

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2026 г. А.П. НЕЛЮБИН, канд. физ.-мат. наук (nelubin@gmail.com)
(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва),
В.В. ПОДИНОВСКИЙ, д-р техн. наук (podinovski@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ПО ВАЖНОСТИ ГРУППАМИ КРИТЕРИЕВ (II). РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА¹

Для многокритериальных задач принятия решений по аналогии с качественной вероятностью введены понятия полной и частичной качественной важности как бинарных отношений, обладающих постулируемыми свойствами. Предложено новое определение отношения нестрогого предпочтения на множестве вариантов решений, порождаемое качественной важностью. Исследованы его свойства. Указаны аналитические правила, позволяющие попарно сравнивать варианты по предпочтительности. Проведено сравнение новых отношений предпочтения с разработанными ранее для задач, когда изначально упорядочены по важности лишь отдельные критерии. Выяснено, что в случае полного упорядочения всех критериев по важности оба указанных отношения предпочтения совпадают.

Ключевые слова: многокритериальные задачи принятия решений, упорядочение критериев по важности, теория важности критериев.

DOI: 10.7868/S2413977726080076

1. Введение

Настоящая статья является продолжением статьи авторов [1], где был дан обзор состояния литературы по теории важности критериев (ТВК) для задач, в которых упорядочены по важности группы критериев, показана актуальность и указаны направления дальнейших исследований. В настоящей статье на основе результатов, недавно полученных для однокритериальных задач принятия решений в условиях неопределенности при качественной вероятности и ординальной полезности [2], для многокритериальных задач с порядковыми критериями вводятся расширенные отношения предпочтения и безразличия на множестве векторных оценок (и тем самым на множестве вариантов решений), изучаются свойства таких отношений, указываются простые

¹ Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и Государственного задания Минобрнауки России для ИМАШ РАН (FFGU-2024-0016).

решающие правила, позволяющие сравнивать варианты решений по предпочтительности. Подробно исследуется взаимосвязь новых отношений нестрогого предпочтения с использовавшимися ранее отношениями для задач, в которых упорядочены по важности только отдельные критерии.

2. Математическая модель и базовые определения из теории важности критериев

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия индивидуального решения [1]:

$$\langle X, f, Z_0, R \rangle,$$

где X – множество *вариантов* решений; $f = (f_1, \dots, f_m)$ – векторный критерий, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев f_i ; $Z_0 \subseteq (-\infty, +\infty)$ – область значений критериев («шкала критериев»); R – отношение нестрогого предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Под критерием f_i понимается функция, определенная на X и принимающая значения из Z_0 . Каждый вариант x из множества X характеризуется своей *векторной оценкой* $y(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Множество всех векторных оценок есть $Z = Z_0^m$. Далее полагается, что шкала критериев порядковая: известно лишь, что предпочтения вдоль их шкалы возрастают: чем больше оценка $z \in Z_0$, тем она предпочтительнее.

Предпочтения ЛПР моделируются на Z при помощи отношения нестрогого предпочтения R (yRz означает, что векторная оценка y не менее предпочтительна, чем z). Отношение R является (частичным) квазипорядком, т.е. оно рефлексивно и транзитивно, и порождает отношение безразличия I и (строгого) предпочтения P следующим образом: $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$; $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge \neg zRy$ (т.е. zRy неверно). Отношение R неизвестно и подлежит восстановлению на основе информации о предпочтениях ЛПР. При отсутствии такой информации на множестве векторных оценок Z можно задать лишь отношение строгого предпочтения $P^\varnothing$ (*отношение Парето*): $yP^\varnothing z \Leftrightarrow (y_i \geq z_i, i = 1, \dots, m, y \neq z)$. Пусть $R^\varnothing$ есть объединение $P^\varnothing$ и отношения равенства векторов.

Для расширения отношения $P^\varnothing$ требуется дополнительная информация Ω о предпочтениях ЛПР, в роли которой будут выступать сведения о важности критериев, например сообщение типа «Одна группа критериев важнее другой». Приведем базовые определения равенства и превосходства в важности для непересекающихся групп критериев. Далее для простоты записи критерии f_i будем обозначать также и их номерами i , так что, например, под i будем понимать критерий f_i , а под $A = \{i_1, \dots, i_q\}$ будем понимать группу (множество) критериев с номерами $i_1, \dots, i_q$.

Пусть A и B – непересекающиеся непустые группы номеров, или группы критериев, в векторной оценке y все компоненты y_i с номерами из A равны между собой и все компоненты y_i с номерами из B равны между собой

(т.е. $y_i = y_j$ при $i, j \in A$ и при $i, j \in B$). Векторные оценки такой структуры будем обозначать как y^{AB} . Обозначим через $y^{A \leftrightarrow B}$ векторную оценку, полученную из y^{AB} путем замены каждой компоненты y_j , $j \in B$, на (любую) компоненту y_i , $i \in A$, и замены каждой компоненты y_i , $i \in A$, на (любую) компоненту y_j , $j \in B$.

Определение 1. Группы критериев A и B равноважны ($A \sim B$), когда всякие векторные оценки y^{AB} и $y^{A \leftrightarrow B}$ одинаковы по предпочтительности (безразличны).

Определение 2. Группа критериев A важнее группы критериев B ($A \succ B$), когда всякая векторная оценка y^{AB} , в которой $y_i > y_j$ при $i \in A$ и $j \in B$, предпочтительнее, чем $y^{A \leftrightarrow B}$.

Согласно этим определениям сообщения $A \sim B$ и $A \succ B$ задают на множестве Z соответственно отношения безразличия $I^{A \sim B}$ и предпочтения $P^{A \succ B}$:

$$(1) \quad \begin{aligned} y I^{A \sim B} z &\Leftrightarrow y = y^{AB}, z = y^{A \leftrightarrow B}, y_i \neq y_j, i \in A, j \in B; \\ y P^{A \succ B} z &\Leftrightarrow y = y^{AB}, z = y^{A \leftrightarrow B}, y_i > y_j, i \in A, j \in B. \end{aligned}$$

С другой стороны, информация Ω задает на множестве 2^M подмножеств множества (номеров) критериев $M = \{1, \dots, m\}$ отношение важности $\succsim^\Omega$:

$$A \sim^\Omega B \text{ при } A \sim B \in \Omega \text{ или } B \sim A \in \Omega; \quad A \succ^\Omega B \text{ при } A \succ B \in \Omega.$$

Каждое соотношение важности $A \sim^\Omega B$ и $A \succ^\Omega B$ порождает на множестве векторных оценок Z согласно (1) соответствующее отношение R^ω , а именно отношение предпочтения P^ω или безразличия I^ω . На основе этой информации на множестве Z определяется отношение нестрогого предпочтения R^Ω (рефлексивное и транзитивное отношение) как транзитивное замыкание объединения всех отношений R^ω и отношения $R^\emptyset$:

$$(2) \quad R^\Omega = T \left[\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} R^\omega \right) \cup R^\emptyset \right],$$

где T – символ операции транзитивного замыкания бинарного отношения. Согласно (2) соотношение $y R^\Omega z$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка вида

$$(3) \quad y R^{\omega_1} u^1, u^1 R^{\omega_2} u^2, \dots, u^{r-1} R^{\omega_r} z,$$

где u^k – векторные оценки, а ω_k – сообщения из Ω (так что R^{ω_k} есть P^{ω_k} или I^{ω_k} в зависимости от смысла ω_k) или же символ $\emptyset$. Отношение нестрогого предпочтения R^Ω порождает указанным выше образом отношения предпочтения P^Ω и безразличия I^Ω .

3. Качественная важность критериев

Под *качественной важностью* будем понимать бинарное отношение $\succsim$ на множестве 2^M подмножеств множества (номеров) критериев $M = \{1, \dots, m\}$: запись $A \succsim B$ означает, что группа критериев A не менее важна, чем группа критериев B . Это отношение порождает отношения строгого превосходства в важности $\succ$ и равноважности $\sim$. Качественная важность называется *полной*, если она обладает такими свойствами (они постулируются как аксиомы):

C1. *Сравнимость*: для любых A и B выполнено по крайней мере одно из $A \succsim B$ или $B \succsim A$.

C2. *Транзитивность*: из $A \succsim B$ и $B \succsim C$ следует $A \succsim C$.

C3. *Существенность*: для любого $A \neq \emptyset$ выполнено $A \succ \emptyset$.

C4. *Аддитивность*: если $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то соотношения $A \succsim B$ и $A \cup C \succsim B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно.

Отметим, что из справедливости свойств C1–C4 следует справедливость свойства

C5. *Рефлексивность*: для любого A выполнено $A \succsim A$.

Качественная важность называется *частичной*, если она обладает свойствами C2–C5.

Следует отметить, что постулированные свойства качественной важности аналогичны аксиомам качественной вероятности. (Подробно со свойствами качественной вероятности (а они зачастую необычны и далеко не очевидны) можно ознакомиться по [3].) Различие состоит только в формулировке аксиомы существенности: для качественной вероятности требуется выполнение требования лишь нестрогого превосходства в вероятности $\succcurlyeq$ для каждого события A , и поэтому допускается $A \sim \emptyset$ при $A \neq \emptyset$. Это объясняется тем, что аксиома существенности для вероятности позволяет охватить встречающиеся на практике случаи наличия невозможных элементарных событий. Для качественной важности выполнение $A \sim \emptyset$ означает учет критерия, не имеющего вообще никакой важности. Но если набор критериев сформирован с выполнением известных требований к его формированию, в число которых входят неизбыточность и минимальная размерность, то такой результат нужно рассматривать как следствие нарушения указанных требований. Это будет означать, что нужно скорректировать математическую модель проблемной ситуации, удалив соответствующий критерий из состава векторного критерия. Поэтому для качественной важности естественно принять требование, что $A \succ \emptyset$ для каждого $A \neq \emptyset$ (т.е. практически – для каждого критерия).

Положительные числа $\beta_1, \dots, \beta_m$ называются *качественными (аддитивными) величинами важности критериев*, согласованными с качественной важностью $\succsim$, если они обладают таким свойством:

$$A \sim B \Rightarrow \sum_{i \in A} \beta_i = \sum_{i \in B} \beta_i; \quad A \succ B \Rightarrow \sum_{i \in A} \beta_i > \sum_{i \in B} \beta_i.$$

Если величины важности критериев нормированы, т.е. в сумме равны 1, то они называются *качественными коэффициентами важности критериев* и обозначаются $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Теория качественной вероятности указывает, что при $m > 4$ качественных величин (и, разумеется, коэффициентов) важности может не существовать [2, 3].

Полную или только частичную важность критериев можно оценить путем проведения (с той или иной степенью полноты) процедуры парных сравнений непустых непересекающихся групп критериев A и B , сравнивая по предпочтительности соответствующие векторные оценки вида y^{AB} и $y^{A \leftrightarrow B}$ и используя такие же соображения и порядок, как при получении информации о качественной важности отдельных критериев. Процедура подробно описана в [3]. Получив достаточный объем информации Ω , необходимо проверить ее на непротиворечивость и при необходимости скорректировать [1]. И, наконец, построить $\succsim$ как аддитивно-транзитивное замыкание отношения важности $\succsim^\Omega$, например, матричным методом, указанным в [1].

4. Отношения предпочтения и безразличия

Вначале расширим определения равенства и превосходства в важности на общий случай, когда группы критериев могут пересекаться или быть пустыми. Пусть A, B – две группы критериев. Далее, пусть $y \in Z$ – векторная оценка такая, что $y_i = a$ для $i \in A \cup B$, т.е. все ее компоненты с номерами из A и B равны $a \in Z_0$. Пусть $b \in Z_0$ и $y' = (y \parallel y_i = b, i \in A) \in Z$ – векторная оценка, полученная из y заменой на b всех ее компонент с номерами из A , а $y'' = (y \parallel y_j = b, j \in B) \in Z$ – векторная оценка, полученная из y заменой на b всех ее компонент с номерами из B .

Определение 3. Группы критериев A и B равноважны ($A \sim B$), когда всякие векторные оценки y' и y'' одинаковы по предпочтительности.

Определение 4. Непустая группа критериев A важнее группы критериев B ($A \succ B$), когда всякая векторная оценка y' при $b > a$ предпочтительнее векторной оценки y'' .

Отметим, что согласно определению 3 верно $A \sim A$, и по определению 4, если $A \supset B$, то $A \succ B$; в частности, если $A \neq \emptyset$, то $A \succ \emptyset$.

Определение отношений $R^\succsim$, а тем самым и отношений $P^\succsim$ и $I^\succsim$ на множестве векторных оценок $Z = Z_0^m$ на основе заданной качественной важности $\succsim$ (полной или только частичной) введем аксиоматически, т.е. укажем систему аксиом, которым должны удовлетворять эти отношения. Вначале ограничим, как указывалось выше, класс бинарных отношений.

Аксиома 1. Отношение $R^\succsim$ рефлексивно.

Аксиома 2. Отношение $R^\succsim$ транзитивно.

При выполнении для $R^\succsim$ этих аксиом отношение $P^\succsim$ оказывается строгим частичным порядком, а отношение $I^\succsim$ – эквивалентностью.

Аксиома 3 (аксиома Парето). Если первая векторная оценка покомпонентно не меньше второй векторной оценки y , причем хотя бы одна из компонент первой больше соответствующей компоненты второй, то первая векторная оценка предпочтительнее второй: если $y_i \geq z_i$, $i = 1, \dots, t$, $y \neq z$, то $y P^{\sim} z$.

Пусть A, B – две группы критериев. Далее, пусть $y, z \in Z$ – две векторные оценки такие, что $y_i = z_j = a$, $i \in A, j \in B$, т.е. все их компоненты с номерами из A и B равны $a \in Z_0$. Пусть $b \in Z_0$ и $y' = (y \parallel y_i = b, i \in A) \in Z$ и $z' = (z \parallel z_j = b, j \in B) \in Z$. Будем говорить, что векторные оценки y и z изменены (соответственно улучшены, ухудшены) одинаковым образом по группам критериев A и B , если они заменены на y' и z' при произвольных b и a (соответственно при $b > a$, при $b < a$).

Аксиома 4 (сохранение предпочтительности). Пусть две векторные оценки одинаковым образом улучшены по двум равноважным группам критериев A и B ; если эти векторные оценки одинаковые по предпочтительности, то они и останутся таковыми; если же первая векторная оценка предпочтительнее второй, то она останется предпочтительнее второй: при $A \sim B$ и $a < b$ из $y I^{\sim} z$ следует $y' I^{\sim} z'$, а из $y P^{\sim} z$ следует $y' P^{\sim} z'$.

Аксиома 5 (усиление предпочтительности). Если две векторные оценки, первая из которых не менее предпочтительна, чем вторая, одинаковым образом улучшены по двум группам критериев, первая из которых важнее второй, то первая из полученных векторных оценок будет предпочтительнее второй: если $A \succ B$ и $a < b$, то из $y R^{\sim} z$ следует $y' P^{\sim} z'$.

Аксиомы 4 и 5 выражают следующую простую идею, которая яснее всего формулируется для случая двух критериев. Предположим, имеется возможность изменить предпочтительность каждой из двух векторных оценок за счет изменения исходных одинаковых значений только одного из двух критериев на одну и ту же величину. Если критерии равноважны, то безразлично, значение какого критерия изменять. Если же первый критерий важнее второго, то предпочтительнее улучшать значения более важного критерия, а ухудшать значения менее важного критерия. В еще более общем виде идея хорошо известна: если решаются две задачи (например, штурм двух опорных пунктов) и полнота их решения одинакова, то дополнительные неделимые ресурсы (резервы) разумно бросить на решение более важной задачи. Если же задачи одинаково важны, то оба способа использования ресурсов одинаковы по предпочтительности.

Система из аксиом 1–5 задает рекурсивное (индуктивное) определение отношений $R^{\sim}, P^{\sim}, I^{\sim}$, если начинать с соотношений $y I^{\sim} y$, верных для любых $y \in Z$.

Пример 1. Пусть для трехкритериальной задачи ($m = 3$) с $Z_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ получена очевидно непротиворечивая информация о важности критериев: $1 \succ 2$, $2 \sim 3$, $\{2, 3\} \succ 1$. На ее основе методом аддитивно-транзи-

тивного замыкания, как нетрудно понять, получается следующая полная качественная важность:

$$\{1, 2, 3\} \succ \{1, 2\} \sim \{1, 3\} \succ \{2, 3\} \succ 1 \succ 2 \sim 3 \succ \emptyset.$$

Начнем с $y = (2, 2, 2)$. Поскольку $\{2, 3\} \succ 1$, то по аксиоме 5 верно $(2, 3, 3)P^{\sim}(3, 2, 2)$. А так как $1 \succ 2$, то $(4, 3, 3)P^{\sim}(3, 4, 2)$. Удобно представить проведенные выкладки в виде двойной цепочки (стрелки проводятся от более предпочтительных векторных оценок к менее предпочтительным), поскольку приходится изменять векторные оценки в каждой паре согласованно:

$$\begin{array}{ccccc} (2, 2, 2) & \leftarrow & (2, 3, 3) & \leftarrow & (4, 3, 3) \\ & & \downarrow_{23 \succ 1} & & \downarrow_{1 \succ 2} \\ (2, 2, 2) & \leftarrow & (3, 2, 2) & \leftarrow & (3, 4, 2). \end{array}$$

Поэтому $(4, 3, 3)P^{\sim}(3, 4, 2)$. *Двойные цепочки*, подобные представленной, можно назвать *объяснительными*: они наглядно показывают, почему одна из векторных оценок предпочтительнее другой (или же почему они безразличны).

Если группы A и B не пусты и не пересекаются, то для векторных оценок, участвующих в формулировках аксиом 4 и 5, при $y = z$ выполнено $z' = y'^{A \leftrightarrow B}$. Следовательно, в общем случае отношение $R^{\sim}$ шире отношения R^{Ω} (см. (2)).

Примечание. В аналогах аксиом 4 и 5 можно учесть и ухудшение векторных оценок:

Аксиома 4*: при $A \sim B$ и $a > b$ из $yI^{\sim}z$ следует $y'I^{\sim}z'$, а из $yP^{\sim}z$ следует $y'P^{\sim}z'$.

Аксиома 5*: при $A \prec B$ и $a > b$ из $yR^{\sim}z$ следует $y'P^{\sim}z'$.

Можно показать, что система аксиом 1, 2, 3, 4*, 5* оказывается эквивалентной системе аксиом 1–5 в том смысле, что она определяет те же отношения $R^{\sim}$, $P^{\sim}$, $I^{\sim}$. Двойные цепочки при использовании аксиом 4* и 5* получаются убывающими. Таким образом, аксиомы 4* и 5* можно использовать вместо аксиом 4 и 5. Совместное использование аксиом 4, 5, 4* и 5* не расширяет отношения $R^{\sim}$, $P^{\sim}$, $I^{\sim}$.

В основе приведенных ниже решающих правил лежит развитие идей теории качественной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений [1]. Для их формулировки каждой паре векторных оценок y и z поставим в соответствие упорядоченное по неубыванию множество, состоящее из их компонент:

$$W(y, z) = \{y_1\} \cup \dots \cup \{y_m\} \cup \{z_1\} \cup \dots \cup \{z_m\} = \{w_1, \dots, w_q\},$$

где $q \leq 2m$ и зависит от y и z , $w_1 < \dots < w_q$. Векторным оценкам поставим в соответствие $2(q-1)$ множеств номеров компонент:

$$M_k(y) = \{i \in M \mid y_i \geq w_k\}, \quad M_k(z) = \{i \in M \mid z_i \geq w_k\}, \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

$$L_k(y) = \{i \in M \mid y_i \leq w_k\}, \quad L_k(z) = \{i \in M \mid z_i \leq w_k\}, \quad k = q-1, q-2, \dots, 1.$$

Следующие две теоремы являются по сути переформулировками соответствующих теорем из [2] применительно к многокритериальным задачам.

Теорема 1. Соотношение $yR^{\succsim}z$ верно тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$(4) \quad M_k(y) \succsim M_k(z), \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

При этом если в (4) все $\succsim$ суть $\sim$, то $yI^{\succsim}z$. В противном случае (когда в (4) имеется $\succ$) верно $yP^{\succsim}z$.

Теорема 2. Соотношение $yR^{\precsim}z$ верно тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$(5) \quad L_k(y) \precsim L_k(z), \quad k = q-1, q-2, \dots, 1.$$

При этом если в (5) все $\precsim$ суть $\sim$, то $yI^{\precsim}z$. В противном случае (когда в (5) имеется $\prec$) верно $yP^{\precsim}z$.

Отметим, что если имеем множество $Z_0 = \{1, \dots, q\}$, то его можно использовать в роли $W(y, z)$.

Пример 2. В условиях примера 1 сравним по предпочтительности векторные оценки $y = (4, 3, 3)$ и $z = (3, 4, 2)$ при помощи теоремы 1. Имеем $W(y, z) = \{2, 3, 4\}$, $q = 3$ и

$$\begin{aligned} k = 2, \quad w_2 = 3, \quad M_2(y) = \{1, 2, 3\} \succ \{1, 2\} = M_2(z); \\ k = 3, \quad w_3 = 4, \quad M_3(y) = \{1\} \succ \{2\} = M_3(z). \end{aligned}$$

Поэтому верно $yP^{\succsim}z$. Сравним теперь векторные оценки $u = (1, 2, 3)$ и $v = (3, 1, 1)$, применяя теорему 2. Имеем: $W(u, v) = \{1, 2, 3\}$, $q = 3$ и

$$\begin{aligned} k = 2, \quad w_2 = 2, \quad L_2(u) = \{1, 2\} \succ \{2, 3\} = L_2(v); \\ k = 1, \quad w_1 = 1, \quad L_1(u) = \{1\} \prec \{2, 3\} = L_1(v). \end{aligned}$$

Следовательно, векторные оценки u и v не сравнимы по предпочтительности.

Пусть критерии $f_1, \dots, f_m$ имеют количественную «физическую» шкалу, не менее совершенную, чем интервальная [4] (например денежные доходы), и $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – качественные коэффициенты важности, согласованные с качественной важностью $\succsim$. Построим взвешенную сумму

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(f_i(x)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(y_i),$$

где φ – возрастающая числовая функция (в обобщенных критериях называемая нормирующей). Значение взвешенной суммы кратко обозначим как $y(\alpha)$.

Теорема 3. Если верно $yR^{\succsim}z$, то верно и $y(\alpha) \geq z(\alpha)$, причем если $yP^{\succsim}z$ или $yI^{\succsim}z$, то $y(\alpha) > z(\alpha)$ или $y(\alpha) = z(\alpha)$ соответственно.

Эта теорема, доказательство которой, как и следующих теорем, вынесено в Приложение, показывает возможность применения, при необходимости, аддитивных функций ценности (в частности, обобщенных критериев) для проведения дальнейшего анализа многокритериальной задачи, решаемой с использованием ТВК.

5. Задачи с упорядоченными по важности отдельными критериями

Далее будем рассматривать задачи, в которых сравнимы по важности только отдельные критерии, т.е. множество Ω может содержать только сообщения вида $i \succ j$ и $i \sim j$. Под *порядковой важностью* будем понимать бинарное отношение $\tilde{\succsim}$ на множестве (номеров) критериев M , которое удовлетворяет аксиомам рефлексивности и транзитивности. При этом если упорядочены все критерии, то важность называется *полной*, в противном случае – *частичной*.

Система из аксиом 1–5, если в их формулировках полагать $A, B \in M$, на основе заданной порядковой важности $\tilde{\succsim}$ (полной или только частичной) определяет отношение $R^{\tilde{\succsim}}$ на множестве векторных оценок Z . Оказывается, это отношение совпадает с $R^{\tilde{\succsim}}$ в случае, когда информация Ω касается важности лишь отдельных критериев, т.е. когда качественная важность $\tilde{\succsim}$ является расширением (продолжением) порядковой важности $\tilde{\succsim}$ на 2^M .

Теорема 4. В случае порядковой важности верно равенство $R^{\tilde{\succsim}} = R^{\tilde{\succsim}}$.

Следующий пример показывает, что отношения $R^{\tilde{\succsim}}$ и $R^{\tilde{\succsim}}$ для качественной важности $\tilde{\succsim}$ и порядковой важности $\tilde{\succsim}$, порождаемых информацией Ω , могут быть шире, чем отношение R^{Ω} .

Пример 3. Пусть $m = 4$, $Z_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $\Omega = \{1 \succ 3, 2 \succ 3, 2 \succ 4\}$. Здесь, как нетрудно убедиться, операция транзитивного замыкания не изменяет отношения $\tilde{\succsim}^{\Omega}$. Частичное отношение качественной важности $\tilde{\succsim}$ выписывать не будем: справедливость возникающих в процессе анализа соотношения с $\succ$ для рассматриваемых пар множеств (с учетом свойств C2 и C4) будет очевидна. Для $y = (3, 4, 1, 2)$ и $z = (2, 1, 4, 3)$ имеем $W(y, z) = Z_0$, $q = 4$. С учетом теоремы 1 получаем:

$$k = 2, \quad w_2 = 2 : M_2(y) = \{1, 2, 4\} \succ \{1, 3, 4\} = M_2(z);$$

$$k = 3, \quad w_3 = 3 : M_3(y) = \{1, 2\} \succ \{3, 4\} = M_3(z);$$

$$k = 4, \quad w_4 = 4 : M_4(y) = \{2\} \succ \{3\} = M_4(z),$$

так что верно $yP^{\tilde{\succsim}}z$. По теореме 4 верно и $yP^{\tilde{\succsim}}z$. Однако объясняющей цепочки (3) построить невозможно, так что y и z не сравнимы по R^{Ω} .

Оказывается, однако, что в случае, когда информация Ω касается важности лишь отдельных критериев и на ее основе можно упорядочить по важности все критерии, отношения $R^{\tilde{\succsim}}$ и R^{Ω} совпадают.

Теорема 5. В случае полной порядковой важности верно равенство $R^{\sim} = R^{\Omega}$.

Пример 4. Пусть в примере 3 дополнительно стало известно, что $4 \succ 1$. Тогда все критерии оказываются упорядоченными по важности: $2 \succ 4 \succ 1 \succ 3$. Теперь уже появляется объясняющая цепочка (3):

$$y = (3, 4, 1, 2)P^{1 \succ 3}(1, 4, 3, 2)P^{2 \succ 3}(1, 3, 4, 2)P^{2 \succ 4}(1, 2, 4, 3)P^{2 \succ 1}(2, 1, 4, 3) = z,$$

так что y предпочтительнее, чем z . Этот же результат получается при добавлении к Ω соотношения $4 \sim 1$, что также позволяет полностью нестрого упорядочить все критерии по важности: $2 \succ 4 \sim 1 \succ 3$.

Таким образом, теорема 5 показывает, что в случае полной порядковой важности отношение нестрогого предпочтения, введенное ранее в ТВК, не расширяется, и поэтому можно использовать любые подходящие ранее разработанные решающие правила из этой теории.

6. Заключение

В статье введены понятия полной и частичной качественной важности и аксиоматически задано основанное на них определение отношения нестрогого предпочтения на множестве вариантов решений. Оно в общем случае оказывается более широким, чем аналогичное по смыслу отношение, введенное ранее в теории важности критериев (ТВК).

Представленные достаточно простые решающие правила позволяют анализировать прикладные многокритериальные задачи, когда имеется информация об относительной важности не только отдельных критериев, но и групп критериев с порядковой шкалой.

Показано, что в случае полного упорядочения только отдельных критериев по важности отношение нестрогого предпочтения, введенное ранее в ТВК, не расширяется, и можно использовать любые подходящие ранее разработанные решающие правила из этой теории.

Полученные результаты являются базой для дальнейшего развития ТВК для задач с упорядоченными по важности группами критериев, имеющих более совершенные шкалы, чем порядковая.

Представленные результаты являются полезными для проведения первых этапов анализа задач принятия политических, социальных и иных решений, в которых информация о предпочтениях (важности критериев и их шкалах) изначально естественно оказывается качественной (нечисловой).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Если верно $yR^{\sim}z$, то существует двойная цепочка, в которой первое звено состоит из двух равных векторных оценок $y^0 = z^0$, а последнее – из y и z .

Рассмотрим два произвольно выбранных смежных звена двойной цепочки, в первом ее звене участвуют векторные оценки s и t , а во втором — u и v и используется соотношение $A \gtrsim B$, так что $\sum_{i \in A} \alpha_i \geq \sum_{i \in B} \alpha_i$ или $\sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i - \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \geq 0$, причем неравенства строгие, если $A \succ B$, и обращаются в равенства, когда $A \sim B$. В векторных оценках u и v в качестве компонент с номерами из A и B выступает некоторое одно и то же число c , так что:

$$u_i = \begin{cases} c+l, & i \in A, \\ c, & i \in B \setminus A, \\ s_i, & i \notin A \cup B; \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} c+l, & i \in B, \\ c, & i \in A \setminus B, \\ t_i, & i \notin A \cup B. \end{cases}$$

Справедливы равенства (заметим, что если множество индексов, по которым идет суммирование, пусто, то сумма по определению равна нулю):

$$\begin{aligned} & [u(\alpha) - v(\alpha)] - [s(\alpha) - t(\alpha)] = \\ & = \left[\sum_{i \in M} \alpha_i \varphi(u_i) - \sum_{i \in M} \alpha_i \varphi(v_i) \right] - \left[\sum_{i \in M} \alpha_i \varphi(s_i) - \sum_{i \in M} \alpha_i \varphi(t_i) \right] = \\ & = \left[\left(\sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in A \cap B} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in M \setminus (A \cup B)} \alpha_i \varphi(s_i) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in A \cap B} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in M \setminus (A \cup B)} \alpha_i \varphi(t_i) \right) \right] - \\ & \quad - \left[\left(\sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in A \cap B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in M \setminus (A \cup B)} \alpha_i \varphi(s_i) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in A \cap B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c) + \sum_{i \in M \setminus (A \cup B)} \alpha_i \varphi(t_i) \right) \right] = \\ & = \sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c+l) + \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c) - \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \varphi(c+l) - \sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i \varphi(c) = \\ & = (\varphi(c+l) - \varphi(c)) \left(\sum_{i \in A \setminus B} \alpha_i - \sum_{i \in B \setminus A} \alpha_i \right) = \delta \geq 0, \end{aligned}$$

так что

$$u(\alpha) - v(\alpha) \geq s(\alpha) - t(\alpha) + \delta.$$

Поскольку для первого звена двойной цепочки имеем $y^0(\alpha) - z^0(\alpha) = 0$, то разность $u(\alpha) - v(\alpha)$ при движении по цепочке вправо не уменьшается и остается неотрицательной. Поэтому $y(\alpha) \geq z(\alpha)$. При этом если $yP^{\sim}z$, то при формировании цепочки хотя бы раз встретится соотношение вида $A \succ B$ и потому будет верно $y(\alpha) > z(\alpha)$; в противном случае, когда $yI^{\sim}z$, все соотношения будут типа $A \sim B$ и окажется справедливым равенство $y(\alpha) = z(\alpha)$. Теорема 3 доказана.

Для доказательства теорем 4 и 5 понадобится одно вспомогательное утверждение, характеризующее структуру связанных качественной важностью пар групп критериев в рассматриваемом случае порядковой важности.

Лемма 1. Если качественная важность $\dot{\succsim}$ получена расширением порядковой важности $\dot{\succsim}$ на 2^M , то в любом соотношении $A \dot{\succsim} B$ группы критериев A и B можно разбить на отдельные критерии следующим образом:

$$(П.1) \quad \begin{aligned} A &= i_1 \cup i_2 \cup \dots \cup i_{n_A}, \quad i_p \neq i_r \text{ при } p \neq r; \\ B &= j_1 \cup j_2 \cup \dots \cup j_{n_B}, \quad j_p \neq j_r \text{ при } p \neq r; \\ n_A &\geq n_B; \quad i_p \dot{\succsim} j_p, \quad p = 1, \dots, n_B. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1. Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть на первом шаге построения отношения $\dot{\succsim}$ оно состоит из всех пар $(i, j) \in \dot{\succsim}$ и $(i, \emptyset), i \in M$, для которых выполняются условия леммы 1. На каждом следующем шаге будем добавлять к полученному отношению одно новое соотношение, применяя правила аддитивности или транзитивности к уже имеющимся соотношениям.

Предположим, что на k -м шаге построения отношения $\dot{\succsim}$ для всех имеющих в нем соотношений $A \dot{\succsim} B$ выполняются условия леммы 1. Пусть на $(k+1)$ -м шаге применяется правило аддитивности: если $A \dot{\succsim} B$ и $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то $A \cup C \dot{\succsim} B \cup C$. Разбиение (П.1) для соотношения $A \cup C \dot{\succsim} B \cup C$ можно построить на основе существующего разбиения (П.1) для соотношения $A \dot{\succsim} B$, просто добавив пары $i_p \dot{\succsim} i_p$ для всех $i_p \in C$.

Пусть на $(k+1)$ -м шаге применяется правило аддитивности: если $A \dot{\succsim} B$ и $A \supseteq C, B \supseteq C$, то $A \setminus C \dot{\succsim} B \setminus C$. Разбиение (П.1) для соотношения $A \setminus C \dot{\succsim} B \setminus C$ можно построить на основе существующего разбиения (П.1) для соотношения $A \dot{\succsim} B$, преобразовав его сначала так, чтобы оно содержало пары $i_p \dot{\succsim} i_p$ для всех $i_p \in C$, а затем исключив все эти пары. Такое преобразование всегда можно осуществить. Предположим, в разбиении (П.1) для $A \dot{\succsim} B$ и некоторого $i \in C$ присутствует две пары $i \dot{\succsim} j$ и $t \dot{\succsim} i$. Тогда с учетом транзитивности $\dot{\succsim}$ их можно заменить на пары $i \dot{\succsim} i$ и $t \dot{\succsim} j$. И так следует проделать с каждым номером $i \in C$.

Пусть на $(k+1)$ -м шаге применяется правило транзитивности: если $A \dot{\succsim} B$ и $B \dot{\succsim} C$, то $A \dot{\succsim} C$. Разбиение (П.1) для соотношения $A \dot{\succsim} C$ можно построить на основе существующих разбиений (П.1) для соотношений $A \dot{\succsim} B$ и $B \dot{\succsim} C$.

Имеем:

$$\begin{aligned} A &= i_1 \cup i_2 \cup \dots \cup i_{n_A}, \quad i_p \neq i_r \text{ при } p \neq r; \\ B &= j_1 \cup j_2 \cup \dots \cup j_{n_B}, \quad j_p \neq j_r \text{ при } p \neq r; \\ C &= t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_{n_C}, \quad t_p \neq t_r \text{ при } p \neq r; \end{aligned}$$

$$n_A \geq n_B \geq n_C; \quad i_p \dot{\prec} j_p, \quad p = 1, \dots, n_B; \quad j_p \dot{\prec} t_p, \quad p = 1, \dots, n_C.$$

Из транзитивности отношения $\dot{\prec}$ для соотношения $A \dot{\prec} C$ следует требуемое разбиение (П.1): $i_p \dot{\prec} t_p, p = 1, \dots, n_C$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 4. Поскольку $\dot{\prec} \subseteq \dot{\prec}$ на 2^M , то $R^{\dot{\prec}} \subseteq R^{\dot{\prec}}$. Следовательно, достаточно доказать $R^{\dot{\prec}} \supseteq R^{\dot{\prec}}$. Пусть для некоторых векторных оценок $y, z \in Z$ выполняется $y R^{\dot{\prec}} z$. Тогда по теореме 1 выполняются соотношения (4). Введем в рассмотрение векторные оценки y^k и z^k , $k = 1, \dots, q - 1$:

$$y_i^k = \begin{cases} y_i, & y_i \leq w_k, \\ w_k, & y_i > w_k; \end{cases} \quad z_i^k = \begin{cases} z_i, & z_i \leq w_k, \\ w_k, & z_i > w_k. \end{cases}$$

Построим двойную цепочку, начинающуюся с векторных оценок $y^1 = z^1 = (w_1, \dots, w_1)$ и использующую только сообщения $i \dot{\prec} j$. Для соотношения $M_2(y) \dot{\prec} M_2(z)$ из (4) по лемме 1 существует разбиение вида (П.1). Для удобства обозначим: $n = |M_2(z)|$. Положим $u^1 = y^1, v^1 = z^1$. Для каждой пары $i_p \dot{\prec} j_p, p = 1, \dots, n$, из (П.1) поочередно улучшим одинаковым образом от $a = w_1$ до $b = w_2$ векторные оценки u^p и $v^p, p = 1, \dots, n$, по критериям i_p и j_p . По аксиомам 4 и 5 при каждом таком улучшении получим $u^{p+1} R^{\dot{\prec}} v^{p+1}, p = 1, \dots, n$. Заметим, что $y^2 R^{\emptyset} u^{n+1}$, а $z^2 = v^{n+1}$. По аксиоме 2 транзитивности получаем $y^2 R^{\dot{\prec}} z^2$.

Далее аналогично строим двойную цепочку, начинающуюся с векторных оценок y^2 и z^2 , и используем соотношение $M_3(y) \dot{\prec} M_3(z)$ из (4). При этом улучшение одинаковым образом от $a = w_2$ до $b = w_3$ векторных оценок по критериям из $M_3(y)$ и $M_3(z)$ возможно, так как $M_2(y) \supseteq M_3(y)$ и $M_2(z) \supseteq M_3(z)$. В результате аналогично получаем $y^3 R^{\dot{\prec}} z^3$. И так далее, пока на шаге $k = q$ с использованием соотношения $M_q(y) \dot{\prec} M_q(z)$ из (4) не получим $y^q R^{\dot{\prec}} z^q$, что значит $y R^{\dot{\prec}} z$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. В общем случае $R^{\dot{\prec}} \supseteq R^{\Omega}$, поэтому достаточно доказать, что в случае полной порядковой важности выполняется $R^{\dot{\prec}} \subseteq R^{\Omega}$. Воспользуемся известным аналитическим решающим правилом для проверки $y R^{\Omega} z$ в случае полной порядковой важности. В этом случае существуют порядковые, или ординальные, коэффициенты важности критериев – положительные в сумме равные единице числа $\alpha_1^o, \dots, \alpha_m^o$, для которых выполняются условия: $i \dot{\sim} j \Rightarrow \alpha_i^o = \alpha_j^o, i \dot{\succ} j \Rightarrow \alpha_i^o > \alpha_j^o$. Введем в рассмотрение числа

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} \alpha_i^o, & y_i \geq w_k, \\ 0, & y_i < w_k \end{cases}, \quad i \in M, \quad k = 2, \dots, q.$$

В векторе $\alpha^k(y) = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{mk})$ упорядочим все компоненты по невозрастанию, полученный вектор обозначим как $\alpha_{\searrow}^k(y)$. Имеет место решающее правило [3]:

$$(П.2) \quad yR^{\Omega}z \Leftrightarrow \alpha_{\searrow}^k(y) \geq \alpha_{\searrow}^k(z), \quad k = 2, \dots, q,$$

где $\geq$ – знак векторного нестрогого неравенства для n -мерных векторов ($n \geq 2$): $a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i, i = 1, \dots, n$.

Пусть для некоторых векторных оценок $y, z \in Z$ выполняется $yR^{\searrow}z$. Тогда по теореме 1 выполняются соотношения (4). Для произвольного $k = 2, \dots, q$ докажем, что из соотношения $M_k(y) \succsim M_k(z)$ следует $\alpha_{\searrow}^k(y) \geq \alpha_{\searrow}^k(z)$. Заметим, что числа $\alpha_{ik}(y)$ не равны нулю при $i \in M_k(y)$. Поэтому вектор $\alpha^k(y)$ состоит из ненулевых компонент с номерами из $M_k(y)$. По лемме 1 для соотношения $M_k(y) \succsim M_k(z)$ существует разбиение П.1. Поэтому и для компонент векторов $\alpha^k(y)$ и $\alpha^k(z)$ существует соответствующее попарное разбиение компонент:

$$\alpha_{i_1k}(y) \geq \alpha_{j_1k}(z), \alpha_{i_2k}(y) \geq \alpha_{j_2k}(z), \dots, \alpha_{i_mk}(y) \geq \alpha_{j_mk}(z).$$

Следовательно, должно выполняться и $\alpha_{\searrow}^k(y) \geq \alpha_{\searrow}^k(z)$. Тогда согласно (П.2) верно $yR^{\Omega}z$. Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности группами критериев // *АиТ.* 2022. № 7. С. 119–136.
2. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Теоретические основы и методы анализа решений в условиях неопределенности при качественных оценках вероятностей и предпочтений // *АиТ.* 2026. № . С.
3. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2022.
4. *Пфаницагль И.* Теория измерений. М.: Мир, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 08.12.2025

После доработки 27.01.2026

Принята к публикации 02.02.2026