

© 2026 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ СИСТЕМЫ И ИХ СТАБИЛИЗАЦИЯ

Рассматривается лагранжева система, подверженная действию позиционных сил. Предполагается, что частоты малых колебаний для равновесия несоизмеримы. Устанавливается существование в окрестности равновесия многочастотных симметричных колебаний, образующих семейства от одного параметра. Дается продолжение семейства по параметру на глобальное семейство указанных колебаний; семейства заполняют всю область фазового пространства, примыкающую к равновесию. Доказывается нелокальное продолжение семейства по параметру системы. В случае консервативной системы находится автономное управление и решается задача стабилизации (в большом) симметричного многочастотного колебания. При этом строится обратная связь по потенциальной энергии.

Ключевые слова: лагранжева система, позиционные силы, обратимость, симметричное многочастотное колебание, рождение, глобальное семейство, нелокальное продолжение по параметру, консервативная система, обратная связь, адаптивная схема, стабилизация.

DOI: 10.7868/S2413977726080035

1. Введение

Многочастотные колебания являются важнейшим предметом исследования в нелинейной динамике (см. [1–4], другие книги и многочисленные статьи). Для исследования колебаний применяются универсальные асимптотические методы и теория возмущений. К последней можно отнести теорему Л.С. Понтрягина [5] об управлении колебаниями посредством построения предельного цикла. Пример качественной перестройки фазового портрета при малом возмущении находим в исследованных Ван дер Полем [6] релаксационных режимах (при отсутствии вынуждающей силы) регеративного приемника. А.А. Андронов (1929) обнаружил, что физическим воплощением кривых Пуанкаре являются построенные им и независимо Ван дер Полем устойчивые автоколебания. А. Пуанкаре [7, гл. VI] (1881) ввел понятие предельного цикла для системы на плоскости. Теория автоколебаний развита в школе А.А. Андропова [8].

Качественная перестройка наблюдается [9] в общем случае скорректированной консервативной системы. В построенной автономной системе управления обратная связь реализуется путем отслеживания потенциальной энер-

гии в текущей точке траектории. В данной статье идея из [9] применяется для стабилизации симметричных многочастотных колебаний. Для стабилизации колебания с выбранной энергией h^* в [9] применяется адаптивная схема [10] стабилизации, в которой коэффициент $K(h^*)$ в управлении выбирается в зависимости от значения h^* . Вычисление $K(h^*)$ связано в [9] со знанием глобального семейства Σ_1 одночастотных симметричных колебаний, построенного для всех допустимых значений энергии h . Семейство Σ_1 получается глобальным продолжением симметричного локального ляпуновского семейства, существование которого дается аналогом [11, 12] теоремы Ляпунова [13] о центре для обратимых механических систем. Для симметричного многочастотного колебания глобальное семейство строится в данной статье.

В статье вводится понятие симметричного многочастотного колебания лагранжевой системы с n степенями свободы, подверженной действию позиционных сил, доказывается теорема о рождении k -частотных колебаний ($1 \leq k \leq n$), дается их продолжение в фазовом пространстве на глобальное семейство Σ_k ($1 \leq k \leq n$) таких колебаний, доказывается нелокальное продолжение Σ_k по параметру системы, а также решаются другие вопросы. В результате развивается глобальная теория, что позволяет решить задачу стабилизации в большом.

Согласно А.М. Ляпунову [13] задачу устойчивости выбранного решения всегда можно привести к исследованию нулевого решения. При этом для решения автономной системы, включая многочастотное колебание, получается особый случай в теории устойчивости. Для периодического решения автономной системы применяется теорема Андронова–Витта [14] об устойчивости.

В автономной системе решение представляет собой семейство по параметру β – сдвигу начальной точки на траектории. Поэтому различаются две задачи стабилизации: стабилизация всего семейства решений и стабилизация выбранного решения из указанного семейства. Обычно решается вторая из задач, при этом используются управления, зависящие явно от времени. Некоторые такие постановки задач управления одночастотными колебаниями даются в [15–21].

При стабилизации всего семейства решений необходимо, чтобы траектории управляемой системы притягивались к семейству; это накладывает требование сохранения автономности исходной системы и применения автономного управления. При этом используются известные понятия: устойчивость по части переменных [22], характеризующая отклонение траекторий семейства от остальных траекторий, орбитальная устойчивость и орбитальная асимптотическая устойчивость, притяжение [23]. В теореме Андронова–Витта [14] притяжение обеспечивается наличием корней характеристического уравнения в левой полуплоскости.

Действие управления приводит к тому, что замкнутая система уже не допускает исходное решение. Поэтому в управляемой системе стабилизируется близкое к исходному решение. Близость замкнутой системы к исходной систе-

ме обеспечивается применением управления с малым коэффициентом усиления регулятора. Такой подход характерен для теории возмущений; впервые его применил Л.С. Понтрягин [5]. Притяжение к семейству (решению) дается диссипацией – силой, линейной по скорости и действующей в каждой точке траектории. При этом управлением одновременно обеспечивается изолированность стабилизируемого колебания. Хрестоматийным примером такой стабилизации является уравнение Ван дер Поля [6]. Обзор дальнейших исследований по применению диссипации типа Ван дер Поля приводится в [9] и включает библиографию в статье. Рассматривались только одночастотные колебания.

2. Симметричные многочастотные колебания лагранжевой системы, подверженной действию позиционных сил

Рассматривается гладкая система, описываемая уравнениями Лагранжа второго рода

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s(q_1, \dots, q_n), \quad s = 1, \dots, n,$$

и подверженная действию позиционных сил Q_s . В общем случае сила $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ является суммой потенциальной силы и неконсервативной позиционной силы. Кинетическая энергия T представляется положительно определенной квадратичной формой скоростей; уравнениями (1) описывается динамика в инерциальной системе координат. Система (1) инвариантна относительно преобразования $(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, -\dot{q}, -t)$ и принадлежит к классу обратимых механических систем. Фазовое пространство системы (1) симметрично относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$. Равновесие системы (1) находится на M . Симметричные движения пересекают множество M : в точке пересечения скорость $\dot{q} = 0$. Несимметричные движения реализуются в паре; они расположены симметрично друг другу относительно M , а направления движений в паре взаимно противоположны. Дважды пересекающее множество M симметричное движение представляет собой одночастотное симметричное колебание.

Пусть для равновесия $q = (q_1, \dots, q_n) = 0$. В системе (1) корни характеристического уравнения разбиваются на пары $\pm \lambda_s$. Система (1) изучается в предположении, что все λ_s считаются чисто мнимыми, а числа $|\lambda_s| > 0$ – несоизмеримыми. Тогда все движения в линеаризованной системе близ равновесия будут описываться квазипериодическими функциями с k частотами, где $1 \leq k \leq n$. Они представляют собой симметричные колебания (СК). При $k = 1$ имеем одночастотное колебание, при $k > 1$ говорят о многочастотном колебании.

СК начинается в точке $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \in M$ при $t = 0$ и описывается функцией $q(q^0, t)$, в которой произвольный сдвиг β начальной точки на траектории полагается нулевым. В следующий раз СК по координате q_s будет иметь нулевую скорость $\dot{q}_s$ в момент времени t_s . В исследуемом случае числа t_s пред-

полагаются несоизмеримыми. Поэтому на СК для скоростей $\dot{q}_s$ в моменты времени $t = t_s$ выполняются равенства

$$(2) \quad \dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, t) = 0, \quad t = t_s; \quad s = 1, \dots, n.$$

В левых частях равенств (2) записаны скорости $\dot{q}_s$ для решения системы (1) как функции начальной точки q^0 и времени t . Равенства (2) означают, что по каждой переменной q_s в фазовом пространстве имеется замкнутая кривая. Условия (2) будут необходимыми и достаточными для существования СК исследуемой системы (1). Они могут выполняться в (2) по k скоростям $\dot{q}_s$, $s = 1, \dots, k$, $k \leq n$. При $k = n$ система (1) допускает СК с максимально возможным числом частот, при $k < n$ в начальной точке q^0 ускорения равны $\ddot{q}_{k+1} = \dots = \ddot{q}_n = 0$ и $t_{k+1} = \dots = t_n$, поэтому система имеет СК с $k < n$ частотами: при $k = 1$ получается одночастотное СК. Каждая координата q_s дается $2t_s$ -периодической функцией времени t , поэтому СК описывается квазипериодической функцией $(q(q^0, t), \dot{q}(q^0, t))$ с k частотами. При $k = 1$ функция будет периодической. При $k = n$ траектория в фазовом пространстве принадлежит прямому произведению n замкнутых кривых – симметричному n -тору; при $k < n$ получаются k -мерные симметричные торы.

В равенствах (2) по каждой переменной q_s отсчитывается свое время t_s . Единое время γ по всем переменным СК вводится по формуле $t_s = \nu_s \gamma$. По времени γ происходит одновременное обращение всех скоростей в нуль: многочастотное СК можно исследовать как *воображаемое* симметричное периодическое движение с индивидуальным временем по каждой переменной. Равенства (2) записаны для фиксированных чисел $t_s = t_s^*$. Значит, при $t_s^* = \nu_s \gamma^*$ число γ^* , как и в случае одночастотного СК периода $2\gamma^*$, имеет смысл момента времени пересечения траекторией неподвижного множества M . Поэтому с введением единого времени γ возникает понятие *общего периода* по всем переменным многочастотного СК. Оно равно $2\gamma^*$, и это число выделяет рассматриваемое СК в семействе. Число γ^* обозначается через τ и называется параметром СК. Оно характеризует переход одного СК к другому и зависит от начальной точки q^0 для СК.

Понятия единого времени и общего периода позволяют строить теорию многочастотного СК подобно теории для симметричного периодического движения. Последнее представляет собой СК с $k = 1$; на нем полупериод выполняет роль параметра τ .

Равенства (2) представляются в виде

$$(3) \quad \dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \nu_s \tau) = 0, \quad s = 1, \dots, n.$$

Условие несоизмеримости чисел в множестве $\{t_s^*\}$ переходит к набору $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$: ν называется *базисом* (частот) СК. При переходе одного СК к другому меняется точка $q^0 \in M$. Равенства (2) рассматриваются как система уравнений для нахождения чисел $t_s = \nu_s \tau$. В равенствах (3) с параметром τ находится начальная точка q^0 , а базис ν необходимо будет определяться с точностью до множителя $\delta(q^0)$ и таким образом сохраняется. Раз равенства (3)

числом n связывают $n + 1$ переменных $q_1^0, \dots, q_n^0, \tau$, то они приводят к семейству СК размерности n с параметром τ . В случае $k < n$ равенств в (3) размерность семейства СК равняется k .

При продолжении семейства СК по параметру τ меняется проекция СК на неподвижное множество M ; на интервале $\Delta\tau$ проекция приводит к области q^0 начальных точек для локального семейства СК. Это множество также получается путем пропорционального изменения элементов базиса ν с сохранением несоизмеримости множества чисел ν_s в базисе. При этом базис, определяемый с точностью до множителя δ , не меняется. Получается другой способ локального продолжения СК. Оба способа приводят к одному результату.

3. Рождение СК из равновесия

Рассмотрим СК с k частотами и начальной точкой $q^0 \in M$. Для него справедливы равенства (3). Они связывают переменные q^0 и τ . В точке q^0 вычисляется матрица Якоби

$$(4) \quad J(q^0, \tau) = \left\| \frac{\partial \dot{q}_s(q^0, \tau)}{\partial q_j^0} \right\|.$$

Определение 1. Симметричное колебание с k частотами ($1 \leq k \leq n$), для которого выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$, называется невырожденным.

Для невырожденного СК выполняются локальные свойства продолжения.

1°. Невырожденное СК локально продолжается по параметру τ .

Пусть справедливы (3). Для данного невырожденного СК составим уравнения в отклонениях $\Delta q^0, \Delta\tau$ в линейном приближении. Получим линейную систему уравнений

$$(5) \quad \frac{\partial \dot{q}_s(q^0, \tau)}{\partial q_1^0} \Delta q_1^0 + \dots + \frac{\partial \dot{q}_s(q^0, \tau)}{\partial q_n^0} \Delta q_n^0 + \frac{\partial \dot{q}_s(q^0, \tau)}{\partial \tau} \Delta\tau = 0, \quad s = 1, \dots, n.$$

В этой системе основная матрица совпадает с $J(q^0, \tau)$, а правая часть представляется вектором ускорения со знаком минус, вычисленным на M . Для невырожденного СК справедливо неравенство $\det J(q^0, \tau) \neq 0$: вектор ускорения равен нулю только для равновесия. Поэтому система совместна, а СК получает локальное продолжение по $\Delta\tau$ как в сторону увеличения, так и уменьшения $\Delta\tau$. Одновременное приращение получает множитель $\delta(q^0)$.

2°. Невырожденное СК локально продолжается по параметру системы μ .

Для системы с параметром μ система (5) содержит этот параметр и, кроме этого, в систему добавляется слагаемое с приращением $\Delta\mu$. Для невырожденного СК матрица Якоби невырождена, поэтому продолжение проводится по τ и μ . Ограничиваясь только приращением по μ , получаем свойство 2°.

В окрестности равновесия система (1) записывается в виде

$$(6) \quad \ddot{q}_s + \sum_{j=1}^n a_{sj} q_j + \tilde{Q}_s(q, \dot{q}) = 0, \quad \tilde{Q}_s(q, \dot{q}) = \tilde{Q}_s(q, -\dot{q}), \quad s = 1, \dots, n,$$

где $\|a_{sj}\|$ – постоянная матрица, $\tilde{Q}_s$ – нелинейные функции.

Справедлива

Теорема 1 (о рождении СК). *Окрестность равновесия системы (6) с несоизмеримыми частотами ν_s , $s = 1, \dots, n$, линейной системы заполняется семействами невырожденных СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Они параметризуются расстоянием от равновесия.*

Доказательство. Выполним замену $(q, \dot{q}) \rightarrow (\varepsilon \xi, \varepsilon \dot{\xi})$. Тогда в переменных ξ_s получается квазилинейная система, которая в линейном приближении совпадает с линейным приближением в системе (6).

При $\varepsilon = 0$ полученная система допускает невырожденное СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Для нее матрица $J(0, 0) = -\|a_{sj}\|_1^n$, $\text{rank } J(0, 0) = n$, а базис для колебаний с k частотами содержит k чисел из набора $\nu(0) = \{\nu_s(0)\}$, $\nu_s(0) = |\lambda_s|$. При этом система, содержащая СК с k частотами, описывается k переменными и базис СК включает k чисел.

Для всех систем выполняется свойство продолжения СК линейной системы по параметру ε : квазилинейная система обладает семействами по ε невырожденных СК со всеми частотами: $1 \leq k \leq n$. При рассмотрении СК со всеми возможными частотами k , $1 \leq k \leq n$, окрестность равновесия системы (6) полностью заполняется семействами невырожденных СК, параметризованных расстоянием ε от равновесия. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Для $k = 1$ выводится [11, 12] обратимый аналог теоремы Ляпунова о центре [13].

Замечание 2. В условиях теоремы 1 равновесие системы устойчиво.

4. Глобальное семейство невырожденных СК в фазовом пространстве

Невырожденное СК обладает локальным свойством продолжения по параметру семейства τ . В следующей теореме 2 формулируется результат о глобальном продолжении СК по параметру τ .

Определение 2. Семейство по параметру τ невырожденных СК называется глобальным семейством СК, если параметр τ принимает все возможные для этого семейства значения.

Теорема 2 (о глобальном семействе СК в фазовом пространстве). *Пусть лагранжева система, подверженная действию позиционных сил, допускает невырожденный СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Тогда СК всегда продолжается по параметру семейства τ на глобальное семейство Σ_k невырожденных СК, на котором параметр τ меняется монотонно. На глобальном семействе выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$. На границе семейства это условие нарушается.*

Доказательство. При локальном продолжении невырожденного СК с k частотами по τ его начальная точка $q^0(\tau)$ будет функцией τ . При этом на неподвижном множестве M образуется область $\Upsilon_k(q^0, \tau)$, для точек которой выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$. Применим свойство локальной продолжимости невырожденного СК к точкам области $\Upsilon_k(q^0, \tau)$. Тогда возникают две ситуации. В первой ситуации область $\Upsilon_k(q^0, \tau)$ не приобрела новых точек. Тогда глобальное семейство Σ_k построено. Во второй ситуации область $\Upsilon_k(q^0, \tau)$ увеличилась, что сопровождается монотонным изменением параметра τ . Опять возникают две ситуации.

В результате на каком-то шаге итерации глобальное семейство Σ_k строится или же процесс построения продолжается с бесконечным приближением к границе области начальных точек $\Upsilon_{\sigma k}(q^0, \tau)$ для глобального семейства Σ_k . В каждой точке этой области выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$. Монотонное изменение СК семейства Σ_k по параметру τ следует из построения. Теорема доказана.

Замечание 3. Доказательство теоремы 2 справедливо для СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Для одночастотного колебания ($k = 1$) результат описан в [24].

Замечание 4. Для аналитической системы (6) при условии несоизмеримости чисел $\nu_1, \dots, \nu_n$ в [25] строится формальное преобразование к системе с многообразиями размерности k , $1 \leq k \leq n$. Система (6) обладает свойством обратимости; условия сходимости этого преобразования приводятся в [25] (с. 185, теорема 2). В результате фазовое пространство содержит n многообразий, на каждом из которых реализуется одночастотное СК.

5. Глобальное продолжение невырожденного СК в параметрическом пространстве системы

Невырожденное СК обладает свойством локального продолжения по параметру системы μ . Таким образом, в теории возмущений СК системы (1) вместе с невырожденным СК всегда существует невырожденное возмущенное СК. Вопрос границы существования невырожденного СК по параметру μ в теории возмущений не решается. В приложениях граница обычно находится прямым вычислением.

В следующей теореме 3 формулируется результат о глобальном продолжении невырожденного СК по параметру μ . В общем случае параметр $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ является вектором.

Теорема 3. Пусть лагранжева система с параметром μ , подверженная действию позиционных сил, допускает СК с параметром μ , невырожденное при $\mu = \mu^*$. Тогда данное СК продолжается глобально на всю область изменения μ . На глобальном по параметру μ семействе невырожденных СК выполняется условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$. На нем базис ν сохраняется. На границах глобального семейства условие $\text{rank } J(q^0, \tau) = n$ нарушается.

Доказательство. Для СК с параметром μ , невырожденного при $\mu = \mu^*$, выполняется свойство 2°. Оно применяется для глобального продолжения по μ точно также, как и при глобальном продолжении невырожденного СК по параметру τ с применением свойства 1°. Продолжение по μ выполняется до тех пор, пока не исчерпается вся область по μ , в которой $\det J(q^0(\mu), \tau) \neq 0$.

Замечание 5. Теорема 3 касается параметра μ , от которого зависит СК. Возможность другой ситуации демонстрируется в примере 2 данной статьи.

Применение теорем 2 и 3 к невырожденному СК приводит к такому выводу.

Общее положение. Если лагранжева система, подверженная действию позиционных сил, допускает невырожденное СК, то оно продолжается глобально в параметрически-фазовом пространстве.

Замечание 6. В статье применяется подход Л.С. Понтрягина [26] к автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям, в котором равны параметры и фазовые переменные.

6. Область колебаний и задача стабилизации СК системы (6)

Рассматривается система (6) с несоизмеримыми частотами $\nu_1, \dots, \nu_n$ в линейной системе. В окрестности равновесия по теореме 1 рождаются СК с k частотами, $1 \leq k \leq n$, которые заполняют всю окрестность равновесия. Продолжение СК по параметру τ (теорема 2) приводит в фазовом пространстве к области колебаний Ω , примыкающей к равновесию и заполненной глобальными семействами СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Они обозначены через Σ_k : число семейств равно сочетанию C_n^k . Семейство Σ_k заполняет интегральное многообразие $\tilde{\Sigma}_k$. Каждое СК в семействе Σ_k выделяется значением параметра τ .

В данной статье подход в [9], предложенный для одночастотного СК, развивается для многочастотных СК. В задаче стабилизации СК для системы (6) строится автономная управляемая система, ε -близкая к (6), в которой выделяется изолированное колебание (ИК). В возмущенной системе многообразию $\tilde{\Sigma}_k$ отвечает многообразие $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$: $\tilde{\Sigma}_k = \tilde{\Sigma}_k(0)$. С выделением ИК одновременно решается задача его орбитальной асимптотической устойчивости. Обычно ставится локальная задача притяжения, в которой к ИК притягиваются траектории из его окрестности. Однако структура области Ω позволяет ставить задачу притяжения всех траекторий из $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$, а также из окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ [9]. Таким образом происходит, например, в уравнении Ван дер Поля [6] ($k = 1$). В консервативной системе с одной степенью свободы притягиваются все траектории из области колебаний [9].

В консервативной системе кинетическая энергия на множестве M равна нулю. При переходе от одного к другому СК семейства меняется потенциальная энергия $\Pi(q)$, вычисленная на M . Поэтому в качестве параметра СК вместо τ можно выбирать значение функции $\Pi(q)$ на M или постоянную h

полной механической энергии E . В силу монотонного изменения параметра τ на глобальном семействе энергия h меняется монотонно. Задавая значение h , получим все СК, принадлежащие данному уровню энергии. На графике функции $\Pi(q)$ значению $h = 0$ отвечает равновесие, при $h > 0$ рождающиеся СК с k частотами продолжают на глобальные семейства Σ_k неограниченно вместе с энергией h .

В консервативной системе СК в семействе Σ_k параметризуются постоянной h и образуют интегральные многообразия $\tilde{\Sigma}_k$ размерности k : $1 \leq k \leq n$. Поэтому данному значению h соответствуют СК всех размерностей k . По указанной причине находится управление, не зависящее от числа частот в СК. При этом для значения энергии $h = h^*$ исследуется притяжение к ИК на $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ со всеми номерами k : $1 \leq k \leq n$.

В случае $k = 1$ семейство Σ_1 описывается системой с одной степенью свободы. Поэтому задача стабилизации естественным образом распадается [9]: сначала решается задача притяжения на $\tilde{\Sigma}_1(\varepsilon)$, а в системе $(n - 1)$ -го порядка обеспечивается локальное притяжение к нулевому решению, которому отвечает ИК на $\tilde{\Sigma}_1(\varepsilon)$. Для него $h = h^*$.

Для СК с $k > 1$ частотами размерность $\tilde{\Sigma}_k$ равна k . Локальное притяжение к нулевому решению обеспечивается в системе $(n - k)$ -го порядка. Независимо от числа частот k нулевому решению в задаче отвечает ИК, соответствующее в управляемой системе энергии $h = h^*$.

В консервативной системе с n степенями свободы число стабилизируемых ИК управляемой системы с k частотами равно числу сочетаний без повторений C_n^k . Сумма по всем k будет числом всех стабилизируемых ИК.

7. Стабилизация СК консервативной системы

Рассмотрим управляемую (скорректированную) систему

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \varepsilon [1 - K \Pi_\varphi] \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}, \quad L = T - \Pi, \quad s = 1, \dots, n,$$

заданную уравнениями Лагранжа второго рода. Здесь T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия; вычисленная на семействе СК она обозначается через Π_φ . Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ система (7) допускает множество Σ_σ , содержащее все глобальные семейства СК, рожденные из равновесия с несоизмеримыми частотами $\nu_1, \dots, \nu_n$. Выбирается $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 – некоторое конечное число для Σ_σ ; h^* – значение энергии, отвечающее выделенному колебанию: равновесию соответствует значение $h = 0$. В системе (7) используется число K , которое равно значению $K(h^*)$ функции $K(h)$ для стабилизируемого колебания. Сама зависимость $K(h)$ будет определена далее в статье.

Система управления (7) применялась в [9] для адаптивной схемы стабилизации симметричного периодического движения ($k = 1$). Стоящее в правой

части равенства (7) управление является универсальным для стабилизации СК с $k = 1$. Оно представляется нелинейной силой, линейной по скорости. Система (7) при $\varepsilon = 0$ принадлежит к классу обратимых механических систем. Обратная связь реализуется через отслеживание в текущей точке траектории замкнутой системы значения потенциальной энергии $\Pi(q)$.

В задаче стабилизации важно понимать, что в исследуемой системе (при $\varepsilon = 0$) в множестве глобальных семейств Σ_σ реализуется единственное семейство Σ_k . Более того, на семействе Σ_k реализуется единственное СК, которое отвечает параметру τ (в консервативной системе – энергии h). Поэтому ставится задача стабилизации единственного СК, отвечающего выделенному значению энергии $h = h^*$. Для этого СК переменные $q_{k+1} = \dots = q_n = 0$.

Далее приводятся вычисления, справедливые для всех глобальных семейств Σ_k с k частотами, $1 \leq k \leq n$, независимо от числа частот k колебаний.

Для системы (7) при $\varepsilon = 0$ определяется полная механическая энергия – функция

$$(8) \quad E \equiv T(q, \dot{q}) + \Pi(q).$$

Она принимает постоянное значение h на решениях консервативной системы. Для системы (7) справедливо равенство

$$(9) \quad \frac{dE}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi_\varphi]T(q, \dot{q}).$$

При $\varepsilon = 0$ имеем: $E = h(\text{const}) > 0$. На СК координата $q = \varphi$. СК образуют глобальное семейство Σ_k , принадлежащее инвариантному интегральному многообразию $\tilde{\Sigma}_k$. Стабилизируется СК с параметром $\tau = \tau^*$ ($h = h^*$).

Энергия E будет суммой двух слагаемых: $E = E_\varphi + E_\varepsilon$, где E_φ вычисляется на решениях в $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$, а E_ε – на решениях в окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$. В законе для E_ε используется кинетическая энергия при движении в ε -окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$. Она является квадратичной формой скоростей $\dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n$. Таким образом, движение в окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ отслеживается потенциальной энергией СК на Σ_k .

Для $\varepsilon > 0$ записываются выражения

$$\Pi(q) = \Pi(\varphi) + h\varepsilon\rho(\varepsilon, h, q), \quad T = E - \Pi(q) = h - \Pi(\varphi) + h\varepsilon\sigma(\varepsilon, h, q)$$

($\Pi(\varphi) = \Pi_\varphi$) с функциями ρ и σ порядка единицы. В результате в правой части равенства (9) выделяется главное слагаемое

$$f = \varepsilon[(1 - K(h^*)\Pi_\varphi)](h - \Pi(\varphi)),$$

которое вычисляется на СК; оно не содержит t в явном виде.

Для СК в разделе 2 вводилось *единое* для всех переменных q_s время γ . Тем самым многочастотное СК в функции E рассматривается здесь как одночастотное СК с *общим периодом*, равным 2τ . Время γ определяется с точностью до множителя. В едином времени скорость изменения переменной q_s

приобретает свой индивидуальный множитель ν_s такой, чтобы в наборе $\{\nu_s\}$ числа были несоизмеримыми. Наконец, потенциальная энергия в функции f вычисляется на СК $q = \varphi$: f также меняется, как функция γ .

В едином времени γ скорость изменения энергии пропорциональна ее скорости по времени t . Поэтому приращение $\Delta E_\varphi(\varepsilon, h)$ энергии по γ вычисляется по правой части (9) как интеграл за период 2τ по переменной γ . Получается формула

$$(10) \quad \Delta E_\varphi(\varepsilon, h) = \varepsilon 2\tau(h)[I(h) + \varepsilon h \Phi(\varepsilon, h)],$$

справедливая на всем глобальном семействе Σ_k . Семейство Σ_k состоит из СК, причем каждому значению h отвечает только одно СК. Если в точке $h = h^*$ выполняется равенство $\Delta E_\varphi(\varepsilon, h^*) = 0$, то значение h^* соответствует k -частотному колебанию. Колебание будет несимметричным, так как для симметричного колебания $\varepsilon = 0$. Для изолированного корня h^* колебание будет изолированным. Получается изолированное колебание (ИК), которое в случае $k = 1$ является циклом. ИК является однопараметрическим семейством по сдвигу начальной точки для колебания.

Функция $I(h)$ имеет вид

$$(11) \quad I(h) \equiv \int_0^{2\tau^*} [1 - K(h^*)\Pi_\varphi](h - \Pi(\varphi))d\gamma$$

и дает амплитудное (бифуркационное) уравнение $I(h) = 0$ для многочастотного СК. Как и в случае симметричного периодического движения в [9], простой корень h^* уравнения (11) приводит в точке $h = h^*$ семейства k -частотного СК к бифуркации и рождению k -частотного ИК.

В интеграле (11) функция $\Pi(\varphi)$ на семействе СК вычисляется через координату $q = \varphi(h, \gamma)$, заданную в едином для СК времени γ . При замене в интеграле (11) переменной γ на $\tilde{\gamma} = (\tau^*/\tau(h))\gamma$, где $\tau^* = \tau(h^*)$ для стабилизируемого с энергией h^* колебания, координата q будет напрямую зависеть от $\tilde{\gamma}$.

В случае $k = 1$ семейство нелинейных колебаний приводится к изохронному семейству в [9].

Потенциальная энергия на СК меняется как функция $\tilde{\gamma}$, поэтому с учетом равенства $\Pi(\varphi(h, 0)) = h$ она записывается в виде $\Pi(\varphi(h, \tilde{\gamma})) = hz(\tilde{\gamma})$, $0 \leq z \leq 1$. В результате интеграл (11) принимает вид

$$(12) \quad I(h) \equiv 2h \int_0^1 (1 - K(h^*)hz(\tilde{\gamma}))(1 - z(\tilde{\gamma}))d\tilde{\gamma}$$

и представляется квадратичной функцией без свободного члена

$$(13) \quad I(h) = 2h(\alpha - \beta h), \quad \alpha = \int_0^1 (1 - z)d\tilde{\gamma}, \quad \beta = -K(h^*) \int_0^1 z(1 - z)d\tilde{\gamma}.$$

Из записи (13) становится ясным, что уравнение $I(h) = 0$ допускает единственный корень $h^* = \alpha/\beta$, отличный от нулевого. Корень h^* отвечает многочастотному ИК управляемой системы (7). Это колебание ε -близко к СК со значением энергии $h = h^*$, однако колебание не является симметричным.

Заметим, что каждому числу $K(h^*)$ однозначно ставится в соответствие корень $h = h^*$ и наоборот. Таким образом, определяется функция

$$K(h) = \frac{b}{h}, \quad b = \text{const}, \quad b > 0.$$

Кинетическая энергия на неподвижном множестве M равна нулю, поэтому по постоянной b различаются на СК потенциальные энергии исследуемых систем.

Вычисления корня уравнения $I(h) = 0$ проводятся для однопараметрического по h семейства Σ_k траекторий в ε -скорректированной системе. Корень h^* соответствует неподвижной точке отображения, заданной на многообразии $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$, а его изолированность свидетельствует о том, что существование корня выводится посредством линейных по ε (главных) слагаемых. Поэтому $\Delta E_\varphi(\varepsilon, h^*) = 0$. Как следствие, справедливо равенство $\Phi(\varepsilon, h^*) = 0$.

Лемма 1. Уравнение

$$(14) \quad I(h) + \varepsilon h \Phi(\varepsilon, h) = 0$$

при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет единственный корень, где ε_0 – не зависящее от h^* число.

Доказательство. Подробная процедура нахождения числа ε_0 полностью совпадает с той, которая описана для одночастотного колебания в [9, Лемма 1].

Далее скорректированная система (7) исследуется при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Рассматривается интегральное многообразие $\tilde{\Sigma}_k$, содержащее глобальное семейство СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Оно получено продолжением по параметру h малых колебаний с несоизмеримыми частотами.

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть консервативная система описывается уравнениями Лагранжа второго рода и допускает равновесие с несоизмеримыми частотами малых колебаний. Тогда система имеет интегральное многообразие $\tilde{\Sigma}_\sigma$, содержащее множество Σ_σ из глобальных семейств Σ_k колебаний с k частотами, которые заполняют многообразия $\tilde{\Sigma}_k$: $1 \leq k \leq n$. Для скорректированной системы (7) всегда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система (7) обладает ИК с k частотами, $1 \leq k \leq n$, ε – близкое к колебанию консервативной системы с энергией $h = h^$. Число ИК колебаний с k частотами дается сочетанием C_n^k . Каждое ИК притягивает траектории из $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ и траектории из ε -окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$. Закон изменения энергии $E = T + \Pi$ консервативной системы на решениях скорректированной системы дается равенством (9).*

Доказательство. Существование глобального семейства Σ_σ при условии несоизмеримости частот для равновесия следует из теорем 1, 2. Граничное число ε_0 устанавливается леммой 1. Формула (10) справедлива для СК с k частотами: $1 \leq k \leq n$. Проведенный анализ формулы (10) свидетельствует о существовании изолированного колебания с k частотами, ε -близкого к колебанию консервативной системы с энергией h^* . В системе (7) вся область начальных точек для решений, отличных от равновесия, принадлежит $\tilde{\Sigma}_\sigma$.

Формула (9) справедлива по отдельности для E_φ и E_ε . При этом скорость изменения E_φ по знаку совпадает со скоростью изменения энергии E_ε : применяются разные кинетические энергии. В результате при стремлении $h \rightarrow h^*$ одновременно справедливы пределы

$$\Delta E_\varphi(\varepsilon, h) \rightarrow \Delta E_\varphi(\varepsilon, h^*) = 0, \quad \Delta E_\varepsilon(\varepsilon, h) \rightarrow \Delta E_\varepsilon(\varepsilon, h^*) = 0.$$

Первый предел означает, что в управляемой системе (7) для точек из $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ все траектории стремятся к ИК, отвечающему СК с энергией h^* из Σ_k . Согласно второму пределу траектории из окрестности $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ стремятся к $\tilde{\Sigma}_k(\varepsilon)$ с нулевым предельным значением соответствующей кинетической энергии. Поэтому эти траектории также стремятся к ИК.

Число ИК с k частотами совпадает с числом сочетаний C_n^k интегральных многообразий, на которых реализуются k -частотные СК.

Теорема 4 доказана.

Замечание 7. Теорема 4 справедлива для СК с частотами k : $1 \leq k \leq n$. Для частного случая $k = 1$ она установлена в [9]: в ней условия на корни характеристического уравнения ослабляются.

Пример 1. Распознавание источников сигнала выделением частот. Рассматриваются два линейных осциллятора с частотами ω_x и ω_y . В системе они обладают семействами симметричных двухчастотных колебаний, вырождающихся в два семейства одночастотных колебаний. Для стабилизации ИК управляемой системы применяется замкнутая система

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} + \omega_x^2 x &= \varepsilon(1 - K(h^*)\Pi)\dot{x}, \\ \dot{y} + \omega_y^2 y &= \varepsilon(1 - K(h^*)\Pi)\dot{y}, \quad \Pi = (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)/2, \end{aligned}$$

в которой коэффициент $K(h^*)$ вычисляется по значению энергии $h = h^*$ всей системы. Стабилизация всех ИК происходит по одному сценарию. Система (15) содержит два инвариантных многообразия, на которых стабилизируются отдельные осцилляторы.

Сигнал улавливается по энергии. В системе (15) в принятом сигнале выделяются частоты колебаний и по частотам распознаются их источники. При этом с ростом числа осцилляторов в системе возможности распознавания растут.

Симметричное колебание гармонического осциллятора с частотой ω дается формулой $r = A \cos(\omega t)$, $A^2 = h/2$. В случае одного осциллятора формула для коэффициента будет $K(h) = 2/h$.

В (15) имеем базис частот $\nu = (\omega_x, \omega_y)$, единое время $\gamma = t$. Поэтому система из двух осцилляторов колеблется как один гармонический осциллятор с частотой ω . Формула $K(h) = 2/h$ остается справедливой для системы (15). Поэтому в системе (15) полагается:

$$K(h^*) = 2/h^* = 1/(A_x^2\omega_x^2 + A_y^2\omega_y^2),$$

где A_x и A_y – амплитуды колебаний осцилляторов соответственно с энергиями h_x^* и h_y^* .

Пример 2. Пусть система из двух осцилляторов из примера (15) является линейным приближением гладкой системы

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{x} + \omega_x^2 x &= X(x, y), \\ \dot{y} + \omega_y^2 y &= Y(x, y), \quad X(0, 0) = Y(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Для пристального изучения окрестности нуля увеличим масштаб для наблюдения системы: $x = \varepsilon\xi$, $y = \varepsilon\eta$. В результате приходим к квазилинейной системе

$$(17) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega_x^2 \xi &= \varepsilon X(\varepsilon, \xi, \eta), \\ \ddot{\eta} + \omega_y^2 \eta &= \varepsilon Y(\varepsilon, \xi, \eta), \quad X(\varepsilon, 0, 0) = Y(\varepsilon, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$ система (17) допускает одночастотные и двухчастотные СК: последние имеют базис (ω_x, ω_y) . По теореме 1 при $\varepsilon > 0$ окрестность равновесия заполняется семействами СК с одним и двумя частотами. По теореме 2 каждое локальное семейство СК продолжается в системе (16) на глобальное семейство СК и заполняет область колебаний в системе.

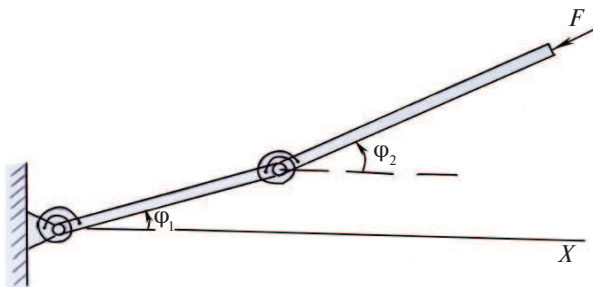
Пример 3. Модель упругого стержня под действием следящей силы [27, с. 204].

Колебания балок, канатов, тросов часто изучаются на основе адекватных дискретных стержневых моделей. Рассматривается частный случай из [27], когда механическая система состоит из двух идентичных стержней с массой m и длиной l , связанных шарниром и линейной пружиной с жесткостью c_2 (см. рисунок).

Первый стержень прикреплен шарниром и пружиной с жесткостью c_1 к неподвижной точке O . На конец второго стержня действует постоянная сила F , направленная вдоль оси стержня. Система расположена на гладкой горизонтальной плоскости. Отклонения стержней от оси x задаются соответственно углами φ_1 , φ_2 , отсчитываемыми от прямой x , для равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Кинетическая энергия T и обобщенные силы Q_1, Q_2 равны

$$(18) \quad \begin{aligned} T &= \frac{ml^2}{6} [4\dot{\varphi}_1^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_2^2], \\ Q_1 &= c_1\varphi_1 + c_2(\varphi_2 - \varphi_1) - Fl \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad Q_2 = c_2(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$



Модель упругого стержня под действием следящей силы.

Имеем лагранжеву систему с двумя степенями свободы, подверженную действию позиционных сил. При $F = 0$ система будет консервативной.

В равновесии силы $Q_1 = Q_2 = 0$: система допускает единственное (нулевое) равновесие. Составим характеристическое уравнение для равновесия:

$$(19) \quad 7\lambda^4 + \frac{6a}{ml^2}\lambda^2 + \frac{36}{m^2l^4}c_1c_2 = 0, \quad a = 2c_1 + 16c_2 - 5Fl.$$

При выполнении условия $a^2 > 28c_1c_2$ корни уравнения будут чисто мнимыми $\lambda = \pm i\omega_{1,2}$, а квадраты частот даются формулами

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3}{7ml^2}(a \pm \sqrt{a^2 - 28c_1c_2}).$$

При этом находится граничное значение следящей силы F для устойчивости прямолинейной конфигурации стержня в линейном приближении. Интересно, как поведут себя колебания стержня при конечных углах отклонения?

Согласно теореме 1 при условии несоизмеримости частот окрестность равновесия заполняется семействами невырожденных одночастотных и двухчастотных СК, которые продолжаются по теореме 2 на глобальные семейства невырожденных СК. Тем самым к окрестности равновесия примыкает только область колебаний, заполненная невырожденными СК. Равновесие системы является устойчивым в целом.

Теорема 2 применяется к системе с фиксированным параметром F , для которого выполняется условие несоизмеримости частот. В теореме 3 нелокальное продолжение многочастотного колебания по параметру проводится с сохранением базиса. При $F > 0$ числа $\omega_{1,2}$ зависят от F , базис меняется, поэтому теорема 3 не применима. Найденные невырожденные СК для счетных значений следящей силы F не реализуются.

Заметим, что качественные выводы для модели не зависят от числа стержней, а амплитуда колебаний ограничивается только жесткостью пружин.

При $F = 0$ симметричные колебания существуют; стабилизация этих колебаний происходит согласно теореме 4 в адаптивной схеме (7).

8. Заключение

Лагранжева система, подверженная действию позиционных сил, инвариантна при преобразовании $(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, -\dot{q}, -t)$ (относится к классу обратимых механических систем). Фазовое пространство системы симметрично относительно множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$. Анализируется равновесие, допускающее малые колебания с несоизмеримыми частотами. Окрестность равновесия заполняется симметричными колебаниями (СК) с k частотами: $1 \leq k \leq n$ (n – число степеней свободы системы). Других движений в окрестности нет. Все СК продолжаются на глобальные семейства СК и образуют область глобальных колебаний Ω , примыкающую к равновесию. Семейства СК глобально продолжаются по параметру системы. Приведенные сведения установлены в статье и характеризуют предмет задачи стабилизации.

В автономной системе решения образуют семейство по сдвигу начальной точки на траектории. Различаются задачи стабилизации всего семейства решений и отдельного решения из семейства. Вторая задача решается управлением, зависящим явно от времени. Семейство решений стабилизируется конструированием скорректированной системы – управляемой системы с автономным управлением, которое действует с малым коэффициентом регулятора.

Результаты, изложенные в статье, стимулировались задачей стабилизации многочастотных колебаний обратимой механической системы. Ранее задача не ставилась. Сам предмет стабилизации ранее был известен только в части теории возмущений Пуанкаре.

В данной статье впервые описана глобальная теория симметричных многочастотных колебаний (симметричных условно-периодических решений, симметричных квазипериодических движений, симметричных условно-периодических орбит). Введены основные понятия, найдены необходимые и достаточные условия существования симметричного колебания, установлены локальные свойства о продолжении СК. Доказаны теоремы о рождении СК и его продолжении на глобальное семейство СК, теорема о глобальном продолжении СК по параметру системы. Теория основана на новых оригинальных идеях, что позволило дать доступное изложение теории без привлечения специальных знаний. Таким образом, построена завершенная теория симметричных многочастотных колебаний для лагранжевой системы, подверженной действию позиционных сил.

На основе построенной теории поставлена и решена задача стабилизации (в большом) многочастотных колебаний консервативной системы. В статье применяется обратная связь, идея которой предложена недавно автором [9] и опробована для одночастотных колебаний. Предлагается система управления (7), которая не зависит от числа частот в СК. В адаптивной схеме стабилизируется изолированное колебание (ИК) управляемой системы. Для случая k частот находится ИК, близкое к СК с желаемой энергией h^* : СК при-

надлежит глобальному семейству Σ_k СК с k частотами. Стабилизация обеспечивается притяжением траекторий к ИК.

Применяемое автономное управление является универсальным: применяется к любой лагранжевой системе и стабилизирует колебания с k частотами: $1 \leq k \leq n$, где n – число степеней свободы системы. При этом построена скорректированная консервативная система, где через обратную связь отслеживается текущая потенциальная энергия на траектории многочастотного СК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
<https://mechmath.ipmnet.ru/lib/?s=asymptotic>
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейшатам А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985.
<https://mechmath.ipmnet.ru/lib/?s=ode>
4. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987.
5. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
6. *Van der Pol.* On relaxation-oscillations in the circuit with non-linear resistance // Philos. Mag. 1927. Ser. 7. V. 3. No. 13. P. 65–80.
7. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. Пер. с фр. <https://search.rsl.ru/ru/record/01006011393>
8. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. Переработка и доп. Н.А. Железцова. 2-е изд.
<https://search.rsl.ru/ru/record/01005974002>
9. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний в автономной скорректированной консервативной системе путем конструирования притягивающего цикла // АиТ. 2025. № 6. С. 43–60.
Tkhai V.N. Stabilization of Oscillations in an Autonomous Corrected Conservative System by Constructing an Attracting Cycle // Autom. Remote Control. 2025. V. 86. No. 6. P. 43–60. <https://doi.org/10.31857/S0005117925060037>
10. *Тхай В.Н.* Адаптивная схема стабилизации колебаний автономной системы // АиТ. 2024. № 9. С. 77–92. <https://doi.org/10.31857/S0005231024090046>
Tkhai V.N. An Adaptive Stabilization Scheme for Autonomous System Oscillations // Autom. Remote Control. 2024. V. 85. No. 9. P. 795–804.
<https://doi.org/10.1134/S000511792470019X>
11. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к N -планетной задаче // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 56–72.
12. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 56–72.

13. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения / Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263. <https://search.rsl.ru/ru/record/01005581860>
14. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // Журн. эксп. теор. физики. 1933. Вып. 5. С. 373–374.
15. *Boubaker O.* The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: a survey // Int. J. Adv. Robot. Syst. 2013. V. 10. No. 5. <https://doi.org/10.5772/55058>
16. *Fradkov A.L.* Swinging control of nonlinear oscillations // Int. J. Control. 1996. V. 64. Iss. 6. P. 1189–1202. <https://doi.org/10.1080/00207179608921682>
17. *Åström K.J., Furuta K.* Swinging up a pendulum by energy control // Automatica. 2000. V. 36. Iss. 2. P. 287–295. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00140-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00140-5)
18. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraints approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.852568>
19. *Kant K., Mukherjee R., Khalil H.* Stabilization of energy level sets of underactuated mechanical systems exploiting impulsive braking // Nonlinear Dynam. 2021. V. 106. P. 279–293. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06831-3>
20. *Guo Yu., Hou B., Xu Sh., et.al.* Robust stabilizing control for oscillatory base manipulators by implicit Lyapunov method // Nonlinear Dynam. 2022. V. 108. P. 2245–2262. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07321-w>
21. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // Космические исследования. 2022. Т. 60. № 5. С. 404–412. <https://doi.org/10.31857/S002342062204001X>
22. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению части переменных // Вест. МГУ. Серия Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1957. № 4. С. 9–16.
23. *Пуш Н., Абетс П., Лалюа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. Пер.с англ. М.: Мир, 1980.
24. *Тхай В.Н.* Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 165–179.
25. *Бруно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
26. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
27. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 24.08.2025

После доработки 12.01.2026

Принята к публикации 19.01.2026