

Управление в технических системах

© 2026 г. П.П. БОБРИК, канд. физ.-мат. наук (Bobrikpp@mail.ru)
(Институт проблем транспорта РАН им. Н.С. Соломенко, Москва)

ОПТИМАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ В РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ С МАЛЫМИ ПРОБКАМИ¹

Рассматриваются вопросы организации движения в транспортных сетях. Упор делается на наиболее простые и дешевые решения. Ищется оптимальная узловая навигация в сети с незначительными пробками. Доказано, что для квадратной решетки наибо́льшее движение в начало координат будет получаться при стремлении маршрута к координатным диагоналям с дальнейшим навиванием на них.

Ключевые слова: потоки на графе, гипподамова система, узловая навигация, малые пробки, управление с неполной информацией, задача быстрого действия, стоимость управления.

DOI: 10.7868/S2413977726080050

1. Введение

В настоящее время при движении автомобилей в городах практически повсеместным стало использование навигаторов. Они решают сразу несколько базовых задач: доступ к карте города, определение текущего местоположения, получение в реальном режиме времени информации о пробках и других характеристиках потоков и их регулирования, выбор наибо́льшего маршрута, целеуказания водителю в режиме реального времени.

Как правило, такие навигаторы бесплатны для пользователей, по крайней мере в своих простейших тарифах, из-за чего вопросы их стоимости редко поднимаются. Тем не менее на их функционирование постоянно идут существенные расходы. Это уличные камеры, средства связи, сбор информации в режиме реального времени, вычислительное оборудование, штат сотрудников различных структур организации движения, налоги и т.д. Другими словами, хотя конечные пользователи не видят этих затрат, они есть и проходят по бухгалтериям сторонних структур. И они порой достаточно существенны в пересчете на каждое единичное перемещение. В такой ситуации естественна постановка вопроса о сокращении подобных расходов.

Хотя данные проблемы наиболее явно и остро проявляются в автомобильных потоках мегаполисов, но в той или иной степени они характерны для

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания ИПТ РАН на 2026 г. (№ 075-00605-26-00).

всех транспортных сетей. В самом общем случае вопрос надо ставить так: как организовать движение с наименьшими сопутствующими затратами при выборе маршрута и следовании по нему?

Вопросы транспортного планирования в настоящее время настолько обширны и нетривиальны, что оформились в отдельную научную дисциплину [1]. Хотя алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего маршрута в графе является полиномиальным [2, 3], для крупных городов с миллионами узлов эта задача стала достаточно громоздкой. Отдельные водители без сложных информационно-вычислительных систем уже не могут ее хорошо решить. В результате потоки становятся все более хаотичными и подверженными влиянию посторонних информационных факторов, а сами перемещения по городу теряют эффективность. Вместо выбора оптимальных решений при прогнозе потоков все чаще стали использоваться вероятностные подходы, основанные на соображениях повторов прошлых ситуаций. При этом моделирование транспортных потоков в режиме реального времени получает все большее распространение в мире [4, 5].

Надежды последних лет на использование современных нейронных сетей, даже встроенных в базовые механизмы дедуктивных рассуждений [6, 7], также только частично могут помочь справиться со сложностью. Скажем, для них нужны примеры особенностей архитектурной застройки, которых нет в явном виде в исходных данных, используемых для обучения нейросети.

Все это невольно подталкивает к мысли, что задача чрезмерно усложнена [8]. И надо стараться ее максимально упростить. Как это нередко бывает, большинство транспортных проблем обуславливается внетранспортными причинами. Например, для городов пробки, как правило, обуславливаются неверными архитектурными и планировочными решениями, которые накапливаются столетиями, когда для свободного движения потока элементарно не хватает соответствующего объема дорог [9]. Соответственно в этих условиях многие транспортные решения по факту также являются внетранспортными. В качестве примера можно указать на перехватывающие парковки или фискальные ограничения на владельцев транспортных средств с целью снижения их числа в городах.

Одним из главных подходов для организации качественных перемещений по территории является формирование соответствующей городской застройки на горизонте планирования в десятки лет. И прежде всего создание правильной топологии улично-дорожной сети. Можно показать, что во многих случаях в качестве целевых целесообразно выбирать регулярные сети, т.е. сети с повторяющейся структурой [10]. Они являются оптимальными по многим параметрам, в том числе и внетранспортным. Их ценность подтверждается тем фактом, что они широко применяются на практике с древних времен.

В данной статье будет рассмотрена простейшая квадратная сеть. Хотя она не самая эффективная среди регулярных [11], но наиболее простая по структуре и поэтому наиболее удобная для выстраивания. Ее можно рассматри-

вать как целевую для многих территорий, позволяющую достичь высокого качества перемещений.

Как и в любой другой сети, в квадратной сети также могут возникать пробки. Поэтому для нее также актуальна задача перемещений в условиях неполной информации. В статье предлагается очень простой вариант навигации по квадратной сети без использования навигаторов или каких-либо других устройств. Доказывается, что он приводит к наибыстрейшему перемещению.

2. Постановка задачи

Рассмотрим некоторый конечный взвешенный граф $G(V, E, L)$, где $V = \{v_i\}$ – множество его вершин; $E = \{e_i\}$ – множество ребер, соединяющих его вершины; $L = \{l_i\}$, $l_i > 0$ – положительные длины ребер [2]. Будем считать, этот граф описывает некоторую транспортную сеть: улично-дорожную сеть мегаполиса, сеть железных дорог или даже грядки на поле. В общем случае ставится задача нахождения таких правил выбора движения из некоторой начальной вершины $u \in V$, чтобы в конечном итоге попасть в некоторую конечную вершину $v \in V$.

Рассмотрим вначале простейшую квадратную регулярную сеть, которая состоит из вертикальных и горизонтальных дорог. Выберем без ограничения общности такие единицы длины, чтобы координаты вершин описывающего ее графа имели бы целочисленные значения, а длина ребер между вершинами была бы равна единице. Тогда дороги описываются линиями:

$$(1) \quad x_i = \pm n, \quad y_j = \pm m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Расстояния между дорогами также равны единице.

Такая сеть имеет большое практическое значение при проектировании реальных транспортных систем. Например, при ее выборе возникают классические кварталы городов. Такая сеть даже получила в урбанистике специальное название гипподамова, по имени греческого архитектора Гипподама, применившего ее при восстановлении разрушенного в ходе греко-персидских войн Милета [12]. При проектировании транспортных коридоров в масштабах регионов и целых континентов нередко используется широтно-меридиональный принцип, который также приводит к квадратной сети. И даже грядки на полях появляются как разновидность этого подхода.

По дорогам сети можно перемещаться. Выберем такую единицу времени, чтобы скорость движения была бы равна единице. Тогда время движения между смежными узлами будет также единичным.

Без ограничения общности начальную точку отправления маршрута $u(n, m)$ разместим в первом координатном октанте, т.е. с положительными координатами, $n > 0$, $m > 0$. А в начало координат $v(0, 0)$ поместим конечную точку маршрута. Для такой сети требуется определить правила выбора

направления движения в каждом узле, чтобы самым коротким способом добраться из некоторой точки $u \in V$ в начало координат. Это, например, можно сделать, если в каждом узле выбирать такое ребро, движение по которому приводит к уменьшению расстояния до начала координат [13].

Отметим несколько простейших свойств этой сети.

Утверждение 1. В гипподамовой сети для любой пары точек, не лежащих на одной прямой сети, существует несколько кратчайших маршрутов одинаковой длины.

Следствие 1. При нарушениях проезда по какому-либо одному участку сети для вершин, не лежащих на одной прямой, найдется его обезд с такой же длиной маршрута.

Тем самым для гипподамовой сети характерно свойство устойчивости длины трафика при нарушениях, которое оказывается очень важным для практических приложений.

Определение 1. Расстоянием или длиной $l_{n,m} = n + m$ узла сети (n, m) будем называть протяженность его кратчайшего маршрута до начала координат узла в квадратной сети.

3. Случай пробок с малой вероятностью

Усложним теперь задачу. Пусть на некоторых ребрах графа могут возникать какого-либо рода препятствия свободному перемещению, которые далее будем называть пробками. Заранее расположения пробок неизвестно. То есть изначально это задача управления в условиях неполной информации. Но приходя в любой узел, получаем дополнительную информацию как о самом узле, так и о пробках на смежных ему ребрах: например, просто посмотрев на соответствующую дорогу; или на светофоре помимо цвета, разрешающего или запрещающего проезд, может показываться некоторое число этого же цвета, которое будет характеризовать интенсивность пробки; или каким другим способом. Другими словами, для водителя это локальная информация, доступная только в точке присутствия.

В такой постановке задачи информация, используемая для выбора дальнейшего направления движения, а также для ориентации и положения в сети, намного более простая и поэтому более дешевая, чем информация о всем графе G . При этом автоматически исключаются такие достаточно затратные задачи, как сбор информации о строении графа и текущем расположении пробок; не требуется использование бортового вычислительного устройства, обеспечение его связью с поставщиком информации; не нужно определять оптимальный маршрут (в случае большого графа с миллионами вершин это отдельная длительная задача) и убеждаться в его существовании, организовывать следование по маршруту. С этой точки зрения такое управление движением намного более простое и дешевое. Далее будет показано, что в условиях столь скудной информации такое управление существует. И оно да-

же будет приводить к оптимальным движениям. Но это становится возможным только за счет очень простой и повторяющейся структуры регулярной сети [14].

Будем предполагать, что для события, что на ребре обнаружится пробка, существует некоторая вероятность p , далее будем считать ее малой величиной.

На практике пробки могут быть очень разнообразными по своим свойствам. В данной работе будем считать, что пробка всегда проходима, т.е. начав движение по ребру с пробкой, обязательно попадем в смежный узел. Но время прохождения ребра в этом случае увеличивается на некоторую величину $d < 1$.

Утверждение 2. Если нет информации о наличии пробки на ребре, то математическое ожидание времени прохождения этого ребра будет равно $1 + pd$.

Доказательство. Есть два варианта. Либо на этой дороге будет пробка, либо нет. Если на ней будет пробка, то время движения составит $1 + d$, если нет пробки, то 1. Вероятности этих событий соответственно p и $1 - p$. Тогда математическое ожидание времени $M(e)$ прохождения ребра будет равно:

$$(2) \quad M(e) = p(1 + d) + (1 - p) \cdot 1 = 1 + pd.$$

Следствие 2. Ожидаемое среднее время прохождения ребра будет превышать время прохождения свободного ребра на величину не более первого порядка малости.

Как говорилось ранее, по условию задачи заранее не известно, где и когда возникнут пробки. В такой постановке задачи нельзя заранее объехать пробки, поскольку информация (не вся) о состоянии сети поступает только по мере движения. Соответственно, и задачу выбора дальнейшего направления движения вынуждены решать по мере движения.

Определение 2. Движение из точки в точку, когда время от времени выбирается направление движения, будем называть навигационным.

Отличительной особенностью навигации является то, что заранее маршрут не известен, даже когда уже началось движение, даже уже начав движения [15, 16]. Это будет зависеть от поступающей во время движения информации о пробках, т.е. задача является разновидностью адаптивного управления.

Если выбор направления происходит только в узлах сети, то такая навигация называется узловой. Узловая навигация характерна для многих реальных сетей: железные и автомобильные дороги, маршрутизаторы в компьютерных сетях, электрические сети, газо- и нефтепроводы и т.д. Она имеет большое практическое значение, почему имеет смысл выделить ее отдельным названием.

Определение 3. Будем называть правилами выбора π любой алгоритм выбора в каждом узле следующего ребра для движения.

В данной статье правила выбора необязательно должны быть однозначными. В случае вероятностных правил, они будут определять вероятностную динамику потоков на сети, как в сетях Маркова.

4. Задача быстродействия

Для движения в условиях пробок прежний критерий качества – минимальная длина маршрута – становится неактуальным. Теперь следует рассматривать задачу быстродействия. Ставится задача найти такие правила π выбора маршрута, чтобы достичь начала координат за минимальное время. Далее будут рассматриваться только такие правила π , которые всегда приводят к конечной точке маршрута.

Определение 4. Будем обозначать выражением $t_\pi(u) = t_\pi(n, m)$ математическое ожидание времени достижения начала координат из точки $u(n, m)$ при правилах выбора π . Индекс π в дальнейшем будем опускать, если он подразумевается из контекста. Если правила π являются оптимальными, то $t(u) = t(n, m) = t_{n,m}$ является математическим ожиданием наименьшего возможного времени. Наименьшую величину $t_{n,m}$ будем называть временем узла, а разницы величин типа $t_{n,m} - t_{n-1,m}$ или $t_{n,m} - t_{n,m-1}$ временами соответствующих ребер для движения из точки (n, m) .

По условию задачи возникновение пробок на ребрах никак не зависит друг от друга, что реально наблюдается при редких пробках. Поэтому в соответствии с принципом динамического программирования само понятие времени узла корректно.

В дальнейшем будет очень полезна

Лемма 1. Для каждого достаточно малого p вокруг начала координат существует область σ , в которой для каждого узла сети время равно $t_{n,m} = n + m + O(p) = l_{n,m} + O(p)$.

Доказательство. Доказательство следует из малости величины p и утверждения 2.

Другими словами, метрика в окрестности начала координат будет незначительно отличаться от исходной гипподамовой для квадратной сети. Соответственно, чем меньше p , тем больше будет область σ . Для любых двух точек u_1 и v_1 будет верно

Следствие 3. В области σ если $l(u) < l(v)$, то $t(u) < t(v)$.

Далее будем рассматривать лишь узлы сети, которые находятся справа и ниже диагонали первого октанта, включая его границы, т.е. узлы $u(n, m)$, координаты которых будут удовлетворять соотношениям $0 \leq m \leq n$. Для узлов из верхней диагональной половины рассуждения будут аналогичны.

Следствие 4. Если штраф $d < 1$, то в области σ наибо́льшие маршруты могут выходить из узлов только по левому и нижнему ребрам.

Доказательство. При движении вверх или вправо длина узла увеличивается на единицу. Для возврата на тот же уровень расстояний требуется еще потратить не меньше единицы длины. Поскольку в области σ сохраняется иерархия расстояний до начала координат, то прохождение через пробку будет быстрее, чем ее возможный обход.

Отметим, что для сохранения большинства выводов ограничение $d < 1$ сверху единицей можно значительно улучшить до величин, близких к 2. Но это сильно усложнит изложение без получения новых качественных преимуществ. Нужно будет исследовать размеры области σ , форму ее границ, после чего формулировки утверждений станут намного более громоздкими.

Следствие 4 позволяет найти оптимальное управление в виде правил выбора направлений движения в узлах. Рассмотрим вначале два частных случая узлов на оси абсцисс и на диагонали первого координатного октанта.

Пример 1. Найдём значения $t_{n,0}$. Рассмотрим вначале узел $(1, 0)$ на оси абсцисс справа от начала координат. Ввиду симметричности задачи относительно координатных осей и их диагоналей аналогичные рассуждения можно привести для точек $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$. Приближает к началу координат только движение по дороге влево, поскольку движение вниз увеличивает расстояние $l(u)$. В соответствии с утверждением выше, математическое ожидание времени движения по ней равно $t(1, 0) = 1 + pd$.

Для других точек на оси абсцисс типа $(n, 0)$ для оптимального управления требуется аналогично выбирать только направление влево ввиду неоптимальности объезда пробок в области σ . Тогда $t_{n,0} = n(1 + pd)$.

Следствие 5. Времена ребер на координатных осях больше длин ребер на величину первого порядка малости.

Пример 2. Найдём значения времени узла $t_{1,1}$ на диагонали координатного октанта. В соответствии с принципом динамического программирования, для нахождения наименьшего времени движения из каждой точки следует выбирать то направление, которое даст наилучший результат с учетом уже известных оптимальных маршрутов.

По следствию 4 среди направлений дальнейшего движения выбирать надо либо по ребру вниз, либо по ребру влево. Из примера 1 известно, что наименьшие математические ожидания времен для точек $(1, 0)$ и $(0, 1)$ одинаковы и равны $1 + pd$. В точке $(1, 1)$ возможны следующие четыре варианта. Оба нужных направления будут с пробками. Нижнее ребро будет с пробкой, а левое свободно. На левом будет пробка, нижнее свободно. Оба ребра будут свободны от пробок. Соответственно вероятности этих событий будут равны p^2 , $p(1 - p)$, $(1 - p)p$, $(1 - p)^2$.

Сформулируем правила выбора направления π , заключающиеся в том, что будем выбирать ребро без пробок всегда, когда это возможно. Если оба ребра

свободны или оба с пробками, то выбираем любое с одинаковой вероятностью. При таком выборе в трех из четырех случаев будет выбрано свободное ребро. Тогда математическое ожидание времени диагонального узла будет равно:

$$(3) \quad \begin{aligned} t_{1,1} = & p^2(1 + d + t_{1,0}) + p(1 - p)(1 + t_{1,0}) + \\ & + (1 - p)p(1 + t_{0,1}) + (1 - p)^2(1 + t_{0,1}). \end{aligned}$$

Поскольку $t_{1,0} = t_{0,1} = 1 + pd$, то выражение упрощается до:

$$(4) \quad t_{1,1} = (1 + pd) + 1 + p^2d = 2 + pd + p^2d.$$

Поскольку $t_{1,0} = 1 + pd$, то время вертикального ребра $t_{1,1} - t_{1,0}$ равно $1 + p^2d$. А поскольку вероятность p является малой величиной, то времена нижнего $t_{1,1} - t_{1,0}$ и левого $t_{1,1} - t_{0,1}$ ребер из узла $(1,1)$ превышают их длины на величины не первого, а уже второго порядка малости. Другими словами, они более быстрые, чем ребра на осях координат. Далее будет показано, что подобное свойство можно обеспечить для всех точек вне осей координат.

5. Оптимальная навигация

Рассмотрим теперь общий случай произвольного узла $u(n, m)$, координаты которого будут удовлетворять соотношениям $0 < m \leq n$, т.е. расположенного в половине октанда без оси абсцисс.

Определение 5. Правила выбора направления движения π назовем диагональными, если:

- 1) *Выбор делается только между нижним и левым ребрами;*
- 2) *Если левое ребро свободно, то выбирается оно;*
- 3) *Если на левом ребре пробка, а нижнее свободно, то выбирается нижнее;*
- 4) *Если на обоих ребрах пробки, то выбираем левое.*

Другими словами, при наличии одновременно пары свободного ребра и ребра с пробкой выбирается всегда свободное ребро. В прочих случаях преимущество всегда имеет левое ребро. При таких правилах движение стремится по направлению к диагонали октанда, откуда и взялось его название.

Если во всех узлах использовать диагональные правила выбора, то в соответствии с принципом динамического программирования вокруг начала координат будут однозначно определены времена узлов. Рассмотрим некоторый узел (n, m) . Время левого от него узла $(n - 1, m)$ обозначим $t_{left} = t_{n-1,m}$, а время нижнего $(n, m - 1)$ узла – как $t_{down} = t_{n,m-1}$.

Утверждение 3. Для диагональных правил π верно рекуррентное соотношение

$$(5) \quad t_{n,m} = t_{left} + 1 + (p - p^2)(t_{down} - t_{left}) + p^2d.$$

Доказательство. Математическое ожидание времени для диагональных правил собирается из вероятностей всех возможных состояний ребер:

$$(6) \quad \begin{aligned} t_{n,m} = & p^2(t_{left} + 1 + d) + p(1 - p)(t_{left} + 1) + \\ & + (1 - p)p(t_{down} + 1) + (1 - p)^2(t_{left} + 1). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые, получаем искомое выражение.

Согласно лемме 1 времена узлов t_{left} и t_{down} отличаются от их длин на величины первого порядка малости. Но длины этих узлов равны. Поэтому разность времен t_{down} и t_{left} будет также первого порядка малости. А слагаемое $(p - p^2)(t_{down} - t_{left})$ будет уже второго порядка малости. Поэтому время левого ребра отличается от единицы на величину второго порядка малости.

Напомним, что на оси абсцисс времени ребер были больше длин на величины первого порядка малости.

Следствие 6. Для нулевого и первого горизонтальных слоев узлов сети верно $t_{n-1,1} < t_{n,0}$.

Утверждение 4. Если $t_{n-1,m} < t_{n,m-1}$, то диагональные правила π являются оптимальным управлением движения задачи быстрогодействия в узле (n, m) , где $0 < m \leq n$.

Доказательство. Для узла $(1, 1)$ выше было непосредственно найдено оптимальное управление и его время. Для узла $(1, 1)$ непосредственно проверяется, что диагональные правила выбора также дают оптимальное управление. Рассмотрим произвольный узел (n, m) . Доказательство основано на непосредственной проверке каждой комбинации пробок на нижнем и левом ребрах. Если оба ребра свободны, то выбирается левое ребро, поскольку время левой вершины меньше, чем нижней, а времена ребер одинаковы и равны единице. Если свободно левое ребро, а нижнее с пробкой, то и время левого ребра меньше, и время левого узла меньше. Если левое с пробкой, а нижнее свободно, то выбирается нижнее, поскольку по условиям задачи величина штрафа d при прохождении по левому ребру будет больше, чем разница времен левого и нижнего узлов, поскольку в области σ эта разность имеет первый порядок малости. Если на обоих ребрах пробки, то выбираем левое, поскольку времена ребер одинаковы, а время левого узла меньше.

Утверждение 4 верно и в обратную сторону.

Лемма 2. При диагональных правилах выбора π в области σ будет выполняться $t_{n-1,m} < t_{n,m-1}$.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. База индукции. Рассмотрим узлы $(2, 2)$ и $(3, 1)$. Для них верно:

$$(7) \quad \begin{aligned} t_{2,2} = & (1 - p)^2(1 + t_{1,2}) + (1 - p)p(1 + t_{1,2}) + \\ & + p(1 - p)(1 + t_{2,1}) + p^2(1 + d + t_{2,1}), \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} t_{3,1} = & (1 - p)^2(1 + t_{2,1}) + (1 - p)p(1 + t_{2,1}) + \\ & + p(1 - p)(1 + t_{3,0}) + p^2(1 + d + t_{2,1}). \end{aligned}$$

Как для узлов, симметричных относительно диагонали, ввиду симметричности задачи будет верно $t_{1,2} = t_{2,1}$. А $t_{3,1} < t_{4,0}$ по следствию 6, поскольку последний узел лежит на оси абсцисс. Сравнивая выражения по каждому слагаемому, получаем, что $t_{2,2} < t_{3,1}$. Таким образом получаем три последовательных узла по косой диагонали с временами $t_{2,2}$, $t_{3,1}$, $t_{4,0}$ в порядке неубывания и роста для последней пары. Далее будем называть такие тройки узлов косыми. Также есть два горизонтальных слоя, где времена узлов верхнего слоя по косой диагонали меньше времен узлов нижнего слоя.

Шаг индукции. Пусть для некоторой тройки узлов верно $t_{n-2,m} \leq t_{n-1,m-1} < t_{n,m-2}$, а также для любых положительных i выполняется $t_{n-1+i,m-1} < t_{n+i,m-2}$. Рассмотрим два узла $(n-1, m)$ и $(n, m-1)$ справа и вверху от этой тройки. Их времена определяются по рекуррентным формулам

$$(9) \quad \begin{aligned} t_{n-1,m} &= (1-p)^2(1+t_{n-2,m}) + (p-p^2)(1+t_{n-2,m}) + \\ &+ (p-p^2)(1+t_{n-1,m-1}) + p^2(1+d+t_{n-2,m}), \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} t_{n,m-1} &= (1-p)^2(1+t_{n-1,m-1}) + (p-p^2)(1+t_{n-1,m-1}) + \\ &+ (p-p^2)(1+t_{n,m-2}) + p^2(1+d+t_{n-1,m-1}). \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых верхнего выражения будет больше либо равно аналогичного слагаемого нижней формулы. Причем знак равенства может быть только для узлов типа $(k-1, k)$ и $(k, k-1)$ вокруг диагонали октанда. Подставляя эти неравенства, получаем доказываемое утверждение. Поэтому, если есть косая тройка, то справа от нее также будет косая тройка. То есть они располагаются слоями по горизонтали. С другой стороны, если есть не менее двух горизонтальных слоев $y = k$ и $y = k-1$ где $t_{i,k} < t_{i+1,k-1}$, то всегда найдется косая тройка выше над ними. Это будет тройка узлов типа $(k+1, k+1)$, $(k+2, k)$, $(k+3, k-1)$, т.е. начинающаяся с координатной диагонали. Доказательство аналогично по формулам выше, только надо учитывать, что ввиду симметричности задачи имеет место строгое равенство $t_{k,k+1} = t_{k+1,k}$.

Теорема 1. Диагональные правила выбора являются оптимальным управлением движения для области σ без координатных осей.

Как видно из предыдущего изложения, времена всех ребер, кроме лежащих на координатных осях, превосходят их длины на величину не более чем величины второго порядка малости. Другими словами, для большинства случаев диагональные правила обеспечивают очень высокое качество управления, практически устраняющие влияние пробок при движении.

Сам принцип стремления маршрута к области, где существует наибольшее число вариантов продолжения движения и соответственно объезда пробок, имеет фундаментальный характер. Поэтому весьма правдоподобно, что он может быть использован при гораздо менее суровых ограничениях. Рассмотрим некоторые направления для обобщения результатов.

6. Конечные значения вероятности p

Хотя формально вероятность возникновения пробки в данной постановке задачи считается бесконечно малой величиной, но для практических приложений интересны случаи с конечными значениями. В частности, интересен вопрос, насколько далеко может простираться область σ . Здесь будет полезно следующее

Утверждение 5. Время любого ребра более 1 и не более $1 + pd$.

Это вытекает из утверждения 2 при замечании, что при подходе к любому узлу становится доступной дополнительная информация, которая может сократить математическое ожидание времени движения по нему.

Согласно следствию 3 в области σ если $l(u) < l(v)$, то $t(u) < t(v)$. Это можно считать за альтернативное определение области применимости диагональных правил выбора. Само понятие области σ существует по определению лишь при предельном переходе по вероятности p , что не позволяет вычислять его границы при каком-то конечном p . Напротив, данное свойство достаточно легко проверяется. Это позволяет получить количественные оценки на размер и форму области, где предлагаемое управление движением будет оптимальным.

Одной из грубых оценок на протяженность области σ может являться условие $t(u) < l(u) + 1$, которое делает объезды неэффективными. В соответствии с утверждением 5 при $d < 1$, область будет включать все узлы с $l(u) < 1/p$. Например, при вероятности пробки, равной одной сотой, диаметр такой области в городе будет порядка 200 кварталов. Немного мегаполисов в мире такой протяженности. Другими словами, это хотя и грубая оценка, но уже имеющая практический смысл.

При высоких значениях вероятности p возникает другая трудность. Может начаться цепная реакция порождения пробками других пробок из-за снижения пропускной способности всей сети. Тогда одновременное появление пробки на левом и нижнем ребре может начать возникать последовательно при движении, что потребует уже учета не только ближайших ребер, но и более удаленных. А это требует как более обширной информации о текущем состоянии графа, так и модификации самих правил выбора. То есть меняется сама постановка задачи. Насколько сильно можно увеличивать параметр p – вопрос остается открытым.

7. Штраф за проезд пробки

В текущей постановке задачи предполагалось, что пробка всегда проходима. А нежелательность ее прохождения задавалась величиной временного штрафа d , который выбирался меньше единицы. Это было сделано для того, чтобы объезд был неоптимальным. Действительно, диагональные правила приводят к маршрутам с последовательным уменьшением длин проходимых узлов. В них уже заложен принцип объезда пробок на горизонте наблюдаемости. А любой объезд вне диагональных направлений приводит к перепробегу по длине на 2 единицы.

Варианты постановок задачи с большими значениями d также возможны. И они реально возникают на практике, что обуславливает интерес к ним. Но при таких величинах становятся оптимальными объезды пробок. А это требует дополнительных допущений к исходной постановке задачи на методологическом уровне.

При выборе объезда крайне желательно расширение зоны информирования водителей о более удаленных ребрах, а не только смежных. А это противоречит целям данной статьи, где, наоборот, упор делается на упрощение движения и снижение стоимости его сопровождения. При этом информировать также можно по-разному. Например, можно давать информацию о состоянии ребер, удаленных от текущего положения через одну вершину. А можно и весь текущий граф сети. В зависимости от выбранного варианта возникает целое множество независимых постановок задач со своими особенностями и областью применения.

Надо различать типы пробок. Например, они могут быть постоянными, а могут изменяться через какой-то промежуток времени. В последнем случае надо явно указывать закон возникновения и исчезновения заторов. Это приводит к новым сериям математических моделей. Отдельный случай возникает при запрете движения через ребро, например из-за закрытия участка дороги на ремонт или из-за какой-то другой непреодолимой причины. В этом случае может вообще не существовать никакого маршрута в начало координат, т.е. задача становится некорректной.

Несмотря на указанные и прочие трудности, случаи объездов пробок очень важны для практики. Но в настоящее время не существует единого подхода к решению такой задачи. В городах наиболее часто используются навигаторы с отображением расположения пробок и их интенсивностей. При этом надо помнить, что подобная информация поступает с запаздыванием. Иногда помогают явные указатели объездов. В центрах управления дорожным движением очень часто задействуются дорогостоящие методы моделирования и прогнозирования. При этом используются вероятностные подходы и экспертные оценки, основанные на знании о прошлых аналогичных ситуациях.

В наиболее запущенных случаях высокие значения p и d будут приводить к ситуациям, когда в некоторых частях сети будет вообще останавливаться движение. Тогда уже возникает задача не выбора движения, а вообще наличия хотя бы одного возможного маршрута. Например, возникают задачи протекания в перколяционном кластере [17], которые очень сложны даже для теоретического исследования.

Отсутствие хорошего дешевого решения говорит о том, что дорожных сетей с высокими значениями вероятности возникновения пробки и высокими стоимостями штрафов надо всячески избегать. В том числе использовать вне-транспортные методы: архитектурные и планировочные решения, ограничения трафика, стимулирование малых размеров автомобилей, снижение числа владельцев автомобилей, компактные города и т.д.

8. Заключение

Диагональные правила порождают оптимальную узловую навигацию при движении в квадратной сети с малыми пробками в некоторой области вокруг начала координат.

Диагональные правила допускают очень простую и удобную для практического использования интерпретацию. Она заключается в стремлении к диагоналям координатного октанда. По достижении диагонали начинается навивание маршрута на диагональ. Это позволяет двигаться по сети оптимальным образом без использования каких-либо дополнительных вычислительных или информационных устройств. Такое становится возможным, поскольку при таких правилах выбора достигается наибольшее число вариантов объезда пробок.

Предлагаемое управление может выбираться целевым при построении реальных транспортных сетей с регулярной топологией ввиду своей простоты, устойчивости длины трафика и дешевизны. Такой подход является альтернативой существующим трендам по усложнению механизмов контроля и управления реальными транспортными потоками, и соответственно роста затрат на них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якимов М.Р., Нестерова А.С., Попов Ю.А. Транспортное планирование: транспорт общего пользования: монография. М.: Агентство РАДАР, 2024.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И. и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
4. Швецов В.И. Алгоритмы распределения транспортных потоков // АиТ. 2009. № 10. С.148–157.
5. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013.
6. Бетин В.Н., Иващенко В.А., Супрун А.П. Использование регулярных особенностей частично определенных функциональных нейронных сетей при поиске решения // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. 2024. № 4. С. 1–8.
7. Бетин В.Н., Демьянов А.Е., Иващенко В.А. и др. Некоторые подходы к созданию гибридных систем, ориентированных на работу со знаниями, путем встраивания в них искусственных нейронных сетей // Информатизация и связь. 2021. № 6. С. 20–26.
8. Евин И.А. Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. № 2. С. 121–141.
9. Тархов. Эволюционная морфология транспортных сетей. Смоленск-Москва: Изд-во «Универсум», 2005.

10. *Бобрик П.П.* Сравнение эффективности треугольной и квадратной регулярных транспортных сетей // Транспорт: наука, техника, управление. 2000. № 7. С. 26–31.
11. *Бобрик П.П.* О преимуществе треугольной топологии транспортной сети над квадратной // Транспорт: наука, техника, управление. 2005. № 3. С. 32–34.
12. *Глазычев В.Л.* Урбанистика. М.: Европа, 2008.
13. *Бобрик П.П.* Навигация в сетях и ее информационное обеспечение // Информатизация и связь. 2024. № 2. С. 7–13.
14. *Бобрик П.П.* Навигация в регулярных транспортных сетях // Труды конференции 14-ой Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Изд-во ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», СПб., 2007.
15. *Бобрик П.П.* Система указателей выбора маршрута, обеспечивающая в транспортной сети поток минимальной стоимости. Транспорт России: проблемы и перспективы – 2008 // Труды всероссийской научно-практической конференции. М.: МИИТ, 2008. С. 44–45.
16. *Бобрик П.П.* Об одном методе управления транспортными потоками // Программа четвертой международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO-07), 29 января–1 февраля 2007 / М.: Изд-во ИПУ, 2007. С. 25. докл. 4204.
17. *Тарасевич Ю.Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: Учебное пособие. М.: Едиториал УРСС, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.В. Мещеряковым.

Поступила в редакцию 14.09.2025

После доработки 05.02.2026

Принята к публикации 16.02.2026