

Нелинейные системы

© 2026 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),
А.В. ЗУЕВ, д-р техн. наук (alvzuev@yandex.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
В.Ф. ФИЛАРЕТОВ, д-р техн. наук (filaretov@inbox.ru)
(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток),
И.В. ГОРНОСТАЕВ, канд. техн. наук (gornostaev_iv@mail.ru),
Д.В. КВАСОВ (kvasov.dv@dvfu.ru),
Д.Д. ДАНИЛОВ (danilov.dd@dvfu.ru)
(Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ¹

Рассматривается задача оценивания (идентификации) величины внешних воздействий на технические системы, описанные нелинейными динамическими моделями, с учетом шумов измерений, что необходимо для компенсации влияния этих воздействий. Решение задачи опирается на интервальные наблюдатели минимальной размерности, для построения которых получены соответствующие соотношения. На основе такого наблюдателя и дифференциатора выводятся соотношения, позволяющие получить интервальную оценку величины внешних воздействий. Теоретические положения проиллюстрированы практическим примером оценки величины внешних воздействий на электропривод манипуляционного робота. Проведенное моделирование на основе пакета Matlab продемонстрировало корректность теоретических результатов. Полученные соотношения можно использовать для построения отказоустойчивых систем.

Ключевые слова: нелинейные системы, внешние воздействия, идентификация, наблюдатели, интервальные методы.

DOI: 10.7868/S2413977726080027

1. Введение

Технические системы в процессе их эксплуатации могут быть подвержены различным внешним воздействиям, для компенсации которых применяются различные методы, большинство из которых используют информацию о величинах этих воздействий. Непосредственное измерение величин воздействий нередко наталкивается на значительные трудности. В этих случаях задача может быть решена на основе известных математических моделей этих

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-19-00590, <https://rscf.ru/project/25-19-00590/>).

систем и штатных датчиков, показания которых после соответствующей обработки поставляют искомую информацию.

Существуют различные способы обработки этой информации, большой популярностью пользуются подходы на основе скользящих наблюдателей, методы построения которых рассмотрены в [1–4] для различных классов систем. Как правило, для возможности построения скользящих наблюдателей на исходную систему накладываются различные ограничения, в частности требуется, чтобы она была минимально фазовой или детектируемой и должно выполняться условие согласования. Кроме того, такие наблюдатели чувствительны к различным помехам.

Интересный метод был предложен в [4] на основе так называемых интервальных наблюдателей, формирующих интервальные оценки рассматриваемых функций. Задача построения таких наблюдателей активно исследуется последние 20 лет, решения для различных классов систем и примеры практических приложений можно найти в [5–9]. Отметим, что в [4] решение задачи оценивания получено за счет наложения требования минимальной фазовости исходной линейной системы; кроме того, в [4] не учитываются шумы измерений, которые всегда присутствуют в реальных системах.

В настоящей работе ставится и решается задача использования интервальных наблюдателей для оценки величин внешних воздействий в нелинейных непрерывных динамических системах без требования минимальной фазовости при наличии шумов измерений. Подобная задача решалась в [9] для дискретных нелинейных систем, решение для непрерывных заметно отличается. Как и в [9], решение опирается на редуцированную модель исходной системы; это упрощает конструкцию интервального наблюдателя, уменьшает ширину интервала и дает возможность учесть шумы измерений. При этом требование минимальной фазовости системы не используется, а преобразования ограничиваются приведением модели к каноническому виду.

Цель работы – решить задачу построения средств оценивания величин внешних воздействий в технических системах, описываемых нелинейными динамическими моделями, с учетом шумов измерений.

Рассматриваются системы, описываемые нелинейной моделью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t) + w(t). \end{aligned}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F , G , C , H и L – постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $n \times q$, $l \times n$ и $n \times 1$ соответственно; $w(t) \in \mathbb{R}^l$ – шумы измерений, $\rho(t) \in \mathbb{R}$ – неизвестная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения. Предполагается, что $w(t)$ и $\rho(t)$ – ограниченные функции: $\underline{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$ и $\underline{\rho} \leq \rho(t) \leq \bar{\rho}$ при всех $t \geq 0$ для известных $\underline{w}$, $\bar{w}$ и $\underline{\rho}$, $\bar{\rho}$; неравенство “ $\leq$ ” для векторов понимается поэлементно. Предполагается также, что начальное состояние $x(0)$ удовлетворяет условию $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$ для некоторых $\underline{x}(0)$

и $\bar{x}(0)$. Нелинейный член $\Psi(x, u)$ имеет вид

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x, u) \\ \dots \\ \varphi_q(A_q x, u) \end{pmatrix},$$

$A_1, \dots, A_q$ – известные постоянные матрицы-строки, $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ – произвольные нелинейные функции.

Требуется построить наблюдатель для оценки функции $\rho(t)$. Границы $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$ рассматриваются как предварительные, которые уточняются в результате решения задачи. Задача по аналогии с [3, 9] решается не на основе исходной системы, а для ее редуцированной модели, нечувствительной к возмущению. Такая модель имеет меньшую размерность, нежели исходная система, что уменьшает вычислительную сложность. По аналогии с [4] будем предполагать, что выполняется условие согласования $\text{rank}(HL) = \text{rank}(L)$, которое, грубо говоря, означает, что функция $\rho(t)$ входит в уравнения для тех компонент вектора состояния, которые измеряются датчиками системы.

Вначале рассматривается линейный случай, когда $C = 0$.

2. Построение редуцированной модели

2.1. Общие соотношения

Редуцированная модель, о которой было сказано выше, имеет следующий вид:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* H x(t) + L_* \rho(t), \\ y_*(t) &= H_* x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ – вектор состояния, $y_*(t) \in \mathbb{R}$ – выход, F_* , G_* , J_* и L_* – подлежащие определению матрицы соответствующих размеров. Слагаемое $J_* H x(t)$ вместо ожидаемого $J_* y(t)$ введено для учета шумов измерений; в виде $J_* y(t)$ оно появится в интервальном наблюдателе.

Для построения интервального наблюдателя требуется, чтобы матрица F_* была устойчивой и мецлеровой, т.е. ее внедиагональные элементы должны быть неотрицательными. Поэтому F_* задается в диагональной жордановой форме

$$F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

которая обладает такими свойствами, если собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ выбраны отрицательными.

Известно [10], что если система (2.1) наблюдаема, то она всегда может быть приведена к виду с матрицей в идентификационной канонической форме,

когда

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В противном случае ее можно привести к виду с наблюдаемой подсистемой [10] и матрицу этой подсистемы искать в такой форме. В [11] показано, что от идентификационной формы всегда можно перейти к жордановой форме, вводя обратную связь с соответствующей матрицей обратной связи.

Для построения редуцированной модели предполагается, что существует такая матрица Φ , для которой при всех $t \geq 0$ выполняется условие $x_*(t) = \Phi x(t)$. Известно [9], что эта матрица вместе с матрицами, описывающими модель, подчиняется уравнениям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad \Phi G = G_*, \quad \Phi L = L_*.$$

Для принятого вида матрицы F_* первое из приведенных уравнений распадается на k независимых уравнений:

$$(2.2) \quad \Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k,$$

каждое из которых можно записать в виде

$$(2.3) \quad (\Phi_i \quad - J_{*i}) \begin{pmatrix} F - \lambda_i I_n \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где I_n — $n \times n$ единичная матрица. Для построения редуцированной модели выбирается такое значение $\lambda_i < 0$, что определяемая из уравнения (2.3) матрица Φ_i должна удовлетворять двум требованиям

$$(2.4) \quad \Phi_i L = L_* \neq 0, \quad R_i H = \Phi_i$$

для некоторой матрицы R_i , при этом $H_* = 1$. Для учета второго требования заменим в (2.2) Φ_i на $R_i H$:

$$R_i H F = \lambda R_i H + J_{*i} H$$

и перепишем его в виде

$$(R_i \quad - J_{*i}) \begin{pmatrix} H F - \lambda_i H \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

По аналогии с решением уравнения (2.3) выбирается такое значение $\lambda_i < 0$, при котором определяемая из уравнения матрица R_i удовлетворяет условию $L_* = R_i H L \neq 0$. Если оно выполняется, определяется $G_* = R_i H G$, на чем процедура построения линейной модели заканчивается. В противном случае задача рассмотренным методом решения не имеет.

2.2. Использование виртуальных датчиков

Независимость уравнений (2.2) друг от друга накладывает определенные ограничения на возможность решения задачи. Действительно, рассмотрим пример электропривода, описываемого следующими уравнениями:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= k_1 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t) + k_7 \text{sign}(x_2(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= k_4 x_2(t) + k_5 x_3(t) + k_6 u(t) + \rho(t), \end{aligned}$$

где коэффициенты k_1 – k_7 представляют параметры электропривода; возмущение $\rho(t)$ обусловлено изменением сопротивления обмоток якоря при его перегреве. Рассматриваемая модель описывается матрицами:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ k_7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что $y(t) = x_3(t) + w(t)$, т.е. $H = (0 \ 0 \ 1)$. Требуется найти оценку функции $\rho(t)$.

Уравнение (2.3) принимает вид

$$(\Phi - J_*) \begin{pmatrix} -\lambda & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $k_2 < 0$, оно имеет единственное решение $\lambda = k_2$ с матрицей $\Phi_1 = (0 \ 1 \ 0)$, которая не удовлетворяет условиям (2.4). Выход может быть найден за счет использования так называемого виртуального датчика, который представляет собой наблюдатель, оценивающий неизмеряемую компоненту вектора состояния исходной системы. В рассматриваемом случае редуцированная модель для построения такого датчика является частным случаем общей модели (2.1) и описывается уравнением

$$\dot{x}_{*1}(t) = k_2 x_{*1}(t) + k_3 H x(t) + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)),$$

где $x_{*1}(t) = \Phi_1 x(t)$. Отметим, поскольку измерение $y(t)$ зашумлено, показания этого датчика будут также подвержены шуму, ниже это учитывается интервальными методами. Принимая его состояние $x_{*1}(t)$ за показания такого датчика $y_v(t) = H_v x(t)$ с $H_v = (0 \ 1 \ 0)$, расширим уравнение (2.2):

$$\Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H + J_{*v} H_v, \quad i = 1, \dots, k,$$

которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$(\Phi - J_* - J_{*v}) \begin{pmatrix} -\lambda & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Теперь он имеет еще одно решение $\lambda = k_5 < 0$ с матрицами $\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $(J_* \ J_{*v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$; первая удовлетворяет условиям (2.3) с $R = 1$ и $L_* = 1$. Модель с виртуальным датчиком описывается уравнениями

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= k_2 x_{*1}(t) + k_3 Hx(t) + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= k_5 x_{*2}(t) + k_4 x_{*1}(t) + k_6 u(t) + \rho(t), \\ y_*(t) &= x_{*2}(t) = y(t). \end{aligned}$$

В общем случае виртуальных датчиков может быть несколько.

2.3. Получение оценки

Вначале рассмотрим случай, когда виртуальный датчик не требуется. Тогда для выбранного значения λ модель (2.1) является одномерной и принимает вид

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= \lambda x_*(t) + G_* u(t) + J_* Hx(t) + L_* \rho(t), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что если шумы измерения отсутствуют или ими можно пренебречь, то с учетом равенств $y_*(t) = x_*(t) = Ry(t)$ и $J_* Hx(t) = J_* y(t)$ возмущение $\rho(t)$ может быть оценено как

$$(2.8) \quad \hat{\rho}(t) = L_*^{-1}(\dot{y}_*(t) - (\lambda y_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t))).$$

Для вычисления производной $\dot{y}_*(t)$ может быть использован дифференциатор, предложенный в [12]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_0(t), \\ z_0(t) &= z_2(t) - \alpha_1 |z_1(t) - y_*(t)|^{1/2} \text{sign}(z_1(t) - y_*(t)), \\ \dot{z}_2(t) &= -\alpha_2 \text{sign}(z_1(t) - y_*(t)), \end{aligned}$$

где α_1, α_2 – положительные константы, выбираемые согласно рекомендациям [12]. Как показано в [12], $z_2(t)$ дает точную оценку $\dot{y}_*(t)$ за конечное время при отсутствии возмущений в $y_*(t)$. Если функция $y_*(t)$ подвержена шумам интенсивностью $w_y(t)$, то $|\dot{y}_*(t) - z_2(t)| \leq |w_y(t)|^{1/2}$.

Если функция $\rho(t)$ представляет собой вектор, то описанный подход должен быть применен к каждой его компоненте. По аналогии с [4] оценка $\hat{\rho}(t)$ может быть использована для оценки полного вектора $x(t)$ исходной системы на основе уравнения

$$\dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + L\hat{\rho}(t) + K(y(t) - H\hat{x}(t)),$$

где коэффициент усиления K выбирается из требования устойчивости матрицы $F - KH$.

Отметим, что аналогичная проблема рассматривается в [4] для линейных систем, но в отличие от простых соотношений (2.7) и (2.8) она решается с

помощью сложных аналитических преобразований исходной системы и использования интервальных наблюдателей, которые в данной работе не потребовались.

Если исходная система нелинейна, то в (2.7) добавляется слагаемое $\Psi_{**}(y_*, y, u)$, правила построения которого рассмотрены ниже, и (2.8) принимает вид

$$(2.9) \quad \hat{\rho}(t) = L_*^{-1}(\dot{y}_*(t) - (\lambda y_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + \Psi_{**}(y_*, y, u))).$$

При использовании виртуального датчика, описываемого уравнением

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \dot{x}_v(t) &= \lambda_v x_v(t) + G_v u(t) + J_v y(t), \\ y_v(t) &= x_v(t) \end{aligned}$$

(по предположению в него не входит $\rho(t)$), выражение (2.8) усложняется:

$$(2.11) \quad \hat{\rho}(t) = L_*^{-1}(\dot{y}_*(t) - (\lambda y_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_{*v} y_v(t))).$$

Наличие шумов измерений делает оценки (2.8) и (2.9) приближенными. В этом случае использование интервального наблюдателя позволяет найти гарантированные пределы (границы), в которых будет находиться оценка по аналогии с доверительным интервалом в математической статистике. Предполагается, что введенные ранее нижняя $\underline{\rho}$ и верхняя $\overline{\rho}$ границы функции $\rho(t)$ являются первым приближением, на основе которых требуется определить окончательные границы.

3. Интервальный наблюдатель и его использование

Вначале рассмотрим случай, когда виртуальный датчик не требуется. Интервальный наблюдатель строится на основе модели (2.1) и по аналогии с [5, 9] принимает вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{y}}_*(t) &= \lambda \underline{y}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho}, \\ \dot{\overline{y}}_*(t) &= \lambda \overline{y}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_*^- \overline{w} - J_*^+ \underline{w} + L_*^+ \overline{\rho} - L_*^- \underline{\rho}, \end{aligned}$$

где $Q^+ = \max\{0, Q\}$ и $Q^- = Q^+ - Q$ для произвольной матрицы Q ; нетрудно видеть, что Q^+ и Q^- неотрицательны.

По аналогии с [5, 9] можно показать, что из условия $\overline{x}(0) \geq x(0) \geq \underline{x}(0)$ следует $\overline{y}_*(t) \geq y_*(t) \geq \underline{y}_*(t)$ для всех $t \geq 0$. По аналогии с [4] нетрудно видеть, что тогда существует переменная $0 \leq \beta(t) \leq 1$ такая, что

$$(3.2) \quad y_*(t) = \underline{y}_*(t) + \beta(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) = \overline{y}_*(t) + (\beta(t) - 1)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t))$$

для всех $t \geq 0$. Заменив $y_*(t)$ на $Ry(t)$, получаем

$$(3.3) \quad \beta(t) = \frac{Ry(t) - \underline{y}_*(t)}{\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)},$$

где все переменные могут быть определены. Предполагается, что функция $\beta(t)$ дифференцируема.

Теорема 1. Окончательные верхняя $\overline{\rho}(t)$ и нижняя $\underline{\rho}(t)$ границы для $\rho(t)$ имеют вид

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \overline{\rho}(t) = & L_*^{-1}(\dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \\ & + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}))) \end{aligned}$$

и

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \underline{\rho}(t) = & L_*^{-1}(\dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \overline{\rho} - L_*^- \underline{\rho} + \\ & + (\beta(t) - 1)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}))) \end{aligned}$$

соответственно.

Доказательство. Вычислим $\dot{y}_*(t)$ на основе первой части равенства (3.2) и уравнения (3.1):

$$\begin{aligned} \dot{y}_*(t) = & \underline{\dot{y}}_*(t) + \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \beta(t) \frac{d}{dt}(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) = \\ = & \lambda \underline{y}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \\ & + \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \lambda \beta(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \\ & + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w})), \end{aligned}$$

где $|Q| = Q^+ + Q^-$ – матрица, составленная из абсолютных значений элементов матрицы Q . Заменим в полученном выражении переменную $\dot{y}_*(t)$ правой частью равенства (2.7):

$$\begin{aligned} & \lambda y_*(t) + G_* u(t) + J_* H x(t) + L_* \rho(t) = \\ = & \lambda \underline{y}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \\ & + \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \lambda \beta(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \\ & + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w})) \end{aligned}$$

и преобразуем его:

$$\begin{aligned} L_* \rho(t) = & \lambda(\underline{y}_*(t) - y_*(t)) + J_* w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \\ & + \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \lambda \beta(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \\ & + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w})) = \\ = & \dot{\beta}(t)(\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \beta(t)(|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w})) + \\ & + J_* w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} J_* w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} &= J_*^+ w(t) - J_*^- w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} = \\ &= J_*^+(w(t) - \overline{w}) + J_*^-(\underline{w} - w(t)) \leq 0, \end{aligned}$$

то граница (3.4) получается удалением слагаемого $J_* w(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w}$ из последнего выражения.

Аналогичные операции с второй частью равенства (3.2) дают такой результат:

$$\begin{aligned}\dot{y}_*(t) &= \dot{\bar{y}}_*(t) + \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + (\beta(t) - 1)\frac{d}{dt}(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) = \\ &= \lambda\bar{y}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + J_*^-\bar{w} - J_*^+\underline{w} + L_*^+\bar{\rho} - L_*^-\underline{\rho} + \\ &\quad + \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \lambda\beta(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) - \\ &\quad - \lambda(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + (\beta(t) - 1)(|L_*|(\bar{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\bar{w} - \underline{w}));\end{aligned}$$

замена $\dot{y}_*(t)$ и преобразования приводят к следующему:

$$\begin{aligned}L_*\rho(t) &= \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + (\beta(t) - 1)(|L_*|(\bar{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\bar{w} - \underline{w})) + \\ &\quad + J_*w(t) + J_*^-\bar{w} - J_*^+\underline{w} + L_*^+\bar{\rho} - L_*^-\underline{\rho}.\end{aligned}$$

Так как $J_*w(t) + J_*^-\bar{w} - J_*^+\underline{w} \geq 0$, то, удаляя это слагаемое, получаем границу (3.5). Нетрудно видеть, что

$$\underline{\underline{\rho}}(t) \leq \rho(t) \leq \bar{\bar{\rho}}(t).$$

Теорема доказана.

Для вычисления производной $\dot{\beta}(t)$ может быть использован дифференциатор, рассмотренный выше:

$$\begin{aligned}(3.6) \quad \dot{z}_1(t) &= z_0(t), \\ z_0(t) &= z_2(t) - \gamma_1|z_1(t) - \beta(t)|^{1/2}\text{sign}(z_1(t) - \beta(t)), \\ \dot{z}_2(t) &= -\gamma_2\text{sign}(z_1(t) - \beta(t)),\end{aligned}$$

где γ_1, γ_2 – положительные константы; переменная $z_2(t)$ дает точную оценку функции $\dot{\beta}(t)$ за конечное время при отсутствии возмущений в $\beta(t)$.

Если требуется виртуальный датчик, описываемый уравнением (2.10), то он также должен быть реализован интервально:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_v(t) &= \lambda_v\underline{x}_v(t) + G_vu(t) + J_vy(t) + J_v^-\underline{w} - J_v^+\bar{w}, \\ \dot{\bar{x}}_v(t) &= \lambda_v\bar{x}_v(t) + G_vu(t) + J_vy(t) + J_v^-\bar{w} - J_v^+\underline{w}, \\ \underline{y}_v(t) &= \underline{x}_v(t), \\ \bar{y}_v(t) &= \bar{x}_v(t).\end{aligned}$$

Интервальный наблюдатель (3.1) дополняется соответствующими элементами:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{y}}_*(t) &= \lambda\underline{y}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + J_*^-\underline{w} - J_*^+\bar{w} + L_*^+\underline{\rho} - \\ &\quad - L_*^-\bar{\rho} + J_{*v}^+\underline{y}_v(t) - J_{*v}^-\bar{y}_v(t), \\ \dot{\bar{y}}_*(t) &= \lambda\bar{y}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + J_*^-\bar{w} - \\ &\quad - J_*^+\underline{w} + L_*^+\bar{\rho} - L_*^-\underline{\rho} + J_{*v}^+\bar{y}_v(t) - J_{*v}^-\underline{y}_v(t),\end{aligned}$$

верхняя граница $\bar{\bar{\rho}}(t)$ корректируется:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\rho}}(t) &= L_*^{-1}(\dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+\underline{\rho} - L_*^-\bar{\rho} + \\ &\quad + \beta(t)(|L_*|(\bar{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\bar{w} - \underline{w}) + |J_{*v}|(\bar{y}_v(t) - \underline{y}_v(t)))).\end{aligned}$$

Аналогично корректируется нижняя граница.

4. Нелинейные системы

Метод построения редуцированной модели в нелинейном случае опирается на ранее построенную линейную модель и состоит в том, что для матрицы Φ выясняется возможность преобразования аргумента нелинейного слагаемого $\Psi(x, u)$ на основе следующих операций [3]. Для простоты ограничимся случаем отсутствия виртуального датчика; если он требуется и содержит нелинейную составляющую, она строится аналогично.

Вычисляется матрица $C_* = \Phi C$ и определяются номера $j_i, \dots, j_s$ ее ненулевых столбцов. Далее проверяется условие

$$(4.1) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A_j \end{pmatrix}, \quad j = j_i, \dots, j_s.$$

Если это условие выполняется, то нелинейная составляющая ищется в виде

$$\Psi_*(y_*, Hx, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{j_1}(A_{*j_1}\xi, u) \\ \dots \\ \varphi_{j_s}(A_{*j_s}\xi, u) \end{pmatrix},$$

где $\xi = \begin{pmatrix} y_* \\ Hx \end{pmatrix}$, матрицы $A_{*j_1}, \dots, A_{*j_s}$ определяются из линейных уравнений

$$A_j = A_{*j} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad j = j_i, \dots, j_s,$$

и составляющая $C_*\Psi_*(y_*, Hx, u)$ добавляется к линейной модели (2.1). Если условие (4.1) не выполняется, необходимо найти другое решение уравнения (2.3) и повторить описанную процедуру с новой матрицей Φ с прежней или увеличенной размерностью k . Если (4.1) не выполняется при всех k , необходимо использовать виртуальный датчик, добавление которого позволит удовлетворить условию (4.1).

Нелинейная модель описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= x_*(t) + J_* Hx(t) + G_* u(t) + C_* \Psi_*(y_*(t), Hx(t), u(t)) + L_* \rho(t), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

Если шумы измерения отсутствуют или ими можно пренебречь, то оценка описывается выражением (2.9). В противном случае строится интервальный наблюдатель, для чего необходимо принять следующее допущение для $\Psi_{**}(y_*, Hx, u) = C_*\Psi_*(y_*, Hx, u)$.

Допущение. Если $\underline{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$ для $\underline{w}, \bar{w} \in \mathbb{R}^l$, то

$$(4.2) \quad \underline{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \bar{y}, u) \leq \Psi_{**}(y_*, Hx, u) \leq \bar{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \bar{y}, u)$$

для некоторых функций $\underline{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \bar{y}, u)$ и $\bar{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \bar{y}, u)$ и всех u , где $\underline{y} = y - \bar{w}$ и $\bar{y} = y - \underline{w}$. Само по себе допущение справедливо для произвольных

функций, но согласно [13, 14] процедура вычисления границ $\underline{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \overline{y}, u)$ и $\overline{\Psi}_{**}(y_*, \underline{y}, \overline{y}, u)$ известна только для непрерывной функции $\Psi_{**}(y_*, Hx, u)$, она опирается на методы интервальной арифметики. В частных случаях, однако, условие (4.2) может быть установлено эвристически, см. пример ниже.

Интервальный наблюдатель принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\underline{y}}_*(t) &= \lambda \underline{y}_*(t) + G_{*i} u(t) + J_* y(t) + J_*^- \underline{w} - J_*^+ \overline{w} + \\ &\quad + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)), \\ \dot{\overline{y}}_*(t) &= \lambda \overline{y}_*(t) + G_{*i} u(t) + J_* y(t) + J_*^- \overline{w} - J_*^+ \underline{w} + \\ &\quad + L_*^+ \overline{\rho} - L_{*i}^- \underline{\rho} + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)).\end{aligned}$$

Теорема 2. Окончательные верхняя $\overline{\rho}(t)$ и нижняя $\underline{\rho}(t)$ границы без использования виртуального датчика определяются выражениями

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(t) &= L_*^{-1} \left(\dot{\beta}(t) (\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \beta(t) (|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}) + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \right. \\ &\quad \left. - \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t))) \right), \\ \underline{\rho}(t) &= L_*^{-1} \left(\dot{\beta}(t) (\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \overline{\rho} - L_*^- \underline{\rho} + (\beta(t) - 1) (|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + \right. \\ &\quad \left. + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}) + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \right. \\ &\quad \left. - \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t))) \right).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Доказательство. С учетом нелинейного слагаемого оценка (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(t) &= L_*^{-1} (\dot{\beta}(t) (\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \overline{\rho} + \beta(t) (|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}) + \\ &\quad + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t))) + \\ &\quad + \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \Psi_{**}(y_*, Hx, u)).\end{aligned}$$

Так как разность $\underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \Psi_{**}(y_*, Hx, u)$ согласно (4.2) отрицательна, то, удаляя ее из последнего выражения, получаем первую из формул (4.3). Аналогично оценка (3.5) принимает вид

$$\begin{aligned}\underline{\rho}(t) &= L_*^{-1} (\dot{\beta}(t) (\overline{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + L_*^+ \overline{\rho} - L_*^- \underline{\rho} + \\ &\quad + (\beta(t) - 1) (|L_*|(\overline{\rho} - \underline{\rho}) + |J_*|(\overline{w} - \underline{w}) + \\ &\quad + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \underline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t))) + \\ &\quad + \overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \Psi_{**}(y_*, Hx, u)).\end{aligned}$$

Поскольку согласно (4.2) $\overline{\Psi}_{**}(y_*(t), \underline{y}(t), \overline{y}(t), u(t)) - \Psi_{**}(y_*, Hx, u) \geq 0$, то, удаляя эту разность, получаем вторую формулу в (4.3). Теорема доказана.

Нелинейность, входящая в виртуальный датчик, может быть учтена аналогичным образом с использованием соответствующего допущения вида (4.2).

5. Пример

Продолжим рассмотрение системы (2.5), для которой была построена модель (2.6), напомним ее:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= k_2 x_{*1}(t) + k_3 Hx(t) + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= k_5 x_{*2}(t) + k_4 x_{*1}(t) + k_6 u(t) + \rho(t), \\ y_*(t) &= x_{*2}(t) = y(t). \end{aligned}$$

Так как $k_4 < 0$, $k_3 > 0$ и $k_7 < 0$, то $k_3^+ = k_3$, $k_3^- = 0$, $k_4^+ = 0$, $k_4^- = |k_4|$, $k_7^+ = 0$, $k_7^- = |k_7|$, $L_* = 1$.

При отсутствии шумов измерений точная оценка возмущения $\rho(t)$ определяется выражением (2.11):

$$\hat{\rho}(t) = \dot{y}(t) - (k_5 y(t) + k_6 u(t) + k_4 x_{*1}(t)),$$

виртуальный датчик определяется первым уравнением в (5.1) с $Hx(t) = y(t)$. При наличии шумов необходимо строить интервальный наблюдатель (3.1), который вместе с виртуальным датчиком принимает вид

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_{*1}(t) &= k_2 \underline{x}_{*1}(t) + k_3 y(t) - k_3 \bar{w} - |k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t)), \\ \dot{\bar{x}}_{*1}(t) &= k_2 \bar{x}_{*1}(t) + k_3 y(t) - k_3 \underline{w} - |k_7| \text{sign}(\underline{x}_{*1}(t)), \\ \dot{\underline{y}}_*(t) &= k_5 \underline{y}_*(t) + k_6 u(t) - |k_4| \bar{x}_{*1}(t) + \underline{\rho}, \\ \dot{\bar{y}}_*(t) &= k_5 \bar{y}_*(t) + k_6 u(t) - |k_4| \underline{x}_{*1}(t) + \bar{\rho}. \end{aligned}$$

Введем ошибку $\underline{e}_1(t) = x_{*1}(t) - \underline{x}_{*1}(t)$. Нетрудно видеть, что из $\underline{x}(0) \leq \bar{x}(0)$ и $x_{*1}(t) = \Phi x(t)$ следует $\underline{x}_{*1}(0) \leq x_{*1}(0) \leq \bar{x}_{*1}(0)$ и $\underline{e}_1(0) \geq 0$. Далее, если $\underline{x}_{*1}(t) \leq x_{*1}(t) \leq \bar{x}_{*1}(t)$, то $\text{sign}(\underline{x}_{*1}(t)) \leq \text{sign}(x_{*1}(t)) \leq \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t))$, а так как $k_7 < 0$, то

$$-|k_7| \text{sign}(\underline{x}_{*1}(t)) \geq k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)) \geq -|k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t)),$$

т.е. $k_7 \text{sign}(x_{*1}(t))$ удовлетворяет допущению вида (4.2) с функциями

$$\underline{\Psi}_{**}(\underline{x}_{*1}, \bar{x}_{*1}) = -|k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}), \quad \bar{\Psi}_{**}(\underline{x}_{*1}, \bar{x}_{*1}) = -|k_7| \text{sign}(\underline{x}_{*1}).$$

Уравнение для ошибки $\underline{e}_1(t)$ имеет вид

$$\dot{\underline{e}}_1(t) = k_2 \underline{e}_1(t) - k_3 w(t) + k_3 \bar{w} + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)) + |k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t)).$$

Так как $k_2 < 0$, $\underline{e}_1(0) \geq 0$ и $-k_3 w(t) + k_3 \bar{w} + k_7 \text{sign}(x_{*1}(t)) + |k_7| \text{sign}(\bar{x}_{*1}(t)) \geq 0$, то согласно [13] по индукции получаем $\underline{e}_1(t) \geq 0$, т.е. $x_{*1}(t) \geq \underline{x}_{*1}(t)$ для всех $t \geq 0$. Подобными операциями доказывается, что $\bar{x}_{*1}(t) \geq x_{*1}(t)$ для всех $t \geq 0$.

Аналогичным образом на основе полученных соотношений и третьего и четвертого уравнений в (5.2) можно показать, что $\bar{y}_*(t) \geq y_*(t) \geq \underline{y}_*(t)$ для всех $t \geq 0$, а тогда можно определить функцию $\beta(t)$ в виде (3.3).

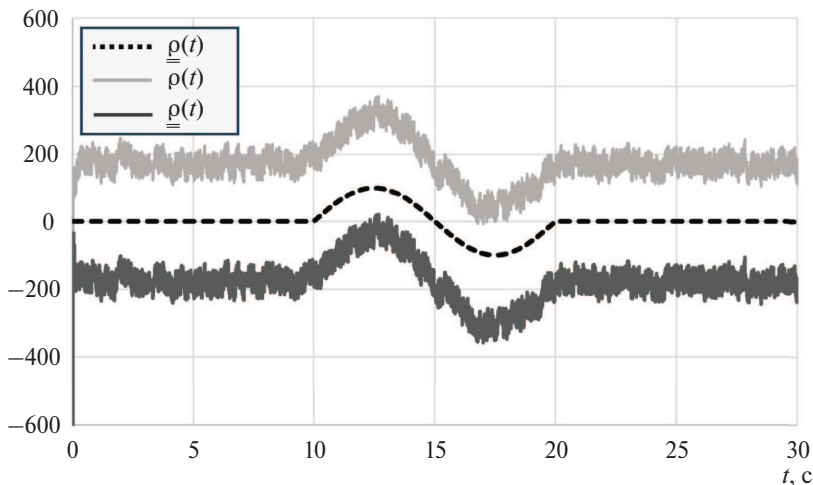


Рис. 1. Поведение возмущения и его нижней и верхней границ.

Окончательные нижняя $\underline{\rho}$ и верхняя $\bar{\rho}$ границы для $\rho(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \underline{\rho} + \beta(t)(\bar{\rho} - \underline{\rho} + |k_3|(\bar{w} - \underline{w}) + \\ &\quad + |k_4|(\bar{x}_{*1}(t) - \underline{x}_{*1}(t)) - |k_7|(\text{sign}(\underline{x}_{*1}) - \text{sign}(\bar{x}_{*1}))), \\ \underline{\rho} &= \dot{\beta}(t)(\bar{y}_*(t) - \underline{y}_*(t)) + \bar{\rho} + (\beta(t) - 1)(\bar{\rho} - \underline{\rho} + |k_3|(\bar{w} - \underline{w}) + \\ &\quad + |k_4|(\bar{x}_{*1}(t) - \underline{x}_{*1}(t)) - |k_7|(\text{sign}(\underline{x}_{*1}) - \text{sign}(\bar{x}_{*1}))).\end{aligned}$$

Производная $\dot{\beta}(t)$ вычисляется по формуле (3.6) с $Ry = y$.

Для моделирования приняты следующие параметры модели: $k_1 = 0,01$, $k_2 = -10$, $k_3 = 100$, $k_4 = -25$, $k_5 = -100$, $k_6 = 1000$, $k_7 = -0,02$; шум измерения представлен случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-0,3; 0,3]$, т.е. $\underline{w} = -0,3$ и $\bar{w} = 0,3$; возмущение $\rho(t) = 100 \sin(\pi t/5)$ при $10 \leq t \leq 20$, $\rho(t) = 0$ в противном случае, откуда $\underline{\rho} = -100$ и $\bar{\rho} = 100$. Результаты моделирования с $u(t) = 2 \sin(t/5) + 2$ приведены на рисунке. Из-за присутствия шумов измерений, а также большой величины коэффициента k_3 окончательные границы $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$ сильно зашумлены; их средние значения объясняются принятыми предварительными значениями границ $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$.

6. Заключение

В работе решена задача оценки (идентификации) величин внешних возмущений в системах, описываемых нелинейными моделями в присутствии шумов измерений. В отличие от известных методов решения этой задачи с использованием работающих в скользящих режимах наблюдателей разработанный в статье подход позволяет расширить класс систем, для которых идентификация может быть осуществлена. Это объясняется тем, что метод построения наблюдателей, работающих в скользящих режимах, накладывает ограничения на системы, для которых требуется решить задачу идентификации внешних возмущений. Отметим также, что внешние возмущения могут

быть интерпретированы как дефекты в динамике системы, что позволяет использовать предложенные методы для построения отказоустойчивых систем путем компенсации оцененной величины дефекта системой управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edwards C., Spurgeon S., Patton R.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 541–553.
2. *Fridman L., Levant A., Davila J.* Observation of linear systems with unknown inputs via high order sliding-modes // *Int. J. Syst. Sci.* 2007. V. 38. P. 773–791.
3. *Жирибоб А.Н., Зуев А.В., Сергиенко О., Шумский А.Е.* Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей // *АиТ*. 2022. № 2. С. 63–89.
4. *Zhu F., Fu Y., Dinh T.* Asymptotic convergence unknown input observer design via interval observer // *Automatica*. 2023. № 1. P. 3–13.
5. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ*. 2016. № 2. С. 5–49.
6. *Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L.* Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
7. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2013. Т. 56. № 4. С. 42–46.
8. *Жирибоб А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир.* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2022. № 5. С. 3–13.
9. *Жирибоб А.Н., Зуев А.В.* Интервальные наблюдатели для оценивания неизвестных входов в дискретных стационарных динамических системах // *АиТ*. 2024. № 8. С. 3–19.
10. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
11. *Жирибоб А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф. и др.* Интервальные наблюдатели для непрерывных систем с параметрическими неопределенностями // *АиТ*. 2023. № 11. С. 3–16.
12. *Levant A.* Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // *Int. J. Control.* 2003. V. 76. P. 924–941.
13. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval observers for continuous-time LPV systems with L_1/L_2 performance // *Automatica*. 2015. V. 58. P. 82–89.
14. *Efimov D., Raissi T., Chebotarev S., Zolghadri A.* Interval state observer for nonlinear time varying systems // *Automatica*. 2013. V. 49. P. 200–206.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Базтадзе.

Поступила в редакцию 09.09.2025

После доработки 17.12.2025

Принята к публикации 29.12.2025