delta_1 = 0,36$	$\Delta_1 = 0,33$	$\Delta_1 = 0,04$	$\Delta_1 = 3,02$
$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 10,1$	$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 9,64$	$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 9,77$	$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 10,05$	$\overline{\gamma}_{1(1)}^* = 13,02$
$\overline{\Delta}_1 = 0,1$	$\overline{\Delta}_1 = 0,36$	$\overline{\Delta}_1 = 0,23$	$\overline{\Delta}_1 = 0,05$	$\overline{\Delta}_1 = 3,02$
$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 10,11$	$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 9,64$	$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 9,77$	$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 10,05$	$\overline{\overline{\gamma}}_{1(1)}^* = 13,02$
$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 0,11$	$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 0,36$	$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 0,23$	$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 0,05$	$\overline{\overline{\Delta}}_1 = 3,02$

Данные этой таблицы наглядно показывают возможность надежного оценивания ИП при наличии РП и НП во входном наблюдении.

В табл. 3 представлены результаты оценивания согласно МНК и РМНК в случае использования в алгоритмах обработки номинального значения $q_0 = q_{(3)} = 0$, где δ_1 – относительная ошибка, выраженная в процентах.

Таблица 3

$\varepsilon_{E1} = 5,44, \mathbf{H}_1 = [9,5\dot{:}11,5\dot{:}12,3\dot{:}14,1\dot{:}18,2]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 13,12$	$F = 8,63$	$\Delta_1 = 3,12$	$\delta_1 = 31,2$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 10,12$	$F = 0,29$	$\Delta_1 = 0,12$	$\delta_1 = 1,2$
$\varepsilon_{E2} = 7,30, \mathbf{H}_2 = [9\dot{:}11,5\dot{:}10\dot{:}17,5\dot{:}13]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 12,2$	$F = 8,86$	$\Delta_1 = 2,2$	$\delta_1 = 22$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 9,2$	$F = 7,36$	$\Delta_1 = 0,8$	$\delta_1 = 8$
$\varepsilon_{E3} = 3,28, \mathbf{H}_3 = [17\dot{:}16,5\dot{:}13\dot{:}14\dot{:}16]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 15,31$	$F = 2,36$	$\Delta_1 = 5,3$	$\delta_1 = 53$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 12,3$	$F = 12,76$	$\Delta_1 = 2,3$	$\delta_1 = 18,7$
$\varepsilon_{E4} = 2,83, \mathbf{H}_4 = [9\dot{:}18,5\dot{:}7\dot{:}15,5\dot{:}18]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 13,6$	$F = 22,34$	$\Delta_1 = 3,6$	$\delta_1 = 36$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 10,6$	$F = 17,84$	$\Delta_1 = 0,6$	$\delta_1 = 6$
$\varepsilon_{E5} = 6,89, \mathbf{H}_5 = [17\dot{:}11,5\dot{:}11\dot{:}14,8\dot{:}10]^T$				
МНК	$\gamma_{1(1)}^* = 12,8$	$F = 6,66$	$\Delta_1 = 2,8$	$\delta_1 = 28$
РМНК	$\gamma_{1(1)}^* = 9,8$	$F = 22,96$	$\Delta_1 = 0,2$	$\delta_1 = 2$

Был рассмотрен также случай коррелированных нестационарных измерений большого объема ($N = 41$) с матрицей $\mathbf{K} = \mathbf{K}(q)$, у которой по диагонали стоят элементы $k_{nn}(q) = [1 + q\Delta t(n - 1)]^{-2}$, $n = \overline{1, 41}$ (где $\Delta t = 0,1$), а вне диагонали $k_{nm} = \exp\{-|n - m|\Delta t\}$, $n, m = \overline{1, 41}$, $n \neq m$. С помощью датчика случайных чисел генерировалась тысяча выборок входного наблюдения, при этом в каждой выборке содержались РП и НП. Параметры q и ε_E рассматривались как случайные величины, распределенные по равномерному закону на отрезках от $-0,2$ до 1 и от $1,7$ до $2,5$ соответственно. Количество аномальных выбросов в каждой реализации соответствовало $\rho_{\mathbf{Z}} = 30\%$. Весь интервал наблюдения был разбит на три одинаковых по размеру участка (начальный, средний и конечный). В каждом эксперименте НП концентрировалась на одном из этих участков (использован равномерный закон распределения). По результатам моделирования получены следующие усредненные (по всем выборкам) абсолютные ошибки оценивания коэффициента γ_1 : для МНК – $\Delta_1 = 4,78$, для РМНК и МОИНО – $\Delta_1 = 2,11$, для ГРМ – $\Delta_1 = 0,32$.

РМНК и МОИНО по точности совпадают, поскольку рассматривается малоразмерный случай. Эффект от МОИНО, обусловленный декомпозицией алгоритма оценивания, проявляется лишь для задач большой размерности.

Таким образом, показано, что даже наличие одной степени свободы (параметр q является скалярным) при описании неопределенности можно существенно повысить точность оценивания ИП в условиях РП и НП. Очевидно, что при решении более сложных прикладных задач необходимо выбирать многомерную область неопределенности и соответствующее количество узлов $\mathbf{q}_{(l)}$, $l = \overline{1, L}$.

8. Заключение

Развитый ГРМ позволяет в условиях существенной неопределенности детально исследовать любую составляющую уравнения наблюдения с использованием ВЛФ, при этом обеспечив выполнение условия инвариантности результата оценивания к РП и максимально возможное (в рамках принятого критерия) ослабление воздействия НП на результаты оценивания. Появляется возможность организации нескольких каналов параллельных вычислений ВЛФ для всей области неопределенности относительно параметров корреляционной функции полуопределенного шума измерений. В пределах одного канала сохраняются все преимущества линейного оценивания без расширения вектора оцениваемых параметров. Получены конечные аналитические соотношения, позволяющие оценить потенциальные возможности ГРМ и условия его наиболее эффективного применения.

ГРМ можно модифицировать под другие известные задачи, например оценивание по выборке нарастающего объема, обнаружение, различение или разрешение сигналов, фильтрация (линейная или нелинейная) параметров сигналов. Он хорошо подходит к многоканальным информационно-измерительным системам, предназначенным для функционирования в реальном времени. Все вычислительные процедуры в каждом канале сводятся к простейшим математическим операциям над векторами и матрицами, допускается возможность комбинирования метода с традиционными подходами к решению прикладных задач, связанных с оптимальной и квазиоптимальной обработкой измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
2. Богданович В.А., Вострецов А.Г. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. М.: Физматлит, 2004.
3. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
4. Фомин А.Ф., Новоселов О.Н., Плющев А.В. Отбраковка аномальных результатов измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985.
5. Гаджиев Ч.М. Подход к отбраковке аномальных измерений, робастный к систематическим погрешностям // Автометрия. 2003. Т. 39. № 4. С. 39–46.

6. Булычев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др. Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение-Полет, 2016.
7. Денисов В.П., Дубинин Д.В., Мещеряков А.А. Исключение аномально больших ошибок пеленгования в процессе устранения неоднозначности измерений в фазовых пеленгаторах, реализующих метод максимального правдоподобия // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61. № 10. С. 957–963.
8. Шэнь К., Шахтарин Б.И., Неусыпин Б.И., Нгуен Д. Алгоритмические методы коррекции навигационной информации с использованием спутниковой радионавигационной системы в условиях аномальных измерений // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64. № 1. С. 31–37.
9. Иванов А.В., Шишкин В.Ю., Бойков Д.В. и др. Адаптивные алгоритмы обработки информации в навигационных комплексах подвижных наземных объектов // Радиотехника и электроника. 2021. Т. 66. № 8. С. 760–771.
10. Калянов А.А., Лукин О.В., Цыганова Ю.В. Об алгоритме адаптивной фильтрации параметров движения объекта // Автоматизация процессов управления. 2023. № 1(71). С. 75–87.
11. Gu T., Tu Y., Tang D., Luo T. A Robust Moving Total Least-Squares Fitting Method for Measurement Data // IEEE Transact. Instrument. Measurement. 2020. V. 69. No. 10. P. 7566–7573.
12. Gu T., Luo Z., Guo T., Luo T. A New Reconstruction Method for Measurement Data with Multiple Outliers // IEEE Transact. Instrument. Measurement. 2022. V. 71. P. 1–9.
13. Ji C., Song C., Li S., et. al. An Online Combined Compensation Method of Geomagnetic Measurement Error // IEEE Sensor. J. 2022. V. 22. No. 14. P. 14026–14037.
14. Gao G., Gao B., Gao S., et. al. Hypothesis Test-Constrained Robust Kalman Filter for INS/GNSS Integration with Abnormal Measurement // IEEE Transact. Vehicular Tech. 2023. V. 72. No. 2. P. 1662–1673.
15. Булычев Ю.Г., Елисеев А.В. Вычислительная схема инвариантно-несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
16. Булычев Ю.Г. Распознавание сигналов без расширения пространства состояний по результатам наблюдений, содержащих сингулярную помеху, с учетом нелинейности // АиТ. 2024. № 2. С. 81–102.
17. Булычев Ю.Г. Декомпозиционно-автокомпенсационное распознавание сигналов на базе принципов непрерывности, инвариантности, размножения и ранжирования с учетом регулярных и нерегулярных помех // АиТ. 2025. № 4. С. 34–54.
18. Sutti C. Local and global optimization by parallel algorithms for MIMD systems // Ann. Oper. Res. 1984. V. 1. P. 151–164.
19. Price W. L. Global optimization algorithms for a CAD workstation // J. Optim. Theory Appl. 1987. V. 55. P. 133–146.
20. Граничин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
21. Граничин О.Н., Шлымов Д.С., Аврос Р. и др. Рандомизированный алгоритм нахождения количества кластеров // АиТ. 2011. № 4. С. 86–98.
22. Куприянов А.И., Петренко П.Б., Сычев М.П. Теоретические основы радиоэлектронной разведки. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.

23. *Верба В.С., Татарский Б.Г.* Основы теории радиолокационных систем и комплексов. М.: Техносфера, 2024.
24. *Zekavat S., Buehrer R.* Handbook of Position Location: Theory, Practice and Advances. Second ed. Hoboken. New Jersey: Wiley-IEEE Press 2019.
25. *Wang X., Wang A., Wang D., et. al.* A modified Sage-Husa adaptive Kalman filter for state estimation of electric vehicle servo control system // Energy Reports. 2022. V. 8. No. 5. P. 20–27.
26. *Калянов А.А., Лукин О.В., Цыганова Ю.В.* Об алгоритме адаптивной фильтрации параметров движения объекта // Автоматизация процессов управления. 2023. № 1(71). С. 75–87.
27. *Peng L., Wenhui W., Junda Q., et. al.* Robust Generalized Labeled Multi-Bernoulli Filter and Smoother for Multiple Target Tracking using Variational Bayesian // KSII Transactions on Internet and Information Systems. 2022. V. 16. No. 3. P. 908–928.
28. *Татюзов А.Л.* Нейронные сети в задачах радиолокации. М.: Радиотехника, 2009.
29. *Мансур М.Э., Степанов О.А.* Алгоритмы комплексной обработки в задаче коррекции показаний навигационных систем при наличии нелинейных измерений // Изв. Тульского ГУ. Технические науки. 2016. № 6. С. 89–102.
30. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С. и др.* Обоснование методов оптимального оценивания параметров движения цели в триангуляционной измерительной системе // ТиСУ. 2015. № 4. С. 94–110.
31. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С. и др.* Классификация инвариантов пассивной локации и их применение // ТиСУ. 2015. № 6. С. 133–143.
32. *Булычев Ю.Г.* Оптимизация кластерно-вариационного метода построения многопозиционной пеленгационной системы для условий априорной неопределенности // АиТ. 2023. № 4. С. 96–114.
33. *Гильбо Е.П., Челтанов И.Б.* Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора. М.: Сов. радио, 1977.
34. *Ежова Н.А., Соколинский Л.Б.* Обзор моделей параллельных вычислений // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2019. Т. 8. № 3. С. 58–91.
35. *Иванов А.И., Шпилевая С.Г.* О квантовых параллельных вычислениях // Вестник Балт. ун-та им. Канта. Серия «Физико-математические и технические науки». 2021. № 2. С. 95–99.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 03.06.2025

После доработки 22.12.2025

Принята к публикации 27.01.2026