



Российская Академия Наук

ISSN 0005-2310 (Print)

ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

9

сентябрь

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И., Моржин О.В., Мунасыпов Р.А.,
Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я.,
Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю.,
Рапопорт Л.Б., Родионов И.В., Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А.,
Филимонюк Л.Ю., Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Чхатишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2026 г. Я.И. КВИНТО, канд. техн. наук (yanakvinto@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УПРАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ: РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматриваются методы управления на основе данных для дискретных линейных стационарных систем, основанные на синтезе управления по конечным наборам измерений входа и выхода системы с неизвестными матрицами. Обсуждаемый подход также характеризуется применением аппарата линейных матричных неравенств. Рассмотрены методы на основе фундаментальной леммы и концепции информативности данных для решения задачи квадратичной стабилизации системы (при точных данных и в случае воздействия на систему ограниченных внешних возмущений), задачи о синтезе оптимального линейно-квадратичного регулятора и $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления. Рассматриваются особенности применения методов, обсуждаются преимущества и недостатки, числовые примеры иллюстрируют их работу.

Ключевые слова: управление на основе данных, фундаментальная лемма, информативность данных, дискретная линейная стационарная система, линейные матричные неравенства, ограниченные внешние возмущения, оптимальное управление.

DOI: 10.7868/S2413977726090018

1. Введение

За последние полтора-два десятилетия заметно расширилось такое сравнительно молодое направление теории управления, как управление на основе данных (Data-Driven Control, DDC). Его основной идеей является синтез управления для динамической системы с частично или полностью неизвестной моделью по измеренным значениям входных и выходных сигналов этой системы без ее идентификации.

На данный момент известно большое количество очень отличающихся друг от друга методов DDC для решения самых разнообразных задач, и постоянно появляются новые. Обсуждение истории и идеологии в целом направления DDC, а также отдельных его аспектов, подходов и методов можно найти, например, в обзорах [1–7], книгах [8–12] и др.

Классические постановки задач управления остаются по-прежнему актуальными. Прежде всего это задачи стабилизации, в том числе при внешних возмущениях, синтез оптимального линейно-квадратичного регулятора

ра (LQR), $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления. Для всех них также имеются варианты методов управления на основе данных, которые и будут рассмотрены подробнее в настоящем обзоре.

Обзор посвящен прямым методам управления на основе данных, использующим для решения перечисленных выше задач различные способы параметризации системы при недостаточной информации о ее модели и опирающимся на известные и хорошо себя зарекомендовавшие методы традиционного модельного управления, например основанные на построении функций Ляпунова. Этот подход объединяет методы DDC на основе поведенческой теории систем Яна Виллемса (Behavioral Systems Theory) [13, 14] и его фундаментальной леммы [15–17] и методы, опирающиеся на концепцию информативности данных [18–20].

Фундаментальная лемма (или лемма Я. Виллемса и др., Fundamental Lemma, ФЛ) утверждает, что для управляемой линейной системы все входо-выходные траектории конечной длины могут быть параметризованы с использованием всего лишь одной траектории конечной длины, генерируемой неисчезающе возбуждающей последовательностью входов. т.е. через векторы измеренных значений сигналов конечной длины. К настоящему времени известны разнообразные модификации и расширения ФЛ, например: конструктивное доказательство с оценкой нижней границы выполнения условия неисчезающего возбуждения [22], анализ и синтез непрерывных систем [23, 24], ФЛ для стохастических систем [25–27], для проверки управляемости [28]; ослабление условий управляемости и неисчезающего возбуждения [29], ФЛ для проверки устойчивости [30]; робастная ФЛ [31, 32], для нестационарных систем [33–35], для систем с насыщением входного сигнала [36, 37], аффинных систем [38], систем с переключениями [39], билинейных [40] и нелинейных [41, 42] систем, авторегрессионных моделей [43], в прогнозирующем управлении [44–49], в оптимальном управлении с ограничениями по неточным данным [50], в задачах слежения [51, 52] и о консенсусе [53], расширенная ФЛ для нескольких наборов данных [54], дополненная ФЛ для конструирования альтернативных неминимальных векторов состояний [55] и универсальных входных сигналов [56] и многие другие.

В альтернативной концепции данные должны удовлетворять определенным требованиям, различным в каждой конкретной задаче и, как правило, более мягким по сравнению с ФЛ, – так называемым условиям информативности данных (ИД). Варианты использования концепции информативности данных также разнообразны: анализ структурных свойств линейных систем по зашумленным данным [57], исследование наблюдаемости [58], анализ и синтез непрерывных систем [59], распределенная положительная стабилизация [60], анализ линейных систем с коническими ограничениями [61], синтез диссипативных систем [62], аффинных систем [63], систем с переменными параметрами [64], авторегрессионных моделей [65], синтез алгебраического регулятора в задаче слежения [66], deadbeat-регулятор [18], ИД для случая

нескольких наборов данных и расширения ФЛ [67], применительно к задачам оптимизации на основе данных [68] и многие другие результаты.

Выбор для обзора именно этого направления внутри DDC обусловлен следующими соображениями. Во-первых, как видно по публикациям выше, оно является достаточно универсальным и решает самые разнообразные задачи управления. Во-вторых, эти методы имеют строгое теоретическое обоснование, в том числе относительно минимальных требований к объему и «качеству» исходных данных. В-третьих, с практической точки зрения они весьма удобны тем, что синтез управления производится по конечным наборам экспериментальных данных, а для теоретических выводов и вычислений применяются хорошо разработанные и эффективные методы линейной алгебры, выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования, аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) и т.п. И в-четвертых, методы из указанной группы можно комбинировать с принципиально другими подходами управления на основе данных (например, с ПИД-регуляторами при неизвестной модели системы [21]). Естественно, имеются и недостатки: например, применение аппарата линейных матричных неравенств может ограничивать объем данных, с которым возможно производить манипуляции без серьезных вычислительных сложностей.

В рамках одного обзора невозможно объять все имеющиеся результаты. Объектом внимания здесь будут только *дискретные линейные стационарные системы* и тот случай, когда имеется возможность получить конечный набор измерений входного и выходного сигналов (известных размерностей) *разомкнутой системы*. Кроме того, ограничимся рассмотрением управления в виде линейной статической обратной связи по состоянию, а для синтеза управления будем использовать только экспериментальные данные, предполагая, что они точны. Случаи, когда в измерениях входа и/или выхода системы имеются ошибки, рассматриваются в [19, 69–74] и др. Другие классы систем и регуляторов в настоящей работе не затрагиваются, также не рассматриваются альтернативные методы, например основанные на разного вида обучении, онлайн-управление и др.

В некоторых из представленных задач предполагается воздействие на систему постоянно действующих *внешних возмущений*, которые часто невозможно измерить непосредственно, но для них известны некоторые общие ограничения.

Во всех рассматриваемых задачах будем считать, что в самих системах, помимо неизвестных матриц и внешних возмущений, нет неопределенностей иного типа. Но стоит отметить, что в настоящий момент для систем с неопределенностью в структуре и/или параметрах имеются значимые результаты, основанные на совместном использовании экспериментальных данных и априорной информации. Так, в [75] в системе предполагается наличие структурированной неопределенности. В ряде русскоязычных публикаций предлагаемые методы для нестационарных систем [76] и для систем с па-

раметрической неопределенностью [77–79] основаны на функции Ляпунова, используют «погружение» исходной неопределенной системы в расширенную полностью определенную систему с дополнительным искусственным возмущением и не требуют выполнения условий фундаментальной леммы и даже – в некоторых задачах – информативности данных.

Цель обзора – представить разнообразие методов DDC, которые объединены идеологией поведенческой теории систем (а именно, применением фундаментальной леммы и условий информативности данных) и использованием аппарата ЛМН для решения ряда классических задач теории управления, исследовать особенности их применения в каждой задаче, обсудить преимущества и недостатки.

Статья организована следующим образом: раздел 2 посвящен задаче квадратичной стабилизации и подходам к ее решению на основе данных; раздел 3 посвящен способам решения задачи об оптимальном линейно-квадратичном регуляторе, раздел 4 – методам DDC для систем с внешними возмущениями, а именно: квадратичной стабилизации (подраздел 4.2); методом синтеза оптимального $\mathcal{H}_2$ - (подраздел 4.3) и $\mathcal{H}_\infty$ -управления (подраздел 4.4). Для каждой из рассматриваемых задач приводятся иллюстративные числовые примеры. В разделе 5 подведены итоги обзора.

Обозначения: $\mathbb{R}^{m \times n}$ – множество вещественных матриц $m \times n$; $\mathbb{S}^n$ – множество симметричных матриц $n \times n$; $\mathbb{S}_{++}^n$ – множество симметричных положительно определенных матриц $n \times n$; $\|\cdot\|$ – спектральная норма матрицы; $^\top$ – символ транспонирования; † – правая псевдообратная матрица; I – единичная матрица соответствующей размерности. Все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц, в линейных матричных неравенствах знаком $*$ отмечены блоки, симметричные явно указанным.

Для сигналов $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, будем обозначать конечные матрицы длительности $T \geq 0$, составленные из их измерений, следующим образом:

$$\begin{aligned} U &:= [u(0) \quad u(1) \quad \dots \quad u(T-1)] \in \mathbb{R}^{m \times T}; \\ X &:= [x(0) \quad x(1) \quad \dots \quad x(T)] \in \mathbb{R}^{n \times (T+1)}; \\ X_- &:= [x(0) \quad x(1) \quad \dots \quad x(T-1)] \in \mathbb{R}^{n \times T}; \\ X_+ &:= [x(1) \quad x(2) \quad \dots \quad x(T)] \in \mathbb{R}^{n \times T}. \end{aligned}$$

2. Квадратичная стабилизация

Рассмотрим дискретную линейную стационарную систему

$$(1) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Здесь и далее считаем, что пара (A, B) управляема, а наблюдаемый выход совпадает с состоянием системы:

$$y(k) = x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Задача состоит в синтезе квадратично стабилизирующего регулятора в виде статической линейной обратной связи по состоянию:

$$u(k) = Kx(k), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Когда матрицы A , B известны (традиционный «модельный» подход, Model-Based Control), задача сводится к поиску матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, для которых выполняется хорошо известное матричное неравенство Ляпунова

$$(2) \quad (A + BK)P(A + BK)^\top - P \prec 0,$$

или в эквивалентном виде [80]:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} P & AP + BY \\ * & P \end{bmatrix} \succ 0.$$

Решение $\hat{P}$, $\hat{Y}$ доставляет регулятор с матрицей $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$, квадратично стабилизирующий систему (1).

Теперь перейдем к представлению системы с помощью векторов измеренных значений: если даны (U, X) , то систему (1) с точно известными матрицами A_{tr} , B_{tr} можно записать как

$$(4) \quad X_+ = \begin{bmatrix} B_{tr} & A_{tr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix},$$

а множество *всех* систем с матрицами A , B , способных генерировать такие данные (U, X) , обозначим как

$$(5) \quad \Sigma = \left\{ (A, B) : X_+ = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} \right\}.$$

Поскольку данные получены от системы (4), то $(A_{tr}, B_{tr}) \in \Sigma$. Однако по этим данным невозможно отличить систему с матрицами (A_{tr}, B_{tr}) от какой-либо другой системы в Σ , и, следовательно, в задаче управления требуется синтезировать регулятор, который квадратично стабилизирует *все* системы в Σ .

С точки зрения функции Ляпунова в подходе DDC требуется найти общую матрицу P , удовлетворяющую (2) для всех $(A, B) \in \Sigma$.

В следующих подразделах приводятся наиболее известные методы синтеза квадратично стабилизирующего регулятора на основе данных, опирающиеся на фундаментальную лемму (подраздел 2.1), концепцию информативности данных (подраздел 2.2) и с помощью квадратичных матричных неравенств (подраздел 2.3).

2.1. Параметризация на основе фундаментальной леммы

В [69] предлагается модификация традиционной «модельной» постановки задачи квадратичной стабилизации системы (1) на случай управления на основе данных с помощью непараметрического представления системы на основе измеренных данных и с применением фундаментальной леммы (Виллемса и др.) [15, 16], согласно которой данные (измерения) (U, X) должны быть достаточно «полными» для идентифицируемости системы и, следовательно, для возможности синтеза управления.

Определение 1 [15]. Входной сигнал системы $[u(0) \ u(1) \ \dots \ u(T-1)] \in \mathbb{R}^{m \times T}$ называется *неисчезающе возбуждающим* (*persistently exciting*) порядка $n + L$, $1 \leq L \leq T$, если матрица, составленная из сдвигов измерений входного сигнала и измерений выходного сигнала (состояний)

$$(6) \quad H_L = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(T-L) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(L-1) & u(L) & \dots & u(T-1) \\ x(0) & x(1) & \dots & x(T-L) \end{bmatrix},$$

имеет полный ранг:

$$\text{rank } H_L = n + mL.$$

Фактически это означает, что набор сигналов на входах «охватывает» все пространство возможных динамик системы, т.е. заставляет проявиться все состояния и взаимодействия между входами и выходами. Далее везде полагаем $L = 1$.

Важно отметить, что первоначально условия неисчезающего возбуждения, на которые опирается ФЛ, появились в 1970-х гг., т.е. задолго до появления теории DDC, и использовались в работах по адаптивному управлению. Так, например, в [81, теорема 2.4.2] и [82, п. 3.3] устанавливаются идентифицирующие свойства в адаптивных системах при выполнении условия неисчезающего возбуждения. И в целом идеология DDC внутренне тесно связана с адаптивным и робастным управлением [77], поскольку опирается на совместное использование экспериментальных и априорных данных для синтеза управления системами с неопределенностями в модели и действующими на них возмущениями (см. [76–79]).

Лемма 1 (фундаментальная лемма, [15, теорема 1], [16, лемма 1]). Если в системе (1) вход U длительности T является неисчезающе возбуждающим порядка $n + 1$, то

1. выполняется так называемое ранговое условие фундаментальной леммы:

$$(7) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} = n + m.$$

2. любая траектория $\begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{X}_- \end{bmatrix}$ длины T представима в виде линейной комбинации измеренных данных:

$$\begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{X}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} g \quad \forall g \in \mathbb{R}^T;$$

и наоборот: любая линейная комбинация $\begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} g$, $g \in \mathbb{R}^T$, будет являться траекторией длины T для системы (1).

В ряде методов, включая представленный в настоящем разделе, именно условие (7) является важным для синтеза управления непосредственно по данным без предварительной идентификации модели.

Полагаем, что векторы измерений U и X_- получены измерением сигналов разомкнутой системы. В рассматриваемом методе авторы показывают (см. [69], теорема 2), что матрица регулятора K удовлетворяет соотношению

$$(8) \quad \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G$$

с некоторой (вообще говоря, не единственной) неизвестной матрицей $G \in \mathbb{R}^{T \times n}$, откуда следует, что регулятор имеет вид

$$(9) \quad K = UG,$$

а матрица замкнутой системы записывается на основе данных как

$$(10) \quad A_K = A + BK = X_+ G$$

с той же матрицей G .

Таким образом, для стабилизирующего регулятора матрица $A_K = X_+ G$ должна удовлетворять классическому условию Ляпунова (2). В результате доказана теорема о том, как синтезировать стабилизирующий регулятор на основе данных с использованием квадратичной функции Ляпунова и линейных матричных неравенств.

Теорема 1 [69, теорема 3]. Пусть выполняется условие фундаментальной леммы (7). Тогда любая матрица $Q \in \mathbb{R}^{T \times n}$, удовлетворяющая неравенству

$$(11) \quad \begin{bmatrix} X_- Q & X_+ Q \\ * & X_- Q \end{bmatrix} \succ 0,$$

доставляет матрицу регулятора

$$(12) \quad \hat{K} = U \hat{Q} (X_- \hat{Q})^{-1}.$$

Обратное также верно: если K – стабилизирующий регулятор, то он может быть представлен в виде (12) с матрицей Q , удовлетворяющей (11).

Замечание 1. Важным результатом является то, что эта теорема дает характеристику *всего множества стабилизирующих регуляторов* вида $u = Kx$ для всех систем с матрицами $(A, B) \in \Sigma$, соотносящихся с исходными измерениями.

Отметим, что в этой задаче размерность матричной переменной Q зависит от объема экспериментальных данных T , и с учетом (7) должно выполняться $T \geq n + m$.

Замечание 2. Здесь и далее рассматриваются измерения, полученные от разомкнутой системы. И если эта система неустойчива, то могут возникать проблемы с применением рассматриваемых методов, поскольку физически может быть неосуществимым получить измерения минимального необходимого объема из-за проявлений неустойчивости. В такой ситуации требуются другие подходы к синтезу регулятора.

2.2. Синтез регулятора на базе концепции информативности данных

Поведенческая теория систем Я. Виллемса и фундаментальная лемма дали сильный толчок к развитию управления на основе данных и показали широкие возможности параметризации системы и закона управления с помощью измерений входных и выходных сигналов. Однако эта лемма накладывает существенные ограничения на минимальный необходимый объем и «качество» используемых данных. Поэтому логичным стало развитие данного направления в сторону смягчения требований к измерениям, когда для прямого синтеза управления по ним уже не обязательна идентифицируемость системы (т.е. выполнение фундаментальной леммы). В результате появилась концепция информативности данных [18, 19].

Так, в [18] авторы вместо условия исчезающего возбуждения предлагают более мягкие условия информативности данных, при выполнении которых траектория $[U^\top \ X^\top]^\top$ конечной длины T несет в себе столько же информации, что и модель системы в пространстве состояний с известными матрицами (1). Как правило, необходимые и достаточные условия информативности данных для разрешимости конкретной задачи формулируются индивидуально и имеют вид линейного матричного равенства или неравенства (или их системы).

Применительно к задаче стабилизации системы (1) обратной связью по состоянию $u = Kx$ данные (U, X) являются информативными, если существует матрица $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такая, что матрица замкнутой системы $A + BK$ устойчива по Шуру при всех $(A, B) \in \Sigma$, соответствующих экспериментальным данным. И оказывается, что данным не обязательно обладать свойством исчезающего возбуждения для того, чтобы синтезировать на их основе закон управления. А именно, доказана следующая

Теорема 2 [18, теорема 16]. *Экспериментальные данные (U, X) являются информативными для стабилизации системы обратной связью по со-*

стоянию тогда и только тогда, когда

$$(13) \quad \text{rank } X_- = n$$

и существует правая обратная матрица $X_-^\dagger$ к X_- такая, что $X_+X_-^\dagger$ устойчива.

На основе этой теоремы сформулирован конструктивный способ построения стабилизирующего регулятора на базе концепции информативности данных.

Теорема 3 [18, теорема 17]. Экспериментальные данные (U, X) являются информативными для стабилизации системы обратной связью по состоянию тогда и только тогда, когда существует матрица $Q \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такая, что выполняются

$$(14) \quad \begin{bmatrix} X_-Q & X_+Q \\ * & X_-Q \end{bmatrix} \succ 0, \\ X_-Q = (X_-Q)^\top.$$

При этом K является стабилизирующим регулятором тогда и только тогда, когда для некоторой матрицы $\hat{Q}$, удовлетворяющей (14),

$$\hat{K} = U\hat{Q}(X_- \hat{Q})^{-1}.$$

Очевидно, что здесь ЛМН и параметризация регулятора K имеют тот же вид (11)–(12), что и при синтезе регулятора на основе фундаментальной леммы (раздел 2.1), однако в случае условий информативности данных не требуется выполнение рангового условия (7): вместо него появляется более мягкое условие $X_-Q = (X_-Q)^\top$.

И еще одно важное отличие вытекает из (13) и состоит в том, что при синтезе регулятора на основе информативности данных требуется всего $T \geq n$ измерений, тогда как для выполнения условий фундаментальной леммы требуется как минимум $T \geq n + m$ измерений.

Таким образом, концепция информативности данных расширяет доступность экспериментальных данных, подходящих для синтеза управления: для некоторых (U, X) условия фундаментальной леммы могут не выполняться (система неидентифицируема), но метод с выполнением условий информативности этих данных успешно решает задачу управления.

2.3. Синтез регулятора при помощи квадратичных матричных неравенств

Еще один способ параметризации с условием информативности данных предложен в [83–85] и основан на применении матричной леммы Финслера к ограничениям, записанным в виде квадратичных матричных неравенств

([85, теорема 1], см. также раздел 4.1, лемма 3). Этот результат является частным случаем теоремы, полученной для синтеза управления системами с внешними возмущениями; более подробно этот подход представлен во второй части статьи и, в частности, в разделе 4.2.2. Здесь для краткости приведем сразу готовый результат, представляющий интерес с точки зрения вычислений.

Теорема 4 [85, теорема 2]. *Данные (U, X) , сгенерированные системой (1), информативны для стабилизации обратной связи по состоянию тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скаляр $\beta > 0$, такие что*

$$(15) \quad \begin{bmatrix} P - \beta I & * & * & * \\ 0 & -P & * & * \\ 0 & -Y & 0 & * \\ 0 & 0 & Y^\top & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_+ \\ -X_- \\ -U \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_+ \\ -X_- \\ -U \\ 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0.$$

Для таких $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ при некотором $\hat{\beta}$ стабилизирующий регулятор имеет вид $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для всех $(A, B) \in \Sigma$.

Принципиальное отличие данного способа от двух предыдущих проявляется в разном устройстве переменных в линейном матричном неравенстве: в (11), (14) неизвестная матрица Q имеет размерность $T \times n$, т.е. непосредственно зависит от длительности эксперимента и объема полученных данных, тогда как переменные в матричном неравенстве (15) не зависят от T .

Для данной задачи условие информативности накладывает ограничение на длительность эксперимента $T \geq n$, поскольку для существования стабилизирующего регулятора должна существовать правая псевдообратная матрица $X_-^\dagger$ (см. подраздел 2.2, теорема 2), т.е. X_- имеет полный ранг n [18].

Таким образом, в зависимости от размерности системы и доступного объема измерений можно выбирать наиболее выгодный с вычислительной точки зрения способ.

Пример 1. Здесь и во всех дальнейших примерах будем рассматривать в качестве объекта дискретизированную с шагом дискретизации 0,1 с модель неустойчивого химического реактора периодического действия [69, 86] с матрицами

$$(16) \quad A = \begin{bmatrix} 1,178 & 0,001 & 0,511 & -0,403 \\ -0,051 & 0,661 & -0,011 & 0,061 \\ 0,076 & 0,335 & 0,560 & 0,382 \\ 0 & 0,355 & 0,089 & 0,849 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,004 & -0,087 \\ 0,467 & 0,001 \\ 0,213 & -0,235 \\ 0,213 & -0,016 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы в методах на основе данных считаем неизвестными и используем их лишь для моделирования измерений, а также для решения задачи модельным подходом, чтобы сравнивать с ним решения на основе данных.

Синтезируем квадратично стабилизирующие регуляторы каждым из приведенных выше способом и сравним их с результатом модельного подхода и между собой. Зададим начальные условия $x(0)$ равномерно распределенными на единичном шаре: $\|x(0)\| = 1$. Зададим $T \geq n + m$ для того, чтобы заведомо выполнялись условия всех используемых методов. Пусть $T = 10$. Будем подавать на систему управляющие воздействия $u(k)$, равномерно распределенные на $[-1, 1]$, в результате получим векторы измерений $U = [u(0) \dots u(9)]$, $X_- = [x(0) \dots x(9)]$, $X_+ = [x(1) \dots x(10)]$. Все вычисления в статье выполнены в среде MatLab с использованием пакета `svx` [87].

Решение традиционным модельным способом по формуле (3) доставляет регулятор

$$\hat{K}_{mbc} = \begin{bmatrix} 0,6377 & -1,4696 & 0,0944 & -1,2149 \\ 3,0471 & 0,0622 & 2,9947 & -0,7239 \end{bmatrix}.$$

Перед применением метода на основе фундаментальной леммы было еще раз проверено выполнение рангового условия по полученным данным. Вычисления по теореме 1 (подраздел 2.1) дали регулятор

$$\hat{K}_{fl} = \begin{bmatrix} 0,6320 & -1,4699 & 0,0940 & -1,2254 \\ 3,0371 & 0,0612 & 3,0009 & -0,7457 \end{bmatrix},$$

а решением методом с условием информативности данных (подраздел 2.2, теорема 3) является

$$\hat{K}_{di} = \begin{bmatrix} 0,6455 & -1,4713 & 0,1016 & -1,2018 \\ 3,0770 & 0,0563 & 3,0210 & -0,6770 \end{bmatrix}.$$

Регулятор

$$\hat{K}_{qmi} = \begin{bmatrix} 0,9537 & -1,45460,1305 & -1,5784 \\ 4,5344 & -0,15273,1986 & -1,5027 \end{bmatrix}$$

был получен решением задачи на основе квадратичных матричных неравенств (подраздел 2.3, теорема 4) при $\hat{\beta} = 7,8 \cdot 10^{-6}$.

На рис. 1 приведены траектории выходов системы. Здесь отображены выходы $y(k) = x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, разомкнутой системы (жирной пунктирной линией, кружками обозначены использующиеся измерения X) и замкнутой системы: в модельном случае – $y_{mbc}(k)$, тонкая сплошная линия; в методе с фундаментальной леммой – $y_{fl}(k)$, тонкая пунктирная линия; с условием информативности данных – $y_{di}(k)$, тонкая точечная линия; в методе с условием информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств – $y_{qmi}(k)$, тонкая штрихпунктирная линия.

Сравним полученные результаты с модельным примером, оценив близость траекторий:

$$\begin{aligned} \|y_{mbc}(k) - y_{fl}(k)\|_2 &= 0,0073, & \|y_{mbc}(k) - y_{di}(k)\|_2 &= 0,0088, \\ \|y_{mbc}(k) - y_{qmi}(k)\|_2 &= 0,0696, & k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

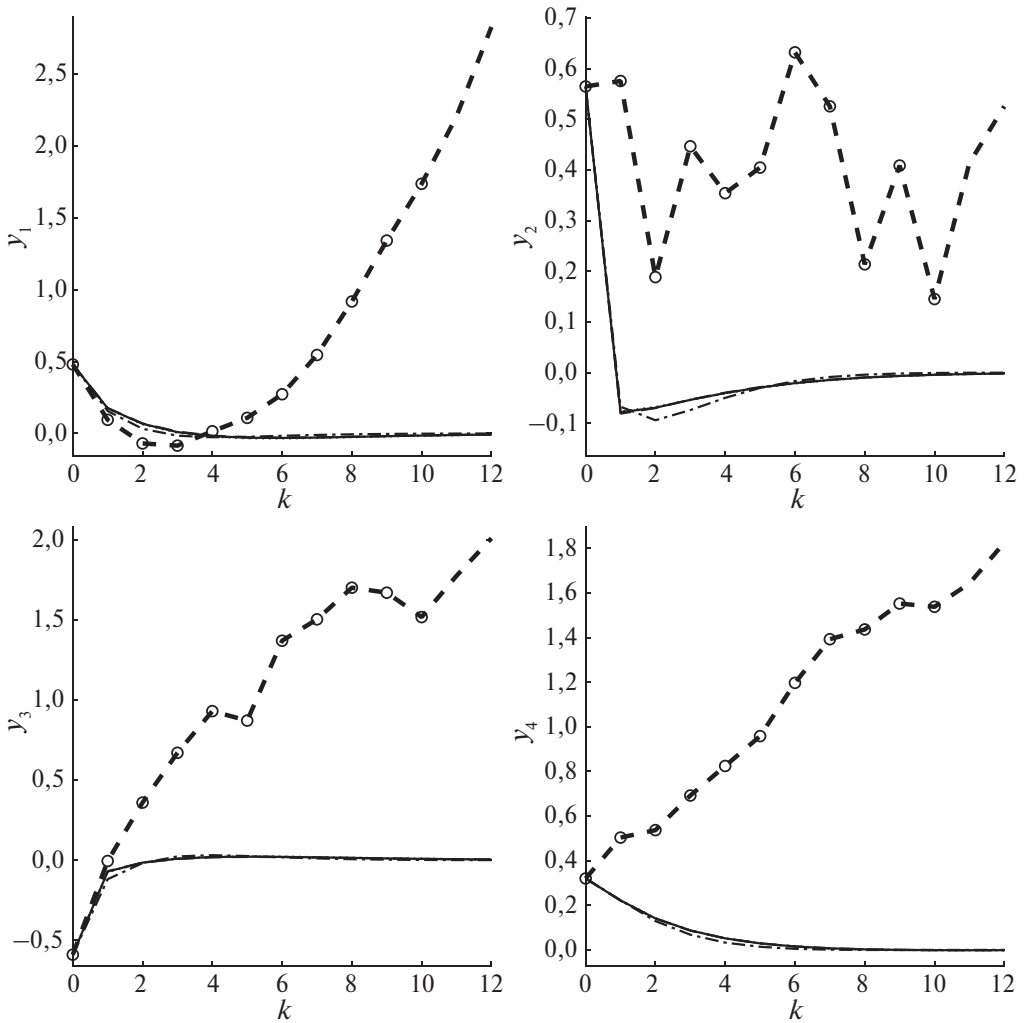


Рис. 1. Траектории выходов системы при решении задачи квадратичной стабилизации.

При увеличении длительности измерений T траектория в методе с использованием квадратичных матричных неравенств все больше приближается к модельной.

На самом деле, по постановке задачи нет никаких требований к управлению, кроме того, что оно должно быть стабилизирующим. Поэтому близость матриц $\hat{K}$ и траекторий здесь в целом никоим образом не характеризует качество решений: эффективность методов подтверждается самим фактом, что они все успешно стабилизировали систему. Однако наблюдение того, что модельное и DDC-решения настолько близки, хоть это и не требуется, является дополнительным плюсом в пользу DDC.

3. Задача об оптимальном линейно-квадратичном регуляторе

Рассмотрим систему

$$(17) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

с фиксированным начальным условием $x(0) = x_0$; $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Если не указано иное, то рассматриваем оптимизируемый выход

$$z(k) = x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Задача LQR состоит в синтезе закона управления в виде обратной связи по состоянию

$$u(k) = Kx(k), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

который минимизирует критерий качества

$$(18) \quad J(x_0, u) = \sum_{k=1}^{\infty} (x(k)^{\top} Q x(k) + u(k)^{\top} R u(k))$$

и при этом матрица замкнутой системы $A + BK$ устойчива. Предполагается, что матрицы подходящих размерностей $Q = Q^{\top} \succcurlyeq 0$ и $R = R^{\top} \succ 0$ заданы, пара (Q, A) наблюдаема.

Известно (см., например, [88]), что решение данной задачи доставляет регулятор

$$(19) \quad K = -(R + B^{\top} P^+ B)^{-1} B^{\top} P^+ A,$$

где $P^* \in \mathbb{S}_{++}^n$ – единственное решение дискретного уравнения Риккати

$$(20) \quad A^{\top} P A - P - A^{\top} P B (R + B^{\top} P B)^{-1} B^{\top} P A + Q = 0.$$

При этом получаем минимум функционала качества

$$(21) \quad J_{MBC}^{LQR} = x_0^{\top} P^* x_0.$$

Если матрицы A и B неизвестны, то в рамках управления на основе данных на данный момент имеется несколько способов решения. Большинство из них основано на применении функции Ляпунова и неравенства Риккати и использует различные способы параметризации системы на основе данных. Ниже рассмотрим подходы на основе фундаментальной леммы (подраздел 3.1) и концепции информативности данных (подраздел 3.2). Также будут представлены результаты для задачи о синтезе субоптимального линейно-квадратичного регулятора с условием информативности данных (подраздел 3.3) и для задачи LQR на конечном горизонте с фундаментальной леммой (подраздел 3.4).

3.1. Параметризация на основе фундаментальной леммы

Считаем, что выполняется ранговое условие фундаментальной леммы (7).

В [69, 89] исходная задача LQR записывается в виде

$$\min_{P, K} \text{trace}(QP + K^\top RKP)$$

при ограничениях

$$(A + BK)P(A + BK)^\top - P + I \preceq 0, \quad P \succ I.$$

Используя параметризацию (9)–(10), авторы указанных работ переходят к задаче непосредственно на основе измеренных данных следующим образом:

$$\min_{P, K, G} \text{trace}(QP + K^\top RKP)$$

при ограничениях

$$(X_+G)P(X_+G)^\top - P + I \preceq 0, \\ \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G, \quad P \succ I.$$

После замены переменных $Y = KP$ и ряда стандартных преобразований получаем задачу полуопределенного программирования, сформулированную с использованием экспериментальных данных:

$$(22) \quad \min_{Y \in \mathbb{R}^{T \times n}, Z \in \mathbb{R}^{m \times m}} \text{trace}(QX_-Y) + \text{trace}(Z)$$

при ограничениях

$$(23) \quad \begin{bmatrix} X_-Y - I & X_+Y \\ * & X_-Y \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} Z & R^{1/2}UY \\ * & X_-Y \end{bmatrix} \succeq 0,$$

решение которой доставляет оптимальный линейно-квадратичный регулятор

$$(24) \quad \hat{K} = U\hat{Y}(X_- \hat{Y})^{-1}.$$

Для того чтобы гарантировать единственность матрицы G в используемой параметризации $K = UG$, $A + BK = X_+G$, в [89] предлагается дополнить ограничения (23) условием

$$\left(I - \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} \right) Y = 0,$$

при этом оптимальный регулятор по-прежнему будет иметь вид (24).

Доказана теорема ([69], теорема 4) о том, что в случае точных данных (U, X) при выполнении рангового условия фундаментальной леммы регулятор (24) совпадает с точным модельным решением (19).

Очевидно, что для возможности применения данного метода необходимо количество измерений $T \geq n + m$.

3.2. Параметризация на основе концепции информативности данных

Для случае LQR оказывается, что условие информативности данных совпадает с фундаментальной леммой. Оно сформулировано в [18, теорема 28] и состоит в том, что по имеющимся измеренным данным синтез оптимального линейно-квадратичного регулятора возможен тогда и только тогда, когда выполняется ранговое условие фундаментальной леммы (7); отсюда же вытекает ограничение на длину вектора измерений: $T \geq m + n$. Конструктивный алгоритм синтеза оптимальной обратной связи дается там же и состоит из следующих шагов.

Алгоритм 1 ([18], теорема 29).

1. Решить задачу полуопределенного программирования

$$(25) \quad \max_{P \in \mathbb{S}_{++}^n} \text{trace } P$$

при ограничении

$$(26) \quad L(P) \preceq 0,$$

где линейный оператор $P \mapsto L(P)$:

$$L(P) := X_-^\top P X_- - X_+^\top P X_+ - X_-^\top Q X_- - U^\top R U.$$

Полученное единственное решение обозначим через P^* .

2. Найти правую псевдообратную матрицу $\hat{X}_-^\dagger$ такую, что

$$(27) \quad L(P^*)\hat{X}_-^\dagger = 0.$$

3. Оптимальный линейно-квадратичный регулятор вычисляется как

$$(28) \quad \hat{K} = U\hat{X}_-^\dagger,$$

доставляя функционалу (18) наименьшее значение

$$(29) \quad J_{ID}^{LQR} = x_0^\top P^* x_0.$$

При решении задачи LQR с помощью этого алгоритма размерность неизвестной матрицы P всего $n \times n$ и не зависит от длительности измерений, тогда как в задаче (22)–(23) неизвестные матрицы Y и Z имеют размеры $T \times n$ и $m \times t$ соответственно. Несомненным плюсом при решении на основе понятия информативности данных является возможность вычислить минимальное значение функционала (29) непосредственно по измеренным данным, что невозможно сделать способом на основе фундаментальной леммы из предыдущего подраздела.

В [90, 91] предлагается принципиально иной подход к решению задачи LQR на бесконечном горизонте. Векторы измерений конечной длины используются для оценивания расширенной (на 1 шаг вперед) матрицы наблюдаемости и вспомогательной матрицы, по которым затем строится регулятор.

Отмечается [18, 90], что найденное таким способом управление *стремится к оптимальному* по линейно-квадратичному критерию лишь при неограниченном увеличении числа измерений и нельзя гарантировать оптимальность при недостаточно больших длительностях экспериментов. Это отличает упомянутый способ от синтеза оптимального LQR на основе данных с помощью фундаментальной леммы (раздел 3.1) и концепции информативности данных (раздел 3.2), где *точное оптимальное* решение получают по набору данных конечной длины, поэтому не будем останавливаться на нем подробнее.

3.3. Субоптимальный LQR с условием информативности данных

Концепция информативности данных оказалась также весьма полезной для синтеза субоптимального линейно-квадратичного управления. В [92] показано, как для системы (17) с фиксированным начальным условием $x(0) = x_0$ и оптимизируемым выходом

$$z(k) = Cx(k) + B_2u(k)$$

с известными матрицами $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ построить по измеренным данным конечной длины закон управления в виде обратной связи $u = Kx$ такой, что матрица замкнутой системы $A + BK$ устойчива по Шуру и квадратичный критерий качества (18) принимает значения меньше заданного $\gamma > 0$: $J(x_0, u) < \gamma$.

Авторы опираются в своих выкладках на следующее утверждение [92, предложение 1]: если матрицы A , B известны, то K является субоптимальным линейно-квадратичным регулятором тогда и только тогда, когда существует матрица $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, такая что

$$(A + BK)^\top P(A + BK) - P + Q + K^\top RK \prec 0, \\ x_0^\top P x_0 \prec \gamma.$$

В случае неизвестных матриц системы при построении субоптимального LQR используется условие информативности данных (U, X) для стабилизации системы обратной связью $u = Kx$ (раздел 2.2, теорема 2).

В результате получена теорема (см. [92], теорема 9), в которой утверждается, что при заданных x_0 и $\gamma > 0$ по измеренным данным возможно построить субоптимальный линейно-квадратичный регулятор тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ и правая псевдообратная $X_-^\dagger$ к X_- такие, что

$$(X_+ X_-^\dagger)^\top P X_+ X_-^\dagger - P + Q + (U X_-^\dagger)^\top R U X_-^\dagger \prec 0, \\ x_0^\top P x_0 \prec \gamma.$$

Для найденной $\hat{X}_-^\dagger$ субоптимальный линейно-квадратичный регулятор имеет вид $\hat{K} = U \hat{X}_-^\dagger$.

Для вычислений удобнее перейти к задаче в форме ЛМН с помощью стандартных преобразований. Для этого положим в (18) $Q = C^\top C$, $R = B_2^\top B_2$, $C^\top B_2 = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ и после стандартных преобразований получаем следующую формулировку.

Предложение 1 [92, предложение 10]. *Данные (U, X) информативны для субоптимального линейно-квадратичного управления тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такие, что выполняются*

$$(30) \quad \begin{bmatrix} P & * & * \\ X_+ Y & P & * \\ (CX_- + B_2 U)Y & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \gamma & * \\ x_0^\top & P \end{bmatrix} \succ 0, \\ P = X_- Y.$$

Более того, K является субоптимальным линейно-квадратичным регулятором для всех систем с матрицами $(A, B) \in \Sigma$ из (5) тогда и только тогда, когда $\hat{K} = U \hat{Y} \hat{P}^{-1}$ для некоторых матриц $\hat{P}$, $\hat{Y}$, найденных из (30).

Для выполнения этих условий матрица X_- должна иметь полный ранг, т.е. для синтеза субоптимального линейно-квадратичного регулятора приведенным способом требуется всего $T \geq n$ измерений входа и выхода. Напомним, что для однозначной идентификации матриц A , B системы и для построения оптимального LQR (подразделы 3.1 и 3.2) требуется $T \geq n + m$ измерений.

Далее приведем один из способов решения задачи синтеза оптимального линейно-квадратичного регулятора на конечном горизонте по конечному набору измеренных данных и ниже в примере сравним его точность с методами для бесконечного горизонта.

3.4. LQR на конечном горизонте на основе фундаментальной леммы

В [93] рассматривается задача об оптимальном линейно-квадратичном регуляторе на конечном горизонте $N \geq 0$ для системы (17), а именно, задан критерий качества

$$J = x(N)^\top Q_f x(N) + \sum_{k=1}^{N-1} (x^\top Q x + u^\top R u),$$

где $Q_f \succ 0$.

При известных матрицах A , B оптимальное решение в форме последовательности $u^*(0), \dots, u^*(N-1)$ с $u^*(k) = K(k)x(k)$, $k = 1, \dots, N-1$, дается соотношением

$$(31) \quad K(k) = -(R + B^\top P(k+1)B)^{-1} B^\top P(k+1)A,$$

где $P(k)$ – решение дискретного уравнения Риккати

$$P(k) = A^\top P(k+1)A - A^\top P(k+1)B(R + B^\top P(k+1)B)^{-1} B^\top P(k+1)A + Q, \\ P(N) = Q_f.$$

Очевидно, что управление (31) зависит от времени и определено на временном интервале $[0, N]$. При $N \rightarrow \infty$ при наблюдаемых матрицах (Q, A) последовательность матриц $P(k)$ сходится к матрице P^+ , которая является решением дискретного уравнения Риккати (20), при этом получим оптимальный линейно-квадратичный регулятор на бесконечном горизонте (19).

При неизвестных матрицах A, B используется параметризация задачи на основе данных (8) с применением фундаментальной леммы (7). Доказана

Теорема 5 [93, теорема 3]. Оптимальным решением задачи об LQR на конечном горизонте является последовательность $K = (K_0, \dots, K_{N-1})$ такая, что

$$(32) \quad \hat{K}_k = U \hat{Y}_k \hat{P}_k^{-1},$$

где матрицы $\hat{P}_k \in \mathbb{S}_{++}^n$, $\hat{Y}_k \in \mathbb{R}^{T \times n}$ являются решением задачи полуопределенного программирования

$$(33) \quad \min_{P_k, Y_k, Z_k} \text{trace}(Q_f P_N) + \sum_{k=1}^{N-1} (\text{trace} Q P_k + \text{trace} Z_k)$$

при ограничениях

$$(34) \quad \begin{aligned} P_0 &\succcurlyeq I_n, \quad P_k = X_- Y_k, \\ \begin{bmatrix} P_{k+1} - I_n & X_+ Y_k \\ * & P_k \end{bmatrix} &\succcurlyeq 0, \quad \begin{bmatrix} Z_k & R^{1/2} U Y_k \\ * & P_k \end{bmatrix} &\succcurlyeq 0, \quad k = 0, \dots, N-1, \\ P &= (P_1, \dots, P_N), \quad Y = (Y_0, \dots, Y_{N-1}), \quad Z = (Z_0, \dots, Z_{N-1}). \end{aligned}$$

Для наблюдаемой пары (Q, A) при $N \rightarrow \infty$ это решение сходится к оптимальному решению задачи LQR на бесконечном горизонте (19), а минимальное необходимое количество измерений диктуется фундаментальной леммой: $T \geq n + m$. Важно, что размерность матричных переменных Y_k зависит от T . Еще одна отличительная особенность заложена в самой постановке и в методе решения задачи и заключается в том, что решением является не одно значение матрицы K , а целый набор.

Упомянем здесь другой способ синтеза оптимального LQR на конечном горизонте по измеренным данным из [94] (не будем его приводить для краткости изложения), где комбинируются условия стабилизации и классического LQR на конечном горизонте.

Пример 2. Для сравнения приведенных выше методов решения задачи LQR рассмотрим более общую модель реактора из примера 1 с матрицами (16) и оптимизируемым выходом

$$z(k) = Cx(k) + B_2 u(k),$$

положив $C = I$, $B_2 = 0$, так что $C^\top B_2 = 0$. Зададим матрицы $Q = I$, $R = I$. Измерения входа и выхода системы генерируем при $T = 10$ тем же образом,

как в примере 1, тогда выполняются условия применимости всех приведенных методов.

Найдем модельный оптимальный линейно-квадратичный регулятор по формулам (19)–(20) (либо в среде MatLab с помощью функции `idare`):

$$\hat{K}_{mbc}^{LQR} = \begin{bmatrix} 0,0811 & -0,7246 & -0,1444 & -0,6792 \\ 2,1509 & 0,0667 & 1,4934 & -0,9709 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_{mbc}^{LQR} = 3,9116.$$

Решением задачи на основе имеющихся данных с помощью фундаментальной леммы (22)–(24) (подраздел 3.1) и условий информативности данных (25)–(28) (подраздел 3.2) являются соответственно

$$\hat{K}_{fl}^{LQR} = \begin{bmatrix} 0,0811 & -0,7246 & -0,1444 & -0,6791 \\ 2,1508 & 0,0667 & 1,4934 & -0,9709 \end{bmatrix},$$

$$\hat{K}_{di}^{LQR} = \begin{bmatrix} 0,0811 & -0,7246 & -0,1444 & -0,6792 \\ 2,1509 & 0,0667 & 1,4934 & -0,9709 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_{di}^{LQR} = 3,9116.$$

Очевидно, что полученные регуляторы практически совпадают с теоретическим модельным.

Поскольку решения на основе моделей и на основе данных с условиями информативности очень близки: $\|\hat{K}_{mbc}^{LQR} - \hat{K}_{di}^{LQR}\| \approx 4,1350 \cdot 10^{-7}$, то получаем также очень близкие значения функционалов качества (21), (29).

С учетом строго неравенства $J(x_0, u) < \gamma$ в постановке задачи синтеза субоптимального управления (30) из подраздела 3.3 зададим чуть большее значение $\gamma = 3,9117$. Поскольку изначально постановка этой задачи несколько иная, ожидается, что результат при тех же параметрах, где возможно, будет все же отличаться от модельного случая и первых двух методов на основе данных. Так, при заданных выше значениях C , B_2 получаем субоптимальный регулятор:

$$\hat{K}_{sub}^{LQR} = \begin{bmatrix} -0,6008 & -1,5819 & -0,2738 & -2,4524 \\ 3,0702 & -0,0725 & 3,0633 & -2,2513 \end{bmatrix}.$$

Для синтеза оптимального линейно-квадратичного регулятора на конечном горизонте зададим $N = 20$, $Q_f = I$ и решим задачу (33)–(34) (подраздел 3.4). Решением является последовательность управляющих сигналов вида (32): $\hat{K}_{fin}^{LQR} = (\hat{K}_{fin 0}^{LQR}, \dots, \hat{K}_{fin 19}^{LQR})$ (не будем приводить значения в целях сокращения изложения), применяя которые ко входу, получаем траекторию системы на интервале $[0, 20]$.

На рис. 2 приведены траектории оптимизируемых выходов рассматриваемого реактора $z_i(k) = x_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Траектория разомкнутой системы отображена жирным пунктиром с выделенными кружками исходными измерениями X ; для замкнутой системы в модельном случае – $z_{mbc}(k)$, жирная сплошная линия; в методе на основе фундаментальной леммы – $z_{fl}(k)$, тонкая пунктирная линия; в методе с условием информативности данных – $z_{di}(k)$,

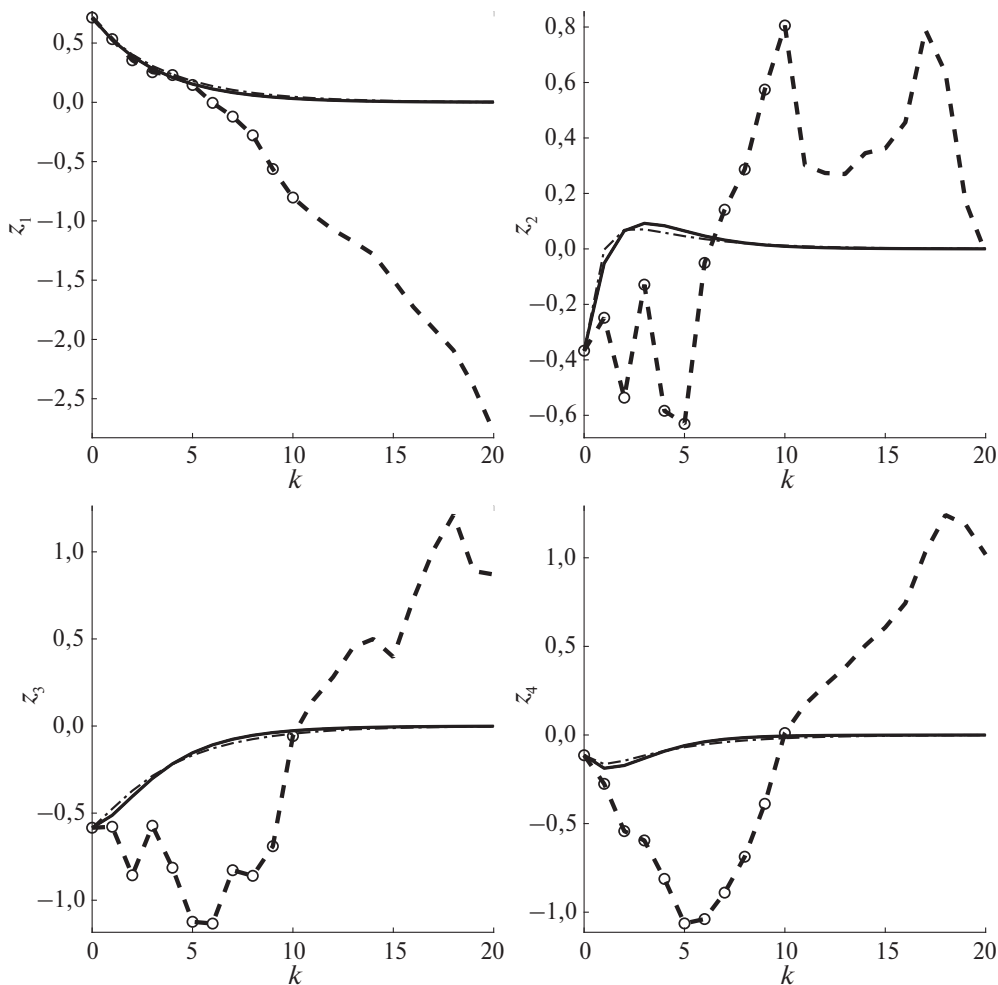


Рис. 2. Траектории выходов системы при решении задачи LQR.

тонкая точечная линия; в случае субоптимального управления – $z_{sub}(k)$, тонкий штрихпунктир; выходы системы с LQR на конечном горизонте – $z_{fin}(k)$, тонкая сплошная линия.

Оценим близость траекторий численно:

$$\|z_{mbc}(k) - z_{fl}(k)\|_2 = 2,3563 \cdot 10^{-5}, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{di}(k)\|_2 = 1,4229 \cdot 10^{-7},$$

$$\|z_{mbc}(k) - z_{sub}(k)\|_2 = 0,1030, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{fin}(k)\|_2 = 0,0066, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В данном примере задан критерий качества и существует единственное оптимальное решение задачи, поэтому близость решений (найденных регуляторов и получаемых выходных траекторий) к теоретическому модельному напрямую характеризует точность рассматриваемых методов DDC. Как видим, методы на основе фундаментальной леммы и с условием информативности данных дают высокую точность. Задача о субоптимальном LQR дает

в целом приемлемое решение, с учетом различий в постановках. Для LQR на конечном горизонте уже при заданных 20 шагах получаем очень близкое к точному решение (в смысле близости траектории $x_{fin}(k)$ к модельной точной $x_{mbc}(k)$), и при увеличении числа шагов N точность будет возрастать.

4. Управление системами с ограниченными внешними возмущениями

В синтезе управления для систем с внешними возмущениями возможны два альтернативных подхода. В первом, который в англоязычной литературе называют Certainty Equivalence, все построения производятся в предположении отсутствия возмущения, но при этом даются оценки его уровня, при котором такое управление не только возможно, но и гарантированно стабилизирует систему с требуемым качеством. Этот подход представляется менее интересным с точки зрения управления на основе данных, поскольку на практике по измеренным значениям входа и состояния и/или выхода системы невозможно оценить границы, в которых можно пренебречь этим, вообще говоря, неизвестным возмущением в силу частой недоступности его измерений; отмечается лишь, что подобные методы управления эффективны при малых возмущениях [89, 95]. С вычислительной точки зрения методы этого направления сводятся к методам на основе точных данных, например приведенным в разделах 2.1, 3.1 и т.п., а основной акцент делается на оценивании допустимого уровня возмущений [69]. В настоящей статье не будем подробно останавливаться на подходе Certainty Equivalence, желающие могут ознакомиться с ним, например, в [18, 69, 89, 96–98].

Второй подход непосредственно учитывает наличие возмущений, пытаясь ограничить их влияние. При этом необходимо каким-либо образом описывать само множество допустимых возмущений, чтобы в результате синтезировать управление (в том числе оптимальное по какому-либо критерию), стабилизирующее систему при любых возможных возмущениях из этого множества. Именно этот подход и рассматривается в следующих разделах применительно к задаче квадратичной стабилизации системы с внешними возмущениями и для задач о синтезе $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления.

4.1. Описание системы и множества возмущений

Рассмотрим дискретную систему общего вида с внешними возмущениями:

$$(35) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 u(k) + Dw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + B_2 u(k), \end{aligned}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $z(k) \in \mathbb{R}^l$, матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ при управлении на основе данных неизвестны; матрицы $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ заданы.

Значения возмущений $w(k) \in \mathbb{R}^p$ считаются неизвестными и недоступными для измерения, но некоторую их реализацию длины T будем обозначать как

$$W = [w(0) \quad w(1) \quad \dots \quad w(T-1)] \in \mathbb{R}^{p \times T}.$$

Систему вида

$$(36) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + Dw(k)$$

можно записать в терминах измерений:

$$X_+ = AX_- + B_1U + DW = [B_1 \quad A \quad D] \begin{bmatrix} U \\ X_- \\ W \end{bmatrix},$$

а множество всех систем со всеми такими матрицами (A, B_1, D) , которые способны генерировать данные (U, X, W) , будем обозначать

$$(37) \quad \Sigma_W = \left\{ (A, B_1, D) : X_+ = [B_1 \quad A \quad D] \begin{bmatrix} U \\ X_- \\ W \end{bmatrix} \right\};$$

в том числе получаем, что система вида (36) с точно известными матрицами $(A_{tr}, B_{1tr}, D_{tr})$ также принадлежит этому множеству: $(A_{tr}, B_{1tr}, D_{tr}) \in \Sigma_W$.

Во многих публикациях, посвященных управлению на основе данных системами с внешними возмущениями (например, [19, 20, 83–85, 95]), используется параметризованная форма записи множества допустимых внешних возмущений с использованием квадратичных матричных неравенств. А именно, неизвестная матрица возмущений W должна принадлежать множеству

$$(38) \quad \mathbf{W} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{p \times T} : \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}$$

с заданными матрицами $\Phi_{11} \in \mathbb{S}^p$, $\Phi_{12} \in \mathbb{R}^{p \times T}$, $0 \succ \Phi_{22} \in \mathbb{S}^T$. Далее будем обозначать $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{(n+T) \times (n+T)}$.

Данное неравенство квадратично относительно матрицы возмущений W , откуда вытекает, что все допустимые возмущения содержатся в *матричном эллипсоиде*. Квадратичное матричное неравенство подобного вида удобно для описания множества возмущений тем, что с его помощью можно выразить различные ограничения на возмущения.

Так, при $\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{22} = -I$ получаем возмущение W с ограниченной сверху энергией на протяжении всего времени эксперимента $[0, \dots, T-1]$:

$$(39) \quad WW^\top = \sum_{k=0}^{T-1} w_k w_k^\top \preccurlyeq \Phi_{11}.$$

1. Для W с ограниченным максимальным собственным значением $\sigma_{\max}(W) \leq \hat{\sigma}$ в (39) нужно задать $\Phi_{11} = \hat{\sigma}I$.

2. Для W с ограниченной сверху энергией: для $\|w_k\|_2 \leq \varepsilon$, $k = 0, \dots, T-1$, ограничения записываются как (39) с $\Phi_{11} = \varepsilon^2 TI$. Такое ограничение вносит консерватизм, возрастающий с увеличением T [19].

3. Границы максимальных отклонений каждой компоненты W вида $\|w_{k,j}\|_2 \leq \hat{w}_j$, $k = 0, \dots, T-1$, $j = 1, \dots, p$, можно записать в форме (39) с $\Phi_{11} = \sum_{j=1}^p \hat{w}_j^2 TI$.

4. Случай точных измерений ($w = 0$) можно характеризовать матрицей $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$.

При дальнейших выкладках форма описания множества допустимых возмущений (38) дает возможность использовать матричную S -процедуру [83–85] и матричную лемму Финслера [85]. Приведем их в том виде, в каком они применяются в рассматриваемых нами задачах.

Лемма 2 (строгая матричная S -процедура, [85, предложение 3]). *Даны матрицы $M, N \in \mathbb{S}^{k+l}$ следующего вида:*

$$(40) \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{bmatrix} \quad u \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^\top & N_{22} \end{bmatrix},$$

где $M_{22} \prec 0$, $N_{22} \prec 0$ и $\ker N_{22} \subseteq \ker N_{12}$.

Предположим, что существует некоторая матрица $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{l \times k}$, для которой выполняется

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{Z} \end{bmatrix}^\top N \begin{bmatrix} I \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \succ 0.$$

Тогда квадратичное матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top M \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \succ 0$$

верно для всех $Z \in \mathbb{R}^{l \times k}$, таких что

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top N \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

тогда и только тогда, когда существуют скаляры $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$, для которых

$$M - \alpha N \succcurlyeq \begin{bmatrix} \beta I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 3 (матричная лемма Финслера, [85, теорема 1]). Пусть матрицы $M, N \in \mathbb{S}^{k+l}$ заданы в виде (40) и выполняются следующие условия:

- 1) $M_{11} = 0$, $M_{22} \preccurlyeq 0$;
- 2) $N_{22} \preccurlyeq 0$ и $N_{11} - N_{12}N_{22}^\dagger N_{12}^\top = 0$;
- 3) существует матрица G : $M_{11} + G^\top M_{22}G \succ 0$ и $N_{22}G = N_{12}^\top$.

Тогда неравенство

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top M \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

верно для всех $Z \in \mathbb{R}^{l \times k}$, таких что

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top N \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} = 0,$$

тогда и только тогда, когда существует такой скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$M - \alpha N \succcurlyeq 0.$$

Теперь перейдем к рассмотрению известных методов управления на основе данных системами с ограниченными внешними возмущениями.

4.2. Квадратичная стабилизация систем с внешними возмущениями

Если матрицы A , B_1 в системе с внешними возмущениями

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + Dw(k), \quad \|w_k\|_2 \leq w^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

известны, то, как и в случае системы без возмущений (раздел 2), задача квадратичной стабилизации системы, замкнутой регулятором $u = Kx$, сводится к поиску матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ в неравенстве Ляпунова (3) [80].

В случае неизвестных матриц A , B_1 требуется найти *общую* матрицу квадратичной функции Ляпунова P для всех систем с матрицами $(A, B_1) \in \Sigma_W$ (37).

Ниже покажем, как эта задача решается методами управления на основе данных с помощью фундаментальной леммы и дробно-линейного преобразования (подраздел 4.2.1), концепции информативности данных и квадратичных матричных неравенств (подраздел 4.2.2), с применением фундаментальной леммы и леммы Питерсена (подраздел 4.2.3), с построением квадратичных матричных неравенств отдельно для каждого момента измерения входа и выхода системы (подраздел 4.2.4) и затем сравним данные способы в числовом примере.

4.2.1. Фундаментальная лемма и дробно-линейное преобразование

В [99] для синтеза квадратично стабилизирующего регулятора на основе данных предлагается помимо параметризации, опирающейся на фундаментальную лемму (раздел 2.1), использовать дробно-линейное преобразование (Linear Fractional Transformation, LFT). Исходная система задана в виде

$$(41) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + Dw(k),$$

здесь обозначения те же, что в (35).

Авторы используют эквивалентное к (38) описание множества возмущений:

$$(42) \quad \tilde{\mathbf{W}} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{p \times T} : \begin{bmatrix} W \\ I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ \tilde{\Phi}_{12}^\top & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\},$$

где $\tilde{\Phi}_{11} \in \mathbb{S}^p$, $\tilde{\Phi}_{12} \in \mathbb{R}^{p \times T}$, $\tilde{\Phi}_{22} \in \mathbb{S}_{++}^T$.

Предварительно необходимо параметризовать множество всех систем, замкнутых регулятором $u = Kx$. Так, для записанной в терминах измерений системы

$$X_+ = AX_- + B_1U + DW$$

множество квадратично стабилизирующих регуляторов можно параметризовать с использованием измеренных данных точно так же, как и в (8):

$$\begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G, \quad G \in \mathbb{R}^{T \times n}.$$

И тогда матрица регулятора вычисляется как $K = UG$ при условии $X_-G = I$.

Отсюда получаем параметризацию множества матриц системы (41), замкнутых регулятором с матрицей $K = UG$, на основе измеренных данных:

$$(43) \quad A_G = (X_+ - DW)G$$

при некотором $W \in \tilde{\mathbf{W}}$, таком что $(X_+ - DW) \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix}^\perp = 0$. Здесь $^\perp$ означает матрицу, содержащую базис ядра указанной матрицы.

Как видим, в отличие от (10) здесь параметризация матриц замкнутой системы содержит в качестве параметра неизвестную матрицу возмущений W , т.е. не является единственной.

Далее рассматривается более широкое множество всех устойчивых матриц вида (43) с любыми допустимыми возмущениями из множества $\tilde{\mathbf{W}}$:

$$(44) \quad A_G^{st} = \{A_K : A_K = (X_+ - DW)G, W \in \tilde{\mathbf{W}}\}.$$

Такой переход хотя и приводит к более консервативным результатам, но позволяет избежать вычисления ядра матрицы $[U^\top \ X_-^\top]^\top$ и дает возможность использовать более удобную параметризацию и применять стандартные методы управления. Так, матрицы из (44) представляются в виде нижнего дробно-линейного преобразования замкнутой исходной системы (41) с возмущением $W \in \tilde{\mathbf{W}}$:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{z}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_+G & D \\ -G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{w}(k) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{w}(k) = W\tilde{z}(k),$$

$$X_-G = I.$$

Полученное представление позволило сформулировать следующее

Предложение 2 [99, предложение 6]. *Если существуют матрицы $\Psi \succ 0$, $G \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такие, что выполняются*

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -\Psi & 0 & 0 & 0 \\ * & -\Psi & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ * & * & * & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_+G & D \\ 0 & I \\ -G & 0 \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$X_-G = I,$$

то регулятор с матрицей $K = UG$ является стабилизирующим для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$.

После конгруэнтного преобразования, применения леммы Шура и замены переменных получаем окончательный результат.

Предложение 3 [99, замечание 7]. *Если для данных (U, X) выполняется условие фундаментальной леммы, то решение задачи*

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * \\ -\tilde{\Phi}_{12}Y & \tilde{\Phi}_{11} & * & * \\ X_+Y & D & -P & * \\ Y & 0 & 0 & -\tilde{\Phi}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$X_-Y = P$$

относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{T \times n}$ доставляет регулятор $\hat{K} = U\hat{Y}\hat{P}^{-1}$, квадратично стабилизирующий все системы из Σ_W .

Как отмечалось выше, в таком подходе присутствует консерватизм, поскольку в параметризации (43) имеется параметр W , и, кроме того, строится общая функция Ляпунова для всего множества систем $(A, B_1) \in \Sigma_W$, соотносящихся с измерениями (U, X) .

Здесь размерность матричной переменной Y зависит от объема данных T , а поскольку метод опирается на фундаментальную лемму, должно выполняться ранговое условие (7), т.е. $T \geq n + m$.

4.2.2. Условие информативности данных на основе
квадратичных матричных неравенств

В [84, 85] рассматривается задача о синтезе управления $u = Kx$, квадратично стабилизирующего обратной связью систему с внешними возмущениями

$$(45) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + w(k),$$

где обозначения те же, что в (35). Здесь рассматривается случай $D = I$, в иных случаях требуется несложная модификация метода [19, 83, 84].

Сначала ограничения задачи записываются в виде квадратичных матричных неравенств. Для этого из представления системы с неизвестными матрицами A , B_1 , W с помощью измеренных значений (U, X) выражается

$$W = X_+ - AX_- - B_1U$$

и подставляется в квадратичное матричное неравенство, описывающее множество допустимых возмущений (38). Получаем

$$(46) \quad \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Далее к аналогичной форме приводится условие квадратичной стабилизации всех систем $(A, B_1) \in \Sigma$ с помощью общей функции Ляпунова:

$$(A + B_1K)P(A + B_1K)^\top - P \prec 0, \quad P \in \mathbb{S}_{++}^n;$$

получаем квадратичное матричное неравенство относительно неизвестных матриц A и B_1 :

$$(47) \quad \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & * & * \\ 0 & -P & * \\ 0 & -KP & -KPK^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \succ 0.$$

К полученным квадратичным матричным неравенствам применяем строгую матричную S -процедуру (лемма 2, раздел 4.1), взяв матрицу M из (47), а N – из (46). В результате получаем следующее предложение, которое дает необходимое и достаточное условие информативности данных для квадратичной стабилизации системы с внешними возмущениями.

Предложение 4 [85, предложение 4]. Если для некоторой матрицы $Z \in \mathbb{R}^{(n+m) \times n}$ выполняется условие (Слейтера)

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \succ 0,$$

то данные (U, X) , сгенерированные системой (45), информативны для квадратичной стабилизации обратной связью по состоянию тогда и только то-

гда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скаляр $\beta > 0$, такие что

$$(48) \quad \begin{bmatrix} P - \beta I & * & * & * \\ 0 & -P & * & * \\ 0 & -Y & 0 & * \\ 0 & 0 & Y^\top & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0.$$

Для таких $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ при некотором $\hat{\beta}$ стабилизирующий регулятор имеет вид $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$.

В данном подходе ограничением на длительность измерений служит требование полного ранга матрицы X_- , вытекающее из условия информативности данных для существования регулятора, стабилизирующего все множество систем $(A, B_1) \in \Sigma_W$ [18]. Таким образом, должно быть $T \geq n$.

А если еще дополнительно к условиям приведенного предложения будет $\Phi_{22} \prec 0$ и $\text{rank} [U^\top \ X_-^\top]^\top = n + m$ (т.е. выполняется фундаментальная лемма), то условие (48) принимает вид строгого неравенства [19]:

$$(49) \quad \begin{bmatrix} P & * & * & * \\ 0 & -P & * & * \\ 0 & -Y & 0 & * \\ 0 & 0 & Y^\top & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succ 0,$$

решение которого доставляет регулятор того же вида: $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$.

Замечание 3. В приведенных формулах для упрощения скаляр α , присутствующий в исходной публикации [84], включен в линейно входящие в матричное неравенство переменные P , Y , β .

Замечание 4. В [84, 85] показано, что квадратичная стабилизация при точных данных (см. раздел 2, теорема 4) является частным случаем приведенного предложения (при $\Phi_{11} = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{22} = -I$). Однако здесь условие Слейтера не выполняется, поскольку матрица

$$N = \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top$$

не является положительно определенной. Тем не менее можно установить связь между этими двумя случаями с помощью матричной леммы Финслера (см. лемму 3 в разделе 4.1), для которой не требуется выполнение условия Слейтера [85]. Этот результат, подробно рассмотренный в [85], и был приведен выше в разделе 2.3.

Авторы также отмечают, что представленный метод неконсервативен, а также удобен для использования больших наборов данных, поскольку размерность ЛМН здесь не зависит от T . Так, с учетом ограниче-

ний на $P \succ 0$ и $\beta > 0$ линейное матричное неравенство (48) имеет размерность $4n + m + 1$ и содержит $\frac{n(n+1)}{2} + nm + 1$ неизвестных. В [20, теорема 3] показано, что этот результат можно улучшить в плане уменьшения вычислительной сложности, так что размерность ЛМН будет равна $4n + 1$ с $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ неизвестными.

4.2.3. Фундаментальная лемма и лемма Питерсена

В [95] рассматривается система в том же виде, как в предыдущем подразделе:

$$(50) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_1 u(k) + w(k),$$

где возмущения $w(k) \in \mathbb{R}^n$ имеют ограниченную энергию и их множество описывается квадратичным матричным неравенством

$$(51) \quad \bar{\mathbf{W}} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{n \times T} : \begin{bmatrix} I & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta\Delta^\top & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix} \preccurlyeq 0 \right\}, \quad \Delta > 0.$$

Как видно, это описание эквивалентно (39) с $\Phi_{11} = \Delta\Delta^\top$, но возможно также применение более обобщенного описания вида (38) (здесь не рассматривается).

В отличие от раздела 4.2.2 здесь авторы действуют при выполнении условия фундаментальной леммы (7) и предлагают описание множества всех систем (A, B_1) , сопоставимых с исходными данными (U, X) при возмущениях $W \in \bar{\mathbf{W}}$, в виде *матричного эллипсоида*. Так, используя квадратичное матричное неравенство из (51), получаем множество систем

$$(52) \quad \Sigma_E = \left\{ (A, B_1) : \begin{bmatrix} I & A & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & * \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \preccurlyeq 0 \right\} = \\ = \{ [A \ B_1] = Z^\top : \mathbf{C} + \mathbf{B}^\top Z + Z^\top \mathbf{B} + Z^\top \mathbf{A} Z \preccurlyeq 0 \},$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{B} = -X_+ \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{C} = X_+ X_+^\top - \Delta\Delta^\top.$$

Условие фундаментальной леммы гарантирует, что $\mathbf{A} \succ 0$, и тогда этот матричный эллипсоид можно сначала представить в более удобной форме:

$$\Sigma_E = \{ [A \ B_1] = Z^\top : (Z - \zeta)^\top \mathbf{A} (Z - \zeta) \preccurlyeq \mathbf{Q} \},$$

где $\zeta := -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{Q} := \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C}$, а затем, доказав, что $\mathbf{Q} \succcurlyeq 0$ [95], перейти к эквивалентной параметризации множества систем Σ_E (52) также в виде матричного эллипсоида:

$$(53) \quad \mathcal{E} = \left\{ (\zeta + \mathbf{A}^{-1/2} \Upsilon \mathbf{Q}^{1/2})^\top : \|\Upsilon\| \leq 0 \right\}.$$

Далее используется условие квадратичной стабилизации на основе функции Ляпунова

$$P - (A + B_1 K)P(A + B_1 K)^\top \succ 0$$

относительно неизвестных матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, Y , которое приводится к форме квадратичного матричного неравенства относительно неизвестных матриц A и B_1 :

$$(54) \quad P - [A \ B_1] \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} P P^{-1} P \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix}^\top [A \ B_1]^\top \succ 0.$$

Приведем использующуюся далее лемму Питерсена [100, 101] в строгой формулировке.

Лемма 4 (строгая лемма Питерсена). Пусть $G \in \mathbb{S}^n$, $M \neq 0$, $N \neq 0$ – матрицы соответствующих размерностей, $\tilde{\Delta} \in \mathbb{S}^q$, $\tilde{\Delta} \succcurlyeq 0$, и пусть

$$\mathcal{F} := \{\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q} : \Delta^\top \Delta \preccurlyeq \tilde{\Delta}\};$$

тогда неравенство

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \prec 0$$

выполняется для всех $\Delta \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$G + \varepsilon M M^\top + \varepsilon^{-1} N^\top \tilde{\Delta} N^\top \prec 0.$$

В результате совместного применения параметризации (53), условия (54) и строгой леммы Питерсена доказано следующее необходимое и достаточное условие построения квадратично стабилизирующего регулятора на основе измеренных данных (здесь для удобства и краткости изложения сразу перейдем к обозначениям через исходные данные (U, X)).

Теорема 6 [95, теорема 1]. Для измеренных данных (U, X) системы (50), удовлетворяющих ранговому условию фундаментальной леммы, решение ЛМН (если существует)

$$(55) \quad \begin{bmatrix} P + X_+ X_+^\top - \Delta \Delta^\top & * & * \\ 0 & P & * \\ X_+ \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix}^\top & - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix}^\top \end{bmatrix} \succ 0$$

относительно неизвестных матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ доставляет регулятор $\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$, квадратично стабилизирующий все системы $(A, B_1) \in \Sigma_E$.

Примечательно, что условие (55) при применении леммы Шура оказывается очень похожим на условие (48) в предыдущем разделе. Но при этом есть и существенные различия. Так, при выводе (48) использовалось условие

Слейтера и не требовалось выполнение рангового условия фундаментальной леммы, поэтому способ из раздела 4.2.2 может охватить случай неограниченного множества Σ_E , но не включает в себя непосредственным образом случай точно заданных данных (однако, как уже отмечалось, при некотором изменении формулировок и применении матричной леммы Финслера это становится возможным [85, теорема 2]).

Поскольку предлагаемый способ основан на фундаментальной лемме, для выполнения рангового условия требуется количество измерений $T \geq n + m$. Однако несомненным плюсом является то, что размеры переменных в (55) не зависят от длины используемых данных.

4.2.4. Квадратичные матричные неравенства для отдельных моментов измерений входа и выхода системы

В статье [102], вышедшей чуть раньше работы [95], упомянутой в предыдущем разделе, те же авторы также используют представление множества достижимости системы (50) в виде матричного эллипса, а сам способ синтеза квадратично стабилизирующего регулятора по форме очень близок к рассмотренному в разделе 4.2.2 (см. [84, 85]), однако есть существенные отличия, которые значительно уменьшают консерватизм. А именно: используются ограничения для внешних возмущений в каждый момент времени: $\|w_k\|_2 \leq \varepsilon$, $k = 0, 1, \dots, T - 1$, тогда как в предыдущих методах возмущения, как правило, имеют ограниченную сверху энергию всей последовательности векторов $W = [w(0) \ w(1) \ \dots \ w(T - 1)]$: $WW^\top \preceq \varepsilon^2 TI$, что увеличивает консерватизм с возрастом T .

Благодаря такому предположению множество систем (A, B_1) , способных генерировать данные (U, X) , можно описать с помощью отдельных соотношений в каждый момент времени:

$$\Sigma_i = \{(A, B_1) : x_{i+1} = Ax_i + B_1 u_i + w_i, \quad w_i w_i^\top \preceq \varepsilon^2 I\} \quad i = 0, \dots, T - 1.$$

Отсюда получаем квадратичное неравенство вида (46) отдельно для каждого момента измерения:

$$\begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad i = 0, \dots, T - 1,$$

где матрицы вида (38) описывают множество допустимых возмущений:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varepsilon^2 I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

И тогда множество *всех* систем (A, B_1) , которые могут генерировать *все* полученные измерения в моменты времени $i = 0, 1, \dots, T - 1$, является пересечением

$$\Sigma_c = \bigcap_{i=0}^{T-1} \Sigma_i.$$

Авторы доказывают [102, предложение 3], что множество, полученное таким пересечением, является *подмножеством* всех систем вида

$$\begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^2 T I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

(т.е. использующих векторы, составленные из измерений, и в предположении ограниченной энергии внешних возмущений, см. (46)) и, соответственно, подмножеством множества систем Σ_E из (52). Таким образом, предлагаемый в настоящем разделе метод является менее консервативным, чем в разделах 4.2.2 и 4.2.3, и дает более точный результат при возрастании числа измерений T (сравнения и доказательства см. подробнее в [102]).

Затем авторы предлагают способ непосредственного представления множества достижимости по измеренным данным, что в итоге приводит к методу синтеза квадратично стабилизирующего регулятора. Основные выкладки здесь приводить не будем, поскольку они аналогичны представленным в разделе 4.2.2, но с учетом соотношений отдельно для каждого момента измерений входа и выхода. В результате получено следующее

Предложение 5 [102, предложение 1]. Пусть выполняется условие фундаментальной леммы (7). Решение задачи

$$\begin{bmatrix} P - \beta I & * & * & * \\ 0 & -P & * & * \\ 0 & -Y & 0 & * \\ 0 & 0 & Y^\top & P \end{bmatrix} - \sum_{i=0}^{T-1} \tau_i \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^2 I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0,$$

$$i = 0, \dots, T-1,$$

относительно неизвестных матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скалярных переменных $\beta > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 0, \dots, T-1$, доставляет регулятор $\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$, квадратично стабилизирующий все системы $(A, B_1) \in \Sigma_c$.

Очевидно, в этой задаче размерности матричных переменных не зависят от длины векторов экспериментальных данных, но количество скалярных переменных возрастает с увеличением числа используемых измерений. Вообще говоря, изначально не требуется выполнение условий фундаментальной леммы, так что ограничение на длительность измерений вытекает из условия информативности данных для стабилизации: $T \geq n$. Но авторы отмечают [102, замечание 1]), что выполнение условия $T \geq n + m$ гарантирует замкнутость множества достижимости и облегчает решение ЛМН. Кроме того, увеличение числа используемых измерений ведет к более точному решению, но также может приводить к вычислительным сложностям, поэтому при решении задач больших размерностей и с большими объемами данных приходится выбирать некий консенсус при выборе между точностью и сложностью вычислений либо применять другие методы.

Применение отдельных измерений вместо составленных из них векторов в целом отличает этот способ от большинства подходов, рассматриваемых в настоящем обзоре.

Пример 3. Рассмотрим химический реактор периодического действия из примера 1. Для моделирования действия на него ограниченных внешних возмущений $\|w_k\|_2 \leq \varepsilon$, $k = 0, \dots, T-1$, зададим $D = I$, $T = 10$.

Поскольку все примеры в настоящем обзоре носят иллюстративный характер, здесь и далее приводим результаты для единственной реализации внешнего возмущения W с очень малым ε для того, чтобы во всех рассматриваемых методах гарантированно получить решение. Так, зададим $\varepsilon = 0,001$ и сгенерируем последовательность величин $\check{w}(k) \in \mathbb{R}^n$, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$. Возьмем

$$w(k) = \varepsilon \frac{\check{w}(k)}{\|\check{w}(k)\|_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вектор входных значений U и начальное условие $x(0)$ используем те же, что и в примере 1.

В традиционном модельном подходе в случае наличия в системе вида (36) ограниченных внешних возмущений с $\|w(k)\|_2 \leq 1$ (и при $D = I$, как в рассматриваемом случае) регулятор дается решением задачи того же вида (3), что и в случае системы без возмущений:

$$\hat{K}_{mbc}^{st} = \begin{bmatrix} 0,6377 & -1,4696 & 0,0944 & -1,2149 \\ 3,0471 & 0,0622 & 2,9947 & -0,7239 \end{bmatrix}.$$

В результате решения задачи на основе дробно-линейного преобразования (предложение 3 в подразделе 4.2.1) получаем регулятор

$$\hat{K}_{lft}^{st} = \begin{bmatrix} 1,0018 & -1,4901 & 0,1370 & -1,8788 \\ 4,1643 & -0,0818 & 3,2851 & -2,5132 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в данном случае длительность эксперимента и входное воздействие выбраны так, что выполняется фундаментальная лемма, в методе с условием информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств (подраздел 4.2.2, предложение 4) будем использовать для решения неравенство (49). Получаем

$$\hat{K}_{qmi}^{st} = \begin{bmatrix} 0,9949 & -1,5262 & 0,1471 & -1,9208 \\ 4,1617 & -0,0413 & 3,2424 & -2,4442 \end{bmatrix}.$$

Для стабилизации с использованием леммы Питерсена получаем значение неопределенности $\Delta = \varepsilon\sqrt{T}I = 0,0032I_4$, и решение задачи из теоремы 6 (подраздел 4.2.3) доставляет регулятор

$$\hat{K}_{pet}^{st} = \begin{bmatrix} 0,9894 & -1,5534 & 0,1013 & -1,9177 \\ 4,1600 & 0,0096 & 3,2913 & -2,4432 \end{bmatrix}.$$

Способ с отдельными квадратичными матричными неравенствами для каждого момента измерения (подраздел 4.2.4, предложение 5) дает более

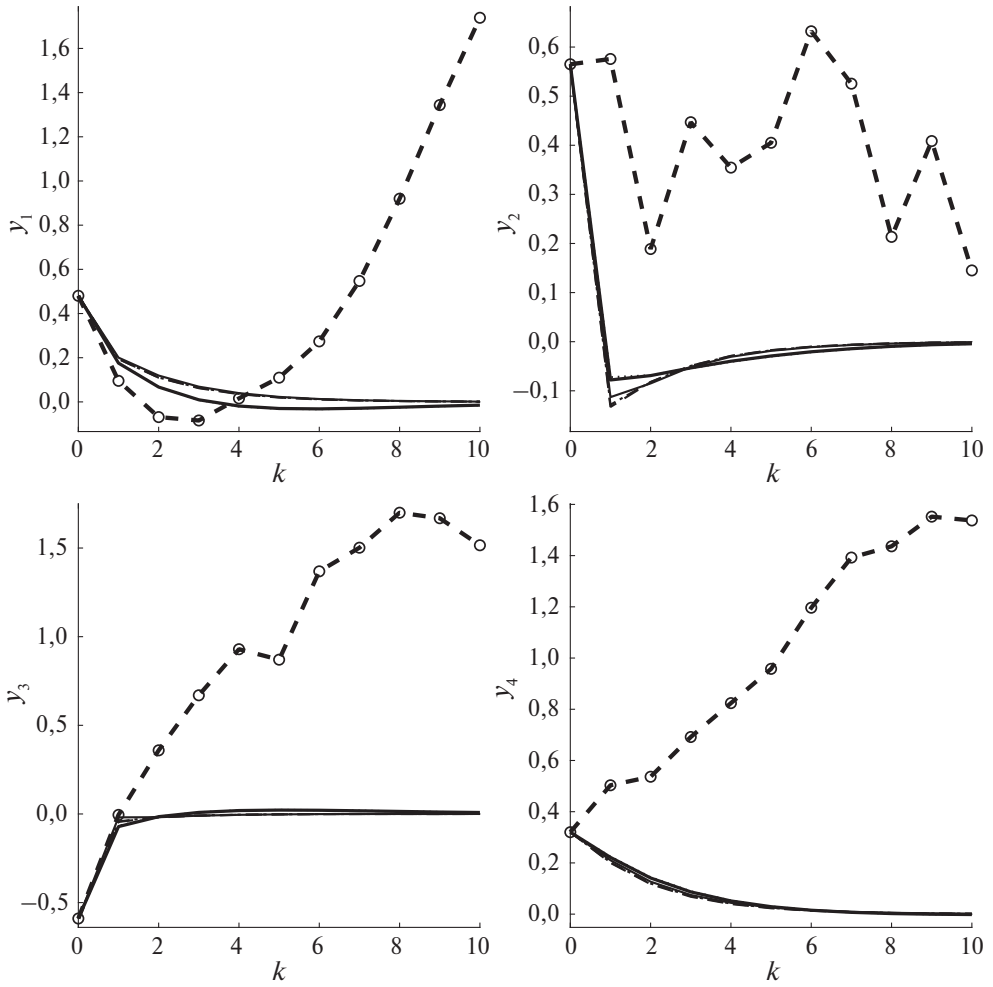


Рис. 3. Траектории выходов при решении задачи квадратичной стабилизации системы с внешними возмущениями.

точный результат при большем числе измерений, поэтому для него зададим $T = 20$. Таким образом, получим значения двадцати скалярных переменных $\hat{\tau}_i$, которые здесь для краткости не будем приводить, и $\hat{\beta} = 9,9971 \cdot 10^{-7}$. При этих значениях получен регулятор

$$\hat{K}_{ins}^{st} = \begin{bmatrix} 0,6576 & -1,4449 & 0,1234 & -1,1973 \\ 3,0850 & 0,0522 & 3,0250 & -0,7318 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3 приведены траектории выходов рассматриваемого реактора $y_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Здесь выход разомкнутой системы обозначен жирным пунктиром с выделенными кружками измерениями X ; выходы замкнутой системы: в модельном случае – $y_{mbc}(k)$, жирная сплошная линия; в методе на основе дробно-линейного преобразования – $y_{lft}(k)$, тонкая сплошная линия; с условием информативности данных на основе квадратичных мат-

ричных неравенств $-y_{qmi}(k)$, тонкая пунктирная линия; с применением леммы Питерсена $-y_{pet}(k)$, тонкая штрихпунктирная линия; с квадратичными матричными неравенствами в отдельные моменты времени $-y_{ins}(k)$, тонкая точечная линия.

Оценки близости траекторий следующие:

$$\begin{aligned} \|y_{mbc}(k) - y_{lft}(k)\|_2 &= 0,1409, & \|y_{mbc}(k) - y_{qmi}(k)\|_2 &= 0,1328, \\ \|y_{mbc}(k) - y_{pet}(k)\|_2 &= 0,1338, & \|y_{mbc}(k) - y_{ins}(k)\|_2 &= 0,0079, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что все используемые методы стабилизируют систему, т.е. цель управления во всех случаях достигнута, и при этом точность (в смысле близости матриц регулятора либо близости траекторий с модельными), вообще говоря, не требуется по постановке задачи. Однако наиболее точным в данном примере оказался метод с использованием отдельных измерений, что в целом совпадает с ожиданиями в связи с его устройством, нацеленным на уменьшение консерватизма.

Читателей, интересующихся более глубокими исследованиями работоспособности приведенных в обзоре методов для систем с внешними возмущениями при больших областях неопределенности и при различных реализациях возмущений, а также зависимости гарантированных оценок качества от уровня значений возмущений и от длительностей эксперимента, направляем к соответствующим исходным публикациям по каждому методу.

4.3. $\mathcal{H}_2$ -оптимальное управление

Рассматривается линейная дискретная стационарная система с внешними возмущениями

$$(56) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 u(k) + Dw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + B_2 u(k), \end{aligned}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $z(k) \in \mathbb{R}^l$, $w(k) \in \mathbb{R}^p$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$; матрицы $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ заданы.

Система замкнута обратной связью $u = Kx$. Рассматривается $\mathcal{H}_2$ -норма передаточной функции от w к z :

$$G(z) = (C + B_2 K)(zI - (A + B_1 K))^{-1} D.$$

Задача субоптимального $\mathcal{H}_2$ -управления состоит в отыскании такого закона управления $u = Kx$, чтобы для некоторого $\gamma > 0$ выполнялось $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \gamma$. В случае наименьшего $\gamma = \gamma^*$ получаем оптимальное $\mathcal{H}_2$ -управление и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} = \gamma^*$.

При известных матрицах A и B_1 решение дается следующим утверждением: матрица $A + B_1 K$ устойчива по Шуру и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} = \gamma$ тогда и только тогда, когда существует матрица $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, такая что

$$(57) \quad \begin{aligned} P &\succ (A + B_1 K)^\top P (A + B_1 K) + (C + B_2 K)^\top (C + B_2 K), \\ \text{trace } D^\top P D &< \gamma^2. \end{aligned}$$

В терминах линейных матричных неравенств задача формулируется следующим образом [103].

Для системы (56) существует $\mathcal{H}_2$ -оптимальное управление вида $u = Kx$ тогда и только тогда, когда существует решение задачи выпуклого программирования

$$(58) \quad \min_{P, Y, Z} \gamma$$

$$\begin{bmatrix} P & AP + B_1 Y & D \\ * & P & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} Z & CP + B_2 Y \\ * & P \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\text{trace } Z < \gamma^2, \quad \gamma > 0,$$

относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z \in \mathbb{S}_{++}^p$. При этом $\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} = \hat{\gamma}$.

При неизвестных матрицах A , B_1 получаем аналогичную постановку: по измерениям U , X сигналов системы необходимо синтезировать закон управления в виде статической обратной связи по состоянию такой, чтобы замкнутая система была устойчива и для всего множества систем, соответствующих полученным измерениям, выполнялось $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \gamma$.

В следующих подразделах приведем методы решения этой задачи, основанные на условии информативности данных и квадратичных матричных неравенствах (подраздел 4.3.1), субоптимальном управлении с условием информативности данных (подраздел 4.3.2), метод на основе фундаментальной леммы с разделением матриц системы и матрицы Ляпунова в линейном матричном неравенстве (подраздел 4.3.3) и метод с использованием квадратичных матричных неравенств для отдельных моментов измерений входа и выхода (подраздел 4.3.4).

4.3.1. Условие информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств

В [19, 84] предлагается синтезировать $\mathcal{H}_2$ -субоптимальный регулятор с помощью параметризации матриц замкнутой системы, соотносящихся с экспериментальными данными. Основной идеей этого подхода является применение в рамках концепции информативности данных квадратичных матричных неравенств для описания как множества соответствующих систем, так и целей управления.

Рассматривается система вида (56) с $D = I$ и внешними возмущениями w , описываемыми (38). Случай $D \neq I$ требует незначительных изменений, см. [19, 83, 84].

Сначала условие (57) преобразуется к квадратичному матричному неравенству относительно неизвестных A , B_1 , а затем к полученному выражению применяется строгая матричная S -процедура (лемма 2 в разделе 4.1). В итоге сформулирована

Теорема 7 [84, теорема 17]. Если для некоторой матрицы $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times n}$ выполняется условие Слейтера

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{Z} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

то данные (U, X) , сгенерированные системой (56), информативны для $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления при $\gamma > 0$ тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z \in \mathbb{S}_{++}^n$ и скаляры $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, такие что

$$\begin{bmatrix} P - \beta I & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & P & Y^\top & P & * \\ 0 & 0 & 0 & CP + B_2Y & I \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} P & * \\ CP + B_2Y & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} Z & * \\ I & P \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\text{trace } Z < \gamma^2.$$

Для полученных $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ при некоторых $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ $\mathcal{H}_2$ -субоптимальный регулятор имеет вид $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} < \hat{\gamma}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$.

Отметим, что размерность матричных переменных здесь не зависит от объема данных, который в данном случае ограничивается лишь условием информативности для стабилизации системы (13), т.е. $T \geq n$.

4.3.2. $\mathcal{H}_2$ -субоптимальное управление на основе концепции информативности данных

В [92] приведено необходимое и достаточное условие информативности данных для синтеза $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления $u = Kx$ для системы (56) в том случае, когда возможно измерить значения внешних возмущений, т.е. известен вектор $W = [w(0) \ w(1) \ \dots \ w(T-1)] \in \mathbb{R}^{p \times T}$. Это условие принципиально отличает представленный в данном разделе результат от всех остальных, описываемых в настоящем обзоре.

Предложение 6 [92, предложение 15]. Данные (U, X, W) информативны для $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления тогда и только тогда, когда для заданного $\gamma > 0$ выполняется как минимум одно из условий:

1. Существует матрица $Q \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такая, что $X_-Q = (X_-Q)^\top$,

$$\begin{bmatrix} W_- \\ CX_- + B_2U \end{bmatrix} Q = 0 \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} X_-Q & * \\ X_+Q & X_-Q \end{bmatrix} \succ 0.$$

2. Существуют правая псевдообратная матрица $W_-^\dagger$ и матрицы $Y \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такие, что $X_-Q = (X_-Q)^\top$, $W_-Q = X_-W_-^\dagger = UW_-^\dagger = 0$ и

$$\begin{bmatrix} X_-Q & * & * \\ X_+Q & X_-Q & * \\ (CX_- + B_2U)Q & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} Y & * \\ X_+W_-^\dagger & X_-Q \end{bmatrix} \succ 0, \\ \text{trace}(Y) < \gamma.$$

При этом K является $\mathcal{H}_2$ -субоптимальным регулятором для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} < \gamma$ тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\hat{Q}$, удовлетворяющей условиям 1 или 2, регулятор можно записать в виде $\hat{K} = U\hat{Q}(X_- \hat{Q})^{-1}$.

Очевидно, что при таком способе решения размерность переменной матрицы в ЛМН зависит от длительности эксперимента T и, соответственно, от объема используемых данных. Для данной задачи условие информативности накладывает ограничение $T \geq n$ (подраздел 2.2, теорема 2). Таким образом, требования к минимальному объему данных мягче, чем условие фундаментальной леммы, но тем не менее при больших T могут возникать вычислительные трудности.

Замечание 5. Задача о субоптимальном LQR из раздела 3.3 является частным случаем представленной здесь задачи о $\mathcal{H}_2$ -субоптимальном регуляторе при $D = x_0$, $CC^\top = Q$, $B_2B_2^\top = R$, $C^\top B_2 = 0$, однако эти два метода немного отличаются в способе использования исходных данных при решении.

Предположение о том, что известен вектор измерений внешних возмущений W , на практике реализуется нечасто, что является основным недостатком данного метода. Однако в случае выполнения этого условия метод показывает хорошие результаты (рассмотрим это в примере 4 ниже).

4.3.3. $\mathcal{H}_2$ -субоптимальное управление на основе квадратичных матричных неравенств и с дополнительной матрицей

В случае полностью известной системы в плане уменьшения консервативности хорошо себя зарекомендовал способ из [104, 105], заключающийся в построении ЛМН с разделением матриц системы A и матрицы Ляпунова путем введения дополнительной матричной переменной. Так, в [106] данное условие предлагается использовать для синтеза γ -субоптимального $\mathcal{H}_2$ -регулятора, в том числе и для регулятора фиксированной разреженной структуры (путем добавления в систему дополнительных ограничений). Способ разделения матриц здесь совмещен с применением квадратичных матричных неравенств, и метод опирается на концепцию информативности данных.

Рассматривается система (56), замкнутая регулятором $u = Kx$.

Если матрицы A , B_1 известны, то параметры γ -субоптимального $\mathcal{H}_2$ -регулятора являются решением задачи из следующей теоремы [105].

Теорема 8 [105, теорема 5]. Регулятор K является γ -субоптимальным $\mathcal{H}_2$ -регулятором для системы (56) тогда и только тогда, когда существу-

ют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{S}^l$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такие, что существует решение

$$\begin{bmatrix} P - DD^\top & AG + B_1Y \\ * & G + G^\top - P \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} Q & CG + B_2Y \\ * & G + G^\top - P \end{bmatrix} \succ 0, \\ \text{trace } Q < \gamma^2,$$

при этом $K = YG^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} < \gamma$.

Переходя к задаче синтеза на основе измеренных данных (U, X) , полагаем, что матрица возмущений W принадлежит рассматриваемому ранее множеству (38):

$$\mathbf{W} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{n \times T} : \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}.$$

Используя результат из [105, теорема 1] и матричную S -процедуру [83], получаем задачу синтеза γ -субоптимального $\mathcal{H}_2$ -регулятора следующего вида:

Теорема 9 [106, теорема 3.2]. *Если для измерений (U, X) системы (56) с ограничением на внешние возмущения вида (38) задача*

$$(59) \quad \min_{P, Q, G, L, \alpha, \beta, \gamma} \gamma \\ \begin{bmatrix} P - DD^\top - \beta I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & G \\ * & * & 0 & Y \\ * & * & * & G + G^\top - P \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\ \begin{bmatrix} Q & CG + B_2Y \\ * & G + G^\top - P \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\ \text{trace } Q \leq \gamma^2$$

относительно матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{S}^l$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скаляров $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ имеет решение $\hat{\gamma}$ при некоторых $\hat{Y}$, $\hat{G}$, то регулятор $\hat{K} = \hat{Y}\hat{G}^{-1}$ является $\hat{\gamma}$ -субоптимальным по $\mathcal{H}_2$ -критерию для всех систем $(A, B_1) \in \Sigma_W$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \gamma$.

Отметим, что здесь в первом ограничении уже не удастся избавиться от множителя α масштабированием других неизвестных, поскольку в первое слагаемое входит постоянный член $DD^\top$.

Преимуществом данного способа получения γ -субоптимального $\mathcal{H}_2$ -регулятора, помимо уже упомянутого снижения степени консерватизма, является независимость вычислительной сложности от объема используемых данных, для которого должно выполняться (13), т.е. $T \geq n$.

4.3.4. Квадратичные матричные неравенства для отдельных моментов измерений входа и выхода системы

Здесь кратко рассмотрим подход из [107] применительно к системе вида (56). По форме он во многом похож на приведенный в предыдущем подраз-

деле, хотя авторы не используют разделение матриц-переменных. Основной идеей здесь является использование ограничений для возмущений в каждый момент времени и последующее применение матричных квадратичных неравенств для каждого момента времени измерений. Так, остаются в силе все предпосылки из раздела 4.2.4, в частности, получаем

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \varepsilon^2 I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{(n+1) \times (n+1)}, \\ \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \Psi_i \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} &\succcurlyeq 0, \\ \Psi_i &= \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix}^\top, \quad i = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Таким образом, множество *всех* систем вида (56) с матрицами (A, B_1) , которые могут генерировать *все полученные измерения* в моменты времени $i = 0, 1, T-1$, является пересечением

$$\Sigma_c = \bigcap_{i=0}^{T-1} \Sigma_i.$$

Авторы [107] утверждают, что единственное множество, полученное таким пересечением, является *подмножеством* всех систем из [106], т.е. предлагаемый ими метод является менее консервативным и ведет к более точному результату.

Дальнейшие выкладки повторяют стандартный путь и включают в себя применение матричной S -процедуры, леммы Шура и т.д. В результате получаем следующую задачу относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скалярных переменных $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, T-1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$:

$$(60) \quad \min_{P, Y, Q, \alpha_i, \beta, \gamma} \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} (61) \quad & \begin{bmatrix} P - DD^\top - \beta I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & P \\ * & * & 0 & Y \\ * & * & * & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T-1} \alpha_i \Psi_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\ & \begin{bmatrix} Q & CP + B_2 Y \\ * & P \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \text{trace } Q \leq \gamma^2. \end{aligned}$$

Ее решение доставляет $\mathcal{H}_2$ -субоптимальный регулятор $\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$, при этом $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{\gamma}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_c$.

Очевидно, что здесь размерности переменных не зависят от объема данных T , однако количество скалярных переменных задается непосредственно этой величиной, что может вызывать вычислительные затруднения при большой длительности измерений.

Условие на длительность эксперимента T вытекает из (13): $T \geq n$.

Замечание 6. В [107] доказана теорема [107, теорема 3] о том, что значение γ^* , являющееся решением задачи (60)–(61), монотонно убывает при увеличении времени T .

Далее в рассматриваемой статье предлагается расширение предложенного метода (итеративный алгоритм) на случай регуляторов фиксированной (разреженной) структуры, а также доказываются преимущества предложенного подхода в сравнении с методом из предыдущего подраздела 4.3.3 [106].

Из других инструментов, которые можно применять для синтеза оптимального по критерию $\mathcal{H}_2$ управления, можно отметить, например, дробно-линейное преобразование [108]. При его применении преимуществом является независимость переменных в задаче полуопределенного программирования от используемого объема данных.

Пример 4. Продолжаем моделировать работу неустойчивого химического реактора периодического действия из примера 1. Считаем, что $C = I$, $B_2 = 0$, т.е. оптимизируемый выход системы есть

$$z(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Зададим длительность эксперимента $T = 20$ и положим $\varepsilon = 0,001$ (при котором все используемые методы дают положительный результат – для наглядной иллюстрации). При этом в матрице Φ в (38) имеем $\Phi_{11} = 0,2 \cdot 10^{-4}I$, $\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{22} = -I$. Измерения входа и выхода системы и внешние возмущения моделируем так же, как в примере 3.

Расчеты для модельного случая (58) (раздел 4.3) дают

$$\hat{K}_{mbc}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9674 & -1,5118 & 0,1646 & -1,8382 \\ 4,7270 & -0,0118 & 3,4519 & -1,9159 \end{bmatrix},$$

при этом получено оптимальное

$$\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2} = 2,7707.$$

Логически понятно, что методы на основе данных не могут превзойти оптимальное значение $\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2}$, полученное при точно известных параметрах модели системы, поэтому в них закономерны несколько большие значения γ .

Так, вычисления с применением условия информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств согласно теореме 7 (подраздел 4.3.1) приводят при найденных $\hat{\alpha} = 319,54$, $\hat{\beta} = 0,001$ к субоптимальному регулятору

$$\hat{K}_{qmi}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9745 & -1,5120 & 0,1616 & -1,8590 \\ 4,7494 & -0,0151 & 3,4368 & -1,9681 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{qmi}^{H_2} = 2,7951.$$

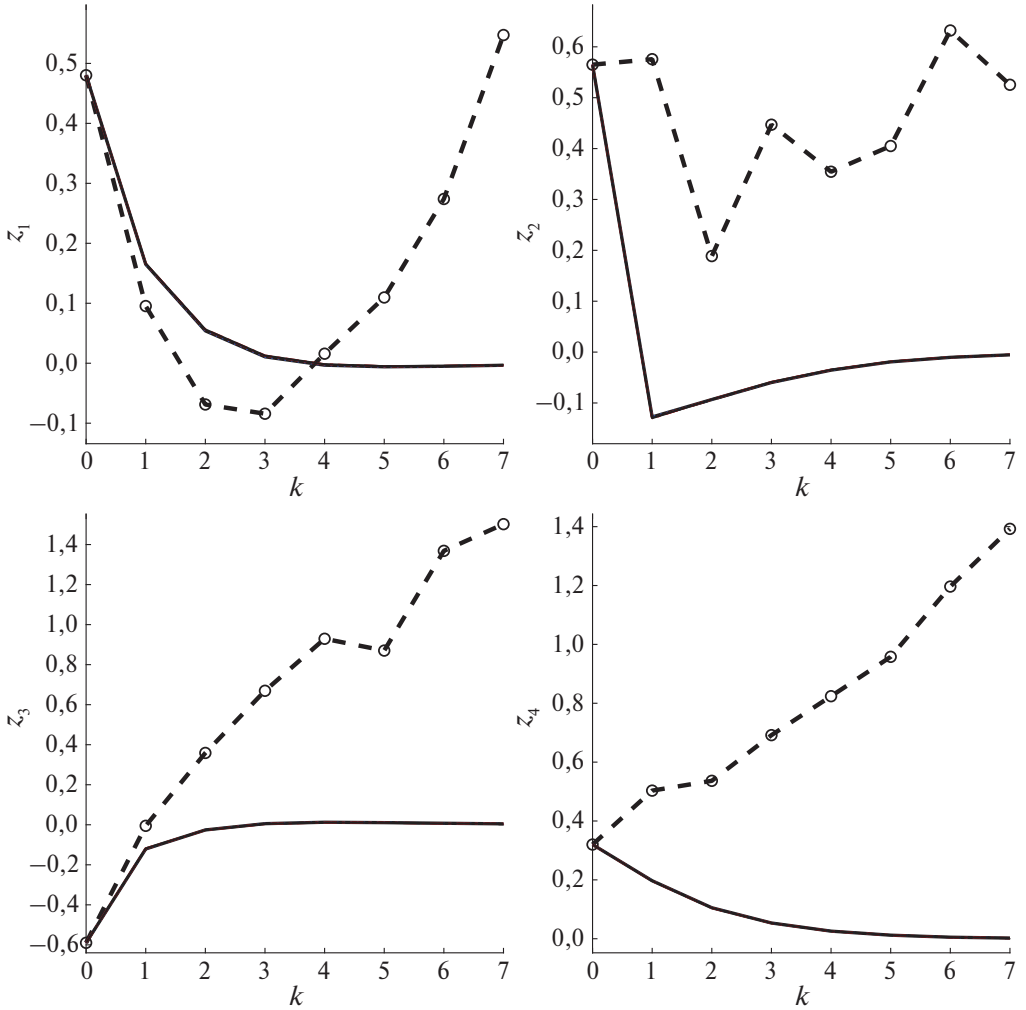


Рис. 4. Траектории выходов системы при решении задачи $\mathcal{H}_2$ -оптимального управления.

С учетом строгого неравенства для критерия в постановке задачи синтеза субоптимального регулятора метода с условием информативности данных (предложение 6 в подразделе 4.3.2) зададим γ чуть больше найденного модельным подходом: $\gamma = 2,7708$. Также помним, что в этом методе вектор измерений внешних возмущений W известен и напрямую используется в вычислениях. Оба этих факта существенно влияют на увеличение точности решения (см. рис. 4 и оценку близости траектории к модельной ниже). Так, получаем

$$\hat{K}_{sub}^{\mathcal{H}_2} = \begin{bmatrix} 0,9673 & -1,5118 & 0,1646 & -1,8378 \\ 4,7263 & -0,0118 & 3,4517 & -1,9151 \end{bmatrix}.$$

В методе синтеза субоптимального регулятора на основе квадратичных матричных неравенств и с дополнительной матрицей в ЛМН (59) (подраздел 4.3.3) значение γ не задается, а находится наименьшее возможное при решении этой задачи. Так, имеем

$$\hat{K}_{do}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9521 & -1,5119 & 0,1598 & -1,8413 \\ 4,7003 & -0,0124 & 3,4428 & -1,9355 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{do}^{H_2} = 2,8028.$$

Учитывая замечание 6 в подразделе 4.3.4, в методе с квадратичными матричными неравенствами для отдельных моментов измерений входа и выхода системы (60)–(61) будем использовать все 20 имеющихся измерений. Тогда получаем скалярные переменные $\hat{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \dots, 20$ (упустим их для краткости), $\hat{\beta} = 2,2745 \cdot 10^{-5}$ и регулятор

$$\hat{K}_{ins}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9556 & -1,5116 & 0,1610 & -1,8425 \\ 4,7132 & -0,0132 & 3,4475 & -1,9450 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{ins}^{H_2} = 2,7957.$$

На рис. 4 приведены траектории оптимизируемых выходов рассматриваемого реактора $z_i(k) = x_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Здесь траектория разомкнутой системы отображена жирным пунктиром с выделенными кружками исходными измерениями X ; для замкнутой системы в модельном случае – $z_{mbc}(k)$, жирная сплошная линия; в методе на основе квадратичных матричных неравенств и условием ИД – $z_{qmi}(k)$, тонкая пунктирная; для субоптимального регулятора с условием информативности данных – $z_{sub}(k)$, тонкая точечная линия; для метода с дополнительной матрицей – $z_{do}(k)$, штрихпунктирная линия; выходы в методе с отдельными квадратичными матричными неравенствами в каждый момент времени – $z_{ins}(k)$, тонкая сплошная линия.

Сравним полученные результаты с модельным примером:

$$\begin{aligned} \|\hat{K}_{mbc}^{H_2} - \hat{K}_{qmi}^{H_2}\|_2 &= 0,0629, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{qmi}(k)\|_2 = 0,0021, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2} - \hat{\gamma}_{qmi}^{H_2}| = 0,0245, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_2} - \hat{K}_{sub}^{H_2}\|_2 &= 0,0011, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{sub}(k)\|_2 = 4,9881 \cdot 10^{-5}, \quad \hat{\gamma}_{sub}^{H_2} = 2,7708 - \text{задано}, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_2} - \hat{K}_{do}^{H_2}\|_2 &= 0,0376, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{do}(k)\|_2 = 0,0045, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2} - \hat{\gamma}_{do}^{H_2}| = 0,0321, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_2} - \hat{K}_{ins}^{H_2}\|_2 &= 0,0340, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{ins}(k)\|_2 = 0,0044, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2} - \hat{\gamma}_{ins}^{H_2}| = 0,0250, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что все рассмотренные методы хорошо справляются с поставленной задачей: полученные регуляторы $\hat{K}$ и значения $\hat{\gamma}$ близки к оптимальным. В частности, в данном примере при условии неизвестных измерений внешних возмущений метод с квадратичными матричными неравенствами и информативностью данных и метод с отдельными квадратичными матричными неравенствами для каждого момента времени дают более точные решения, и их точность будет возрастать при увеличении длительности исходного эксперимента T . В целом можно использовать любой из приведенных методов, исходя из особенностей доступных априорных данных.

4.4. $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальное управление

Для дискретной системы

$$(62) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 u(k) + Dw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + B_2 u(k), \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $z(k) \in \mathbb{R}^l$, $w(k) \in \mathbb{R}^p$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$; матрицы $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ заданы, требуется синтезировать управление $u = Kx$, которое стабилизирует замкнутую систему с матрицами

$$(63) \quad A_K = A + B_1 K, \quad C_K = C + B_2 K$$

и минимизирует норму $\mathcal{H}_\infty$ -передаточной функции от возмущения w к выходу z :

$$G(z) = C_K(zI - A_K)^{-1}D.$$

Если при некотором $\gamma > 0$ выполняется $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma$, то получаем $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимальный регулятор, а в случае наименьшего $\gamma = \gamma^*$ получаем $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальное управление и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \gamma^*$.

При известных матрицах (A, B_1) эта задача записывается в виде ЛМН следующим образом [103].

$\mathcal{H}_\infty$ -оптимальный регулятор существует тогда и только тогда, когда существует матрица $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ такая, что

$$(64) \quad \min_{P \in \mathbb{S}_{++}^n, Y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \gamma > 0} \gamma$$

$$\begin{bmatrix} P & AP + B_1 Y & D & 0 \\ * & P & 0 & PC + Y^\top B_2^\top \\ * & * & \gamma I & 0 \\ * & * & * & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0;$$

решение $\hat{P}$, $\hat{Y}$ доставляет оптимальный регулятор $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \hat{\gamma}$.

Далее приведем методы решения данной задачи на основе данных с применением фундаментальной леммы и дробно-линейного преобразования (подраздел 4.4.1), фундаментальной леммы и дискретной леммы об ограниченновещественных матрицах (подраздел 4.4.2), с условием информативности данных и квадратичных матричных неравенств (подраздел 4.4.3) и квадратичных матричных неравенств для отдельных моментов измерений входного и выходного сигналов системы (раздел 4.4.4).

4.4.1. Фундаментальная лемма и дробно-линейное преобразование

В [99] рассматривается система вида (62) с неизвестными матрицами (A, B_1) .

Согласно той же методике, что и в разделе 4.2.1, при выполненном ранговом условии фундаментальной леммы (7) замкнутая регулятором $u = Kx$ система представляется в виде дробно-линейного преобразования с учетом канала от w к z :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \\ \tilde{z}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_+G & D & D \\ C + B_2UG & 0 & 0 \\ -G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ \tilde{w}(k) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{w}(k) = W\tilde{z}(k), \quad W \in \tilde{\mathbf{W}},$$

$$X_-G = I.$$

Далее авторы формулируют условия синтеза $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального регулятора, содержащие матричное неравенство, которое затем приводится к линейному виду путем замены переменных и эквивалентных преобразований. Здесь для краткости приведем сразу готовое утверждение.

Предложение 7 [99, предложение 10]. Если для данных (U, X) выполняется условие фундаментальной леммы и существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{T \times n}$ и скаляр $\lambda > 0$ такие, что

$$X_-Y = P,$$

то решение задачи

$$(65) \quad \begin{bmatrix} -P & * & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ -\lambda \Phi_{12}Y & 0 & \lambda \Phi_{11} & * & * & * \\ X_+Y & D & D & -P & * & * \\ CP + B_2U & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda \Phi_{22}^{-1}) \end{bmatrix} \prec 0$$

доставляет при некотором $\hat{\lambda}$ регулятор $\hat{K} = U\hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \hat{\gamma}$.

Таким образом, ЛМН (65) можно решать одномерной оптимизацией по параметру λ , и в этой постановке длительность эксперимента $T \geq n + m$ напрямую влияет на размерность задачи. Более того, при увеличении T точность решения возрастает [99, пример 1], поэтому при больших размерностях системы и объемах данных приходится выбирать некий консенсус между удовлетворительной точностью и возможностью решать ЛМН приемлемых размерностей.

4.4.2. Фундаментальная лемма и дискретная лемма об ограниченно-вещественных матрицах

В отличие от предыдущего раздела и [99] в [109] предлагается для системы (62) осуществлять синтез $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального регулятора на основе квадратичных матричных неравенств и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах при условии выполнения фундаментальной леммы. Для замкнутой системы с матрицами (63) автор формулирует и доказывает эту лемму в следующей форме.

Лемма 5 [109, лемма 6, приложение А.1]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Матрица A_K шуровская и $\|G(z)\|_\infty < \gamma$.
2. Выполняется линейное матричное неравенство

$$(66) \quad \begin{bmatrix} P & * & * & * \\ 0 & \gamma I & * & * \\ PA_K & PD & P & * \\ C_K & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0,$$

где $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ – матрица Ляпунова, $\gamma > 0$.

Затем к ЛМН (66) применяется уже известная из разделов 2.1, 4.2.1 параметризация матрицы регулятора (8), для чего обязательно выполнение рангового условия фундаментальной леммы (7). Тогда $K = UG$ при условии $X_-G = I$, а матрицы замкнутой системы можно представить с помощью измеренных данных следующим образом:

$$(67) \quad A_K = (X_+ - DW)G, \quad C_K = C + B_2UG$$

для неизвестной [неединственной] матрицы G и некоторой матрицы возмущений $W \in \mathbf{W}$, удовлетворяющей условию

$$(X_+ - DW) \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix}^\dagger = 0.$$

Подставляя (67) в (66) и используя приведенную в разделе 4.2.1 более общую характеристику множества возмущений (42), получаем задачу синтеза $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального регулятора на основе данных, которое путем стандартных преобразований и замены переменных приводится к виду ЛМН относительно переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{T \times n}$ и с параметром $W \in \tilde{\mathbf{W}}$:

$$\begin{bmatrix} P & * & * & * \\ 0 & \gamma I & * & * \\ (X_+ - DW)Y & D & P & * \\ CP + B_2UY & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0.$$

Следуя способу, приведенному в [109], к этому ограничению последовательно применяются дробно-линейное преобразование, матричная S -процедура (с учетом неравенства в (42)) [19, 84] и лемма Шура. В результате получаем окончательный вид задачи синтеза $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального регулятора на основе данных:

$$(68) \quad \min_{P, Y} \gamma$$

при ограничениях

$$(69) \quad \begin{bmatrix} P & * & * & * & * & * \\ 0 & \gamma I & * & * & * & * \\ X_+ Y & D & P & * & * & * \\ CP + B_2 UY & 0 & 0 & \gamma I & * & * \\ Y \Phi_{12} & 0 & -D^\top & 0 & \Phi_{11} & * \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi_{22}^{-1} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$P = X_- Y,$$

решение которой доставляет регулятор $\hat{K} = U \hat{Y} \hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \hat{\gamma}$.

Важно отметить, что поскольку параметризация матрицы A_K в (67) не единственна, а цель управления достигается для всех систем с матрицей $A_K = (X_+ - DW)G$ при любых $W \in \tilde{\mathbf{W}}$, то синтез управления в данном случае дает потенциально консервативные результаты.

Размерность матричных переменных в рассматриваемой задаче напрямую зависит от объема используемых данных, который, с учетом фундаментальной леммы, должен быть $T \geq n + m$.

4.4.3. Условие информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств

В [19] рассматривается система вида

$$(70) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 u(k) + w(k), \\ z(k) &= Cx(k) + B_2 u(k), \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $z(k) \in \mathbb{R}^l$, $w(k) \in \mathbb{R}^p$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$; матрицы $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ заданы. Матрица W должна удовлетворять (38):

$$\mathbf{W} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{n \times T} : \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}.$$

Как и в случае $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления (раздел 4.3.1), здесь авторы используют концепцию информативности данных и инструментарий квадратичных матричных неравенств (матричная S -процедура, условие Слейтера и т.д.) для получения условий оптимальности синтезируемого управления. В результате сформулирована следующая

Теорема 10 [19, теорема 13]. Данные (U, X) , полученные от системы (70) с возмущениями, описываемыми множеством $\mathbf{W}$, информативны для $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального управления с $\gamma > 0$ тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скаляры $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ такие, что выполняются

$$\begin{bmatrix} P - \frac{1}{\gamma^2}I - \beta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & P & 0 \\ * & * & 0 & Y & 0 \\ * & * & * & P & (CP + B_2Y)^\top \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} P & * \\ CP + B_2Y & I \end{bmatrix} \succ 0.$$

Тогда решение этой задачи $\hat{P}$, $\hat{Y}$ доставляет регулятор $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \hat{\gamma}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$.

Здесь, в сравнении с методами из предыдущих двух подразделов, несомненным плюсом является независимость размерности матричных переменных в ЛМН от длительности входо-выходных измерений, которая ограничивается лишь условием информативности для стабилизации системы (13): $T \geq n$.

В [110] предложен итеративный метод синтеза $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления по нескольким наборам данных. Авторы утверждают, что по сравнению с приведенным в данном подразделе способом их вариант менее консервативен и, кроме того, строит управление более широким множеством систем, поскольку матрицы C и B_2 полагаются *неизвестными*. В целях сокращения изложения здесь метод из [110] не приводится.

4.4.4. Квадратичные матричные неравенства для отдельных моментов входо-выходных измерений

По аналогии с решением задачи синтеза $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления из подраздела 4.3.4 авторы [107] предлагают строить $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимальное управление путем использования отдельных измерений в каждый момент времени. Тем самым, как доказывается в статье, уменьшается консерватизм.

Поскольку исходные данные и дальнейшие построения те же, что и в подразделе 4.3.4, здесь приведем сразу готовый результат.

Для системы (62) решение задачи

$$(71) \quad \min_{P, Y, Q, \alpha_i, \beta, \gamma} \gamma$$

при ограничениях

$$(72) \quad \begin{bmatrix} P - DD^\top - \beta I & * & * \\ 0 & -Q & * \\ 0 & [C \ B_2]Q & \gamma^2 I - [C \ B_2]Q[C \ B_2]^\top \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T-1} \alpha_i \Psi_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix}^\top, \quad i = 0, \dots, T-1,$$

$$\begin{bmatrix} Q - \begin{bmatrix} P & * \\ Y & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} \\ * & P \end{bmatrix} \succ 0$$

относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n+m}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скалярных переменных $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, T-1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ доставляет H_∞ -субоптимальный регулятор $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$, при этом $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \hat{\gamma}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_c$.

Замечание 7. В [107] доказана теорема [107, теорема 5] о том, что значение γ^* , являющееся решением задачи (71)–(72), монотонно убывает при увеличении времени $T \geq n$ (ограничение вытекает из (13)).

Там же в [107] предложенный метод распространяется на случай регуляторов фиксированной (разреженной) структуры (итеративный алгоритм), а также теоретически и на примере показываются его достоинства.

Пример 5. При условиях из предыдущего примера синтезируем $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальное управление, следуя представленным выше методам.

Сначала построим управление для модельного случая, решив задачу (64) из начала раздела 4.4:

$$\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,7141 & -1,5677 & 0,3249 & -3,2775 \\ 6,8823 & -0,1974 & 3,8621 & -4,6649 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{mbc}^\infty = 2,5607.$$

Далее, применяя способ на основе дробно-линейного преобразования (подраздел 4.4.1, предложение 7), получаем при $\hat{\lambda} = 346,98$

$$\hat{K}_{lft}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,6453 & -1,6010 & 0,2668 & -3,3096 \\ 6,8780 & -0,1381 & 3,9277 & -4,5610 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{lft}^{H_\infty} = 2,6102.$$

Решение задачи (68)–(69) на основе фундаментальной леммы и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах из подраздела 4.4.2 дает

$$\hat{K}_{brl}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,6642 & -1,6052 & 0,2650 & -3,3001 \\ 6,9270 & -0,1262 & 3,9583 & -4,5406 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{brl}^{H_\infty} = 2,7206.$$

Вычисления согласно теореме 10 (подраздел 4.4.3) с использованием условия информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств приводит к $\hat{\alpha} = 149,81$, $\hat{\beta} = 0,001$ и

$$\hat{K}_{di}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,6645 & -1,5930 & 0,2825 & -3,2925 \\ 6,8529 & -0,1515 & 3,9036 & -4,5931 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{di}^{H_\infty} = 2,6132.$$

Для метода с квадратичными матричными неравенствами для отдельных моментов измерений входа и выхода системы (71)–(72) с учетом замечания 7 (подраздел 4.4.4) получены $\hat{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \dots, 20$ (упустим их для краткости), $\hat{\beta} = 2,2745 \cdot 10^{-5}$ и регулятор

$$\hat{K}_{ins}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,6459 & -1,5946 & 0,2779 & -3,3306 \\ 6,9028 & -0,1491 & 3,9194 & -4,5696 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{ins}^{H_\infty} = 2,6031.$$

На рис. 5 приведены траектории выходов рассматриваемого реактора $y_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$: выход разомкнутой системы обозначен жирным пунктиром с выделенными кружками измерениями X ; выходы замкнутой системы в модельном случае – $z_{mbc}(k)$, жирная сплошная линия; в методе на основе дробно-линейного преобразования – $z_{lft}(k)$, тонкая пунктирная линия; на основе фундаментальной леммы и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах – $z_{brl}(k)$, тонкая точечная линия; с условием информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств – $z_{di}(k)$, тонкая штрихпунктирная линия; с квадратичными матричными неравенствами для отдельных измерений – $z_{ins}(k)$, тонкая сплошная линия.

Сравним полученные траектории выходов с модельным примером:

$$\begin{aligned} \|\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{K}_{lft}^{H_\infty}\|_2 &= 0,1555, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{lft}(k)\|_2 = 0,0197, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{\gamma}_{lft}^{H_\infty}| = 0,0495, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{K}_{brl}^{H_\infty}\|_2 &= 0,1946, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{brl}(k)\|_2 = 0,0187, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{\gamma}_{brl}^{H_\infty}| = 0,1599, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{K}_{di}^{H_\infty}\|_2 &= 0,1047, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{di}(k)\|_2 = 0,0122, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{\gamma}_{di}^{H_\infty}| = 0,0524, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{K}_{ins}^{H_\infty}\|_2 &= 0,1532, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{ins}(k)\|_2 = 0,0254, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{\gamma}_{ins}^{H_\infty}| = 0,0423, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Как видно, все используемые методы успешно решили поставленную задачу. С точки зрения точности оценки $\hat{\gamma}$ и близости траекторий в данном примере лучше всего показал себя метод с использованием отдельных измерений в матричном неравенстве, и его точность возрастает с увеличением числа исходных измерений T . Метод на основе совместного применения фундаментальной леммы и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах из всех оказался наименее точен в оценке $\hat{\gamma}$, хотя эта разница не критична. Остальные два метода примерно одинаковы.

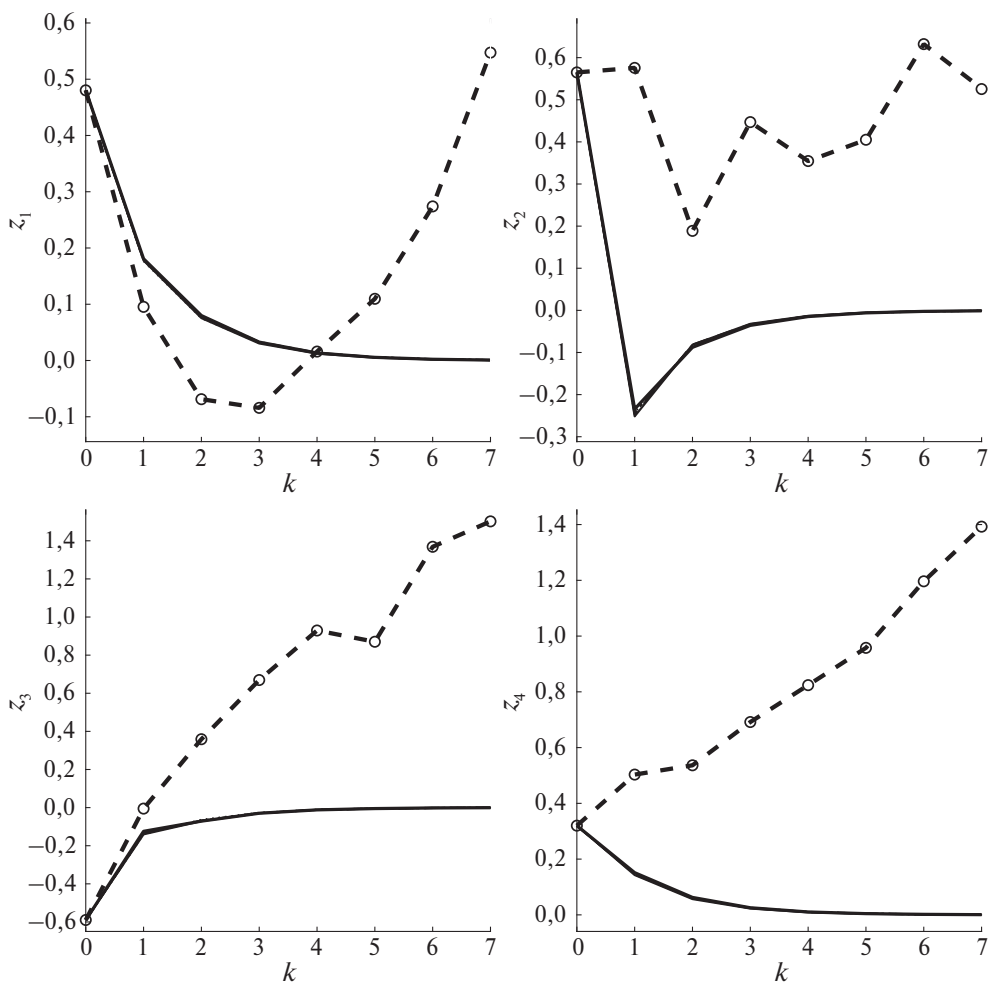


Рис. 5. Траектории выходов при решении задачи $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления.

5. Заключение

Проведенный обзор позволяет сделать следующие выводы относительно рассмотренных методов прямого управления на основе данных по конечным наборам измерений, имеющих в своей основе фундаментальную лемму или концепцию информативности данных и использующих аппарат линейных матричных неравенств при решении задач квадратичной стабилизации (при точных измерениях и при воздействии на систему ограниченных внешних возмущений), синтеза оптимального линейно-квадратичного регулятора, а также $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления дискретными линейными стационарными системами:

– В основе рассмотренных методов лежат известные традиционные модельные подходы и методы решения задач – неравенства Ляпунова, дробно-линейное преобразование, лемма Питерсена, S -процедура и лемма Финслера

(в том числе матричные), дискретная лемма об ограниченно-вещественных матрицах, применяются аппараты линейных и квадратичных матричных неравенств и др.

- Априорно о системе известно лишь то, что она линейная стационарная, а также известны размерности (или их оценки) ее входов и выходов.

- Также считается, что все выходы наблюдаемы и доступны измерения *всех состояний*, т.е. $y(k) = x(k)$, что тоже не всегда возможно в реальных задачах. В таких случаях приходится применять другие методы DDC, в том числе разработанные в рамках рассмотренного подхода, но не вошедшие в обзор из-за отличий в постановках задач.

- Во всех приведенных методах считается, что доступны измерения входа и выхода *разомкнутой системы*. Во-первых, это не всегда реализуемо на практике, во-вторых, может вызывать сложности в случае неустойчивых систем, и в обоих случаях требуется применять иные подходы к управлению в рамках DDC.

- Фундаментальная лемма дает возможность параметризации непосредственно матрицы замкнутой системы, в том числе при наличии внешних воздействий (при этом увеличивается консерватизм), однако для выполнения ее условий требуется больший объем исходных данных.

- Условия информативности данных мягче и позволяют применять менее консервативные методы, в том числе с использованием отдельных измерений, и меньшие объемы исходных данных.

- Размерности матричных переменных в разных методах могут как зависеть, так и не зависеть от длительности эксперимента, что существенно влияет на применимость метода: если размерности переменных зависят от объема данных, то его увеличение повышает точность решения – и это можно считать преимуществом таких методов, но в то же время могут возникать вычислительные трудности при решении ЛМН.

- При наличии постоянно действующих на систему внешних возмущений последние обычно считаются неизвестными и используется описание множества всех допустимых возмущений, при этом рассматриваются возмущения с ограниченной энергией или с ограниченными по норме значениями в отдельные моменты времени (этот подход снижает консерватизм). Есть, однако, и методы, в которых измерения возмущений считаются известными и напрямую используются в решении задачи (см. подраздел 4.3.2).

- Разработаны методы в том числе и для более частных задач, например LQR на конечном горизонте (подраздел 3.4).

Таким образом, в обзоре приведены достаточно разнообразные методы управления на основе данных, разработанные для решения ряда классических задач управления, рассмотрены особенности их устройства и применения, работа методов продемонстрирована на числовых примерах.

Приведенные методы являются частью одного из самых активно развивающихся направлений внутри DDC и используются (включая различные их

модификации) в исследовании, моделировании и синтезе управления разнообразными реальными объектами, системами и процессами, такими как магнитная подвесная система [19], однозвенная роботизированная рука [63], простая ректификационная колонна [70], самолет-истребитель [84], предкомпенсированная подсистема помпажа осевого компрессора [111], устойчивая активная система подвески автомобиля и неустойчивая вращательно-перевернутая маятниковая система [71], перевернутый маятник на неподвижном основании [69, 97] и на тележке [65], система из двух тележек, соединенных пружиной (двухмассовая система) [69], децентрализованное управление микросетевыми системами постоянного тока с распределенными генерирующими установками, соединенными между собой линиями электропередачи [112]; движение группы роботов [113], группы автомобилей с лидером [60] и двух автомобилей на безопасном расстоянии [73]; иные мультиагентные системы [29, 53, 92], рост популяций [94] и др.

Автор признателен д-ру физ.-мат. наук, профессору РАН М.В. Хлебникову за конструктивное обсуждение статьи и за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhong-Sheng Hou, Zhuo Wang*. From Model-Based Control to Data-Driven Control: Survey, Classification and Perspective // *Information Sciences*. 2013. V. 235. P. 3–35. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.07.014>
2. *Xu Jian-Xin, Hou Zhong-Sheng*. Notes on Data-driven System Approaches // *Acta Automatica Sinica*. 2009. V. 35. No. 6. P. 668–675. [https://doi.org/10.1016/S1874-1029\(08\)60090-7](https://doi.org/10.1016/S1874-1029(08)60090-7)
3. *Dörfler F.* Data-Driven Control: Part Two of Two: Hot Take: Why not go with Models? // *IEEE Control Systems Magazine*. 2023. V. 43. Iss. 6. P. 27–31. <https://doi.org/10.1109/MCS.2023.3310302>
4. *Soudbakhsh D., Annaswamy A.M., Yan Wang, et al.* Data-Driven Control: Theory and Applications // *American Control Conf. (ACC–2023)*, 31 May 2023–02 June 2023, San Diego, CA, USA. P. 1–18. <https://doi.org/10.23919/ACC55779.2023.10156081>
5. *Fernández R.* Data-Driven Control: A New Important Field in Control Theory // *15th Latinamerican Control Conf.* 2012. 6 p.
6. *Bazanella A.S., Campestri L., Eckhard D.* An Introduction to Data-Driven Control, From Kernels to Behaviors // *IEEE 61st Conf. on Decision and Control (CDC–2022)*, December 6–9, 2022. Cancún, Mexico. <https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9992589>
7. *Bazanella A.S., Campestri L., Eckhard D.* The Data-Driven Approach to Classical Control Theory // *Annual Reviews in Control*. 2023. V. 56. Article 100906. P. 1–20. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2023.100906>
8. *Khaki-Sedigh A.* An Introduction to Data-Driven Control Systems. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2024.
9. *Wang Jianhong, Ramirez-Mendoza R.A., Morales-Menendez R.* Data Driven Strategies: Theory and Applications. CRC Press, 2023.

10. *Bazanella A.S., Campestrini L., Eckhard D.* Data-Driven Controller Design: The H_2 Approach. Dordrecht: Springer, 2012.
11. *Brunton S.L., Kutz J.N.* Data-Driven Science and Engineering. Machine Learning, Dynamical Systems, and Control. Cambridge University Press, 2021.
12. *Precup R.-E., Roman R.-C., Safaei A.* Data-Driven Model-Free Controllers. Boca Raton: CRC Press, 2022.
13. *Willems J.C.* From Time Series to Linear System: Part I. Finite Dimensional Linear Time Invariant Systems // *Automatica*. 1986. V. 22. Iss. 5. P. 561–580. Part II. Exact Modelling // *Automatica*. 1986. V. 22. Iss. 6. P. 675–694. Part III: Approximate Modelling // *Automatica*. 1987. V. 23. Iss. 1. P. 87–115.
14. *Willems J.C., Polderman J.W.* Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 1997. ISBN 9780387982663.
URL: <https://books.google.com/books?id=AbmTA1HbhKsC>
15. *Willems J.C., Rapisarda P., Markovsky I. et al.* A Note on Persistency of Excitation // *Control Letters*. 2005. V. 54. No. 4. P. 325–329.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2004.09.003>
16. *Markovsky I., Willems J., De Moor B.* State Representations from Finite Time Series // *Proc. 44th IEEE Conf. Decis. Control*, Seville, Spain, 2005. P. 832–835.
<https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1582260>
17. *Markovsky I., Dörfler F.* Behavioral Systems Theory in Data-Driven Analysis, Signal Processing, and Control // *Annual Reviews in Control*. 2021. V. 52. P. 42–64.
<https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.09.005>
18. *Van Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., et al.* Data Informativity: A New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2020. V. 65. Iss. 11. P. 4753–4768.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2020.2966717> // arXiv: 1908.00468
19. *Van Waarde H.J., Eising J., Camlibel M.K., et al.* The Informativity Approach: To Data-Driven Analysis and Control. *IEEE Control Systems* // *IEEE Control Systems*. 2023. V. 43. Iss. 6. P. 32–66. <https://doi.org/10.1109/MCS.2023.3310305> // arXiv:2302.10488v1
20. *Van Waarde H.J., Eising J., Camlibel M.K., et al.* A Tutorial on the Informativity Framework for Data-Driven Control // *Proc. of the 61st IEEE Conf. on Decision and Control (CDC–2022)*, 2022. V. 2022-December. P. 1085–1090.
<https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9992611>
21. *Rouis N., N'Doye I., Laleg-Kirati T.-M.* Model-Free LQR Based PID Controller for Trajectory Tracking of 2-DoF Helicopter: Comparison and Experimental Results // arXiv: 2103.10988v1
22. *Berberich J., Iannelli A., Padoan A., et al.* A Quantitative and Constructive Proof of Willems' Fundamental Lemma and its Implications // *American Control Conf. (ACC–23)*, 31 May 2023–02 June 2023, San Diego, CA, USA.
<https://doi.org/10.23919/ACC55779.2023.10156227> // arXiv:2208.00905v2
23. *Bosso A., Borghesi M., Iannelli A., et al.* Derivative-Free Data-Driven Control of Continuous-Time Linear Time-Invariant Systems // arXiv:2410.24167v1
24. *Schmitz P., Faulwasser T., Rapisarda P., et al.* A Continuous-Time Fundamental Lemma and its Application in Data-Driven Optimal Control // *Systems & Control*

- Letters. 2024. V. 194. 105950. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2024.105950> // arXiv:2407.12179v1
25. *Guanru Pan, Ruchuan Ou, Faulwasser T.* On a Stochastic Fundamental Lemma and Its Use for Data-Driven Optimal Control // IEEE Trans. on Automatic Control. 2023. V. 68. Iss. 10. P. 5922–5937. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3232442>
 26. *Ruchuan Ou, Guanru Pan, Faulwasser T.* A Stochastic Fundamental Lemma with Reduced Disturbance Data Requirements // arXiv:2502.09131v1
 27. *Faulwasser T., Ruchuan Ou, Guanru Pan, et al.* Behavioral Theory for Stochastic Systems? A Data-driven Journey from Willems to Wiener and Back Again // Annual Reviews in Control. 2023. V. 55. P. 92–117.
<https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2023.03.005> // arXiv: 2209.06414v3
 28. *Mishra V.K., Markovsky I., Grossmann B.* Data-Driven Tests for Controllability // IEEE Control Systems Letters. 2021. V. 5. Iss. 2. P. 517–522.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2020.3003770>
 29. *Yue Yu, Talebi Sh., van Waarde H.J., et al.* On Controllability and Persistency of Excitation in Data-Driven Control: Extensions of Willems’ Fundamental Lemma // arXiv: 2102.02953v2
 30. *Yujie Yang, Zhilong Zheng, Shengbo Eben Li* On the Stability of Datatic Control Systems // arXiv:2401.16793v1
 31. *Coulson J., van Waarde H., Dörfler F.* Robust Fundamental Lemma for Data-driven Control // arXiv:2205.06636v1
 32. *Coulson J., van Waarde H.J., Lygeros J., et al.* A Quantitative Notion of Persistency of Excitation and the Robust Fundamental Lemma // IEEE Control Systems Letters. 2023. V. 7. P. 1243–1248. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3232303>
 33. *Verhoek C., Tóth R., Haesaert S., et al.* Fundamental Lemma for Data-Driven Analysis of Linear Parameter-Varying Systems // 60th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC), 14–17 December 2021, Austin, TX, USA.
<https://doi.org/10.1109/CDC45484.2021.9683151> // arXiv:2103.16171v2
 34. *Verhoek C., Eising J., Dörfler F., Tóth R.* Decoupling Parameter Variation from Noise: Biquadratic Lyapunov Forms in Data-Driven LPV Control // arXiv:2403.16565v2
 35. *Nortmann B., Mylvaganam T.* Direct Data-Driven Control of LTV Systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2023. V. 68. Iss. 8. P. 4888–4895.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3276909> // arXiv:2111.02342v3
 36. *Breschi V., Zaccarian L., Formentin S.* Data-Driven Stabilization of Input-Saturated Systems // IEEE Control Systems Letters. 2023. V. 7. P. 1640–1645.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2023.3266254>
 37. *Xiaoyun Lu, Dongpeng Zhou, Wu-Hua Chen, et al.* Data-Driven Control for Linear Discrete-Time Systems with Input Saturation // Circuits, Systems, and Signal Processing. 2024. V. 43. P. 6211–6227. <https://doi.org/10.1007/s00034-024-02751-w>
 38. *Martinelli A., Gargiani M., Draskovic M., et al.* Data-Driven Optimal Control of Affine Systems: A Linear Programming Perspective // IEEE Control Systems Letters. 2022. V. 6. P. 3092–3097. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3180898> // arXiv:2203.12044v2
 39. *Chin-Yao Chang, Bernstein A.* Robust Data-Driven Control with Noisy Data // arXiv:2207.09587v4

40. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-Based Stabilization of Unknown Bilinear Systems with Quaranteed Basin of Attraction // *Systems & Control Letters*. 2020. V. 145. 104788. P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104788>
41. *De Persis C., Tesi P.* Designing Experiments for Data-Driven Control of Nonlinear Systems // *IFAC-PapersOnLine*. 2021. V. 54. Iss. 9. P. 285–290. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.06.085>
42. *Martin T., Schönß T.B., Allgöwer F.* Guarantees for Data-Driven Control of Nonlinear Systems Using Semidefinite Programming: A Survey // *Annual Reviews in Control*. 2023. V. 56. 100911. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2023.100911> // [arXiv:2306.16042v2](https://arxiv.org/abs/2306.16042v2)
43. *Padoan A., Coulson J., Van Waarde H.J., et al.* Behavioral Uncertainty Quantification for Data-Driven Control // *Proc. of the IEEE 61st Conf. on Decision and Control (CDC)*, December 6-9, 2022. Cancún, Mexico. V. 2022-December. P. 4726–4731. <https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9993002>
44. *Alsalti M., Barkey M., Lopez V.G., et al.* Sample- and Computationally Efficient Data-Driven Predictive Control // *IEEE European Control Conf. (ECC–2024)*, Stockholm, Sweden, 2024. <https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10591022> // [arXiv:2309.11238v2](https://arxiv.org/abs/2309.11238v2).
45. *Coulson J., Lygeros J., Dörfler F.* Data-enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC // *Proc. of the 18th European Control Conf. (ECC–2019)*, 25–28 June 2019, Naples, Italy. P. 307–312. <https://doi.org/10.23919/ECC.2019.8795639> // [arXiv:1811.05890v2](https://arxiv.org/abs/1811.05890v2).
46. *Lazar M., Verheijen P.C.N.* Generalized Data-Driven Predictive Control: Merging Subspace and Hankel Predictors // *Mathematics*. 2023. V. 11(9). Article 2216. 17 p. <https://doi.org/10.3390/math11092216> // [arXiv:2304.01418v1](https://arxiv.org/abs/2304.01418v1)
47. *Markovsky I., Linbin Huang, Dörfler F.* Data-Driven Control Based on the Behavioral Approach: From Theory to Applications in Power Systems // *IEEE Control Systems Magazine*. 2023. V. 43. Iss. 5. P. 28–68. <https://doi.org/10.1109/MCS.2023.3291638>
48. *Mattsson P., Bonassi F., Breschi V., et al.* On the Equivalence of Direct and Indirect Data-Driven Predictive Control Approaches // *IEEE Control Systems Letters*. 2024. V. 8. P. 796–80. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3403473>
49. *Meijer T.J., Scheres K.J.A., Nouwens S.A.N., et al.* From a Frequency-Domain Willems’ Lemma to Data-Driven Predictive Control // [arXiv:2501.19390v1](https://arxiv.org/abs/2501.19390v1)
50. *Дмитрук Н.М., Манжулина Е.А.* Оптимальное управление линейными стационарными дискретными системами без предварительной параметрической идентификации // *АиТ*. 2022. № 2. С. 3–21. <https://doi.org/10.31857/S0005231022020015>
51. *Breschi V., De Persis C., Formentin S., et al.* Direct Data-Driven Model-Reference Control with Lyapunov Stability Guarantees // *Proc. of the 60th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC-2021)*, 14–17 December 2021, Austin, TX, USA. 9 p. <https://doi.org/10.1109/CDC45484.2021.9683437> // [arXiv:2103.12663v2](https://arxiv.org/abs/2103.12663v2)
52. *Markovsky I., Rapisarda P.* On the Linear Quadratic Data-Driven Control // *Proc. of the European Control Conf. (ECC–2007)*, Kos, Greece, July 2–5, 2007. P. 5313–5318. <https://doi.org/10.23919/ECC.2007.7068299>
53. *Zeze Chang, Junjie Jiao, Zhongkui Li.* Localized Data-driven Consensus Control // [arXiv:2401.12707v1](https://arxiv.org/abs/2401.12707v1)

54. *Van Waarde H.J., De Persis C., Camlibel M.K., et al.* Willems' Fundamental Lemma for State-space Systems and its Extension to Multiple Datasets // IEEE Control Systems Letters. 2020. V. 4. Iss. 3. P. 602–607.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2020.2986991> // arXiv:2002.01023v2
55. *Alsalti M., Lopez V.G., Müller M.A.* Notes on Data-Driven Output-Feedback Control of Linear MIMO Systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2025. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2025.3553073> // arXiv:2311.17484v2
56. *Shakouri A., Van Waarde H.J., Camlibel M.K.* A New Perspective on Willems' Fundamental Lemma: Universality of Persistently Exciting Inputs // arXiv:2503.12489
57. *Eising J., Trentelman H.L.* Informativity of Noisy Data for Structural Properties of Linear Systems // Systems & Control Letters. 2021. V. 158. 105058. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2021.105058>
58. *Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity for Observability: An Invariance-based Approach // European Control Conf. (ECC–2020), 12–15 May 2020, St. Petersburg, Russia. P. 1057–1059.
<https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143925>
59. *Berberich J., Wildhagen S., Hertneck M., et al.* Data-Driven Analysis and Control of Continuous-Time Systems under Aperiodic Sampling // IFAC-PapersOnLine. 2021. V. 54. Iss. 7. P. 210–215. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.08.360>
60. *Iwata T., Azuma S.-I., Ariizumi R., et al.* Data Informativity for Distributed Positive Stabilization // IEEE Control Systems Letters. 2024. V. 8. P. 826–831.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3404219>
61. *Eising J., Camlibel M.K.* Data Informativity for Analysis of Linear Systems with Convex Conic Constraints // IEEE Control Systems Letters. 2022. V. 6. P. 391–396.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3077367>
62. *Nguyen E.T. Van Waarde H.J.* Synthesis of Dissipative Systems Using Input-State Data // Proc. of the IEEE European Control Conf. (ECC–2024). P. 2959–2964.
<https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10590889> // arXiv:2501.18330v1
63. *Kaijian Hu, Tao Liu.* Data-Driven H_∞ Control for Unknown Piecewise Affine Systems with Bounded Disturbances // European Control Conf. (ECC–2024) June 25–28, 2024, Stockholm, Sweden. P. 2623–2628.
<https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10590818>
64. *Miller J., Sznaier M.* Data-Driven Gain Scheduling Control of Linear Parameter-Varying Systems using Quadratic Matrix Inequalities // IEEE Control Systems Letters. 2022. V. 7. P. 835–840. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3227182> // arXiv:2209.06251v4
65. *Van Waarde H.J., Eising J., Camlibel M.K., et al.* A Behavioral Approach to Data-Driven Control with Noisy Input-Output Data // IEEE Trans. on Automatic Control. 2024. V. 69. Iss. 2. P. 813–827. <https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3275014> // arXiv:2206.08408v1
66. *Trentelman Harry L., Van Waarde H.J., Camlibel M.K.* An Informativity Approach to the Data-Driven Algebraic Regulator Problem // IEEE Trans. on Automatic Control. 2022. V. 67. Iss. 11. P. 6227–6233.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3129457> // arXiv:2009.01552v2
67. *Ao Cao, Fuyong Wang* Informativity Conditions for Multiple Signals: Properties, Experimental Design, and Applications // arXiv:2501.10030v1

68. *Eising J., Cortés J.* Cautious Optimization via Data Informativity // arXiv:2307.10232v1
69. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality, and Robustness // IEEE Trans. on Automatic Control. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924. <https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2959924>
70. *Bisoffi A., Lidong Li, De Persis C., et al.* Controller Synthesis for Input-State Data With Measurement Errors // IEEE Control Systems Letters. 2024. V. 8. P. 2475–1456. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3402135>
71. *Esmzad R., Sankar G.S., Teawon Han, et al.* Direct Data Driven Control Using Noisy Measurements // arXiv:2505.06407
72. *Chin-Yao Chang, Bernstein A.* Robust Data-Driven Control for Systems with Noisy Data // arXiv:2207.09587v4
73. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Controller Design for Robust Invariance From Noisy Data // IEEE Trans. on Automatic Control. 2023. V. 68. Iss. 1. P. 636–643. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3170373>
74. *Kaminaga T., Sasahara H.* Data Informativity under Data Perturbation // arXiv:2505.01641v1
75. *Berberich J., Scherer C.W., Allgöwer F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // IEEE Trans. Automat. Control. 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3209342> // arXiv:2009.05253v4
76. *Коган М.М., Степанов А.В.* Как улучшить робастное управление линейной нестационарной системой с помощью экспериментальных данных // АиТ. 2024. № 6. С. 115–139. <https://doi.org/10.31857/S0005231024060086>
77. *Коган М.М.* От адаптивного и робастного к управлению на основе априорных и экспериментальных данных // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ–2024): Сборник научных трудов, 17–20 июня 2024 г., Москва / Под общ. ред. Д.А. Новикова. ИПУ РАН, 2024. С. 450–454.
78. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез обобщенного H_∞ -субоптимального управления по экспериментальным и априорным данным // АиТ. 2024. № 1. С. 3–20. <https://doi.org/10.31857/S0005231024010015>
79. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // АиТ. 2023. № 8. С. 24–42. <https://doi.org/10.31857/S0005231023080020>
80. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
81. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
82. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление в сложных динамических системах. СПб.: Наука, 2000.
83. *Van Waarde H.J., Camlibel M.K., Eising J., et al.* Quadratic Matrix Inequalities with Applications to Data-Based Control // SIAM J. on Control and Optimization. 2023. V. 61(4). P. 2251–2281. <https://doi.org/10.1137/22M1486807>
84. *Van Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M.* From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // IEEE Trans. Autom. Control. 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175. <https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3047577>

85. *Van Waarde H., Camlibel K.* A Matrix Finsler's Lemma with Applications to Data-Driven Control // Proc. of the 60 IEEE Conf. on Decision and Control. IEEE, 2022. P. 5777–5782. <https://doi.org/10.1109/CDC45484.2021.9683285>
86. *Walsh G., Ye H.* Scheduling of Networked Control Systems // IEEE Control Syst. Mag. 2001. V. 21. No. 1. P. 57–65. <https://doi.org/10.1109/37.898792>
87. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2.1. URL: <http://cvxr.com>
88. *Chen T., Francis B.* Optimal Sampled-Data Control Systems. London, U.K.: Springer, 1995.
89. *Dörfler F., Tesi P., De Persis C.* On the Certainty-Equivalence Approach to Direct Data-Driven LQR Design // IEEE Trans. on Automatic Control. 2023. V. 68. No. 12. P. 7989–7996. <https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3253787> // arXiv: 2109.06643
90. *Gonçalves Da Silva G.R.G., Bazanella A.S., et al.* Data-Driven LQR Control Design // IEEE Control Systems Letters. Jan. 2018. V. 3. No. 1. P. 180–185. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2018.2868183> // arXiv:1807.03263v1
91. *Umar A.A., Ryu K., Back J., et al.* Stability Margin of Data-Driven LQR and Its Application to Consensus Problem // Mathematics. 2024. V. 12. Iss. 2. 199. <https://doi.org/10.3390/math12020199>
92. *Van Waarde H.J., Mesbahi M.* Data-Driven Parameterizations of Suboptimal LQR and H2 Controllers // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53-2. P. 4234–4239. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2470>
93. *Rotulo M., De Persis C., Tesi P.* Data-Driven Linear Quadratic Regulation via Semidefinite Programming // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53(2). P. 3995–4000. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2264>
94. *Scampicchio A., Aravkin A., Pillonetto G.* LQR Design under Stability Constraints // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. Iss. 2. P. 5556–5560. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1566>
95. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen's Lemma // Automatica. 2022. V. 145. Article 110537. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110537>
96. *Dörfler F., Tesi P., De Persis C.* On the Role of Regularization in Direct Data-Driven LQR Control // Proc. of the IEEE 61st Conf. on Decision and Control (CDC-2022). IEEE, 2022. P. 1091–1098. <https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9992770>
97. *De Persis C., Tesi P.* Low-complexity learning of Linear Quadratic Regulators from noisy data // Automatica. 2021. V. 128. Article 109548. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109548>
98. *Xiong Zeng, Bako L., Ozay N.* Noise Sensitivity of the Semidefinite Programs for Direct Data-Driven LQR // arXiv:2412.19705v1
99. *Berberich J., Koch A., Scherer C.W., et al.* Robust Data-Driven State-Feedback Design // American Control Conf. (ACC-2020), Denver, CO, USA, 2020. P. 1532–1538. <https://doi.org/10.23919/ACC45564.2020.9147320>
100. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems & Control Letters. 1987. V. 8(4). P. 351–357. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(87\)90102-2](https://doi.org/10.1016/0167-6911(87)90102-2)

101. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // *АвтТ.* 2008. №11. С. 125–139.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Petersen's lemma on matrix uncertainty and its generalizations // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. P. 1932–1945.
<https://doi.org/10.1134/S000511790811009X>
102. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Trade-Offs in Learning Controllers from Noisy Data // *Systems & Control Letters.* 2021. V. 154. 104985.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2021.104985>
103. *Caverly R.J., Forbes J. R.* LMI Properties and Applications in Systems, Stability, and Control Theory // *arXiv:1903.08599*
104. *De Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A New Discrete-Time Robust Stability Condition // *Systems & Control Letters.* 1999. V. 37. P. 261–265.
[https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(99\)00035-3](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00035-3)
105. *De Oliveira M.C., Geromel J.C., Bernussou J.* Extended H_2 and H_∞ Norm Characterizations and Controller Parametrizations for Discrete-Time Systems // *Int. J. of Control.* 2002. V. 75. No. 9. P. 666–679.
<https://doi.org/10.1080/00207170210140212>
106. *Miller J., Eising J., Dörfler F., et al.* Data-Driven Structured Robust Control of Linear Systems // *arXiv: 2411.11542v1*
107. *Zhaohua Y., Yuxing Zh., Nachuan Y., et al.* Data-Driven Structured Controller Design Using the Matrix S-Procedure // *arXiv:2503.14949v1*
108. *Brändle F., Allgöwer F.* A System Parametrization for Direct Data-Driven Analysis and Control with Error-in-Variables // *arXiv:2411.06787v2*
109. *De Boer R.* Robust Data-Driven State-Feedback Synthesis from Data Corrupted by Perturbations with Bounded Norms and Rates-of-Variation. MSc Thesis. University of Twente, 2023.
110. *Kaijian Hu, Tao Liu.* A Robust Data-Driven Iterative Control Method for Linear Systems with Bounded Disturbances // *arXiv:2405.02537v1*
111. *Luppi A., De Persis C., Tesi P.* On Data-Driven Stabilization of Systems with Nonlinearities Satisfying Quadratic Constraints // *Systems & Control Letters.* 2022. V. 163. 105206. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2022.105206>
112. *Nakano T., Aboudonia A., Eising J., et al.* Dissipativity-Based Data-Driven Decentralized Control of Interconnected Systems // *arXiv:2509.14047*
113. *Wenjia Liu, Yifei Li, Jian Sun, et al.* Data-driven Internal Model Control for Output Regulation // *arXiv:2505.09255*

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фраджовым.

Поступила в редакцию 12.07.2025

После доработки 20.05.2026

Принята к публикации 29.05.2026

© 2026 г. В.О. НИКИФОРОВ, д-р техн. наук (nikiforov_vo@itmo.ru),
 Д.Н. ГЕРАСИМОВ, канд. техн. наук (dngerasimov@itmo.ru)
 (Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург)

ЗАМКНУТЫЙ ПРЕДИКТОР СОСТОЯНИЯ: РОБАСТНОСТЬ И ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ¹

Рассматривается задача робастной реализации предиктора состояния, используемого в задаче стабилизации линейного стационарного объекта с произвольно большим известным запаздыванием по сигналу управления. Для решения задачи построен наблюдатель ошибки предсказания будущего значения вектора состояния с переключением начальных условий. Полученная ошибка наблюдения используется в качестве корректирующей обратной связи в предикторе состояния. Показана робастность предложенного решения к параметрическим вариациям объекта управления, а также к числовой реализации динамической модели предиктора. Теоретические положения иллюстрируются результатами числового моделирования.

Ключевые слова: линейные системы, запаздывание по управлению, робастность.

DOI: 10.7868/S2413977726090026

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается задача практической реализации стабилизирующего управления для линейного стационарного объекта с запаздыванием по сигналу управления²:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t - h),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – доступный измерениям вектор состояния с начальным условием x_0 , $u \in \mathbb{R}^1$ – сигнал управления ($u(t) \equiv 0$ при $t < h$), матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в общем случае не гурвицева, пара (A, b) полностью управляема, h – известное произвольно большое, но ограниченное запаздывание. Также предполагается, что A и b являются неопределенными и их оценки (номинальные значения) $\hat{A}$ и $\hat{b}$ используются при синтезе закона управления. В общем случае $\hat{A} \neq A$ и $\hat{b} \neq b$.

Замечание 1. Без потери общности будем считать, что состояния всех рассматриваемых и синтезируемых динамических систем являются нулевыми

¹ Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSER-2025-0002).

² Иногда аргумент t будет опускаться в формулах, если это не приводит к ошибочному пониманию.

при $t < 0$, а под начальным состоянием x_0 понимается состояние в момент времени $t = 0$, т.е. $x_0 = x(0)$. Для динамических систем с состоянием $\chi(t)$ под χ_ξ^+ будем понимать значение состояния, установленное (переключенное) в момент времени $t = \xi$ в соответствии с некоторым правилом.

Если A и b являются известными (т.е. $\hat{A} = A$ и $\hat{b} = b$), то для стабилизации объекта (1) можно построить следующее управление с предсказанием (англ. – *prediction-based control*) [1–3]:

$$(2) \quad u(t) = -k^\top \left(e^{Ah} x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \right),$$

где вектор обратных связей $k \in \mathbb{R}^n$ выбран так, что матрица $A_k = A - bk^\top$ является гурвицевой. Следует отметить, что выражение в скобках является точным предсказанием будущего значения вектора состояния и иногда именно оно называется предиктором:

$$(3) \quad e^{Ah} x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau = x(t+h).$$

При этом управление (2) обеспечивает замкнутой системе характеристическое уравнение вида $\det(sI - A + bk^\top) = 0$.

Управление вида (2) получило широкое распространение при решении таких задач, как назначение заданного набора корней замкнутой системы [3, 4], адаптивного регулирования в системах с запаздыванием [5, Глава 6; 6–9], стабилизации многоканальных систем с разными запаздываниями в каждом канале [10] и т.п. (см. также специализированные монографии [2, 4, 11, 12]). Однако, это элегантное решение имеет существенный недостаток, связанный с практической реализацией интегрального члена (предиктора) для неустойчивых объектов (т.е. когда матрица A не гурвицева). В [3] было предложено аппроксимировать интеграл с помощью какого-либо численного метода (например, метода прямоугольников, трапеций, Симпсона и т.п.) с конечным числом членов числовой аппроксимации. При этом было сделано предположение, что замкнутая система будет устойчивой при достаточно точной аппроксимации, т.е. при достаточно большом числе ее членов.

Однако в [13] на примере системы первого порядка было показано, что при числовой реализации предиктора (3) замкнутая система может быть неустойчивой даже при произвольно высокой точности аппроксимации, т.е. при произвольно большом числе ее членов. Другими словами, управление с предсказанием не является робастным по отношению к числовой реализации предиктора³. В то же время, как было отмечено в [3], реализация предикто-

³ В [20] с использованием аппарата матричных линейных неравенств была получена оценка допустимого запаздывания, позволяющего сохранить устойчивость замкнутой системы при числовой реализации интегрального члена и заданных параметрах объекта управления.

ра (3) в виде решения дифференциального уравнения предполагает взаимное сокращение в замкнутой системе неустойчивых нулей и полюсов, что ведет к неустойчивости даже при бесконечно малых параметрических возмущениях, т.е. к неробастности по отношению к параметрическим возмущениям. Особо отметим, что при управлении асимптотически устойчивыми объектами таких проблем практической реализации не возникает, что открывает возможности для синтеза широкого класса различных стабилизирующих управлений (например, см. [14, раздел 2.2; 7, 15–17] и ссылки внутри них).

Для решения отмеченной выше проблемы в [18] для систем с запаздыванием по входу (и в [19] для систем с запаздываниями по входу и по состоянию) было предложено включить в закон управления фильтр низких частот и использовать так называемый динамический предиктор (англ. – *dynamic prediction-based control*):

$$(4) \quad \dot{u} = -(\gamma + k^\top b)u - (k^\top A + \gamma k^\top) \left[e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \right],$$

где $\gamma > 0$. В этом случае характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид $(s + \gamma)\det(sI - A + bk^\top) = 0$. Было доказано, что замкнутая система (1), (4) сохраняет устойчивость, если интегральный член аппроксимируется числовым методом достаточно высокой точности. Позже в [21–23] также была показана робастность закона управления (4) по отношению к малым (в определенном смысле) параметрическим вариациям.

Таким образом, управление с динамическим предиктором (4) сохраняет устойчивость даже если интеграл аппроксимируется числовой суммой с конечным числом членов, а реальные параметры A и b несколько отличаются от их оценок $\hat{A}$ и $\hat{b}$, использованных при синтезе закона управления. Однако практическая реализация закона (4) требует использования специальных числовых методов расчета интеграла с высокой точностью аппроксимации.

Известны два принципиально иных подхода, позволяющие вообще отказаться от задачи расчета интегрального члена. Один из них предполагает использование различных типов статических обратных связей, а второй – использование для оценки будущего значения вектора состояния $x(t + \tau)$ цепочки наблюдателей состояния, названной последовательностью предикторов.

Закон управления в виде статической обратной связи в англоязычных публикациях получил название *truncated predictor feedback* [24–27]. Так как в русскоязычной литературе общепризнанного названия не устоялось, будем называть такой класс законов управления *усеченными статическими предикторами*. Он описывается выражением

$$(5) \quad u(t) = -k^\top(\sigma)e^{Ah}x(t),$$

где вектор коэффициентов обратной связи $\hat{k} = \hat{k}(\sigma)$ параметризован малым параметром $\sigma \in (0, 1)$. Как показано в [26, 27], при специальном выборе “слабой” обратной связи с достаточно малым параметром σ статический предик-

тор обеспечивает стабилизацию линейной системы с произвольно большим входным запаздыванием при условии, что незамкнутая система находится на границе устойчивости (т.е. собственные значения матрицы A не имеют положительных вещественных частей). Дальнейшие модификации статической обратной связи, известные как *псевдо предиктор* (англ. – *pseudo-predictor feedback*) являются применимыми к нестационарным линейным объектам, которые могут быть полиномиально неустойчивыми [28]. Как отмечено в [28], так как статическая обратная связь является линейной, она робастна к малым параметрическим вариациям.

Таким образом, законы управления со статическими предикторами обеспечивают робастную стабилизацию линейных объектов с произвольно большими входными запаздываниями и одновременно полностью снимают проблему своей практической реализации. Однако они применимы только к очень ограниченному классу систем, которые не являются экспоненциально неустойчивыми.

Альтернативный метод, позволяющий снять проблему практической реализации интегрального члена, основан на использовании наблюдателя вида [29]

$$(6) \quad \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + bu(t) + L(\bar{x}(t-h) - x(t)),$$

где матрица коэффициентов обратных связей L выбрана таким образом, что модель

$$(7) \quad \dot{e} = Ae + Le(t-h)$$

ошибки предсказания $e(t) = \bar{x}(t-h) - x(t)$ является асимптотически устойчивой. Если $e(t) \rightarrow 0$, то $\bar{x}(t) \rightarrow x(t+h)$, что позволяет использовать обратную связь вида $u(t) = -k^\top \bar{x}(t)$.

Как известно [30], если матрица $(A + L)$ является гурвицевой, то существует достаточно малое запаздывание $h_m > 0$ такое, что модель (7) асимптотически устойчива для всех $h \in [0, h_m]$. Для того чтобы решить задачу при произвольно больших запаздываниях, в [29] было предложено использовать *последовательность предикторов* (англ. – *sequential sub-predictors*): цепочку из последовательно соединенных наблюдателей (6) для малых сегментов большого запаздывания (см. также [31, 33–37], где последовательные предикторы применены для различных классов линейных и нелинейных систем, систем с запаздыванием по входу, состоянию и выходу). В [29] было показано, что замкнутая система с последовательными предикторами является робастной по отношению к малым параметрическим возмущениям.

Таким образом, законы управления с последовательными предикторами обеспечивают робастную стабилизацию линейных объектов, но требуют для больших значений запаздывания существенного увеличения динамического порядка регулятора в силу необходимости использования цепочки наблюдателей вектора состояния полной размерности.

В настоящей статье предлагается новый замкнутый предиктор, который является робастным по отношению к параметрическим возмущениям, а также к своей числовой реализации. Предлагаемый предиктор состоит из достаточно простого наблюдателя ошибки предсказания и механизма переключения состояния наблюдателя, при этом обладает следующими преимуществами перед известными решениями:

- имеет достаточно простую структуру и является применимым для систем с произвольно большим запаздыванием без повышения динамического порядка и привлечения цепочки наблюдателей;
- является замкнутым по ошибке предсказания будущего значения вектора состояния;
- является робастным по отношению к параметрическим возмущениям, а также к своей числовой реализации;
- практическая реализация динамических блоков предиктора не требует использования специальных методов числового интегрирования и может быть реализована с использованием стандартных методов, предлагаемых пакетом MatLab, таких как ode1 (Euler), ode2 (Heun), ode3 (Bogacki-Shampine), ode4 (Runge-Kutta), ode5, или ode8 (Dormand-Prince).

Настоящая статья расширяет результаты конференционной статьи [38], где был предложен замкнутый предиктор, а его робастность по отношению к числовой реализации была высказана в качестве предположения. В настоящей статье робастность по отношению к параметрическим возмущениям и числовой реализации строго доказана (см. разделы 3 и 4). Проблема робастности по отношению к вариациям запаздывания не анализируется в текущей статье, и читатели отсылаются к соответствующим работам [2, 11].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена основная идея построения замкнутого наблюдателя и проанализированы его свойства для идеального случая (т.е. без параметрических возмущений и числовой аппроксимации). В разделе 3 доказана робастность предложенного наблюдателя по отношению к параметрическим возмущениям, а в разделе 4 – по отношению к числовой реализации. Результаты моделирования приведены в разделе 5. Приложения 1–3 содержат полезный математический инструментарий и доказательства вспомогательных утверждений.

2. Замкнутый предиктор: основная идея

Будем рассматривать интегральный член в (2) в качестве решения дифференциального уравнения

$$(8) \quad \dot{\psi}(t) = A\psi(t) + bu(t) - e^{Ah}bu(t-h), \quad \psi(0) = 0.$$

В этом случае

$$(9) \quad x(t+h) = e^{Ah}x(t) + \psi(t),$$

и управление (2) принимает вид

$$(10) \quad u = -k^\top \left(e^{Ah} x + \psi \right).$$

В дальнейшем будем рассматривать (8) и (9) как математическую модель истинного предсказания вектора состояния $x(t+h)$, а решение $\psi(t)$ уравнения (8) – как истинное значение интегрального члена, не доступное прямым измерениям.

Будем полагать, что для практической реализации закона управления оценка интегрального члена $\hat{\psi}(t)$ рассчитывается как решение (может быть, полученное с использованием стандартных численных методов) дифференциального уравнения

$$(11) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \hat{A}\hat{\psi}(t) + \hat{b}u(t) - e^{\hat{A}h}\hat{b}u(t-h), \quad \hat{\psi}(0) = \hat{\psi}_0,$$

где $\hat{\psi} \in \mathbb{R}^n$. При этом закон управления определяется выражением

$$(12) \quad u(t) = -\hat{k}^\top \left(e^{\hat{A}h} x(t) + \hat{\psi}(t) \right),$$

где вектор $\hat{k}$ выбран так, что матрица $\hat{A}_k = \hat{A} - \hat{b}\hat{k}^\top$ гурвицева. В этом случае оценка предсказания будущего значения вектора состояния записывается в форме

$$(13) \quad \hat{x}(t+h) = e^{\hat{A}h} x(t) + \hat{\psi}(t).$$

Как было отмечено выше, закон управления (11), (12) не является робастным в силу взаимной компенсации неустойчивых (если матрица A не гурвицева) нулей и полюсов [3]. Это означает, что замкнутая система (1), (11) и (12) может терять устойчивость при произвольно малых возмущениях, вызванных вариациями параметров объекта управления или ошибками численного метода решения дифференциального уравнения (11). Для преодоления этой проблемы предлагается новый замкнутый предиктор.

2.1. Синтез закона управления: идеальный случай

Для того чтобы пояснить основную идею, начнем с идеального случая, когда для расчета закона управления использованы истинные значения параметров объекта A и b , а уравнение (11) рассчитывается абсолютно точно. В этом случае вместо уравнений (11)–(13) можем записать

$$(14) \quad \dot{\psi}(t) = A\psi(t) + bu(t) - e^{Ah}bu(t-h), \quad \psi(0) = \psi_0,$$

$$(15) \quad u(t) = -k^\top \left(e^{Ah} x(t) + \psi(t) \right),$$

$$(16) \quad \hat{x}(t+h) = e^{Ah} x(t) + \psi(t).$$

В (14) ненулевое начальное условие $\hat{\psi}_0 \neq 0$ установлено исключительно в целях демонстрации асимптотической устойчивости синтезируемого замкнутого предиктора.

Введем *ошибку предсказания*

$$(17) \quad \varepsilon(t) := x(t+h) - \hat{x}(t+h).$$

Ввиду (9) и (16) имеем

$$(18) \quad \varepsilon(t) = \psi(t) - \hat{\psi}(t),$$

и с учетом (8) и (14) получаем

$$(19) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t), \quad \varepsilon(0) = -\hat{\psi}_0.$$

Ошибка предсказания $\varepsilon(t)$ не измеряема. Однако величина⁴

$$(20) \quad y(t) := \varepsilon(t-h) = x(t) - \hat{x}(t)$$

или (см. (16))

$$(21) \quad y(t) = x(t) - e^{Ah}x(t-h) - \hat{\psi}(t-h)$$

измеряема и может рассматриваться как выход модели (19) с запаздыванием. С учетом (19) и (20) можно записать:

$$(22) \quad y(t) = e^{-Ah}\varepsilon(t).$$

Основная идея замкнутого предиктора состоит в том, чтобы оценить ошибку предсказания $\varepsilon(t)$, описываемую моделью

$$(23) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t), \quad y(t) = \varepsilon(t-h)$$

с измеряемым выходом y с запаздыванием, и затем использовать эту оценку для коррекции оценки предсказания $\hat{x}(t+h)$. Для этого используем наблюдатель вида (который является частным случаем наблюдателя из секции 3.3 книги [2]):

$$(24) \quad \dot{\hat{\varepsilon}}(t) = A\hat{\varepsilon}(t) + Le^{Ah}\left(y(t) - e^{-Ah}\hat{\varepsilon}(t)\right), \quad \hat{\varepsilon}(0) = 0,$$

где $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n$ – оценка *ошибки предсказания*, а матрица обратных связей $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выбрана так, что $A_L = A - L$ гурвицева.

Вычисляя производную по времени от *ошибки оценки* $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon - \hat{\varepsilon}$ с учетом (19), (22) и (24), получаем

$$(25) \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} = A_L\tilde{\varepsilon},$$

и, следовательно, $\hat{\varepsilon}(t) \rightarrow \varepsilon(t) = x(t+h) - \hat{x}(t+h)$ при $t \rightarrow \infty$.

⁴ Подобный подход был использован в [39], где ошибка предсказания с задержкой $\varepsilon(t-h) = x(t) - \hat{x}(t)$ была использована для парирования постоянного возмущения.

Выражение (18) и модель (25) позволяют сформировать коррекцию оценки будущего значения вектора состояния в виде

$$(26) \quad \hat{x}^*(t+h) := e^{Ah}x(t) + \hat{\psi}(t) + \hat{\varepsilon}(t).$$

Можно показать справедливость следующего выражения:

$$(27) \quad \hat{x}^*(t+h) = x(t+h) - \tilde{\varepsilon}(t),$$

где $\tilde{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому вместо (15) используется управление вида

$$(28) \quad u(t) = -k^\top \hat{x}^*(t+h).$$

Однако несмотря на то, что $\tilde{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, оценки $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\psi}$ могут расти неограниченно, так как модель (23) неустойчива. Для того чтобы предотвратить неограниченный рост $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$, предлагается периодически переключать состояния моделей (14) и (24) в моменты времени $t = iT$, где $i = 1, 2, 3, \dots$, а $0 < T < \infty$ – достаточно большой интервал времени, минимальное значение которого будут определено позже:⁵

$$(29) \quad \hat{\psi}_{iT}^+ = \hat{\psi}(iT) + \hat{\varepsilon}(iT), \quad \hat{\varepsilon}_{iT}^+ = 0.$$

С учетом $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \tilde{\varepsilon} = \psi - \hat{\psi} - \tilde{\varepsilon}$ получаем

$$(30) \quad \hat{\psi}_{iT} = \psi(iT) - \tilde{\varepsilon}(iT).$$

Поэтому если последовательность $\tilde{\varepsilon}(iT)$ является асимптотически убывающей, т.е. $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то $\hat{\psi}_{iT} \rightarrow \psi(iT)$ при $i \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Переменные $\hat{\varepsilon}(t)$ и $\hat{\psi}(t)$ являются внутренними переменными регулятора и не влияют на асимптотическое поведение физических сигналов – состояния $x(t)$ и управления $u(t)$. Однако соображения математической строгости доказательства устойчивости замкнутой системы, а также инженерные соображения практической реализуемости операций с большими числами (с сигналами больших амплитуд) заставляют принимать меры по обеспечению ограниченности всех сигналов в замкнутой системе, что достигается в данном случае периодическим переключением состояний интеграторов (29).

Отметим, что в моменты времени $t = iT$ происходит обнуление сигнала $e^{-Ah}\hat{\varepsilon}(t)$, являющегося оценкой сигнала $y(t) = \varepsilon(t-h)$. Поэтому для корректной работы обратной связи $(y(t) - e^{-Ah}\hat{\varepsilon}(t))$ в наблюдателе (24) предлагается

⁵ Альтернативный подход к переключению состояния в модели (14) был предложен в [40]. Однако при этом предиктор оставался разомкнутым и обеспечивал только ограниченность ошибки предсказания, но не ее асимптотическую сходимость к нулевому значению.

ее принудительно обнулять на интервалах времени $t \in [iT, iT+h]$ и вместо наблюдателя (24) использовать наблюдатель с переключением обратной связи

$$(31) \quad \dot{\hat{\varepsilon}}(t) = A\hat{\varepsilon}(t) + \gamma(t)Le^{Ah} \left(y(t) - e^{-Ah}\hat{\varepsilon}(t) \right), \quad \hat{\varepsilon}_0 = 0,$$

где

$$(32) \quad \gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } iT \leq t < iT+h, \\ 1 & \text{для } iT+h \leq t < (i+1)T. \end{cases}$$

Тогда вместо модели (25) имеем

$$(33) \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} = \bar{A}_L \tilde{\varepsilon},$$

где

$$\bar{A}_L = \begin{cases} A & \text{для } iT \leq t < iT+h, \\ A_L & \text{для } iT+h \leq t < (i+1)T. \end{cases}$$

Таким образом, предложенный закон управления состоит из замкнутого предиктора (14) и (26), наблюдателя ошибки оценки (31), (21), контроллера (28) и схемы переключения состояний (29).

Интервал переключения состояний T выбирается из условия обеспечения асимптотической устойчивости модели (33). Для этого зададим положительно определенную матрицу P с минимальным собственным значением λ_1 и максимальным собственным значением λ_2 как решение матричного уравнения $A_L^\top P + PA_L = -I$. Тогда в силу (33) для интервала времени $t \in [iT, (i+1)T]$ можно записать

$$|\tilde{\varepsilon}((i+1)T)|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\frac{T-h}{\lambda_2}} |\tilde{\varepsilon}(iT+h)|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\frac{T-h}{\lambda_2}} \|e^{Ah}\|^2 |\tilde{\varepsilon}(iT)|^2.$$

Для обеспечения неравенства $|\tilde{\varepsilon}((i+1)T)| < |\tilde{\varepsilon}(iT)|$ выберем T из условия⁶

$$(34) \quad T \geq h - \lambda_2 \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 \|e^{Ah}\|^2} \right).$$

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Если интервал переключения состояний T выбран из условия (34), то $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Следствие 1. При выполнении (34) имеем $\tilde{\varepsilon}(iT+h) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Замечание 3. Выполнение условия (34) гарантирует асимптотическое стремление $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Как показали результаты многочисленных моделирований, для обеспечения монотонности процессов стабилизации в замкнутой системе без всплесков после переключения состояний $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$ рекомендуется выбирать интервал переключения T в полтора-два раза больше предельного значения, определяемого выражением (34).

⁶ Здесь предполагается, что матрица A не гурвицева и, следовательно, $\|e^{Ah}\| \geq 1$.

2.2. Устойчивость при идеальных условиях

Для анализа свойств устойчивости получим модель замкнутой системы. Это удобно сделать в виде двух динамических подсистем: в координатах $(\tilde{\varepsilon}, x, \psi)$ и $(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \hat{\psi})$.

Так как состояния $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$ переключаются в моменты времени iT , а обратная связь в наблюдателе (31) подключается с запаздыванием h , полученные динамические модели будут справедливыми на интервалах времени $iT + h \leq t < (i + 1)T$. Однако эти модели используются для анализа свойств устойчивости на полном интервале времени $t \in [0, \infty)$, учитывая асимптотические свойства дискретных последовательностей $\tilde{\varepsilon}(iT)$ и $\tilde{\varepsilon}(iT + h)$.

Подставляя (27) и (28) в (1), получаем

$$\dot{x} = Ax - bk^\top x + bk^\top \tilde{\varepsilon}(t - h) = A_k x + bk^\top e^{-A_L h} \tilde{\varepsilon}.$$

Далее, подставляя (28) в (8), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= A\psi - bk^\top \left(e^{A_h} x + \hat{\psi} + \hat{\varepsilon} \pm \psi \right) + e^{A_h} bk^\top x - e^{A_h} bk^\top \tilde{\varepsilon}(t - h) = \\ &= A_k \psi + Dx + C\tilde{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $C = bk^\top - e^{A_h} bk^\top e^{-A_L h}$ и $D = e^{A_h} bk^\top - bk^\top e^{A_h}$.

Следовательно, на интервалах времени $iT + h \leq t < (i + 1)T$ имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\varepsilon}} \\ \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & 0 & 0 \\ bk^\top e^{-A_L h} & A_k & 0 \\ C & D & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} \\ x \\ \psi \end{bmatrix},$$

где A_k и A_L гурвицевы. Следовательно, данная динамическая система асимптотически устойчива (в силу ее диагональной структуры). Если интервал T определен в соответствии с (34), переключение состояний не нарушит асимптотической сходимости $\tilde{\varepsilon}(iT + h) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом заключаем, что $\tilde{\varepsilon}(t), x(t), \psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Теперь выведем подсистему в координатах $(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \hat{\psi})$. Для $\hat{\varepsilon}$ имеем

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = A\hat{\varepsilon} + Le^{A_h} \left(e^{-A_h} \varepsilon - e^{-A_h} \hat{\varepsilon} \right) = A_L \hat{\varepsilon} + L\varepsilon.$$

Подставляя (28) в (14), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}} &= A\hat{\psi} - bk^\top \left(e^{A_h} x + \hat{\psi} + \hat{\varepsilon} \right) + e^{A_h} bk^\top x - e^{A_h} bk^\top (\varepsilon(t - h) - \hat{\varepsilon}(t - h)) = \\ &= A_k \hat{\psi} + Dx - K\varepsilon + \hat{K}\hat{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $K = e^{A_h} bk^\top e^{-A_h}$ и $\hat{K} = K - bk^\top$.

Следовательно, на интервалах времени $iT + h \leq t < (i + 1)T$ имеем

$$(35) \quad \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\hat{\varepsilon}} \\ \dot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ L & A_L & 0 \\ -K & \hat{K} & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \hat{\varepsilon} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} x.$$

Данная подсистема является неустойчивой в силу неустойчивости матрицы A . Однако, благодаря переключению начальных условий (29), имеем $\varepsilon(iT) = \tilde{\varepsilon}(iT)$, где $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, $\varepsilon(iT)$ и $\varepsilon(iT + h)$ являются асимптотически убывающими последовательностями. Теперь, учитывая, что $x(t), \varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, из (35) заключаем, что $\hat{\varepsilon}(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. В идеальном случае в замкнутой системе, состоящей из объекта (1), замкнутого предиктора (14) и (26), наблюдателя ошибки оценки (31), (21), контроллера (28) и схемы переключения состояний (29) все сигналы являются ограниченными и $\tilde{\varepsilon}(t), \hat{\varepsilon}(t), \varepsilon(t), x(t), \psi(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых начальных условий x_0 и ψ_0 .

Таким образом, замкнутый предиктор в идеальном случае обеспечивает ограниченность всех сигналов и асимптотическую сходимость вектора состояния для любых начальных условий x_0 и $\hat{\psi}_0$, а не только для $\hat{\psi}_0 = 0$, как классический разомкнутый предиктор (11), (13). В следующих разделах будет доказана робастность предложенного предиктора по отношению к параметрическим возмущениям и численной реализации уравнения (14).

3. Замкнутый предиктор: параметрическая робастность

Предположим, что закон управления использует оценку $\hat{A}$ вместо истинного значения A . Исследуем свойства устойчивости замкнутой системы при малых (в смысле нормы $\|A - \hat{A}\|$) отклонениях $\hat{A}$ от A .

Замечание 4. Все результаты непосредственно распространяются также на случай оценки $\hat{b}$. Однако здесь рассмотрим только случай $\hat{A}$ для упрощения аналитических выкладок.

Следовательно, закон управления состоит из:

– замкнутого предиктора

$$(36) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \hat{A}\hat{\psi}(t) + bu(t) - e^{\hat{A}h}bu(t-h),$$

$$(37) \quad \hat{x}^*(t+h) := e^{\hat{A}h}x(t) + \hat{\psi}(t) + \hat{\varepsilon}(t);$$

– наблюдателя ошибки оценки

$$(38) \quad \dot{\hat{\varepsilon}}(t) = \hat{A}\hat{\varepsilon}(t) + \gamma(t)\hat{L}e^{\hat{A}h} \left(y(t) - e^{-\hat{A}h}\hat{\varepsilon}(t) \right),$$

$$(39) \quad y(t) = x(t) - e^{\hat{A}h}x(t-h) - \hat{\psi}(t-h),$$

где $\hat{L}$ выбирается так, что матрица $\hat{A}_L = \hat{A} - \hat{L}$ является гурвицевой, а γ определена в (32);

– контроллера

$$(40) \quad u(t) = -\hat{k}^\top \hat{x}^*(t+h),$$

где вектор $\hat{k}$ выбран так, что матрица $\hat{A}_k = \hat{A} - b\hat{k}^\top$ является гурвицевой;

– схемы переключения состояний (29), где интервал T выбран из условия

$$(41) \quad T \geq h - \hat{\lambda}_2 \ln \left(\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2 \|e^{\hat{A}h}\|^2} \right),$$

$\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы $\hat{P}$, являющейся решением матричного уравнения $\hat{A}_L^\top \hat{P} + \hat{P} \hat{A}_L = -I$.

Как и в разделе 2.2, сначала выведем модель подсистемы в координатах $(\tilde{\varepsilon}, x, \psi)$.

С учетом (13) для ошибки предсказания имеем

$$(42) \quad \varepsilon(t) = x(t+h) - \hat{x}(t+h) = \tilde{E}x(t) + \psi(t) - \hat{\psi}(t),$$

где $\tilde{E} = e^{Ah} - e^{\hat{A}h}$. Следовательно

$$(43) \quad \hat{\varepsilon} = \tilde{E}x + \psi - \hat{\psi} - \tilde{\varepsilon},$$

и (см. (37))

$$(44) \quad \begin{aligned} \hat{x}^*(t+h) &= e^{\hat{A}h}x + \hat{\psi} + e^{Ah}x - e^{\hat{A}h}x + \psi = \\ &= -\hat{\psi} - \tilde{\varepsilon}e^{Ah}x + \psi - \tilde{\varepsilon} = x(t+h) - \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Как показано в Приложении 1, на интервалах времени $iT + h \leq t < (i+1)T$ имеем

$$(45) \quad \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\varepsilon}} \\ \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_L & \tilde{E} & \tilde{A} \\ 0 & \bar{A}_k & 0 \\ b\hat{k}^\top & \hat{D} & \bar{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} \\ x \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b\hat{k}^\top \\ -e^{Ah}b\hat{k}^\top \end{bmatrix} \tilde{\varepsilon}(t-h) + \begin{bmatrix} \hat{L}e^{\hat{A}h} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\eta}(x, \psi),$$

где $\tilde{\eta}(x, \psi)$ определено в (П.1.3), а $\hat{D} = e^{Ah}b\hat{k}^\top - b\hat{k}^\top e^{Ah}$.

В силу следствия 2 из Приложения 2 можно сделать заключение, что матрица $\bar{A}_k$ является гурвицевой для малых $\|\hat{A}\|$. Так как матрицы $\hat{A}_L$ и $\bar{A}_k$ гурвицевы, то матрица

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_L & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_k & 0 \\ e^{Ah}b\hat{k}^\top & \hat{D} & \bar{A}_k \end{bmatrix}$$

является гурвицевой в силу ее диагональной структуры. В силу леммы 3 из Приложения 2 матрица

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_L & \tilde{E} & \tilde{A} \\ 0 & \bar{A}_k & 0 \\ b\hat{k}^\top & \hat{D} & \bar{A}_k \end{bmatrix}$$

является гурвицевой для малых $\|\hat{A}\|$ (и, как результат, малых $\|\tilde{E}\|$). В силу лемм 4 и 5 из Приложения 2 делаем вывод, что система (45) асимптотически устойчива на интервалах времени $iT \leq t < (i+1)T$. Можно показать, что

последовательность $\tilde{\varepsilon}(iT)$ экспоненциально убывающая для малых $\|\tilde{A}\|$, если интервал T выбран в соответствии с (41). В результате приходим к заключению, что $\tilde{\varepsilon}(t), x(t), \psi(t), \eta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для малых $\|\tilde{A}\|$.

Теперь получим динамическую систему в координатах $(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \hat{\psi})$. Модель ε определена выражением (П.1.7). Как показано в Приложении 1 (см. (П.1.7) и (П.1.8)), на интервалах времени $iT + h \leq t < (i+1)T$ имеем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\hat{\varepsilon}} \\ \dot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 & 0 \\ \hat{L} & \hat{A}_L & 0 \\ 0 & -b\hat{k}^\top & \hat{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \hat{\varepsilon} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{E}_A \\ 0 \\ \tilde{D} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \psi + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{L}e^{\hat{A}h}\tilde{A} \\ 0 \end{bmatrix} \eta - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top \end{bmatrix} \tilde{\varepsilon}(t-h). \end{aligned}$$

Выше было показано, что $x(t), \tilde{\varepsilon}(t), \psi(t), \eta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако эта подсистема является неустойчивой в силу матрицы $\hat{A}$. В то же время благодаря переключению состояния (29) в моменты времени (41) имеем $\varepsilon(iT) = \tilde{\varepsilon}(iT)$, где $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$. Следовательно, $\varepsilon(iT)$ является убывающей дискретной последовательностью. Учитывая, что $\hat{A}_L$ и $\hat{A}_k$ гурвицевы, заключаем, что $\varepsilon(t), \hat{\varepsilon}(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, доказано следующее

Утверждение 2. Закон управления (36)–(40) и (29) является робастным по отношению к параметрическим возмущениям в том смысле, что свойство асимптотической сходимости, установленное в утверждении 1, сохраняется при малых параметрических вариациях $\|\tilde{A}\|$, т.е. все сигналы в замкнутой системе остаются ограниченными и $\tilde{\varepsilon}(t), \hat{\varepsilon}(t), \varepsilon(t), x(t), \psi(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых начальных условий $x_0, \hat{\psi}_0$.

4. Замкнутый предиктор: робастность по отношению к числовой реализации

В данном разделе рассматривается случай, когда параметры объекта известны точно (т.е. $\hat{A} = A$ и $\hat{b} = b$), но для практической реализации интегрального члена ψ дифференциальное уравнение (14) решается с использованием стандартного численного метода, предлагаемого, например, пакетом MatLab – ode1 (Euler), ode2 (Heun), ode3 (Bogacki-Shampine), ode4 (Runge-Kutta), ode5 или ode8 (Dormand-Prince). Другими словами, исследуем свойства робастности предложенного замкнутого предиктора по отношению к числовой реализации уравнения (14).

Для этого предположим, что используется дискретный контроллер

$$(46) \quad u(m) = -k^\top \left(e^{A\delta} x(m) + \bar{\psi}(m) \right)$$

с интервалом дискретизации δ , где $u(m)$ и $x(m)$ – значения сигналов u и x в дискретные моменты времени $t = m\delta$, $m = 0, 1, 2, \dots$, а $\bar{\psi}(m)$ является числовым решением дифференциального уравнения (14), полученное с тем же

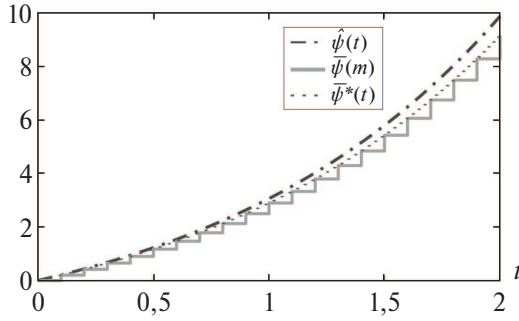


Рис. 1. Решение $\hat{\psi}(t)$ уравнения (14), числовое решение $\bar{\psi}(m)$ и непрерывная мажоранта $\bar{\psi}^*(t)$.

шагом числового интегрирования δ . Интерполяция значений сигнала управления внутри интервала дискретности δ осуществляется с помощью интерполятора нулевого порядка.

Примем следующее допущение, которое является обоснованным с практической точки зрения.

Допущение 1. Числовое решение $\bar{\psi}(m)$ является сходящимся, т.е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{\psi}(m) = \hat{\psi}(t)$$

для любого фиксированного момента времени $t = m\delta$.

Так как уравнение (14) является линейным по $\hat{\psi}$, можно построить модель мажоранты в непрерывном времени

$$(47) \quad \dot{\bar{\psi}}^*(t) = \bar{A}\bar{\psi}^*(t) + \bar{b}u(t) - e^{\bar{A}h}\bar{b}u(t-h),$$

где $\bar{A} = \bar{A}(\delta)$ и $\bar{b} = \bar{b}(\delta)$ зависят от δ и для всех $t = m\delta$ выполняется условие (см. рис. 1): $\bar{\psi}^*(t) = \bar{\psi}(m)$.

Свойства модели (47) определяются следующим утверждением, доказательство которого приведено в Приложении 3.

Лемма 2. Параметры $\bar{A}$ и $\bar{b}$ модели (47) такие, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{A}(\delta) = A, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{b}(\delta) = b.$$

Таким образом, для моментов времени $t = m\delta$ числовое решение $\bar{\psi}(m)$ может быть замещено непрерывной мажорантой $\bar{\psi}^*(t)$, генерируемой параметрически возмущенной (так как $\bar{A} \neq A$) моделью (47). Другими словами, проблема анализа робастности по отношению к числовой реализации интегрального члена сведена к проблеме анализа робастности по отношению к параметрическим вариациям. Поэтому с учетом утверждения 2 непосредственно получаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. Закон управления (14), (26), (31), (21), (28) и (29) является робастным по отношению к числовой реализации (14) в том смысле, что свойство экспоненциальной сходимости, определенное в утверждении 1, сохраняется для достаточно малых интервалов дискретности δ , т.е. все сигналы в замкнутой системе остаются ограниченными и $\tilde{\varepsilon}(t), \hat{\varepsilon}(t), \varepsilon(t), x(t), \psi(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых начальных условий $x_0, \hat{\psi}_0$.

Замечание 5. Очевидно, что утверждения 2 и 3 могут быть объединены, что демонстрирует робастность предложенного решения одновременно, и к параметрическим возмущениям, и к числовой реализации.

5. Результаты моделирования

Пример 1. Асимптотическая сходимость при ненулевом начальном условии $\hat{\psi}_0 \neq 0$. Рассмотрим в методологических целях поведение классического разомкнутого предиктора, замкнутого предиктора без переключения состояния и замкнутого предиктора с переключением состояния для случая ненулевого начального условия $\hat{\psi}_0$.

Рассмотрим экспоненциально неустойчивый объект второго порядка (1) с $h = 1$ с

$$(48) \quad \hat{A} = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

и выберем $k = [2 \ 3,1]^\top$. Моделирование осуществлялось в среде MatLab/Simulink с использованием численного метода ode8 (Dormand-Prince) и фиксированным интервалом дискретности 0,00001 с. Предполагалось, что параметры A и b точно известны и использованы для реализации закона управления, т.е. $\hat{A} = A$ и $\hat{b} = b$.

Сначала, рассмотрим контроллер с классическим разомкнутым предиктором (14) и (15). Результаты моделирования для $\hat{\psi}_0 = 0$ представлены на рис. 2,а и демонстрируют асимптотическую сходимость по x . Однако для $\hat{\psi}_0 = [0 \ 0,1]^\top$ получаем неограниченный рост x и ψ (см. рис. 2,б).

Теперь рассмотрим закон управления с замкнутым предиктором без переключения состояния: (14), (20), (24), и (28). При моделировании были использованы следующие значения параметров:

$$(49) \quad L = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad T = 10 \text{ с.}$$

Результаты для $\hat{\psi}_0 = [0 \ 0,1]^\top$ представлена на рис. 3 и демонстрируют асимптотическую сходимость по x (в противоположность разомкнутому предиктору), но неограниченный рост по $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$.

Рисунок 4 представляет результаты моделирования $\hat{\psi}_0 = [0 \ 0,1]^\top$, полученные при использовании предложенного замкнутого предиктора с переключением состояния. В этом случае контроллер описывается следующими

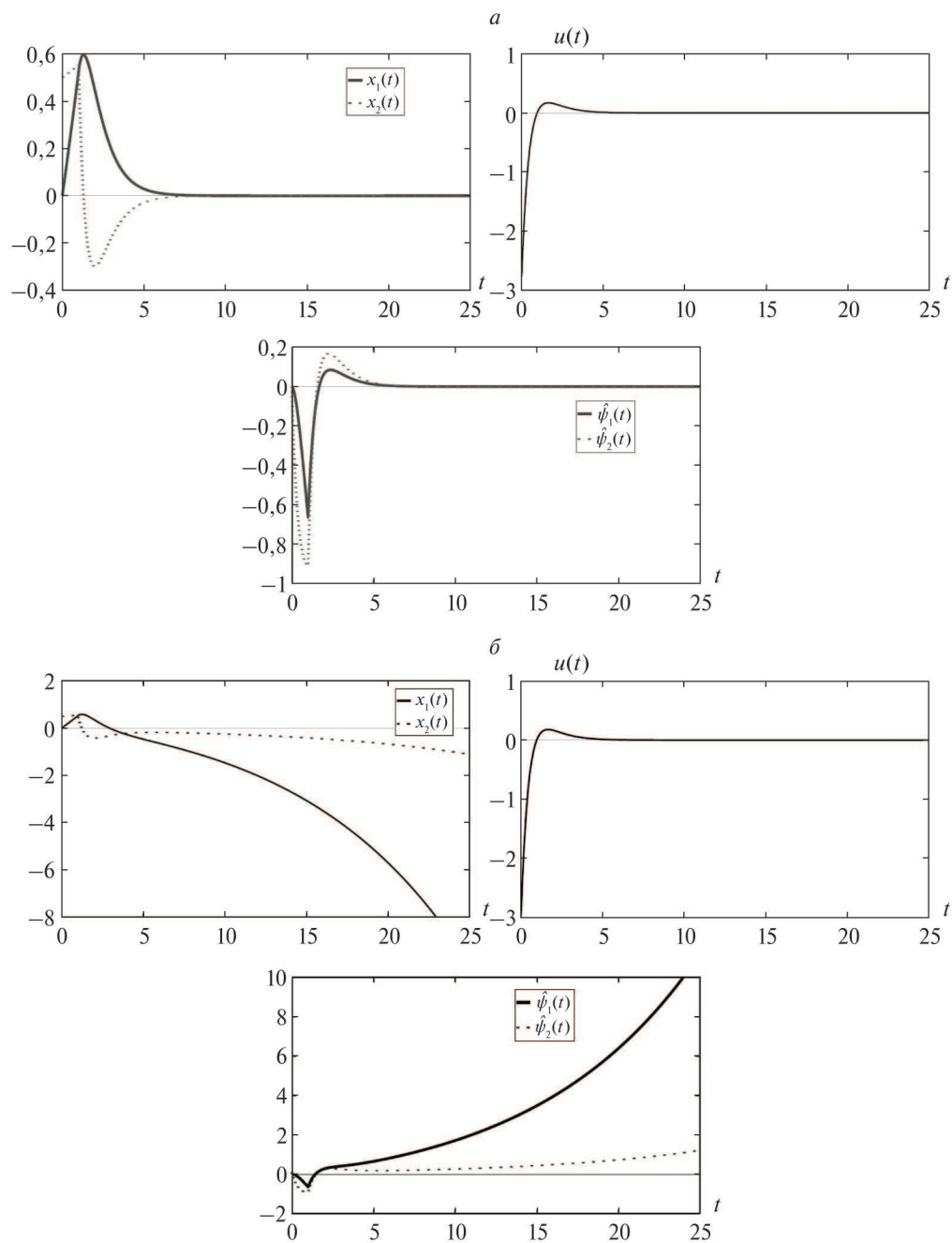


Рис. 2. (Пример 1). Переходные процессы в системе с параметрами (48) и $h = 1$ с, полученные при использовании классического разомкнутого предиктора: $a - \hat{\psi}_0 = 0$; $b - \hat{\psi}_0 \neq 0$.

уравнениями: (14), (26), (31), (21), (28) и (29). Как видно из представленных графиков, предлагаемое решение обеспечивает ограниченность и асимптотическую сходимость по x , $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$ при различных значениях запаздывания.

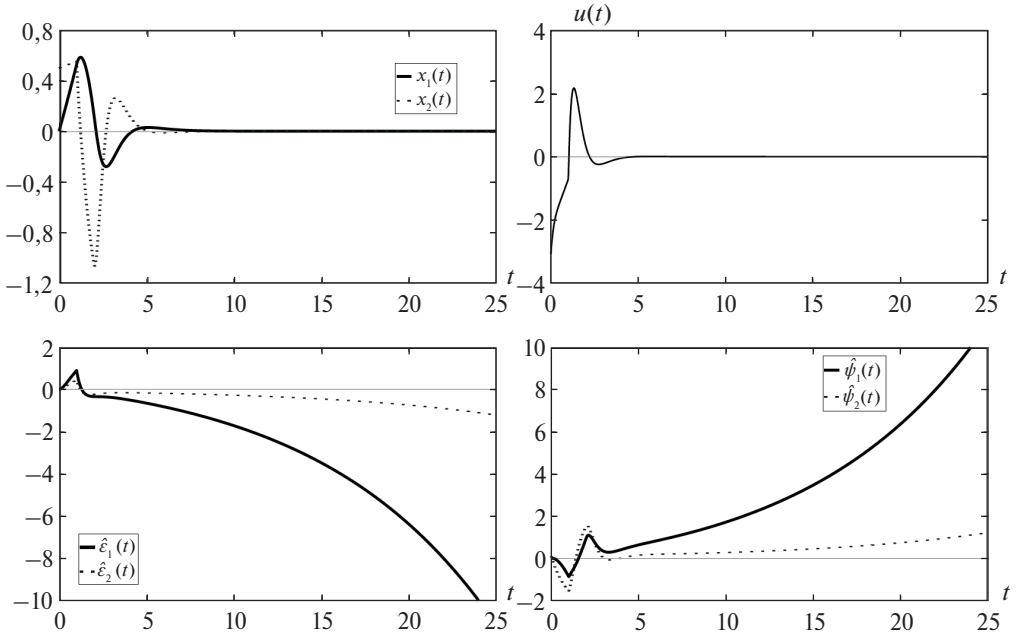


Рис. 3. (Пример 1). Переходные процессы в системе с параметрами (48) и $h = 1$ с, полученные для $\hat{\psi}_0 \neq 0$ при использовании замкнутого предиктора без переключения состояния.

Пример 2. Робастность по отношению к параметрическим возмущениям. Рассмотрим объект (1) с $h = 1$ с

$$(50) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,45 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix},$$

и оценками

$$(51) \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Выберем $\hat{k} = [2 \ 3,1]^\top$. Моделирование осуществлялось в среде MatLab/Simulink с использованием численного метода ode8 (Dormand-Prince) и фиксированным интервалом дискретности 0,00001 с.

Результаты моделирования, полученные для контроллера с классическим разомкнутым предиктором и $\hat{\psi}_0 = 0$ представлены на рис. 5 и демонстрируют неограниченный рост x . Рисунок 6 представляет результаты моделирования, полученные для контроллера с предложенным замкнутым предиктором с переключением начальных условий. При моделировании использовались значения L и T , определенные в (49). Как видно из представленных графиков, несмотря на параметрические возмущения предложенный контроллер обеспечивает ограниченность и асимптотическую сходимость x , $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$.

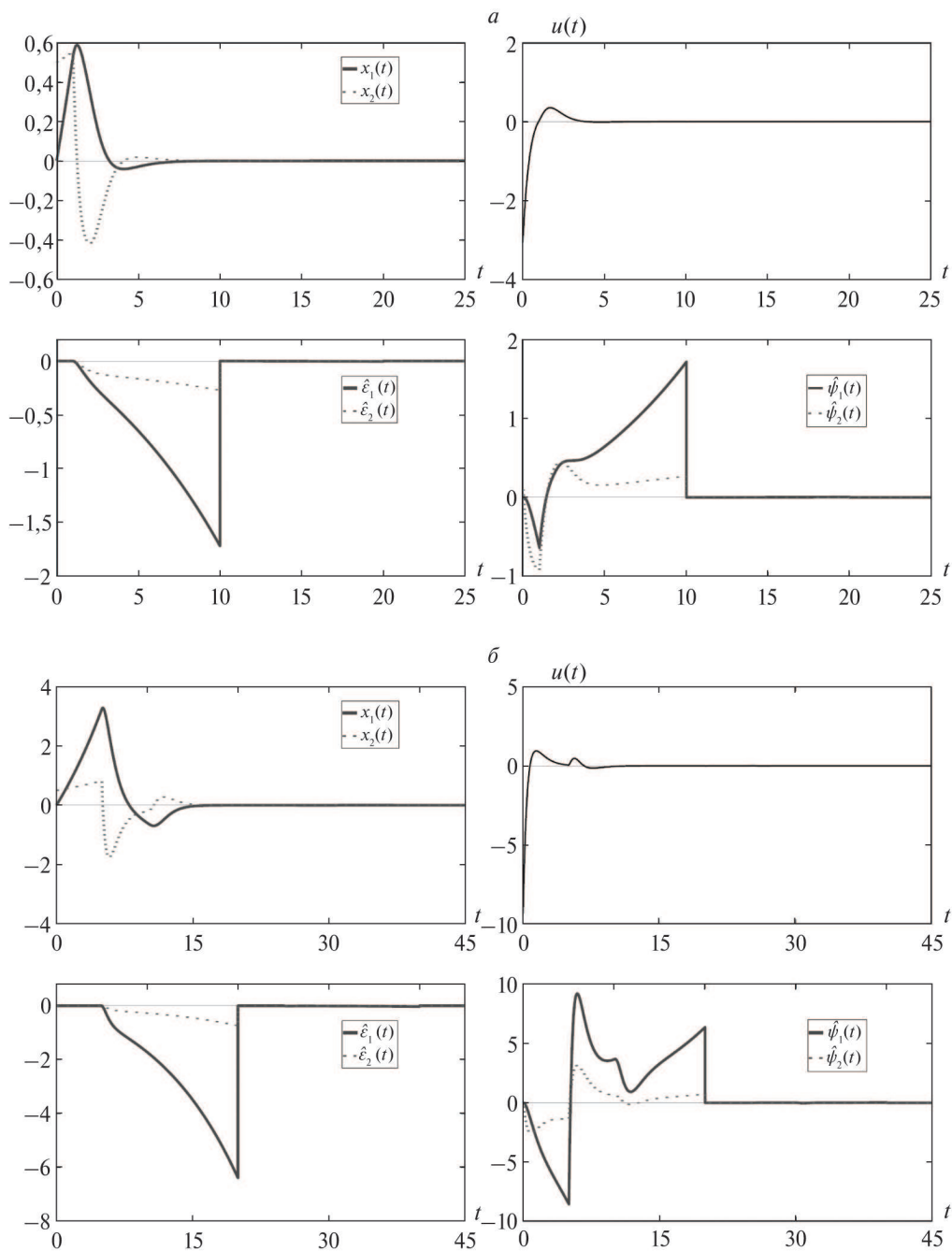


Рис. 4. (Пример 1). Переходные процессы в системе с параметрами (48), полученные для $\hat{\psi}_0 \neq 0$ при использовании замкнутого предиктора с переключением состояния: $a - h = 1$ с и $T = 10$ с; $b - h = 5$ с и $T = 20$ с.

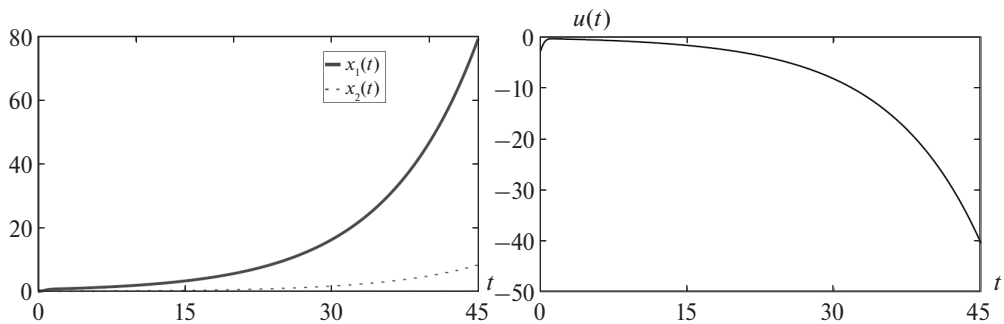


Рис. 5. (Пример 2). Переходные процессы в системе с параметрами (50), (51) и $h = 1$ с, полученные при использовании классического разомкнутого предиктора.

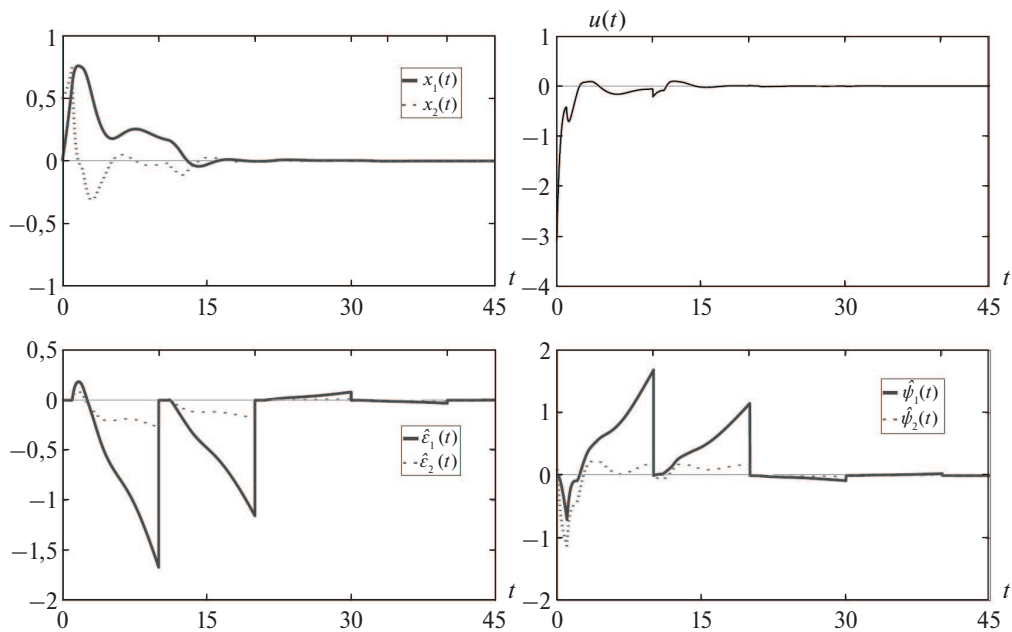


Рис. 6. (Пример 2). Переходные процессы в системе с параметрами (50), (51) и $h = 1$ с, полученные при использовании замкнутого предиктора с переключением состояния.

Пример 3. Робастность по отношению к числовой реализации. Рассмотрим опять объект (1) с параметрами (48), $h = 1$ с, и $k = [2 \ 3,1]^T$. Результаты моделирования для контроллера с классическим разомкнутым предиктором, полученные с использованием метода численного интегрирования `ode8` (Dormand-Prince) и фиксированного интервала дискретности 0,00001 с, представлены на рис. 2,а и демонстрируют асимптотическую сходимость по x на интервале $t \in [0, 25]$ с. Однако для более грубого метода интегрирования `ode1` (Euler) с фиксированным интервалом дискретности 0,0001 с наблю-

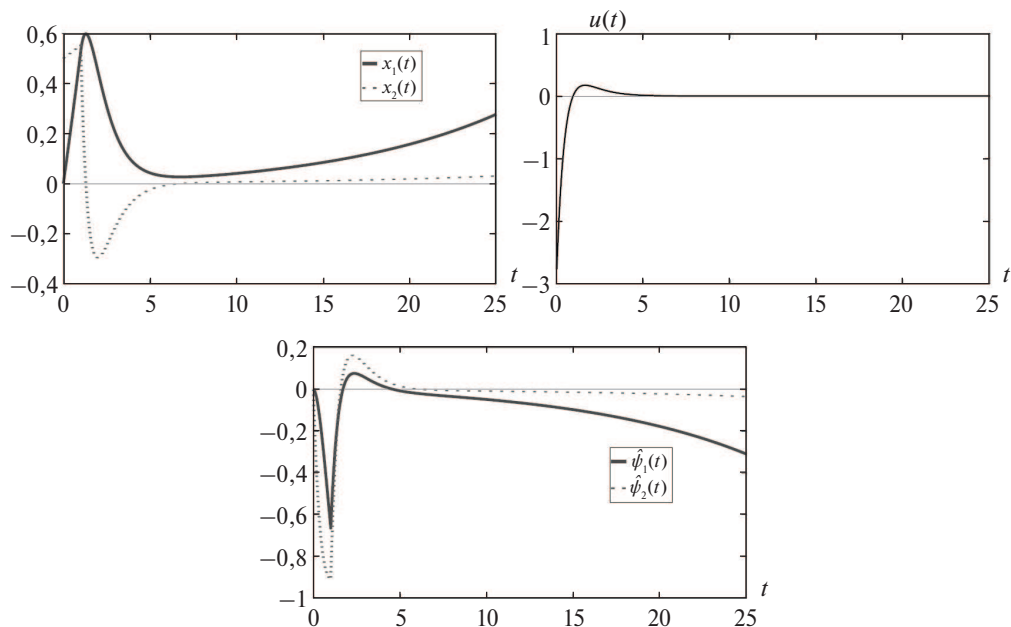


Рис. 7. (Пример 3). Переходные процессы в системе с параметрами (48) и $h = 1$ с, полученные при использовании классического разомкнутого предиктора и метода численного интегрирования ode1 (Euler) с фиксированным интервалом дискретности 0,0001 с.

даются расходящиеся процессы по x (см. рис. 7). При этом предложенный предиктор с L, T , заданными в (49), обеспечивает для метода ode1 (Euler) с фиксированным интервалом дискретности 0,0001 с ограниченность всех сигналов и асимптотическую сходимость $x(t)$, $\hat{\psi}(t)$ и $\hat{\varepsilon}(t)$ с незначительными изменениями вида процессов по сравнению с рис. 4, а.

6. Заключение

В статье предложен новый замкнутый предиктор состояния линейного объекта и показаны свойства его робастности по отношению к параметрическим возмущениям и числовой реализации. Основная идея предложенного предиктора состоит в оценке ошибки предсказания, т.е. разности между истинным (и не доступным прямым измерениям) предсказанием $x(t + h)$ и его оценкой $\hat{x}(t + h)$, генерируемой предиктором, и в использовании этой ошибки предсказания для коррекции $\hat{x}(t + h)$. Задача оценки ошибки предсказания решается с использованием специального наблюдателя состояния для систем с запаздыванием по выходу, а для преодоления неограниченного роста некоторых сигналов в замкнутой схеме предложено периодически переключать состояния в схемах расчета интегрального члена и в наблюдателе ошибки предсказания. Дальнейшее развитие подхода предполагает строгое доказательство свойств робастности по отношению к вариациям величины запаздывания.

Вывод модели (45). Подставляя (44) в (40) и (1), получаем

$$(П.1.1) \quad \dot{x} = \bar{A}_k x + b \hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h),$$

где $\bar{A}_k = A - b \hat{k}^\top$.

Теперь рассмотрим $y(t)$ (39):

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Ah} x(t-h) + \psi(t-h) - e^{\hat{A}h} x(t-h) - \hat{\psi}^*(t-h) = \\ &= \tilde{E}x(t-h) + \psi(t-h) - \hat{\psi}^*(t-h) = \varepsilon(t-h). \end{aligned}$$

С учетом (42), (8) и (36) получаем

$$(П.1.2) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \tilde{E}\dot{x} + \dot{\psi} - \dot{\hat{\psi}} = \tilde{E}Ax + \tilde{E}bu(t-h) + A\psi + \\ &+ bu - e^{Ah}bu(t-h) - \hat{A}\hat{\psi} - bu + e^{\hat{A}h}bu(t-h) = \hat{A}\varepsilon + \tilde{E}_A x + \tilde{A}\psi, \end{aligned}$$

где $\tilde{A} = A - \hat{A}$ и $\tilde{E}_A = \tilde{A}e^{Ah} - e^{\hat{A}h}\tilde{A}$.

Ввиду (П.1.2) имеем (см. раздел 3.3 в [2])

$$\varepsilon(t-h) = e^{-\hat{A}h}\varepsilon(t) - \int_{t-h}^t e^{\hat{A}(t-h-\tau)} \left(\tilde{E}_A x(\tau) + \tilde{A}\psi(\tau) \right) d\tau.$$

Определим

$$(П.1.3) \quad \tilde{\eta}(x, \psi) = - \int_{t-h}^t e^{\hat{A}(t-h-\tau)} \left(\tilde{E}_A x(\tau) + \tilde{A}\psi(\tau) \right) d\tau.$$

Тогда

$$(П.1.4) \quad y(t) = \varepsilon(t-h) = e^{-\hat{A}h}\varepsilon(t) + \tilde{\eta}(x, \psi),$$

и (с учетом (П.1.2) и (38)) получаем

$$(П.1.5) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}} &= \dot{\varepsilon} - \dot{\hat{\varepsilon}} = \hat{A}\varepsilon + \tilde{E}_A x + \tilde{A}\psi - \hat{A}\hat{\varepsilon} + \hat{L}e^{\hat{A}h} \left(e^{-\hat{A}h}\varepsilon + \tilde{\eta}(x, \psi) - e^{-\hat{A}h}\hat{\varepsilon} \right) = \\ &= \hat{A}_L \tilde{\varepsilon} + \tilde{E}x + \tilde{A}\psi + \hat{L}e^{\hat{A}h}\tilde{\eta}(x, \psi). \end{aligned}$$

С учетом (8), (40) и (44) имеем

$$(П.1.6) \quad \begin{aligned} \dot{\psi} &= A\psi - b \hat{k}^\top \left(e^{\hat{A}h} x + \hat{\psi} + \hat{\varepsilon} \pm \psi \right) + e^{Ah} b \hat{k}^\top x - \\ &- e^{Ah} b \hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h) = \bar{A}_k \psi + \hat{D}x + b \hat{k}^\top \tilde{\varepsilon} - e^{Ah} b \hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h), \end{aligned}$$

где $\hat{D} = e^{Ah} b \hat{k}^\top - b \hat{k}^\top e^{Ah}$.

Учитывая равенства (П.1.5), (П.1.1) и (П.1.6), получаем (45).

Для $\hat{\varepsilon}$ с учетом (38) и (П.1.4) имеем

$$(П.1.7) \quad \dot{\hat{\varepsilon}} = \hat{A}\hat{\varepsilon} + \hat{L}e^{\hat{A}h} \left(e^{-\hat{A}h}\varepsilon + \tilde{A}\eta - e^{-\hat{A}h}\hat{\varepsilon} \right) = \hat{A}_L\hat{\varepsilon} + \hat{L}\varepsilon + \hat{L}e^{\hat{A}h}\tilde{A}\eta.$$

Подставляя (40) в (36) вместо $u(t)$ и (40), (44) вместо $u(t-h)$, окончательно получаем

$$(П.1.8) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}} &= \hat{A}\hat{\psi} - b\hat{k}^\top \left(e^{\hat{A}h}x + \hat{\psi} + \hat{\varepsilon} \right) + e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top x - e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h) = \\ &= \hat{A}_k\hat{\psi} - b\hat{k}^\top \hat{\varepsilon} + \bar{D}x - e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h), \end{aligned}$$

где $\bar{D} = e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top - b\hat{k}^\top e^{\hat{A}h}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Математический инструментарий

В данном приложении приведены некоторые математические сведения, используемые при доказательстве главного результата из раздела 3.

Лемма 3. Если матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ гурвицева, то матрица $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ также гурвицева для достаточно малого параметрического возмущения $\|\tilde{A}\|$, где $\tilde{A} = A - \hat{A}$, а $\|A\|$ – спектральная норма квадратной матрицы.

Справедливость леммы непосредственно следует из свойства робастности экспоненциальной устойчивости по отношению к параметрическим возмущениям (см. раздел 2.1.4 в [32]).

Следствие 2. Если матрица $\hat{A}_k = \hat{A} - b\hat{k}^\top$ гурвицева, где $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $b, \hat{k} \in \mathbb{R}^n$, то матрица $\bar{A}_k = A - b\hat{k}^\top$ также гурвицева для достаточно малого параметрического возмущения $\|\tilde{A}\|$.

Лемма 4. Если линейная стационарная система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где $A, A_1, A_2, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, экспоненциально устойчива, то система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \tilde{A} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} x_1(t-h)$$

также экспоненциально устойчива для достаточно малого параметрического возмущения $\|\tilde{A}\|$.

Доказательство. Для x_1 имеем

$$(П.2.1) \quad \dot{x}_1 = A_1x_1 + \tilde{A}W(s)[x_1(t-h)],$$

где $W(s) = (sI_2 - A_2)^{-1}B$. Можно показать, что характеристический полином $p(s)$ системы (П.2.1) представим в виде [12]:

$$p(s) = P(s) + \sum_{i=1}^n Q_i(\tilde{A}, s)e^{-ihs},$$

где $P(s) = \det(sI_1 - A_1) \det(sI_2 - A_2)$,

$$Q_i(\tilde{A}, s) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} q_{ik}(\tilde{A})s^k,$$

а коэффициенты $q_{ik}(\tilde{A})$ такие, что

$$\lim_{\|\tilde{A}\| \rightarrow 0} q_{ik}(\tilde{A}) = 0.$$

Следовательно, для достаточно малых $\|\tilde{A}\|$ и всех $\omega \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^n |Q_i(\tilde{A}, j\omega)|}{P(j\omega)} < 1,$$

где j – мнимая единица. Тогда в соответствии с леммой 1 из [12, с. 45] делаем заключение, что система (П.2.1) экспоненциально устойчива независимо от величины запаздывания (см. также [11, Утверждение 2.1]).

Лемма 5. Если матрица $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ гурвицева, то состояние равновесия $x = 0$ системы

$$(П.2.2) \quad \dot{x} = A_1 x + B_1 \eta(x),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

$$\eta(x) = \int_{t-h}^t e^{A_2(t-h-\tau)} B_2 x(\tau) d\tau, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

$A_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, и $h > 0$, является экспоненциально устойчивым для малых $\|B_2\|$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}x^\top P x$, где матрица $P = P^\top \succ 0$ является решением уравнения $A_1^\top P + P A_1 = -I_n$. Пусть λ_1 и λ_2 – минимальное и максимальное собственные значения матрицы P соответственно. Следовательно,

$$(П.2.3) \quad \frac{\lambda_1}{2} |x(t)|^2 \leq V(t) \leq \frac{\lambda_2}{2} |x(t)|^2.$$

Тогда производная по времени функции V , вычисленная в силу (П.2.2), будет удовлетворять неравенству

$$\dot{V} = -|x|^2 + x^\top P B_1 \eta(x) \leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \|P B_1\| |x| |\eta(x)|.$$

В силу свойств определенного интеграла [41] можем записать

$$\begin{aligned} |\eta(x)| &= \left| \int_{t-h}^t e^{A_2(t-h-\tau)} B_2 x(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t-h}^t \left| e^{A_2(t-h-\tau)} B_2 x(\tau) \right| d\tau \leq \\ &\leq \|B_2\| \int_{t-h}^t \left\| e^{A_2(t-h-\tau)} \right\| |x(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Так как для любого $\tau \in [t-h, t]$ функция $\left\| e^{A_2(t-h-\tau)} \right\|$ ограничена, например, $r \leq \left\| e^{A_2(t-h-\tau)} \right\| \leq R < \infty$, а постоянные r и R не зависят от времени t , можно записать [41]

$$|\eta(x)| \leq \mu \|B_2\| \int_{t-h}^t |x(\tau)| d\tau,$$

где $\mu > 0$ – константа, зависящая от A_2 и h . Следовательно,

$$(П.2.4) \quad \dot{V} \leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \mu \|P B_1\| \|B_2\| |x| \int_{t-h}^t |x(\tau)| d\tau.$$

Теперь проверим, возможно ли указать такое значение $\|B_2\|$, что система (П.2.2) будет экспоненциально устойчивой и $\dot{V} = -\alpha V$, где $\alpha > 0$. В этом случае $V(t) = e^{-\alpha t} V(0)$ и в силу (П.2.3) $|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} e^{-\frac{\alpha}{2} t} |x(0)|$. Следовательно,

$$\dot{V} \leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \mu \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} e^{-\frac{\alpha}{2} t} \|P B_1\| \|B_2\| |x(0)| \int_{t-h}^t |x(\tau)| d\tau,$$

где

$$\int_{t-h}^t |x(\tau)| d\tau \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \int_{t-h}^t e^{-\frac{\alpha}{2} \tau} |x(0)| d\tau = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \left(e^{\frac{\alpha}{2} h} - 1 \right) e^{-\frac{\alpha}{2} t} |x(0)|.$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \frac{2\mu}{\alpha} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(e^{\frac{\alpha}{2} h} - 1 \right) \|P B_1\| \|B_2\| e^{-\alpha t} |x(0)|^2 \leq \\ &\leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \frac{4\mu}{\alpha} \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} \left(e^{\frac{\alpha}{2} h} - 1 \right) \|P B_1\| \|B_2\| e^{-\alpha t} V(0). \end{aligned}$$

Рассмотрим наихудший случай, когда

$$\dot{V} = -\frac{2}{\lambda_2}V + \frac{4\mu}{\alpha} \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} \left(e^{\frac{\alpha}{2}h} - 1 \right) \|PB_1\| \|B_2\| e^{-\alpha t} V(0)$$

и, следовательно,

$$\dot{V} = -\left(\frac{2}{\lambda_2} - \frac{4\mu\lambda_2}{\alpha\lambda_1^2} (e^{\frac{\alpha}{2}h} - 1) \|PB_1\| \|B_2\| \right) V.$$

Из равенства

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_2} - \frac{4\mu\lambda_2}{\alpha\lambda_1^2} \left(e^{\frac{\alpha}{2}h} - 1 \right) \|PB_1\| \|B_2\|$$

делаем заключение, что для любого выбранного $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_2}$ можно вычислить соответствующую величину $\|B_2\| > 0$:

$$\|B_2(\alpha)\| = \frac{\alpha\lambda_1^2}{4\mu\lambda_2} \left(e^{\frac{\alpha}{2}h} - 1 \right)^{-1} \|PB_1\|^{-1} \left(\frac{2}{\lambda_2} - \alpha \right),$$

такую что $\alpha > 0$. Более того, если $\alpha \rightarrow \frac{2}{\lambda_2}$, тогда $\|B_2(\alpha)\| \rightarrow 0$, и если $\alpha \rightarrow 0$, то $\|B_2(\alpha)\| \rightarrow \frac{\lambda_1^2}{\mu\lambda_2^2 h} \|PB_1\|^{-1}$. Следовательно, для всех $\|B_2\| < \frac{\lambda_1^2}{\mu\lambda_2^2 h} \|PB_1\|^{-1}$ имеем $\alpha > 0$, и система (П.2.2) является экспоненциально устойчивой.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Доказательство леммы 2. Рассмотрим линейную стационарную систему

$$(П.3.1) \quad \dot{\chi}(t) = A\chi(t) + b\nu(m),$$

где $\chi \in \mathbb{R}^n$, $\nu(m)$ – дискретное управление, δ – интервал дискретизации и $m = 1, 2, 3, \dots$. Докажем лемму, рассмотрев частный случай применительно к методу Эйлера числового решения дифференциального уравнения (П.3.1):

$$(П.3.2) \quad \bar{\chi}(m+1) = (I + \delta A)\bar{\chi}(m) + \delta b\nu(m).$$

Непрерывная мажоранта описывается уравнением

$$(П.3.3) \quad \dot{\bar{\chi}}^*(t) = \bar{A}\bar{\chi}^*(t) + \bar{b}\nu(m).$$

Для определения матрицы $\bar{A}$ приравняем свободные движения систем (П.3.2) и (П.3.3) в моменты времени $t = m\delta$:

$$e^{\bar{A}m\delta} x_0 = (I + \delta A)^m x_0.$$

Из последнего равенства непосредственно получаем

$$\bar{A}(\delta) = \frac{1}{\delta} \ln(I + \delta A),$$

где $\ln$ – матричный натуральный логарифм. Тогда с использованием правила Лопиталя можно записать

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{A}(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \log(I + \delta A) = A.$$

Для обратимой матрицы A можем показать, что $\bar{b}(\delta) = \bar{A}(\delta)A^{-1}b$, и, следовательно, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{b}(\delta) = b$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artstein Z.* Linear systems with delayed control: a reduction // IEEE Trans. Automatic Control. 1982. V. 27. No. 8. P. 869–879.
2. *Krstic M.* Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive and PDE Systems. Birkhauser. Boston, 2009.
3. *Manitius A., Olbrot A.* Finite spectrum assignment problem for systems with delay // IEEE Trans. Automatic Control. 1979. V. 24. No. 4. P. 541–553.
4. *Wang Q.-G., Lee T.H., Tan K.K.* Finite Spectrum Assignment for Time-Delay Systems. London: Springer-Verlag, 1998.
5. *Nikiforov V.O., Gerasimov D.N.* Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection. Springer Nature. 2022.
6. *Pyrkin A.A., Bobtsov A.A.* Adaptive controller for linear system with input delay and output disturbance // IEEE Trans. Automatic Control. 2016. V. 61. P. 4229–4234.
7. *Буй В.Х., Маргун А.А.* Компенсация внешних возмущений по выходу для класса линейных систем с запаздыванием в канале управления // Научно-технический вестник ИТМО. 2022. Т. 22. № 6. С. 1072–1077.
8. *Никифоров В.О., Парамонов А.В., Герасимов Д.Н.* Алгоритмы адаптивного регулирования в многоканальных линейных системах с запаздыванием по управлению // АиТ. 2020. Т. 6. С. 153–172.
9. *Пыркин А.А., Бобцов А.А., Никифоров В.О. и др.* Компенсация полигармонического возмущения, действующего на состояние и выход линейного объекта с запаздыванием в канале управления // АиТ. 2015. Т. 12. С. 43–64.
10. *Tsubakino D., Krstic M., Olivera T.R.* Exact predictor feedbacks for multi-input LTI systems with distinct input delays // Automatica. 2016. V. 71. P. 143–150.
11. *Fridman E.* Introduction to Time Delay Systems: Analysis and Control. Birkhauser. Boston. New York. Dordrecht, London, 2010.
12. *Niculescu S-I., Gu K.* (Eds.) Advances in Time-Delay Systems. Springer Nature. 2004.

13. *Engelborghs K., Dambrine M., Roose D.* Limitations of a class of stabilization methods for delay systems // IEEE Trans. Automatic Control. 2001. V. 46. No. 2. P. 336–339.
14. *Цыкунов А.* Адаптивное и робастное управление динамическими объектами. М.: Физматлит, 2009.
15. *Smith J.* Closer control of loops with delay time // Chemical Engineering Progress. 1957. V. 53. No. 5. P. 217–219.
16. *Фуртат И.Б.* Адаптивное управление объектом с запаздыванием по управлению без использования прогнозирующих устройств // Управление большими системами. 2012. Т. 40. С. 144–163.
17. *Нижифорова Л.В., Шеленок Е.А.* Система с адаптивными фильтрами для объекта с запаздыванием по состоянию и управлению // Вестник ТОГУ. 2025. Т. 77. С. 77–86.
18. *Mondie S., Michiels W.* Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Trans. Automatic Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2207–2212.
19. *Kharitonov V.L.* Predictor-based controls: the implementation problem // Differential Equations. V. 51. No. 13. P. 1675–1682.
20. *Furtat I., Fridman E., Fradkov A.* Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay // IEEE Trans. Automatic Control. 2018. V. 63. No. 1. P. 298–305.
21. *Juarez L., Mondie S., Kharitonov V.L.* Dynamic predictor for systems with state and input delay: a time-domain robust stability analysis // Int. J. on Robust and Nonlinear Control. 2020. V. 30. No. 6. P. 2204–2218.
22. *Rodriguez-Guerrero L., Kharitonov V.L., Mondie S.* Robust stability of dynamic predictor based control laws for input and state delay systems // Systems and Control Letters. 2016. V. 96. P. 95–102.
23. *Yoon S.Y., Lin Z.I.* Robust output regulation of linear time-delay systems: A state predictor approach // Int. J. on Robust and Nonlinear Control. 2016. V. 26. No. 8. P. 1686–1704.
24. *Lin Z., Fang H.* On asymptotic stabilizability of linear systems with delayed input // IEEE Trans. Automatic Control. 2007. V. 52. No. 6. P. 998–1013.
25. *Zhou B., Lin Z.I., Duan G.* Stabilization of linear systems with input delay and saturation – A parametric Lyapunov equation approach // Int. J. on Robust and Nonlinear Control. 2010. V. 20. P. 1502–1519.
26. *Zhou B., Lin Z., Duan G.* Truncated predictor feedback for linear systems with long time-varying input delays // Automatica. 2012. V. 48. P. 2387–2399.
27. *Zhou B.* Truncated Predictor Feedback for Time-Delay Systems. Berlin. Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.
28. *Zhou B.* Pseudo-predictor feedback stabilization of linear systems with time-varying input delays // Automatica. 2014. V. 50. No. 11. P. 2861–2871.

29. *Najafi M., Hosseinnia S., Sheikholeslam F., Karimadini M.* Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors // *Int. J. of Control.* 2013. V. 86. No. 4. P. 599–609.
30. *Dugard L., Verriet E.* Stability and Control of Time-delay Systems. London: Springer, 1997.
31. *Cacace F., Conte F., Germani, A., Pepe P.* Stabilization of strict-feedback nonlinear systems with input delay using closed-loop predictors // *Int. J. on Robust and Nonlinear Control.* 2016. V. 26. P. 3524–3540.
32. *Фраджов А.Л., Мирошник И.В., Никифоров В.О.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
33. *Фуртат И., Гузич П.* Алгоритм управления объектами с запаздывающим входным сигналом на базе субпредикторов регулируемой величины и возмущения // *АиТ.* 2019. № 2. С. 3–23.
34. *Cacace F., Germani A.* Output feedback control of linear systems with input, state and output delays by chains of predictors // *Automatica.* 2017. V. 85. P. 455–461.
35. *Furtat I., Gushchin P.* Tracking control algorithms for plants with input time-delays based on state and disturbance predictors and sub-predictors // *J. of The Franklin Institute.* 2019. V. 356. No. 8. P. 4496–4512.
36. *Liu Q., Zhou B.* Extended observer based feedback control of linear systems with both state and input delays // *J. of The Franklin Institute.* 2017. V. 354. No. 18. P. 8232–8255.
37. *Zhou B., Liu Q., Mazenc F.* Stabilization of linear systems with both input and state delays by observer-predictors // *Automatica.* 2017. V. 83. P. 368–377.
38. *Nikiforov V.O., Gerasimov D.N.* Robust closed-loop state predictor for unstable systems with input delay // 62nd IEEE Conf. On Decision And Control, Singapore, Dec. 13–15. 2023. P. 5708–5713.
39. *Lechappe V., Moulay E., Plestan F., Glumineau A., Chriette A.* New predictive scheme for the control of LTI systems with input delay and unknown disturbances // *Automatica.* 2015. V. 52. P. 179–184.
40. *Tam P.K.S., Moore J.B.* Stable realization of fixed-lag smoothing equations for continuous-time signals // *IEEE Trans. Automatic Control.* 1974. V. 19. No. 1. P. 84–87.
41. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 31.08.2025

После доработки 29.01.2026

Принята к публикации 16.02.2026

© 2026 г. К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МЕТОД БЛОЧНО-КООРДИНАТНОГО СПУСКА В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ СТАБИЛИЗАЦИИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Построены алгоритмы решения задач терминальной стабилизации и оптимального быстрогодействия для линейных динамических систем с дискретным временем и выпуклыми множествами геометрических ограничений на управление. В основу алгоритмов положен известный метод блочно-координатного спуска. Приведены следствия из классических результатов, а также получены некоторые новые утверждения о сходимости построенных алгоритмов к решению в указанных задачах.

Ключевые слова: задача терминальной стабилизации, задача быстрогодействия, линейные дискретные системы, последовательное глобальное улучшение.

DOI: 10.7868/S2413977726090034

1. Введение

Настоящее исследование мотивировано результатами, полученными в [1, 2] относительно приложений метода последовательных глобальных улучшений В.Ф. Кротова к задачам терминальной стабилизации и оптимального быстрогодействия для линейных систем дискретного времени. Их расшифровка показывает, что одна из возможных реализаций метода Кротова в рассматриваемом случае приводит к алгоритму, известному в литературе как блочно-координатный спуск [3–5]. В связи с этим возникает естественное желание изложить подход к решению задач стабилизации и быстрогодействия для линейных дискретных систем, основываясь на использовании результатов о сходимости блочно-координатного спуска. В работе предполагается привести наиболее значимые известные результаты и вывести из них некоторые новые содержательные следствия. В сухом остатке планируется получить прозрачное обоснование сходимости алгоритмов из [1, 2], а также предложить потенциально более эффективные численные методы решения указанных задач.

Нужно отметить, что метод Кротова в общем случае существенно отличается от метода блочно-координатного спуска по своей конструкции, области применимости и результатам использования, хотя и имеет с ним множество общих черт. Так, в формулировке метода Кротова участвует заранее не определенная функция (функция Кротова), которая может быть выбрана

из достаточно широкого класса допустимых функций. Получение одинаковых алгоритмических реализаций для этих методов в рамках рассматриваемых задач во многом связано с тем, что метод Кротова здесь применяется при очень специальном выборе функции Кротова. Этапы построения такой функции подробно описаны в [1, 2].

Одним из преимуществ метода блочно-координатного спуска является его широкая известность. Имеется обширный перечень работ, посвященный различным теоретическим и вычислительным аспектам приложения этого метода к тем или иным задачам (см., к примеру, перечень из более чем двух десятков актуальных приложений метода [5]). Известно также, что метод блочно-координатного спуска может оказаться весьма эффективным вычислительным инструментом в том случае, когда рассматриваемая задача имеет явную блочно-композиционную структуру. В то же время он практически не применяется для решения задач терминальной стабилизации и оптимального быстрогодействия в линейных системах с дискретным временем, хотя именно в теории оптимального управления дискретными системами область допустимых значений переменных уже по постановке задачи раскладывается в прямое произведение конечного числа множеств геометрических ограничений (блоков). Вообще, при исследовании указанных задач достаточно редко используют специальные методы.

Из недавних работ, связанных с исследованием оригинальных методов решения задачи быстрогодействия для линейной дискретной системы, следует выделить [6]. В [6] разработан численный подход к решению задачи быстрогодействия, основанный на использовании аппарата опорных функций множеств геометрических ограничений на управление. Особенность состоит в том, что он предполагает решение ряда задач невыпуклой и негладкой оптимизации, в то время как исходная задача, вообще говоря, распадается на последовательность выпуклых задач с гладким функционалом качества. Тем не менее практически все эти задачи можно заменить эквивалентными выпуклыми задачами. Однако остается трудность, связанная с необходимостью использования опорных функций множеств геометрических ограничений в структуре целевой функции, подлежащей оптимизации. Кроме того, после определения времени быстрогодействия возникает проблема построения оптимального процесса управления. В [6] показано, что оптимальный процесс возможно построить, используя решение последней из упомянутых оптимизационных задач. В то же время такое построение не всегда является тривиальным и в нестрого выпуклом случае требует применения определенных дополнительных конструкций и алгоритмов. Отметим, что частично идеи подобного метода решения задачи быстрогодействия появлялись ранее в [7].

Методы из [1, 2], обсуждаемые по существу и здесь, предполагают решение только выпуклых задач малой размерности, в которых целевая функция устроена весьма просто. При этом построение оптимального по быстроддействию процесса управления осуществляется одновременно с вычислением времени быстрогодействия.

2. Постановки задач

Рассмотрим линейную нестационарную систему с дискретным временем

$$(1) \quad x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы, $u(k) \in U(k)$ – управление, $U(k)$ – выпуклые компактные множества в $\mathbb{R}^m$, содержащие начало координат, $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $B(k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – произвольные заданные матрицы. Начальное условие для системы фиксировано:

$$(2) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Сперва обсудим постановку задачи терминальной стабилизации для системы (1) с начальным условием (2). Пусть задано некоторое фиксированное значение $N > 0$ дискретного времени окончания переходного процесса. Рассмотрим задачу

$$(3) \quad \|x(N)\| \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}_N},$$

где $\mathcal{U}_N := \{k \mapsto u(k) : \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid u(k) \in U(k)\}$, а $x(N) \in \mathbb{R}^n$ при каждом $u \in \mathcal{U}_N$ определяется в силу системы (1)–(2). Здесь и далее через $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В явном виде полученную задачу (1)–(3) можно переписать так:

$$(4) \quad J_N(u) := \left\| \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u(k) \right\| \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}_N},$$

где $\mathcal{A}_N(k) := A(N-1) \dots A(k)$ при $0 \leq k \leq N-1$, $\mathcal{A}_N(N) := I$, I – единичная матрица размеров $n \times n$. Поскольку элементы множества $\mathcal{U}_N$ естественным образом отождествляются с соответствующими векторами евклидова пространства $\mathbb{R}^{mN}$, то само $\mathcal{U}_N$ представляется в виде прямого произведения $U(0) \times \dots \times U(N-1)$ исходно заданных выпуклых и компактных множеств $U(k) \subset \mathbb{R}^m$.

Задача (4) имеет решение, поскольку при любом значении $N > 0$ функция J_N непрерывна на компактном подмножестве $\mathcal{U}_N$ пространства $\mathbb{R}^{mN}$.

Рассмотрим теперь задачу быстрогодействия. В задаче быстрогодействия требуется вычислить минимальное число шагов $N_{\min}$, за которое возможно перевести систему (1) из заданного начального состояния x_0 в начало координат, и построить оптимальный процесс $\{\bar{x}(k), \bar{u}(k-1)\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $\bar{x}(N_{\min}) = 0$. Число $N_{\min}$ принято называть временем быстрогодействия системы (1) с начальным условием (2).

Задача быстрогодействия в общем случае может не иметь решения. Например, пусть $n = m = 1$ и система (1)–(2) имеет вид

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad u(k) \in U(k) = [-1/2^k; 1/2^k].$$

Для этой системы задача быстрогодействия разрешима в точности тогда, когда $|x_0| < 2$.

В настоящей работе будем заведомо предполагать, что задача быстрогодействия для системы (1)–(2) разрешима и соответствующее конечное значение $N_{\min}$ существует. Исключая тривиальный случай $x_0 = 0$, будем также считать, что $N_{\min} > 0$.

Поскольку по условию имеем $0 \in U(k)$ при всех $k = 0, 1, \dots$, то оптимальное значение $\overline{J_N}$ в задаче (4) равняется нулю в том и только том случае, когда $N \geq N_{\min}$. Соответственно, в предположении $0 < N_{\min} < \infty$ задача быстрогодействия может быть сформулирована так:

$$(5) \quad N \rightarrow \min, \quad N \in \left\{ M > 0 \mid \overline{J_M} := \min_{u \in \mathcal{U}_M} J_M(u) = 0 \right\}.$$

3. Метод блочно-координатного спуска

Задачи (4) и (5) связаны с минимизацией функции J_N на множестве $\mathcal{U}_N$ в пространстве $\mathbb{R}^{mN}$. Функция $J_N : \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и множество $\mathcal{U}_N \subset \mathbb{R}^{mN}$ обладают рядом полезных свойств. В частности, $u \mapsto J_N(u)^2$ является выпуклой и гладкой функцией на $\mathbb{R}^{mN}$, а множество $\mathcal{U}_N$ компактно и выпукло. Кроме того, справедлива декомпозиция $\mathcal{U}_N$ в прямое произведение множеств $U(0) \times \dots \times U(N-1)$, где все $U(k)$ также выпуклы и компактны.

Отметим, что размерность множества $\mathcal{U}_N$ может быть существенно выше размерности каждого из множеств $U(k)$. При этом именно множества $U(k)$ входят в исходную постановку задачи, в то время как $\mathcal{U}_N$ является искусственной конструкцией. В силу этих причин минимизация на множествах $U(k)$ может оказаться существенно проще, чем минимизация на всем множестве $\mathcal{U}_N$. Подходящим алгоритмом минимизации, учитывающим указанные особенности, является алгоритм блочно-координатного спуска, для которого теоретические основы сходимости были заложены в [3]. Приведем его формулировку в общем виде.

3.1. Формулировка метода

Пусть задан набор непустых компактных подмножеств $K_1, \dots, K_\nu$ конечномерных евклидовых пространств $V_1, \dots, V_\nu$ соответственно. Пусть на прямом произведении $V := V_1 \times \dots \times V_\nu$ задана непрерывная функция $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Решается задача

$$(6) \quad f(v) = f(v_1, \dots, v_\nu) \rightarrow \min_{v \in K}, \quad K := K_1 \times \dots \times K_\nu.$$

Зафиксируем произвольную точку $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, \dots, v_\nu^{(0)}) \in K$ и рассмотрим следующую итерационную процедуру. Пусть при некотором $l \geq 0$ точка $v^{(l)} \in K$ задана. Тогда точку $v^{(l+1)} \in K$ определим по правилу

$$(7) \quad v_i^{(l+1)} \in \operatorname{Arg} \min_{\mu \in K_i} f(v_1^{(l+1)}, \dots, v_{i-1}^{(l+1)}, \mu, v_{i+1}^{(l)}, \dots, v_\nu^{(l)}), \quad i = 1, \dots, \nu.$$

В случае $V_1 = \dots = V_\nu = \mathbb{R}$ правило (7) определяет шаг классического численного метода Гаусса–Зейделя (или покоординатного спуска) решения задачи условной конечномерной оптимизации функции f , зависящей от ν скалярных переменных. В общем случае полученный алгоритм обычно именуют методом блочно-координатного спуска или обобщенным (нелинейным) методом Гаусса–Зейделя [4, 5].

По построению очевидно, что при любом выборе $v^{(0)} \in K$ выполняется

$$f(v^{(l+1)}) \leq f(v^{(l)}), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Однако при сделанных предположениях не может идти речи о сходимости последовательности чисел $f(v^{(l)})$ к минимальному значению в задаче (6). Более того, как было показано уже в [3], даже условий выпуклости всех множеств K_i и самой функции f оказывается недостаточно. Тем более нельзя говорить о какой-либо разумной сходимости последовательности элементов $v^{(l)}$ к решению задачи (6). В то же время известен ряд результатов, позволяющих в том или ином виде гарантировать указанную сходимость при выполнении дополнительных предположений.

3.2. Сходимость

Основным известным результатом, касающимся сходимости метода (7), является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть в задаче (6) все компактные множества K_i выпуклы, а непрерывная функция f выпукла на множестве $K = K_1 \times \dots \times K_\nu$. Пусть, кроме этого, выполняются предположения:

- (i) *функция f непрерывно дифференцируема на множестве K ;*
- (ii) *функция $\mu \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, \mu, v_{i+1}, \dots, v_\nu)$ имеет единственный минимум на множестве K_i при каждом i и произвольных значениях $v_j \in K_j$, $j \neq i$.*

Тогда если точка $\bar{v}$ является предельной для последовательности $\{v^{(l)}\}$, построенной по правилу (7) из произвольной начальной точки $v^{(0)} \in K$, то

$$f(\bar{v}) = \min_{v \in K} f(v).$$

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 и далее по тексту под предельной точкой последовательности $\{v^{(l)}\}$ с элементами из конечномерного евклидова пространства V понимается предельная точка множества $\{v^{(l)}\} \subset V$, т.е. любая такая точка $\bar{v} \in V$, для которой найдется сходящаяся к ней подпоследовательность последовательности $\{v^{(l)}\}$.

Справедливость теоремы 1 вытекает из [4, Proposition 2.7.1] и [4, Proposition 2.1.2]. Отметим, что в [3] утверждение теоремы 1 получено при несколько иных предположениях, а именно, условие (i) теоремы 1 ослаблено в [3] до локальной непрерывной дифференцируемости f в окрестности всякой неподвижной точки метода (7), а условие (ii) усилено до строгой выпуклости всех функций $\mu \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, \mu, v_{i+1}, \dots, v_\nu)$.

Как будет показано далее, условие (ii) теоремы 1 можно несколько ослабить, но полностью от него отказаться, по-видимому, нельзя. Существенность условия (i) в его локальном варианте показывает следующий простой пример из [3].

Пример 1. На множестве $K = [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим функцию

$$f(v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - 2v_2, & v_2 \leq v_1, \\ v_2 - 2v_1, & v_1 < v_2. \end{cases}$$

В этом примере множества $K_i = [0; 1] \subset \mathbb{R}$ выпуклы и функция $f(v_1, v_2) = |v_1 - v_2| - \min\{v_1, v_2\}$ выпукла на K , причем $\text{Arg min}_{0 \leq \mu \leq 1} f(v_1, \mu) = \{v_1\}$ и $\text{Arg min}_{0 \leq \mu \leq 1} f(\mu, v_2) = \{v_2\}$, однако условие (i) теоремы 1 не выполнено ни в какой окрестности любой из неподвижных точек метода (7), определяемых равенством $v_1 = v_2$, и для любой начальной точки $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)})$ имеем $v^{(l)} = (v_2^{(0)}, v_2^{(0)})$ и $f(v^{(l)}) = -v_2^{(0)}$ при $l \geq 1$. Следовательно, утверждение теоремы 1 также нарушается при $v_2^{(0)} \neq 1 = -\min_{v \in K} f(v)$. Пример разобран.

В контексте приложений указанных результатов к решению задач предыдущего раздела понадобится следующее незначительное обобщение теоремы 1, ослабляющее условие (ii).

Следствие 1. Пусть в задаче (6) все компактные множества K_i выпуклы, а непрерывная функция f имеет вид

$$f(v) = g(\Lambda_1 v_1 + \lambda_1, \dots, \Lambda_\nu v_\nu + \lambda_\nu),$$

где Λ_i – линейный оператор из конечномерного евклидова пространства V_i в конечномерное евклидово пространство V'_i , $\lambda_i \in V'_i$, $i = 1, \dots, \nu$, $g : V'_1 \times \dots \times V'_\nu \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть функция g на множестве

$$\Lambda K + \lambda := (\Lambda_1 K_1 + \lambda_1) \times \dots \times (\Lambda_\nu K_\nu + \lambda_\nu)$$

удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда если точка $\bar{v}$ является предельной для последовательности $\{v^{(l)}\}$, построенной по правилу (7) из произвольной начальной точки $v^{(0)} \in K$, то

$$f(\bar{v}) = \min_{v \in K} f(v).$$

Доказательство. Рассмотрим точку $z^{(0)} = \Lambda v^{(0)} + \lambda$, где $\Lambda v + \lambda := (\Lambda_1 v_1 + \lambda_1, \dots, \Lambda_\nu v_\nu + \lambda_\nu) \in \Lambda K + \lambda$ для $v \in K$. Всякая последовательность $\{v^{(l)}\} \subset K$, построенная по правилу (7) из точки $v^{(0)} \in K$, порождает последовательность $\{z^{(l)}\} = \{\Lambda v^{(l)} + \lambda\} \subset \Lambda K + \lambda$, удовлетворяющую правилу

$$z_i^{(l+1)} = \arg \min_{\mu \in \Lambda K_i + \lambda_i} g(z_1^{(l+1)}, \dots, z_{i-1}^{(l+1)}, \mu, z_{i+1}^{(l)}, \dots, z_\nu^{(l)}), \quad i = 1, \dots, \nu, \quad l \geq 0.$$

Поскольку множества $\Lambda_i K_i + \lambda_i$ непусты, компактны и выпуклы, а функция g на $\Lambda K + \lambda$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$g(\bar{z}) = \min_{z \in \Lambda K + \lambda} g(z)$$

для всякой предельной точки $\bar{z}$ последовательности $\{z^{(l)}\}$. Полагая теперь $\bar{z} = \Lambda \bar{v} + \lambda$ и пользуясь непрерывностью конечномерных линейных операторов Λ_i , получаем требуемое. Следствие 1 доказано.

Продemonстрируем результат следствия 1 следующим важным примером.

Пример 2. Рассмотрим квадрат значений функции J_N из задачи (4). Положим $\nu = N$, $v_i = u(i-1)$, $K_i = U(i-1)$. Получаем функцию

$$f(v) = \left\| \mathcal{A}_\nu(0)x_0 + \sum_{i=1}^{\nu} \mathcal{A}_\nu(i)B(i-1)v_i \right\|^2.$$

Здесь $\mathcal{A}_\nu(i)$ и $B(i)$ – известные матрицы, x_0 – известный вектор. Положим $\Lambda_i = \mathcal{A}_\nu(i)B(i-1)$, $\lambda_1 = \mathcal{A}_\nu(0)x_0$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_\nu = 0$. Тогда функция f и множества K_i удовлетворяют условиям следствия 1. При этом они могут не удовлетворять условиям теоремы 1. Действительно, если какая-либо из матриц $\mathcal{A}_\nu(i)$ вырождена, то минимум в задаче $f(v_1, \dots, v_{i-1}, \mu, v_{i+1}, \dots, v_\nu) \rightarrow \min_{\mu \in K_i}$ может быть неединственным. В то же время функция g вида

$$g(z) = \left\| \sum_{i=1}^{\nu} z_i \right\|^2$$

является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}^{n\nu}$, а каждая из функций

$$\mu \mapsto g(z_1, \dots, z_{i-1}, \mu, z_{i+1}, \dots, z_\nu) = \left\| \mu + \sum_{j \neq i} z_j \right\|^2$$

строого выпукла на $\Lambda_i K_i + \lambda_i$ при любых фиксированных значениях $z_j \in \Lambda_j K_j + \lambda_j$, $j \neq i$, где $i = 1, \dots, \nu$. Поэтому g удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, для $f(v) = g(\Lambda v + \lambda)$ справедливо утверждение следствия 1. Пример разобран.

Отметим, что гладкость функции $g(z)$ из примера 2 не столь существенна. В частности, можно проверить непосредственно, что для функции

$$f(v) = \left\| \sum_{i=1}^{\nu} v_i \right\|,$$

где вместо евклидовой нормы допустимо брать любую норму в пространстве $\mathbb{R}^n$, и произвольного набора непустых выпуклых компактов $K_i \subset \mathbb{R}^n$ метод блочно-координатного спуска в задаче $f(v) \rightarrow \min_{v \in K}$, $K = K_1 \times \dots \times K_\nu$, сходится в том же смысле, какой указан в теореме 1 и следствии 1, несмотря на то, что условие (i) теоремы 1 для нее может не выполняться даже локально в окрестности решения. Здесь не будем останавливаться на этом подробно.

Вводя для удобства обозначения

$$\bar{f} := \min_{v \in K} f(v), \quad \bar{K} := \text{Arg min}_{v \in K} f(v), \quad \text{dist}(\mu, \bar{K}) := \min_{v \in \bar{K}} \|\mu - v\|,$$

получаем следующие результаты.

Следствие 2. В условиях следствия 1 для любой последовательности $\{v^{(l)}\}$, построенной по правилу (7) из произвольной начальной точки $v^{(0)} \in K$, имеет место сходимость

$$f(v^{(l)}) \rightarrow \bar{f}, \quad \text{dist}(v^{(l)}, \bar{K}) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Предположим, что $f(v^{(l)}) \not\rightarrow \bar{f}$. Тогда найдется подпоследовательность $\{v^{(l_m)}\}$ со свойством $|f(v^{(l_m)}) - \bar{f}| > \delta > 0$ для некоторого $\delta > 0$. Переходя при необходимости еще раз к подпоследовательности, можем считать, что $\{v^{(l_m)}\}$ сходится к некоторому $\bar{v} \in K$. Тогда в силу следствия 1 получаем $f(\bar{v}) = \bar{f}$. Но в силу непрерывности f на K и сделанного предположения имеем $|f(\bar{v}) - \bar{f}| \geq \delta > 0$ – противоречие. Аналогичные рассуждения дают сходимость $\text{dist}(v^{(l)}, \bar{K}) \rightarrow 0$. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. Пусть выполнены предположения следствия 1. Тогда необходимым и достаточным условием оптимальности точки $\bar{v}$ в задаче (6) является соотношение

$$\bar{v}_i \in \text{Arg min}_{\mu \in K_i} f(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \mu, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_\nu), \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Доказательство. Необходимость проверяемого условия очевидна. Предположим, что оно выполнено. Тогда для $v^{(0)} = \bar{v}$ последовательность точек $v^{(l)} \equiv \bar{v}$ удовлетворяет правилу (7). В силу следствия 2 это означает, что $f(v^{(l)}) = \bar{f}$, что и требовалось установить. Следствие 3 доказано.

В завершение данного подраздела кратко обсудим сходимость последовательности $\{v^{(l)}\}$, построенной по правилу (7), к одной точке $\bar{v} \in \bar{K}$. Классический результат о наличии такой сходимости в условиях теоремы 1 получен в [8] для случая $V_1 = \dots = V_\nu = \mathbb{R}$ и $K_i = [a_i; b_i]$. Там же отмечено, что он естественным образом обобщается на случай, когда множества K_i являются замкнутыми параллелепипедами в $\mathbb{R}^{n_i}$. Однако в общей ситуации проверка такого рода сходимости остается открытым вопросом.

Следующий пример показывает, что в одномерной задаче вида (4) имеет место сходимость метода (7) к одному решению за одну итерацию.

Пример 3. Рассмотрим задачу

$$|\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\nu v_\nu + \gamma| \rightarrow \min, \quad v_i \in [a_i; b_i].$$

Пусть числа $v_i^{(0)} \in [a_i; b_i]$ заданы. Тогда для всех тех i , для которых $\lambda_i \neq 0$, числа $v_i^{(1)}$ определяются согласно (7) из условий

$$v_i^{(1)} = \arg \min_{\mu \in [a_i; b_i]} |\lambda_i \mu + \sigma_i|,$$

$$\sigma_i = \lambda_1 v_1^{(1)} + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1}^{(1)} + \lambda_{i+1} v_{i+1}^{(0)} + \dots + \lambda_\nu v_\nu^{(0)} + \gamma.$$

Для $i = 1, \dots, \nu$ в случае $\lambda_i \neq 0$ последовательно положим

$$v_i^{(1)} = \begin{cases} \max\{\lambda_i a_i, \lambda_i b_i\}/\lambda_i, & \sigma_i < -\max\{\lambda_i a_i, \lambda_i b_i\}, \\ \min\{\lambda_i a_i, \lambda_i b_i\}/\lambda_i, & \sigma_i > -\min\{\lambda_i a_i, \lambda_i b_i\}, \\ -\sigma_i/\lambda_i & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для прочих i выберем $v_i^{(1)} \in [a_i; b_i]$ произвольно. Непосредственно проверяется, что так построенные точки $v_i^{(1)}$ удовлетворяют (7) и доставляют минимум в рассматриваемой задаче. Пример разобран.

3.3. Критерии остановки

Критерием остановки классического метода координатного спуска обычно выступает условие

$$(8) \quad f(v^{(l)}) - f(v^{(l+1)}) < \varepsilon$$

для выбранного заранее малого значения $\varepsilon > 0$. В том случае, если доказана сходимость последовательности $\{v^{(l)}\}$, применяют также альтернативное условие $\|v^{(l+1)} - v^{(l)}\| < \varepsilon$ [9]. Однако в общем случае для процедуры (7) такой сходимости нет, поэтому остается только условие (8). Несомненным достоинством условия (8) является простота его проверки. В то же время выполнение (8) в отсутствие дополнительных предположений не может гарантировать близость найденного значения $f(v^{(l+1)})$ к неизвестному оптимальному.

Более надежный критерий остановки можно получить, используя следующее свойство рассматриваемого класса задач. Предположим, что в задаче (6) множества K_i выпуклы, а функция f непрерывно дифференцируема и выпукла на K (т.е., например, выполняются условия сходимости из теоремы 1 или следствия 1). Тогда для любого $w \in K$ имеет место двусторонняя оценка

$$f(w) \geq \bar{f} \geq f(w) + \min_{w+h \in K} \langle f'(w), h \rangle = f(w) - \sum_{i=1}^{\nu} \max_{\mu \in K_i} \left\langle -\frac{\partial f(w)}{\partial v_i}, \mu - w_i \right\rangle.$$

В самом деле, первое неравенство явствует из определения минимального значения $\bar{f}$, второе неравенство следует из того, что надграфик собственной выпуклой функции f располагается выше всякой своей опорной и, в частности, касательной гиперплоскости, а последнее равенство вытекает из декомпозиции

$$\langle f'(w), h \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \left\langle \frac{\partial f(w)}{\partial v_i}, h_i \right\rangle.$$

В качестве критерия остановки теперь может быть использовано условие

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{\nu} \max_{\mu \in K_i} \left\langle \frac{\partial f(v^{(l)})}{\partial v_i}, v_i^{(l)} - \mu \right\rangle < \varepsilon.$$

Выполнение условия (9) гарантирует справедливость неравенства $f(v^{(l)}) < \bar{f} + \varepsilon$ для заданной заранее величины погрешности $\varepsilon > 0$. При этом максимизация в (9) осуществляется по тем же самым множествам K_i , которые фигурируют и в (7). Поэтому критерий остановки (9) согласуется с методом (7).

Заметим еще, что равенство

$$\max_{v \in K} \langle f'(\bar{v}), \bar{v} - v \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \max_{\mu \in K_i} \left\langle \frac{\partial f(\bar{v})}{\partial v_i}, \bar{v}_i - \mu \right\rangle = 0$$

представляет собой классическое необходимое и достаточное условие оптимальности точки $\bar{v} \in K$ в гладкой и выпуклой задаче вида (6) [10, теорема 7.1.3].

Отметим, что критерии остановки (8) и (9) могут быть использованы совместно. Сперва проверяется более простое с вычислительной точки зрения условие (8), а затем, если оно оказывается выполнено, проверяется гарантирующее условие (9).

Наконец, приведенная выше двусторонняя оценка позволяет при построении последовательности $\{v^{(l)}\}$ на каждом шаге уточнять интервал значений, которому принадлежит число $\bar{f}$. А именно, для всякого $l \in \{0, 1, \dots\}$ верно включение

$$(10) \quad \bar{f} \in \left[f(v^{(l)}) - \sum_{i=1}^{\nu} \max_{\mu \in K_i} \left\langle \frac{\partial f(v^{(l)})}{\partial v_i}, v_i^{(l)} - \mu \right\rangle; f(v^{(l)}) \right].$$

В случае, если выполняются условия теоремы 1 или следствия 1, с ростом l границы указанных здесь интервалов сходятся к точке $\bar{f}$. Кроме этого, построение интервальной оценки (10) может позволить заранее ответить на вопрос о том, какие значения может принимать $\bar{f}$. Последнее актуально, например, при рассмотрении поставленной ранее задачи быстрогодействия в форме (5), в которой ключевую роль играет значение $\bar{f} = 0$.

Перейдем теперь непосредственно к решению задач (4) и (5).

4. Решение задач

4.1. Задача терминальной стабилизации

Применим метод блочно-координатного спуска для решения задачи (4). Как было отмечено в примере 2, в задаче (4) выполняются условия следствия 1, которое гарантирует в силу следствия 2 сходимость полученных методом (7) значений функционала качества к минимуму, а также сходимость построенной им последовательности управлений ко множеству решений. При этом могут быть использованы критерии остановки (8) и (9). Остается конкретизировать формулы (7)–(9).

В задаче (4) имеем $\nu = N$, $K_i = U(i - 1)$, $V_i = \mathbb{R}^m$, $f = J_N^2$.

Формула (7) принимает вид

$$u^{(l+1)}(k) \in \operatorname{Arg} \min_{\mu \in U(k)} \left\| \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_N(i+1)B(i)u^{(l+1)}(i) + \right. \\ \left. + \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \sum_{i=k+1}^{N-1} \mathcal{A}_N(i+1)B(i)u^{(l)}(i) \right\|, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

По определению матрицы $\mathcal{A}_N(k)$ выполняется

$$\mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_N(i+1)B(i)u^{(l+1)}(i) = \\ = \mathcal{A}_N(k) \left(\mathcal{A}_k(0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_k(i+1)B(i)u^{(l+1)}(i) \right).$$

Отсюда, рассматривая значения $x^{(l)}(k)$ и $\xi^{(l)}(k)$, вычисляемые по формулам

$$x^{(l)}(k+1) = A(k)x^{(l)}(k) + B(k)u^{(l)}(k), \quad x^{(l)}(0) = x_0, \\ \xi^{(l)}(k) = \xi^{(l)}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u^{(l)}(k), \quad \xi^{(l)}(N) = 0,$$

находим, что метод (7) в задаче (4) записывается как

$$(11) \quad u^{(l+1)}(k) \in \operatorname{Arg} \min_{\mu \in U(k)} \left\| \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1) \right\|$$

при $k = 0, \dots, N-1$. Здесь значения $x^{(l+1)}(k)$ определяются значениями $u^{(l+1)}(i)$, $i < k$, а $\xi^{(l)}(k+1)$ — значениями $u^{(l)}(i)$, $i > k$, поэтому формула (11) корректно реализует метод (7).

Формула (8) принимает вид

$$(12) \quad \|x^{(l)}(N)\|^2 - \|x^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon.$$

Наконец, формулу (9) запишем с использованием значений классической двойственной переменной $\psi(k)$ в задаче (1)–(3). Пусть $\psi^{(l)}(k)$ удовлетворяют равенствам

$$\psi^{(l)}(k) = A(k)^T \psi^{(l)}(k+1), \quad \psi^{(l)}(N) = -2x^{(l)}(N).$$

Тогда для $\mu \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$\left\langle \frac{\partial f(v^{(l)})}{\partial v_{k+1}}, \mu \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J(u^{(l)})^2}{\partial u(k)}, \mu \right\rangle = \\ = 2 \left\langle \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{A}_N(i+1)B(i)u^{(l)}(i), \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu \right\rangle = \\ = \langle 2x^{(l)}(N), \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu \rangle = -\langle \mathcal{A}_N(k+1)^T \psi^{(l)}(N), B(k)\mu \rangle = \\ = -\langle \psi^{(l)}(k), B(k)\mu \rangle.$$

Следовательно, условие (9) принимает вид

$$(13) \quad \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in U(k)} \left\langle \psi^{(l)}(k), B(k)(\mu - u^{(l)}(k)) \right\rangle < \varepsilon.$$

Рассмотрим два способа построения алгоритма. Первый из них состоит в применении метода (11) с критериями остановки (12) и (13) без дополнительных преобразований.

Алгоритм 1.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$.
1. Положить $l = 0$, задать начальное приближение равенствами $u^{(0)}(k) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, \dots, N-1$, подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Вычислить значения $\xi^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\xi^{(l)}(k) = \xi^{(l)}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u^{(l)}(k), \quad \xi^{(l)}(N) = 0.$$

3. Для каждого $k = 0, \dots, N-1$ последовательно найти и зафиксировать некоторое решение $u^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in U(k)},$$

где значения $x^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = A(k)x^{(l+1)}(k) + B(k)u^{(l+1)}(k), \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

4. Проверить первое условие остановки

$$\|x^{(l)}(N)\|^2 - \|x^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении перейти к шагу 5, в противном случае увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

5. Вычислить значения $\psi^{(l+1)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\psi^{(l+1)}(k) = A(k)^T \psi^{(l+1)}(k+1), \quad \psi^{(l+1)}(N) = -2x^{(l+1)}(N).$$

6. Вычислить значение $D_N^{(l+1)}$ по формуле

$$D_N^{(l+1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in U(k)} \langle \psi^{(l+1)}(k+1), B(k)(\mu - u^{(l+1)}(k)) \rangle.$$

7. Проверить второе условие остановки

$$D_N^{(l+1)} < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $u_\varepsilon = u^{(l+1)}$, иначе увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Сходимость алгоритма 1 вытекает из теоремы 1 и ее следствий 1–3. Шаги 0–4 применялись в [1] для приближенного решения задачи быстродействия (5) в случае, когда $m = n$, $A(k) \equiv A$, $\det A \neq 0$, $B(k) \equiv I$ и известна двусторонняя оценка времени быстродействия.

Второй способ построения алгоритма предусматривает замену переменных в задаче (4), позволяющую упростить выполнение итераций из (11). При этом для нахождения требуемого решения по результатам применения метода необходимо выполнить обратное преобразование, которое определено неоднозначно и представляет собой отдельную подзадачу.

Основная идея здесь состоит в переходе от системы (1)–(2) к линейной системе простейшего вида

$$y(k+1) = y(k) + \theta(k), \quad y(0) = y_0$$

за счет вырожденной замены переменных $\theta(k) = \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u(k)$, $y_0 = \mathcal{A}_N(0)x_0$. В этом случае $\theta(k) \in \Theta(k) := \mathcal{A}_N(k+1)B(k)U(k) \subset \mathbb{R}^n$ и $y(k) = \mathcal{A}_N(k)x(k)$. В частности, $y(N) = x(N)$. Из последнего следует, что если $\bar{\theta}(k) \in \Theta(k)$ минимизируют величину $\|y(N)\|$, то любой элемент $\bar{u} \in \mathcal{U}_N$, удовлетворяющий системе уравнений

$$(14) \quad \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\bar{u}(k) = \bar{\theta}(k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

является решением задачи (4). Если по условию $m = n$ и при некотором k матрица $\mathcal{A}_N(k+1)B(k)$ обратима, то $\bar{u}(k)$ определено однозначно. В общем случае предполагается решение системы уравнений (14) с ограничениями $\bar{u}(k) \in U(k)$. По построению эта задача разрешима. Значения $\bar{\theta}(k)$ можно найти, следуя алгоритму 1, поскольку множества $\Theta(k)$ выпуклы, компактны и содержат начало координат в $\mathbb{R}^n$. Отличие состоит в том, что $\bar{\theta}(k)$ определяются при этом единственным образом.

Алгоритм 2.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$.
1. Задать начальное приближение равенствами $\theta^{(0)}(k) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, N-1$, положить $l = 0$ и по заданным множествам $U(k)$ определить множества $\Theta(k) = \mathcal{A}_N(k+1)B(k)U(k)$, где $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, $\mathcal{A}_N(N)$ – единичная $n \times n$ -матрица.
2. Вычислить значения $\eta^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\eta^{(l)}(k) = \eta^{(l)}(k+1) - \theta^{(l)}(k), \quad \eta^{(l)}(N) = 0.$$

3. Для каждого $k = 0, \dots, N-1$ последовательно найти и зафиксировать единственное решение $\theta^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mu + y^{(l+1)}(k) - \eta^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in \Theta(k)},$$

где значения $y^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$y^{(l+1)}(k+1) = y^{(l+1)}(k) + \theta^{(l+1)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad y^{(l+1)}(0) = \mathcal{A}_N(0)x_0.$$

4. Проверить первое условие останковки

$$\|y^{(l)}(N)\|^2 - \|y^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении перейти к шагу 5, в противном случае увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

5. Вычислить значение $D_N^{(l+1)}$ по формуле

$$D_N^{(l+1)} = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in \Theta(k)} \langle y^{(l+1)}(N), \theta^{(l+1)}(k) - \mu \rangle.$$

6. Проверить второе условие останковки

$$D_N^{(l+1)} < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты и определить ответ u_ε из решения системы

$$\mathcal{A}_N(k+1)B(k)u_\varepsilon(k) = \theta^{(l+1)}(k), \quad u_\varepsilon(k) \in U(k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

иначе увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Несмотря на то, что указанный на шаге 6 алгоритма 2 обратный переход представляет собой отдельную проблему, она в действительности неявным образом присутствует и в алгоритме 1, причем решать ее приходится на каждой итерации. Естественно вынести такого рода нетривиальное преобразование за пределы итерационного процесса. В то же время применение алгоритма 2 требует построения преобразованных множеств, что само по себе может быть непросто.

4.2. Задача быстрогодействия

В качестве основного алгоритма решения задачи (5) будем рассматривать последовательное применение метода (11) для построения улучшений управления в задаче (4) при $N = 1, 2, \dots$ и дополняющее его вычисление интервальной оценки (10), обеспечивающей своевременный переход к следующему значению N . Уточним лишь, что оценка (10) в соответствии с записанной выше конкретизацией формул (7)–(9) принимает вид

$$\bar{J}_N^2 \in \left[J_N(u^{(l)})^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \langle \psi^{(l)}(k+1), B(k)(u - u^{(l)}(k)) \rangle; J_N(u^{(l)})^2 \right].$$

Алгоритм 3.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$, положить $N = 1$.
1. Положить $l = 0$, задать/дополнить начальное приближение равенством $u^{(0)}(N-1) = 0 \in \mathbb{R}^n$ и подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Вычислить значения $\xi^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\xi^{(l)}(k) = \xi^{(l)}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u^{(l)}(k), \quad \xi^{(l)}(N) = 0.$$

3. Для каждого $k = 0, \dots, N - 1$ последовательно найти и зафиксировать некоторое решение $u^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in U(k)},$$

где значения $x^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = A(k)x^{(l+1)}(k) + B(k)u^{(l+1)}(k), \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

4. Проверить условие внешней остановки

$$\|x^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $N_\varepsilon = N$, $u_\varepsilon = u^{(l+1)}$.

5. Вычислить значения $\psi^{(l+1)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\psi^{(l+1)}(k) = A(k)^T \psi^{(l+1)}(k+1), \quad \psi^{(l+1)}(N) = -2x^{(l+1)}(N).$$

6. Вычислить оценку $E_N^{(l+1)}$ по формуле

$$E_N^{(l+1)} = \|x^{(l+1)}(N)\|^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in U(k)} \langle \psi^{(l+1)}(k+1), B(k)(\mu - u^{(l+1)}(k)) \rangle.$$

7. Проверить условие внутренней остановки

$$E_N^{(l+1)} > 0,$$

при выполнении зафиксировать найденное $u^{(l+1)}$ в качестве нового начального приближения, т.е. положить $u^{(0)}(k) = u^{(l+1)}(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$, увеличить N на единицу и перейти к шагу 1, иначе увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Алгоритм 3 дословно совпадает с алгоритмом решения задачи быстродействия, предложенном в [2] (в целях упрощения выкладок в [2] был рассмотрен случай $m = n$ и $B(k) \equiv I$). По построению видно, что сходимость алгоритма, установленная в [2, теорема 5], а также связанные с этим результаты об оптимальности и улучшении (см. [2, теоремы 1 – 4]) вытекают в общем случае из известной теоремы 1 и ее следствий 1–3.

Отметим, что замена переменных, которая обсуждалась в предыдущем подразделе при решении задачи (4), здесь менее актуальна. Дело в том, что при каждом N , кроме больших значений, близких к $N_{\min}$, в силу условий остановки на основе оценки (10) решается малое количество преобразованных задач и переход к новым переменным не дает особого ускорения.

В качестве альтернативного подхода к решению задачи (5) рассмотрим следующий алгоритм, основанный на результатах [6, 7]. Будем применять численный метод из [6] для вычисления времени быстродействия $N_{\min}$, а затем решать оставшуюся задачу терминальной стабилизации так же, как в предыдущем подразделе. Для полноты изложения приведем здесь формулировку и краткое обоснование метода вычисления величины $N_{\min}$ из [6, 7].

Для произвольного компактного множества K в $\mathbb{R}^n$ рассмотрим его опорную функцию

$$s_K(p) := \max_{\mu \in K} \langle p, \mu \rangle.$$

В первую очередь рассмотрим опорные функции множеств $U(k)$. Поскольку $U(k)$ выпуклы и содержат начало координат, то $s_{U(k)}$ принимают конечные неотрицательные значения, выпуклы, непрерывны и положительно однородны [11, следствие 13.2.2]. Так как все множества $U(k)$ заданы заранее, функции $s_{U(k)}$ можно с определенными оговорками считать известными.

Рассмотрим множество X_N достижимости системы (1)–(2) в момент времени $N \geq 0$. При помощи матриц $\mathcal{A}_N(k)$ и операции сложения множеств по Минковскому его можно представить в виде

$$X_N = \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_N(k+1)B(k)U(k).$$

Множество X_N выпукло и компактно, $\mathcal{A}_N(0)x_0 \in X_N$. Поскольку $0 \in U(k)$, то

$$0 \in X_N \Leftrightarrow N \geq N_{\min}.$$

При этом опорная функция множества X_N имеет вид

$$\begin{aligned} s_{X_N}(z) &= \max_{x \in X_N} \langle z, x \rangle = \max_{u \in \mathcal{U}_N} \left\langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u(k) \right\rangle = \\ &= \langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in U(k)} \langle z, \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu \rangle = \\ &= \langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} s_{U(k)}(B(k)^T \mathcal{A}_N(k+1)^T z). \end{aligned}$$

Функция $s_{X_N} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла, непрерывна и положительно однородна, причем

$$s_{X_N}(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{B}^n \Leftrightarrow 0 \in X_N \Leftrightarrow N \geq N_{\min},$$

где $\mathbb{B}^n$ обозначает замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, задача нахождения времени быстрогодействия для системы (1)–(2) может быть переформулирована в терминах известных функций $s_{U(k)}$ и заданной точки x_0 :

$$(15) \quad N \rightarrow \min, \quad \min_{z \in \mathbb{B}^n} \left(\langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} s_{U(k)}(B(k)^T \mathcal{A}_N(k+1)^T z) \right) = 0.$$

Таким образом, вопрос вычисления времени быстрогодействия для системы (1) с начальным условием (2) сводится к решению последовательности выпуклых конечномерных оптимизационных задач одинаковой размерности n . Поскольку все функции $s_{U(k)}$ принимают неотрицательные значения, непрерывны и в начале координат равняются нулю, то минимизацию

можно проводить на меньшем выпуклом и компактном множестве $\mathbb{B}^n := \{z \in \mathbb{B}^n : \langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle \leq 0\}$. Кроме того, в силу положительной однородности функций $s_{U(k)}$ решение задачи (15) не изменится, если заменить $\mathbb{B}^n$ единичной сферой $\mathbb{S}^n$ или компактным множеством $\mathbb{S}^n_- := \{z \in \mathbb{S}^n : \langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle \leq 0\}$. Последнее обстоятельство используется в [6] для построения оптимального по быстродействию процесса. Здесь в этих целях будем применять метод блочно-координатного спуска.

Итак, еще один способ решения задачи (5) заключается в непосредственном определении величины $N_{\min}$ путем решения задачи (15), а затем нахождении оптимального управления методом (11) при $N = N_{\min}$. Отметим, что при таком подходе может также быть эффективна упомянутая выше замена переменных, т.е. речь идет о возможности применения как алгоритма 1, так и алгоритма 2. Кроме того, не возникает необходимости использовать критерии остановки (12) и (13). Вместо этого расчеты завершаются по достижении требуемой близости величины $\|x(N)\|$ к нулю. В то же время необходимо отметить, что такой подход может приводить к существенным трудностям в тех частых случаях, когда опорные функции $s_{U(k)}$ не удастся построить в явном виде и оптимизационные задачи в (15) становятся минимаксными.

В результате получаем следующие две вариации алгоритма.

Алгоритм 4.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$, положить $N = 1$.
1. Подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Вычислить величину

$$\bar{S}_N = \min_{z \in \mathbb{B}^n} \left(\langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} s_{U(k)}(B(k)^T \mathcal{A}_N(k+1)^T z) \right).$$

3. Проверить условие $\bar{S}_N < 0$. В случае выполнения увеличить N на единицу и перейти к шагу 1. В противном случае перейти к шагу 4.
4. Задать начальное приближение равенствами $u^{(0)}(k) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, \dots, N-1$, положить $l = 0$.
5. Вычислить значения $\xi^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\xi^{(l)}(k) = \xi^{(l)}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u^{(l)}(k), \quad \xi^{(l)}(N) = 0.$$

6. Для каждого $k = 0, \dots, N-1$ последовательно найти и зафиксировать некоторое решение $u^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in U(k)},$$

где значения $x^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = A(k)x^{(l+1)}(k) + B(k)u^{(l+1)}(k), \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

7. Проверить условие остановки

$$\|x^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $N_\varepsilon = N$, $u_\varepsilon = u^{(l+1)}$, в противном случае увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Алгоритм 5.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$, положить $N = 1$.
1. Подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Вычислить величину

$$\bar{S}_N = \min_{z \in \mathbb{B}^n} \left(\langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} s_{U(k)} (B(k)^T \mathcal{A}_N(k+1)^T z) \right).$$

3. Проверить условие $\bar{S}_N < 0$. В случае выполнения увеличить N на единицу и перейти к шагу 1. В противном случае перейти к шагу 4.
4. Задать начальное приближение равенствами $\theta^{(0)}(k) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, N-1$, положить $l = 0$ и по заданным множествам $U(k)$ определить множества $\Theta(k) = \mathcal{A}_N(k+1)B(k)U(k)$.
5. Вычислить значения $\eta^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\eta^{(l)}(k) = \eta^{(l)}(k+1) - \theta^{(l)}(k), \quad \eta^{(l)}(N) = 0.$$

6. Для каждого $k = 0, \dots, N-1$ последовательно найти и зафиксировать единственное решение $\theta^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mu + y^{(l+1)}(k) - \eta^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in \Theta(k)},$$

где значения $y^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$y^{(l+1)}(k+1) = y^{(l+1)}(k) + \theta^{(l+1)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad y^{(l+1)}(0) = \mathcal{A}_N(0)x_0.$$

7. Проверить условие остановки

$$\|y^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $N_\varepsilon = N$ и u_ε , найденным из решения системы

$$\mathcal{A}_N(k+1)B(k)u_\varepsilon(k) = \theta^{(l+1)}(k), \quad u_\varepsilon(k) \in U(k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

в противном случае увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Отметим, что по построению в результате применения алгоритмов 4 и 5 имеет место точное равенство $N_\varepsilon = N_{\min}$ при любом значении $\varepsilon > 0$.

5. Заключение

Использование построенных в настоящей работе алгоритмов, по-видимому, является актуальным в задачах с нестрогими выпуклыми множествами геометрических ограничений, с ограничениями, описываемыми смешанными системами неравенств, в задачах с вырожденными матрицами системы. В иных ситуациях эффективным представляется использование классических алгоритмов конечномерной численной оптимизации, а также отдельно отмеченного выше метода на основе аппарата опорных функций из [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А.* Об одном подходе к решению задачи быстродействия на основе метода Кротова // *АиТ.* 2024. № 11. С. 3–35.
2. *Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А.* Численный метод решения задачи быстродействия для линейных нестационарных дискретных систем общего вида // *АиТ.* 2025. № 11. С. 3–34.
3. *Warga J.* Minimizing Certain Convex Functions // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1963. V. 11. No. 3. P. 588–593.
4. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. Athena Scientific, 1999.
5. *Peng L., Vidal R.* Block Coordinate Descent on Smooth Manifolds: Convergence Theory and Twenty-One Examples // *arxiv.org.* 2023. (arXiv:2305.14744)
6. *Бортаковский А.С.* Применение опорных функций для решения задачи быстродействия дискретных линейных систем с выпуклым множеством управлений // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2025. № 2. С. 52–69.
7. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. № 3. С. 3–25.
8. *Luo Z., Tseng P.* On the convergence of the coordinate descent method for convex differentiable minimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1992. V. 72(1). P. 7–35.
9. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. Спб.: Изд-во Лань, 2022.
10. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
11. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 12.01.2026

После доработки 13.03.2026

Принята к публикации 23.03.2026

© 2026 г. В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru)
(Российский университет дружбы народов, Сочинский институт),
Ю.Г. МАРТЫШЕНКО, канд. физ.-мат. наук (j-mart@mail.ru)
(Российский государственный университет нефти и газа, Москва)

О НАХОЖДЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью рассматривается задача анализа устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия в контексте прямого метода Ляпунова. Нахождение функций Ляпунова в этой задаче трактуется как выбор пары «основная функция Ляпунова – вспомогательная функция», в которой вспомогательная функция используется для корректировки области фазового пространства системы, где вводится и анализируется основная функция Ляпунова. Приводятся примеры построения пар для некоторых нелинейных систем двух и трех дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, устойчивость по части переменных, метод функций Ляпунова, построение функций Ляпунова.

DOI: 10.7868/S2413977726090042

1. Введение

Наряду с задачами устойчивости по всем переменным в современной теории управления также часто изучаются более общие задачи устойчивости по части переменных (частичной устойчивости), восходящие к классическим работам А.М. Ляпунова [1] и В.В. Румянцева [2, 3]. Эти задачи естественным образом возникают в приложениях и рассматриваются для моделей разной формы математического описания: с непрерывной и дискретной динамикой, с учетом эффекта эрeditарности (запаздывания) и случайных воздействий; см. обзоры в [3–5]. Также получили развитие новые задачи устойчивости: от входа к выходу (input-output stability) [6, 7] и по выходу на конечном интервале времени (finite-time output stability) [8–10].

Как и в задаче устойчивости по всем переменным, основным строгим методом исследования задач частичной устойчивости является метод функций Ляпунова при соответствующей модификации, успешно использующийся, например, при анализе устойчивости сложных механических систем [3, 11]. Однако несмотря на доказанную обратимость ряда теорем, составляющих основу метода, и его дальнейшее развитие, вопросы конструктивного нахождения

функций Ляпунова как для общих классов, так и для конкретных систем остаются наиболее актуальными и трудными.

Если задача устойчивости по всем переменным «в малом» во многих случаях решается посредством анализа линейного приближения, то анализ устойчивости по части переменных даже в этой ситуации является *нелокальным* из-за наличия «неконтролируемых» переменных, и в значительно большей степени зависит от структуры и параметров исследуемых систем. Такой анализ может быть успешно проведен с помощью подходящей функции Ляпунова.

В данной статье рассматривается один из возможных подходов к нахождению функций Ляпунова в задаче устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы нелинейных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью. В его основе – переход к анализу «*расширенной*» частичной устойчивости: не только по изначально заданной части переменных, но и по отношению к некоторым дополнительным переменным – функциям фазовых переменных изучаемой системы дифференциальных уравнений. Указанный переход не связан с изменением (или уточнением) содержательного смысла исходной задачи частичной устойчивости, а имеет другую цель: *сузить* область фазового пространства системы, где ведется подбор подходящей функции Ляпунова, и облегчить выбор функции с нужными свойствами. Естественно, по смыслу решаемой задачи предполагается, что «расширенная» частичная устойчивость является «промежуточной» между устойчивостью по изначально заданной части переменных и устойчивостью по всем переменным.

Формализация данного подхода предполагает нахождение наряду с основной функцией Ляпунова еще одной (векторной, вообще говоря) вспомогательной функции, определяющей набор дополнительных переменных, и рассмотрение этих функций как *пары* (связки) для решения исходной задачи устойчивости по части переменных. При этом вспомогательная функция используется для корректировки области фазового пространства системы, где вводится основная функция Ляпунова и анализируются ее свойства. Требования к основной функции Ляпунова являются *более слабыми*, чем при анализе устойчивости по изначально заданной части переменных.

Выделяются структурные формы нелинейных систем двух и трех дифференциальных уравнений, для которых возможно конструктивное построение указанных пар и нахождение областей устойчивости по части переменных в пространстве параметров. Анализ «расширенной» частичной устойчивости этих структурных форм сводится к анализу устойчивости по всем переменным по линейному приближению положений равновесия специально построенных вспомогательных систем дифференциальных уравнений, получающихся из исходной системы соответствующими преобразованиями фазовых переменных. Данные структурные формы используются далее в качестве нели-

нейного приближения для анализа устойчивости по части переменных систем с нелинейностями полиномиального вида.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p) = (\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad m + p = n, \end{aligned}$$

в которой переменные, входящие в фазовый вектор $\mathbf{x}$, представлены в виде двух групп переменных [3, 4, 12]: 1) $\mathbf{y}$ -переменные, по отношению к которым исследуется устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 2) оставшиеся («неконтролируемые») $\mathbf{z}$ -переменные. Далее $\|\mathbf{x}\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{x}$.

Введем обычные для теории частичной устойчивости ($\mathbf{y}$ -устойчивости) предположения [3, 4] о непрерывности вектор-функции $\mathbf{X}$ в области

$$(2) \quad t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty,$$

а также о единственности и $\mathbf{z}$ -продолжимости решений системы (1) (это значит, что любое решение $\mathbf{x}(t)$ определено при всех $t \geq 0$, при которых $\|\mathbf{y}(t)\| \leq h$). Обозначим через $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ решение системы (1), определенное начальным условием $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0)$.

Определения. Нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1):

1) *$\mathbf{y}$ -устойчиво*, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

2) *равномерно $\mathbf{y}$ -устойчиво*, если $\delta = \delta(\varepsilon)$ в определении 1);

3) *асимптотически $\mathbf{y}$ -устойчиво*, если оно $\mathbf{y}$ -устойчиво в смысле определения 1) и найдется $\Delta(t_0) > 0$ такое, что произвольное решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1) с $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ удовлетворяет предельному соотношению

$$(3) \quad \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty;$$

при этом неравенство $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ определяет область $\mathbf{y}$ -притяжения положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) для начального момента t_0 ;

4) *равномерно асимптотически $\mathbf{y}$ -устойчиво*, если оно равномерно $\mathbf{y}$ -устойчиво в смысле определения 2), Δ не зависит от t_0 и предельное соотношение (3) выполняется равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ из области $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$.

Для анализа $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) в контексте прямого метода Ляпунова будем рассматривать функции:

1) скалярную $V(t, \mathbf{x})$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ – непрерывно дифференцируемую в области (2) и ее производную V' в силу системы (1) в качестве функции Ляпунова;

2) векторную $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, $\mathbf{w}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ – непрерывную в области (2), используемую для оценки (сверху) функции Ляпунова и ее производной;

3) $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ – стандартные используемые в теории устойчивости непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in [0, h]$ такие, что $a(0) = b(0) = c(0) = 0$ (функции Хана [3]).

В.В. Румянцев показал [2], что если для системы (1) в области

$$(4) \quad t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| < h_1 \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty$$

при достаточно малом $h_1 > 0$ можно указать V -функцию такую, что

$$(5) \quad V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\|), \quad V'(t, \mathbf{x}) \leq 0,$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}$ -устойчиво.

Если условия (5) заменить условиями [3, 4, 12]

$$a(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|), \quad V'(t, \mathbf{x}) \leq -c(\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{y}, \mathbf{w}(\mathbf{x})],$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равномерно асимптотически $\mathbf{y}$ -устойчиво.

При исследовании устойчивости по всем переменным построение функции Ляпунова не только решает вопрос об устойчивости, но и позволяет дать оценки области притяжения. Оценки получаются посредством аппроксимации области притяжения множествами, лежащими внутри поверхностей уровня функций Ляпунова.

Описание ряда аналитических и численных методов построения функций Ляпунова и оценки областей притяжения можно найти, например, в монографиях [13–16], обзорах [17–20], а также в работах [21–27]; рассматриваются системы не только с непрерывной, но и разрывной правой частью [28]. Укажем также на *дивергентный* метод анализа устойчивости (см. [29]), альтернативный методу функций Ляпунова.

Задача устойчивости по части переменных ($\mathbf{y}$ -устойчивости) имеет свои особенности. Даже при анализе $\mathbf{y}$ -устойчивости «в малом» положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) имеет место нелокальная задача анализа свойств функции Ляпунова в цилиндрической области (4) фазового пространства. Более того, при анализе $\mathbf{y}$ -устойчивости «в малом» (по $\mathbf{y}_0$) могут быть допустимы большие начальные возмущения по «неконтролируемым» $\mathbf{z}$ -переменным (по $\mathbf{z}_0$). Нахождение функций Ляпунова для анализа таких ситуаций является актуальной и малоисследованной задачей теории частичной устойчивости.

3. Предлагаемый подход к нахождению функций Ляпунова

В общем случае при исследовании задачи $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) прямым методом Ляпунова имеет место зависимость функций Ляпунова не только от t , $\mathbf{y}$, но и от «неконтролируемых» $\mathbf{z}$ -переменных.

Поэтому допущение $\|\mathbf{z}\| < \infty$, определяющее область (4), где подбирается и анализируется функция Ляпунова, может оказаться излишне ограничительным и значительно затрудняет проверку свойств знакоопределенности как самих функций, так и их производных в силу системы (1).

Дополнительные возможности появляются при переходе от исходной задачи $\mathbf{y}$ -устойчивости к анализу «расширенной» частичной устойчивости: $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1); в данном случае вместо области (4) рассматривается более узкая область фазового пространства

$$(6) \quad t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\| < h_1 \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty,$$

где $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ – непрерывная в области (2) функция такая, что $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

Подобный подход мотивируется тем, что при анализе $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) «расширенная» $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ -устойчивость всегда фактически имеет место для некоторых комбинаций фазовых переменных, определяющих $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функцию. Указание конкретной $\boldsymbol{\mu}$ -функции, однако, требует отдельного анализа; поэтому формализация данного подхода включает нахождение, наряду с *основной функцией Ляпунова* $V(t, \mathbf{x})$, еще одной (векторной, вообще говоря) *вспомогательной* $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функции для соответствующей корректировки области (6), где вводится основная функция Ляпунова. Эти функции рассматриваются как пара $\{V(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\}$ для решения задачи $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1).

Введение пары дает возможность использования в процессе решения задачи функций Ляпунова $V(t, \mathbf{x})$, производные которых в силу системы (1), и даже сами функции, могут быть *знакопеременными* в области (4).

Теорема 1. Допустим, что для системы (1) возможно указать пару $\{V(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\}$, такую что при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (6) выполняются условия

$$(7) \quad V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|), \quad V'(t, \mathbf{x}) \leq 0.$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}$ -устойчиво.

Если условия (7) заменить условиями

$$(8) \quad a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|), \quad V'(t, \mathbf{x}) \leq -c(\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|),$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равномерно асимптотически $\mathbf{y}$ -устойчиво.

Доказательство теоремы проводится по схеме, указанной в [2–4, 12].

В рамках предложенного подхода к анализу $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) в качестве кандидата на основную функцию $V(t, \mathbf{x})$ в паре естественно выбрать квадратичную форму ($\mathbf{T}$ – знак транспонирования)

$$(9) \quad V(t, \mathbf{x}) = \mathbf{y}A_1(t)\mathbf{y}^T + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})A_2(t)\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{x})$$

переменных $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\mu}$ при надлежащем подборе элементов матричных функций A_1 и A_2 соответствующих размеров (в частности, эти элементы могут и не зависеть от t) или форму более высокого порядка $V(t, \mathbf{x}) \equiv V^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\mu}$.

Данный путь построения пары допускает конструктивную реализацию, если систему (1) возможно представить в виде

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Y}^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{Y}^{**}(t, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\mu}' = \mathbf{M}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{M}^*(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{z}' = \mathbf{Z}(t, \mathbf{x}),$$

и вопрос $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ -устойчивости нулевого положения равновесия полученной системы решается исследованием устойчивости по *всем* переменным нулевого положения равновесия системы первого (линейного или нелинейного) приближения

$$(10) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{Y}^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{\mu}' = \mathbf{M}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}).$$

Тогда функции Ляпунова вида (9) могут быть построены как функции Ляпунова для системы (10) с использованием уже разработанных аналитических или численных методов применительно к задаче устойчивости по *всем* переменным.

Отметим, что ряд условий устойчивости по части переменных по линейному и нелинейному приближению приводится в [2–5, 30, 31].

Другой путь выбора кандидата на основную функцию $V(t, \mathbf{x})$ предполагает знание первых интегралов системы (1); начиная с работ Н.Г. Четаева [32] построение функций Ляпунова в виде связи первых интегралов используется при анализе устойчивости механических систем как по *всем*, так и по части переменных [3, 5]. В рассматриваемой задаче $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) введение дополнительной $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функции позволяет в ряде случаев упростить структуру функции Ляпунова путем представления ее в виде

$$(11) \quad V(t, \mathbf{x}) = V^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})) + W(t, \mathbf{x}),$$

где $V^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}))$ – знакоопределенная (по $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\mu}$) в области (6) функция, а функция $W(t, \mathbf{x})$ в области (6) удовлетворяет условию $W(t, \mathbf{x}) \geq 0$.

Для линейных систем с постоянными коэффициентами алгоритм выбора $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функции и построения функций Ляпунова в форме (9) рассмотрен в [12].

Замечание 1. Вместо основной скалярной функции Ляпунова $V(t, \mathbf{x})$ пары могут включать векторную основную функцию $\mathbf{V} = [V_1(t, \mathbf{x}), \dots, V_k(t, \mathbf{x})]$ с последующим анализом этой функции в области (6) в рамках метода сравнения [33].

Замечание 2. Пара «функция Ляпунова – обратная связь» (стабилизирующая пара) введена ранее [34] для решения задачи стабилизации управляемых систем, а пара «функция Ляпунова – векторное поле» [35] и корректирующая вспомогательная функция для построения функции Ляпунова

непосредственно по правой части исследуемой системы [36] – для анализа устойчивости по всем переменным.

Идея построения пары $\{V(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\}$, которую можно считать решением задачи нахождения функции Ляпунова при анализе частичной устойчивости, в общем виде не формулировалась. Однако условия $\mathbf{y}$ -устойчивости (7), проверяемые в области (6), указаны и обсуждались в [4, 5, 12], а условия равномерной асимптотической $\mathbf{y}$ -устойчивости (8) анонсированы в [5, 12]. В этой связи отметим, что в рамках предложенного подхода выбор пары может быть сделан и при других условиях на функцию Ляпунова в области (6), отличных от условий (8).

Замечание 3. Для выбранной вспомогательной функции $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ проверка условий (7), (8) в области (6) упрощается, если функция Ляпунова и нелинейности в системе (1) *полиномиальны*, а также известна $\mathbf{z}$ -ограниченность решений системы (1), начинающихся в малой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Если вспомогательную систему типа (10) можно *отделить* от исходной системы (1), то достаточно проверить знакоопределенность по *всем* переменным построенной функции Ляпунова $V(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}))$ и ее производной в силу вспомогательной системы.

Пример 1. Движение голономной механической системы в потенциальном поле сил описывается уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i},$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергия, x_i – обобщенные координаты.

Пусть наложенные связи не зависят явно от времени t и система допускает положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$. Компоненты вектора $\mathbf{x}$ обобщенных координат разобьем на две группы $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ и допустим, что найдется вспомогательная $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функция, такая что в области

$$(12) \quad \|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{x}'\| < h_1 \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty$$

выполняются условия: 1) T определено положительно по обобщенным скоростям; 2) Π не зависит явно от времени t и является определено положительной не только по $\mathbf{y}$, но и по дополнительным переменным $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$, т.е. $\Pi(\mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|)$.

При сделанных допущениях имеет место интеграл энергии $T + \Pi = \text{const}$ и, следовательно, пара $\{V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \Pi(\mathbf{x}), \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\}$ решает задачу частичной устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$: равномерной устойчивости по $\mathbf{y}, \mathbf{x}'$ (по части обобщенных координат и по всем обобщенным скоростям).

Рассмотрим, в частности, движение точки единичной массы по расположенной над горизонтальной плоскостью Oy_1z_1 поверхности [4, 12]

$$(13) \quad f = \frac{y_1^2(1 + z_1^2)}{1 + y_1^4 z_1^4}.$$

В данном случае $\mathbf{x} = (y_1, z_1)$ и

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left\{ y_1'^2 + z_1'^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f}{\partial z_1} z_1' \right]^2 \right\}, \quad \Pi(\mathbf{x}) = gf(y_1, z_1);$$

g – ускорение свободного падения.

Пару конкретизируем следующим образом:

$$(14) \quad \{V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \Pi(\mathbf{x}), \mu_1(\mathbf{x}) = y_1 z_1\},$$

так что основная функция Ляпунова $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ имеет структуру (11), если $\mathbf{y} = (y_1, \mathbf{x}')$, а $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ определяется слагаемым в квадратных скобках в выражении для $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Поскольку в области (12) при достаточно малом h_1 имеем

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \geq a(|y_1| + |\mu_1| + \|\mathbf{x}'\|), \quad V'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv 0,$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ точки равномерно устойчиво по $y_1, \mathbf{x}'$.

Вместе с тем в области (4) при $\mathbf{y} = (y_1, \mathbf{x}')$ условие $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \geq a(|y_1| + \|\mathbf{x}'\|)$ не выполняется: $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rightarrow 0$ при $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, любом фиксированном значении y_1 и $|z_1| \rightarrow \infty$. Значит, функция Ляпунова $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ в паре (14) не является знакоопределенной по $y_1, \mathbf{x}'$ в смысле [2] и не удовлетворяет первому из условий (5) в области (4).

Введенная пара (14) позволяет выявить нелокальный характер равномерной устойчивости по $y_1, \mathbf{x}'$ и оценить область допустимых начальных возмущений $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0$ переменных $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$. Действительно, основная функция $V(y_1, z_1, \mathbf{x}')$ удовлетворяет условию $V(0, z_1, \mathbf{0}) \equiv 0$ и, следовательно, равномерная устойчивость по $y_1, \mathbf{x}'$ положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ точки будет иметь место не только при достаточно малых значениях $y_{10}, \|\mathbf{x}'_0\|$, но и при больших (но конечных) значениях z_{10} .

В дополнение к [4, 12] можно показать, что при достаточно малом значении $\|\mathbf{x}'_0\|$ область допустимых начальных значений y_{10}, z_{10} определяется неравенством

$$(15) \quad \frac{y_{10}^2(1 + z_{10}^2)}{1 + y_{10}^4 z_{10}^4} < \frac{1}{2}.$$

Для доказательства рассмотрим уравнение $f(y_1, z_1) = c$ ($c = \text{const} > 0$), определяющее линии уровня поверхности (13). В переменных (y_1, μ_1) это

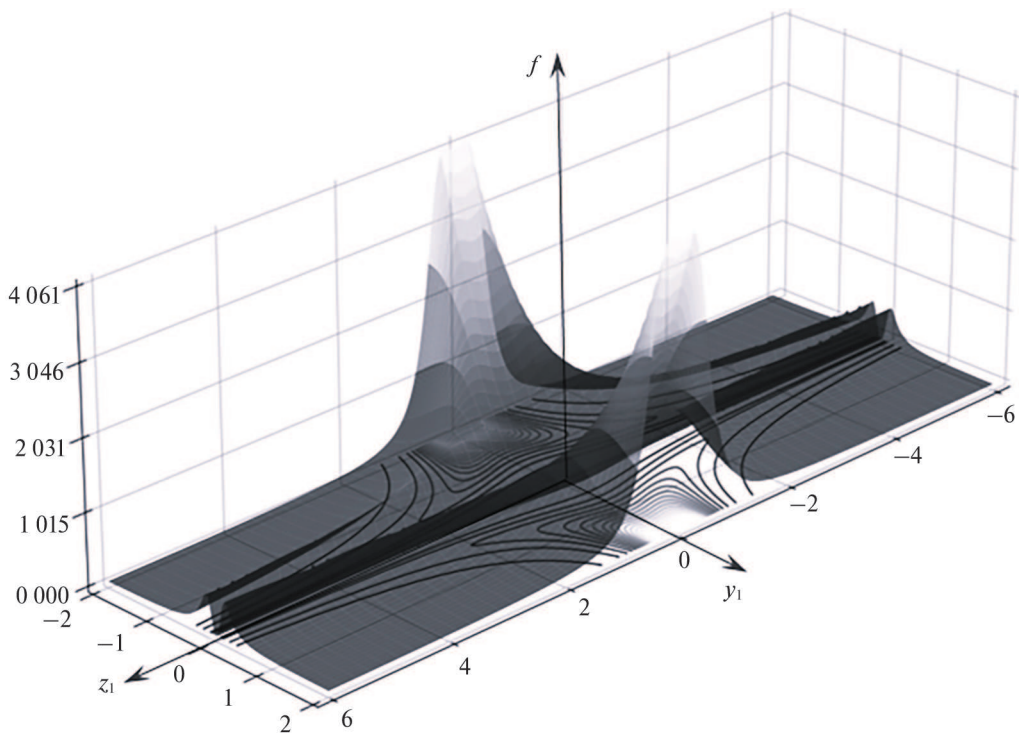


Рис. 1. Поверхность (13).

уравнение можно представить в виде биквадратного (относительно μ_1) уравнения

$$(16) \quad cr^2 - r + (c - y_1^2) = 0 \quad (r = \mu_1^2).$$

При $4cy_1^2 \geq 4c^2 - 1$ уравнение (16) имеет два действительных решения

$$r_1(c, y_1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c(c - y_1^2)}}{2c}, \quad r_2(c, y_1) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c(c - y_1^2)}}{2c}.$$

С учетом формул Виета заключаем, что: 1) $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ при $0 < c < 1/2$, $y_1^2 < c$, а также при $c \geq 1/2$, $c - 1/(4c) \leq y_1^2 < c$; 2) $r_2 > 0$ при $y_1^2 > c$ и любом $c > 0$. Как следствие, также $r_2 > 0$ при $0 < c < 1/2$ и всех y_1 .

При $0 < c < 1/2$ рассмотрим решение $r_1 > 0$. Поскольку $r_1 \rightarrow 0$ при $c \rightarrow 0$ и $r_1 \rightarrow 1$ при $c \rightarrow 1/2$, $y_1 \rightarrow 0$, то на плоскости (y_1, μ_1) можно выделить область $y_1^2 < 1/2$, $\mu_1^2 < 1$, где линии уровня поверхности (13) являются замкнутыми, охватывающими точку $y_1 = \mu_1 = 0$ кривыми эллиптического типа, пересекающими прямую $y_1 = 0$ в точках $\mu_1 = \pm\sqrt{r_1}$.

Этим линиям уровня на плоскости (y_1, z_1) в области $(y_1^2 < 1/2) \cap \cap (y_1^2 < 1/z_1^2)$ соответствуют разомкнутые кривые, охватывающие прямую $y_1 = 0$ и приближающиеся к ней асимптотически при $c \rightarrow 0$, $|z_1| \rightarrow \infty$.

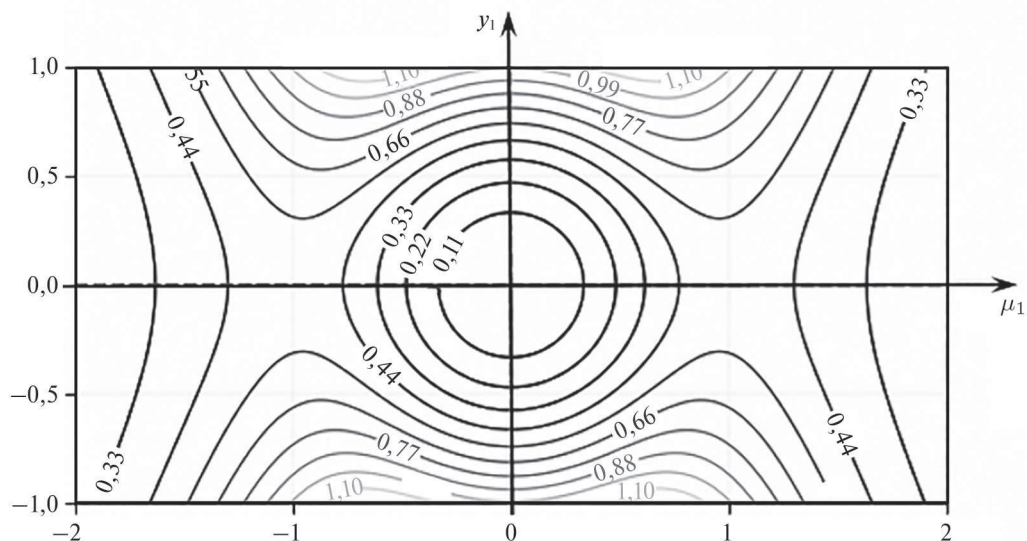


Рис. 2. Линии уровня поверхности (13) на плоскости (y_1, μ_1) .

Вторые ветви линий уровня в случае $0 < c < 1/2$ (соответствующие решению $r_2 > 0$), а также линии уровня при $c \geq 1/2$ определяются кривыми, лежащими за пределами указанных областей. Действительно, $r_2 \rightarrow +\infty$ при $c \rightarrow 0$ и $r_2 \rightarrow 1$ при $c \rightarrow 1/2$, $y_1 \rightarrow 0$, и вторые ветви линий уровня на плоскости (y_1, μ_1) являются разомкнутыми кривыми в области $\mu_1^2 \geq 1$ (пересекающие прямую $y_1 = 0$ в точках $\mu_1 = \pm\sqrt{r_2}$) и разомкнутыми кривыми в области $y_1^2 \geq 1/z_1^2$ на плоскости (y_1, z_1) . При $c \geq 1/2$ линии уровня поверхности (13) лежат в области $y_1^2 \geq 1/2$.

В результате при достаточно малом значении $\|\mathbf{x}'_0\|$ и при значениях y_{10}, z_{10} из области (15) можно не только сделать значение $V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0)$ функции $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ меньше любого сколь угодно малого числа, но и добиться расположения точки между охватывающими прямую $y_1 = 0$ линиями уровня поверхности (13). Учитывая тождество $V'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv 0$, заключаем, что в дальнейшем при всех $t \geq t_0$ точка не выходит за пределы указанных линий уровня поверхности (13).

Анализируя неравенство (15), отметим также, что равномерная устойчивость по $y_1, \mathbf{x}'$ положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ точки возможна при достаточно малых значениях $z_{10}, \|\mathbf{x}'_0\|$ и при $y_{10}^2 < 1/2$.

4. Выделение некоторых «опорных» систем

Используя предложенный подход, выделим некоторые структурные формы нелинейных систем двух и трех уравнений, для которых рассматриваемые пары могут быть конструктивно построены. Далее $f_i(y_1)$ ($i = 1, 2$) – либо функции вида $d_i y_1$ (d_i – постоянные), либо удовлетворяют в области $|y_1| < h_1$ условиям $|f_i(y_1)| \leq A|y_1|^{1+\alpha}$, где A, α – положительные постоянные.

1. Пусть система (1) состоит из уравнений (a, b, l – постоянные параметры)

$$(17) \quad y_1' = ay_1 + ly_1^2 z_1, \quad z_1' = bz_1 + f_1(y_1)z_1.$$

Найдем, при каких условиях на параметры положение равновесия $y_1 = z_1 = 0$ системы (17) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво.

При введении дополнительной переменной $\mu_1 = y_1 z_1$ от уравнений

$$y_1' = ay_1 + ly_1\mu_1, \quad \mu_1' = (a+b)\mu_1 + l\mu_1^2 + \mu_1 f_1(y_1), \quad z_1' = bz_1 + f_1(y_1)z_1$$

отделяется система

$$(18) \quad y_1' = ay_1 + ly_1\mu_1, \quad \mu_1' = (a+b)\mu_1 + l\mu_1^2 + \mu_1 f_1(y_1).$$

Если выполняются условия

$$(19) \quad a < 0, \quad a + b < 0,$$

то систему (18) можно рассматривать как систему типа (10) в предложенной в разделе 3 схеме построения пар применительно к исходной системе (17), поскольку положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ системы (18) асимптотически устойчиво (по y_1, μ_1) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Возможность выделения системы (18) и допустимый выбор функции $V = y_1^2 + \mu_1^2$ в качестве функции Ляпунова для этой системы предопределяют выбор пары

$$(20) \quad \{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (y_1 z_1)^2, \mu_1(\mathbf{x}) = y_1 z_1\}.$$

Входящая в пару (20) основная функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$ имеет структурную форму (9), а ее производная V' в силу системы (17)

$$V' = 2\{ay_1^2 + (a+b)\mu_1^2(\mathbf{x}) + l\mu_1(\mathbf{x})[y_1^2 + \mu_1^2(\mathbf{x})] + \mu_1^2(\mathbf{x})f_1(y_1)\}$$

при выполнении условий (19) удовлетворяет в области (6) условиям (8) при $u_1 = [y_1, \mu_1(\mathbf{x})]$, хотя является *знакопеременной* в области (4).

В результате при условиях (19) положение равновесия $y_1 = z_1 = 0$ системы (17) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво на основании теоремы 1. Кроме того, основная функция $V(y_1, z_1)$ в паре (20) также удовлетворяет условию $V(0, z_1) \equiv 0$ и, следовательно, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} , но и при больших (но конечных) значениях z_{10} .

Область притяжения в системе (18) можно оценить по известным методам (см. [22]) с помощью функции Ляпунова из параметрического класса квадратичных форм переменных y_1, μ_1 ; при этом на плоскости (y_1, z_1) получаем соответствующую область y_1 -притяжения положения равновесия $y_1 = z_1 = 0$ системы (17).

2. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(21) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + lz_1z_2, \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1, \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2, \end{aligned}$$

где a, b, c, l – постоянные параметры.

Введением переменной $\mu_1 = z_1z_2$ можно выделить систему

$$y_1' = ay_1 + l\mu_1, \quad \mu_1' = (b+c)\mu_1 + [f_1(y_1) + f_2(y_1)]\mu_1,$$

что предопределяет выбор пары

$$\{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (z_1z_2)^2, \mu_1(\mathbf{x}) = z_1z_2\}.$$

Аналогично проведенному анализу в случае 1 можно показать, что при выполнении условий $a < 0, b + c < 0$ положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (21) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво. Кроме того, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} и z_{10} (z_{20}), но и при больших (но конечных) значениях z_{20} (z_{10}).

3. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(22) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + ly_1^2z_1z_2, \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1, \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2. \end{aligned}$$

Введением переменной $\mu_1 = y_1z_1z_2$ можно выделить систему

$$y_1' = ay_1 + ly_1\mu_1, \quad \mu_1' = (a+b+c)\mu_1 + l\mu_1^2 + [f_1(y_1) + f_2(y_1)]\mu_1,$$

что предопределяет выбор пары

$$\{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (y_1z_1z_2)^2, \mu_1(\mathbf{x}) = y_1z_1z_2\}.$$

При выполнении условий $a < 0, a + b + c < 0$ положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (22) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво. Кроме того, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} , но и при больших (но конечных) значениях z_{10} и z_{20} .

4. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(23) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1y_1^2z_1 + l_2y_1z_1z_2, \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1, \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2. \end{aligned}$$

Введением переменных $\mu_1 = y_1z_1$ и $\mu_2 = z_1z_2$ можно выделить систему

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1y_1\mu_1 + l_2y_1\mu_2, \\ \mu_1' &= (a+b)\mu_1 + l_1\mu_1^2 + \mu_1f_1(y_1) + l_2\mu_1\mu_2, \\ \mu_2' &= (b+c)\mu_2 + [f_1(y_1) + f_2(y_1)]\mu_2, \end{aligned}$$

что предопределяет выбор пары

$$(24) \quad \{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (y_1 z_1)^2 + (z_1 z_2)^2, \mu(\mathbf{x}) = (y_1 z_1, z_1 z_2)\}$$

с векторной вспомогательной $\mu(\mathbf{x})$ -функцией.

При выполнении условий $a < 0$, $a + b < 0$, $b + c < 0$ положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (23) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво. Кроме того, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} , z_{20} , но и при больших (но конечных) значениях z_{10} .

5. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(25) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1 y_1^2 z_2 + l_2 y_1 z_1 z_2, \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1, \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2. \end{aligned}$$

Введением переменных $\mu_1 = y_1 z_2$ и $\mu_2 = z_1 z_2$ можно выделить систему

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1 y_1 \mu_1 + l_2 y_1 \mu_2, \\ \mu_1' &= (a + c)\mu_1 + l_1 \mu_1^2 + \mu_1 f_2(y_1) + l_2 \mu_1 \mu_2, \\ \mu_2' &= (b + c)\mu_2 + [f_1(y_1) + f_2(y_1)]\mu_2. \end{aligned}$$

При выполнении условий $a < 0$, $a + c < 0$, $b + c < 0$ положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (25) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво. Кроме того, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} , z_{10} , но и при больших (но конечных) значениях z_{20} .

Пара, решающая задачу:

$$\{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (y_1 z_2)^2 + (z_1 z_2)^2, \mu(\mathbf{x}) = (y_1 z_2, z_1 z_2)\}.$$

5. Использование «опорных» систем в качестве систем первого приближения

Выделенные структурные формы можно использовать в качестве нелинейного приближения для систем с нелинейностями полиномиального вида.

1. Рассмотрим «возмущенную» систему (17), состоящую из уравнений

$$(26) \quad y_1' = ay_1 + l y_1^2 z_1 + Y_1(t, \mathbf{x}), \quad z_1' = bz_1 + f_1(y_1)z_1 + Z_1(t, \mathbf{x}).$$

Введением переменной $\mu_1 = y_1 z_1$ система преобразуется к виду

$$(27) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l y_1 \mu_1 + Y_1(t, \mathbf{x}), \quad \mu_1' = (a + b)\mu_1 + l \mu_1^2 + \mu_1 f_1(y_1) + Y_1^*(t, \mathbf{x}), \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1 + Z_1(t, \mathbf{x}), \\ Y_1^*(t, \mathbf{x}) &= y_1 Z_1(t, \mathbf{x}) + z_1 Y_1(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Используя анализ системы (17) и пару (20), можно показать, что при выполнении условий (19), а также при выполнении в области (6) условия

$$(28) \quad |Y_1(t, \mathbf{x})| + |Y_1^*(t, \mathbf{x})| \leq \alpha_1 |y_1| + \alpha_2 |y_1 z_1|,$$

где α_1, α_2 – достаточно малые положительные постоянные, положение равновесия $y_1 = \mu_1 = z_1 = 0$ системы (27) равномерно асимптотически (y_1, μ_1) -устойчиво.

Поэтому при выполнении указанных условий положение равновесия $y_1 = z_1 = 0$ исходной системы (26) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво.

Условие (28) выполнено, например, при $Y_1 = y_1^2 z_1^2$, $Z_1 = y_1 z_1^2$, $Z_2 = y_1^2 z_1$.

2. Рассмотрим «возмущенную» систему (23), состоящую из уравнений

$$(29) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1 y_1^2 z_1 + l_2 y_1 z_1 z_2 + Y_1(t, \mathbf{x}), \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1 + Z_1(t, \mathbf{x}), \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2 + Z_2(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Используя анализ системы (23) и пару (24), можно показать, что при выполнении условий $a < 0$, $a + b < 0$, $b + c < 0$, а также при выполнении в области (6) условия

$$(30) \quad \begin{aligned} |Y_1(t, \mathbf{x})| + |Y_1^*(t, \mathbf{x})| + |Z_1^*(t, \mathbf{x})| &\leq \alpha_1 |y_1| + \alpha_2 |y_1 z_1| + \alpha_3 |z_1 z_2|, \\ Z_1^*(t, \mathbf{x}) &= z_1 Z_2(t, \mathbf{x}) + z_2 Z_1(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

где α_i – достаточно малые положительные постоянные, положение равновесия $y_1 = z_1 = 0$ системы (29) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво.

Условие (30) выполнено, например, в случае $Y_1 = y_1^2 z_1^2$, $Z_1 = y_1^2 z_1$, $Z_2 = y_1 z_1 z_2^2$.

6. Заключение

Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью предложен один из возможных подходов к нахождению функций Ляпунова, решающих задачу анализа устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия. В рамках этого подхода производится выбор пары «основная функция Ляпунова – вспомогательная функция»; вспомогательная функция используется для корректировки области фазового пространства системы, где вводится основная функция Ляпунова.

Указывается способ построения указанных пар, основанный на преобразовании исходной системы и использовании условий устойчивости по части переменных по первому (линейному или нелинейному) приближению.

Приводятся примеры построения пар для некоторых нелинейных систем двух и трех дифференциальных уравнений, где основная функция Ляпунова является квадратичной формой переменных, устойчивость по которым изучается, а также дополнительных переменных. Для этих систем найдены области устойчивости по части переменных в пространстве параметров.

Аналогичный подход к анализу частичной устойчивости рассматривался для дискретных систем [37], а также для стохастических систем с непрерывной и дискретной динамикой [38–40].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сборник. 1893. Т. 17. № 2. С. 253–333.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
3. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 255 с.
4. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
5. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.
Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.
6. *Sontag E.D., Wang Y.* Notions of Input to Output Stability // Syst. & Control Lett. 1999. V. 38. No. 4–5. P. 235–248.
7. *Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // АиТ. 2011. № 8. С. 3–40.
Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to State Stability and Allied System Properties // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 8. P. 1579–1614.
8. *Jammazi C.* On a Sufficient Condition for Finite-Time Partial Stability and Stabilization: Applications // IMA J. Mathematical Control and Information. 2010. V. 27. No. 1. P. 29–56.
9. *Haddad W.M., L’Afflitto A.* Finite-Time Partial Stability and Stabilization, and Optimal Feedback Control // J. Franklin Institute. 2015. V. 352. No. 6. P. 2329–2357.
10. *Zimenko K., Efimov D., Polyakov A., Kremlev A.* On Necessary and Sufficient Conditions for Output Finite-Time Stability // Automatica. 2021. V. 125. Art. 109427.
11. *Zuyev A.L.* Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements. Cham: Springer Int. Publ., 2015. 245 p.
12. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
13. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
14. *Giesl P.* Construction of Global Lyapunov Functions using Radial Basis Functions. Berlin: Springer Verlag, 2007. 274 p.
15. *Hafstein S.* An Algorithm for Constructing Lyapunov Functions // Electronic J. Diff. Equat. (Monograph 8). 2007. 101 p.
16. *Malisoff M., Mazenc F.* Constructions of Strict Lyapunov Functions. Springer: London, 2009. 386 p.
17. *Genesio R., Tartaglia M., Vicino A.* On the Estimation of Asymptotic Stability Regions: State of the art and New Proposals // IEEE Trans. Autom. Control. 1985. V. AC-30. No. 8. P. 747–756.
18. *Giesl P., Hafstein S.* Review on Computational Methods for Lyapunov Functions // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2015. V. 20. No. 8. P. 2291–2331.

19. *Anderson J., Papachristodoulou A.* Advances in Computational Lyapunov Analysis using Sum-of-Squares Programming // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2015. V. 20. No. 8. P. 2361–2381.
20. *Красильников П.С.* Об обобщенной схеме построения функций Ляпунова из первых интегралов // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 199–210.
21. *Дьяченко И.В., Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Численный метод построения функций Ляпунова и анализ устойчивости нелинейных динамических систем на ЭВМ // АиТ. 1994. № 4. С. 23–38.
D'yachenko I.V., Molchanov A.P., Pyatnitski E.S. A Numerical Method for Constructing Lyapunov Functions and the Analysis of the Stability of Nonlinear Dynamical Systems on a Computer // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 4. P. 475–487.
22. *Каменецкий В.А.* Построение областей притяжения методом функций Ляпунова // АиТ. 1994. № 6. С. 10–26.
Kamenetskii V.A. Construction of Domains of Attraction by the Method of Lyapunov Functions // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 6. P. 778–791.
23. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 916–921.
24. *Johansen T.* Computation of Lyapunov Functions for Smooth, Nonlinear Systems using Convex Optimization // Automatica. 2000. V. 36. No. 11. P. 1617–1626.
25. *Marinossan S.* Lyapunov Function Construction for Ordinary Differential Equations with Linear Programming // Dynamical Systems – an Intern. J. 2002. V. 17. No. 2. P. 137–150.
26. *Grune L.* Computing Lyapunov Functions Using Deep Neural Networks // J. Comput. Dyn. 2021. V. 8. No. 2. P. 131–152.
27. *Зенкин А.М., Перегудин А.А., Бобцов А.А.* Метод поиска функции Ляпунова для анализа устойчивости нелинейных систем с использованием генетического алгоритма // Научно-техн. вест. информ. технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23. № 5. С. 886–893.
28. *Mendoza-Avila J., Efimov D., Ushirobira R., Moreno J.A.* Numerical Design of Lyapunov Functions for a Class of Homogeneous Discontinuous Systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2021. V. 31. No. 9. P. 3708–3729.
29. *Фуртат И.Б.* Дивергентные условия устойчивости динамических систем // АиТ. 2020. № 2. С. 62–75.
Furtat I.B. Divergent Stability Conditions of Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 247–257.
30. *Щенников В.Н.* Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями // Диффер. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1645–1649.
31. *Александров А.Ю.* Исследование устойчивости решений одного класса сложных систем // Вест. СПбГУ. 2011. Сер.10. № 4. С. 3–13.
32. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. 4-е изд. (с примечаниями В.В. Румянцева) М.: Наука, 1990. 176 с.
33. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.

34. *Пятницкий Е.С.* Синтез систем стабилизации программных движений нелинейных объектов управления // *АиТ.* 1993. № 7. С. 19–37.
Pyatnitski E.S. Design of Systems for the Stabilization of Programmed Motions of Nonlinear Control Plants // *Autom. Remote Control.* 1993. V. 54. No. 7. P. 1046–1062.
35. *Пропой А.И.* О построении функций Ляпунова. I // *АиТ.* 2000. № 5. С. 32–38.
Propoi A.I. On the Construction of Lyapunov Functions. I // *Autom. Remote Control.* 2000. V. 61. No. 5. P. 742–748.
36. *Жуков В.П.* Об условиях, определяющих характер устойчивости некоторых классов нелинейных динамических систем // *Проблемы управления.* 2007. № 2. С. 8–10.
37. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* Об одном подходе к анализу устойчивости «частичных» положений равновесия нелинейных дискретных систем // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2022. Т. 63. Вып. 3. С. 57–68.
38. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // *АиТ.* 2019. № 5. С. 86–98.
Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On the Partial Stability in Probability of Nonlinear Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 5. P. 856–866.
39. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // *АиТ.* 2021. № 9. С. 116–132.
Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On the Problem of Partial Stability for Discrete-Time Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 1554–1567.
40. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических дискретных систем с запаздыванием // *АиТ.* 2024. № 8. С. 20–35.
Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On Partial Stability Problem in Probability for Nonlinear Stochastic Discrete-Time Systems with Delay // *Autom. Remote Control.* 2024. V. 85. No. 8. P. 761–772.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 20.11.2025

После доработки 30.04.2026

Принята к публикации 04.05.2026

Заметки, хроника, информация

© 2026 г. Д.А. НОВИКОВ, академик РАН, д-р техн. наук (novikov@ipu.ru),
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИТЕРАТИВНОМ НАУЧЕНИИ

Показано, что три варианта задачи об оптимальном итеративном обучении – максимизация ожидаемого результата при фиксированных суммарном числе попыток и времени; минимизация времени достижения заданного ожидаемого результата; минимизация числа попыток, необходимых для достижения заданного ожидаемого результата – имеют либо вырожденное (не зависящее от динамики интенсивности обучения), либо тривиальное (максимальная допустимая интенсивность обучения) решение.

Ключевые слова: итеративное научение, кривая научения, оптимальная интенсивность научения.

DOI: 10.7868/S2413977726090059

1. Введение

Научение в общем случае – «процесс и результат приобретения индивидуального опыта» [1–5]. Рассматривается один из видов научения, а именно итеративное научение (от лат. *iterativus* – повторяемый) – многократное повторение обучаемой системой (живой или неживой) действий, проб, попыток и т.д. для достижения фиксированной цели при постоянных внешних условиях.

Итеративное научение как обучение в строго повторяющихся условиях – одна из простейших разновидностей научения. Оно имеет место в широком классе явлений: формирование разнообразных навыков, усвоение информации человеком, научение животных (выработка условных рефлексов) и обучение технических и кибернетических систем. Различные аспекты итеративного научения исследуются в педагогике, психологии и физиологии человека и животных, в теории управления и в других науках (см. обзоры в [4, 6]). Современные математические модели ИН и соответствующий обзор можно найти в [2].

Постоянство внешних условий позволяет проводить количественное описание ИН в виде графиков – кривых научения (КН), представляющих собой зависимость критерия уровня научения от времени или от числа повторений (итераций) [4, 7]. Как правило, уровень научения интерпретируется как вероятность правильного выполнения действия или операции и соответственно принимает значения от нуля до единицы.

2. Постановка задачи

Рассматривается процесс научения в непрерывном времени. Вводятся следующие предположения.

A.1. Интенсивность научения $u(t) \geq 0$ – непрерывная неотрицательная и ограниченная сверху функция времени:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max}(t).$$

A.2. Научение описывается непрерывной кривой научения $L(U(t))$ – отображением суммарного числа сделанных к моменту времени t попыток, проб, повторений в отрезок $[0; 1]$.

A.3. Фиксировано суммарное число попыток $U(T) > 0$, которые обучаемая система может сделать за время $T > 0$. При этом

$$U(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad U(0) = 0.$$

Очевидно, $u(t) = U'(t)$.

A.4. Ожидаемое число успешных попыток в момент времени t равно произведению интенсивности научения на текущий уровень научения: $u(t)L(U(t))$. Тогда ожидаемое число успешных попыток $Z(T)$ за время T равно

$$(1) \quad Z(T) = \int_0^T U'(t) L(U(t)) dt.$$

Задача об оптимальном итеративном научении заключается в максимизации ожидаемого числа успешных попыток выбором динамики интенсивности научения (в [5] эта задача формулировалась в дискретном времени):

$$(2) \quad \int_0^T U'(t) L(U(t)) dt \rightarrow \max_{U(\cdot)}.$$

3. Основной результат

Сделаем в интеграле (1) замену переменной:

$$Z(T) = \int_0^T U'(t) L(U(t)) dt = \int_{U(0)}^{U(T)} L(U) dU.$$

Обозначим через $W(\cdot)$ первообразную кривой научения $L(\cdot)$. Тогда

$$(3) \quad Z(T) = W(U(T)) - W(0).$$

Из (3) видно, что ожидаемое число успешных попыток *не зависит* от динамики интенсивности научения, а определяется лишь видом кривой научения и суммарным числом попыток $U(T)$.

Содержательная интерпретация: при итеративном научении (фиксированная цель, постоянные внешние условия) уровень научения зависит только от суммарного числа сделанных попыток и не зависит от их распределения во времени. Эффекты усталания, забывания, вработывания и др. [3] в данной модели не учитываются.

Утверждение. Если выполнены предположения А.1–А.4, то значение критерия эффективности в задаче об оптимальном итеративном научении (2) не зависит от динамики интенсивности научения.

4. Пример: экспоненциальная кривая научения

Наиболее массовым примером КН является экспоненциальная кривая:

$$L(U) = 1 - \exp[-\gamma U(t)], \quad \gamma > 0,$$

где γ – скорость научения. Если интенсивность u постоянна во времени, то получается классическая кривая $1 - e^{-gt}$ с приведенной скоростью научения $g = \gamma u$.

Для экспоненциальной КН выражение (1) принимает вид

$$(4) \quad Z(T) = \int_0^T U'(t)[1 - e^{-\gamma U(t)}] dt = U(T) - \int_0^T U'(t)e^{-\gamma U(t)} dt.$$

Задача (2) с учетом (4) сводится к минимизации числа неуспешных попыток:

$$(5) \quad \int_0^T U'(t)e^{-\gamma U(t)} dt \rightarrow \min_{U(t)}.$$

Для экспоненциальной КН можно выполнить замену $v(t) = e^{-\gamma U(t)}$, $U(t) = -\frac{1}{\gamma} \ln v(t)$. Тогда (5) преобразуется к виду

$$-\frac{1}{\gamma} \int_0^T v'(t) dt \rightarrow \min,$$

это эквивалентно $\frac{1}{\gamma} [1 - e^{-\gamma U(T)}] \rightarrow \min$, что также не зависит от вида $u(\cdot)$.

5. Два дополнительных варианта постановки

По аналогии возможны следующие два варианта оптимизационных задач.

- 1) **Минимизация времени T** достижения заданного ожидаемого результата Z . В силу (3) и монотонности кривой научения решение тривиально: время научения минимально при условии, что в каждый момент времени интенсивность научения максимальна:

$$u(t) \equiv u_{\max}(t).$$

- 2) **Минимизация числа попыток** U , необходимых для достижения заданного ожидаемого результата Z . В силу (3) эта задача имеет вырожденное решение (не зависящее от динамики интенсивности обучения). Содержательно: обучаемая система должна неизбежно сделать определенное количество ошибок, иначе научиться невозможно.

6. Задача оптимального управления (ЗОУ)

6.1. Переход к ЗОУ

Вводим фазовые переменные $x_1 = U$ и $x_2 = u$. Тогда двуточечная краевая задача имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad u \in [0, 1],$$

$$c = (0, ?)^T, \quad d = (?, ?)^T, \quad - \int_0^T x_2(t) L(x_1(t)) dt \rightarrow \min.$$

6.2. Применение принципа максимума Понтрягина (ПМП)

Задача автономная, T задано, система линейная. Применим локальный принцип максимума. Функция Понтрягина при $\lambda_0 = 1$ имеет вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 w + x_2(t) L(x_1(t)).$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi}_1(t) = -x_2(t) L_{x_1}(x_1(t)), \quad \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) - L(x_1(t)).$$

Откуда следует, что $\psi_1(t) = L(x_1(0)) - L(x_1(t))$, $\dot{\psi}_2(t) = -L(x_1(0))$ – которая является константой. Тогда $\psi_2(t) = -L(x_1(0))t + a$ – линейная функция.

Оптимальное управление $u^* = \text{sign}(\psi_2)$. Поскольку ψ_2 линейная функция, то существует не более одного переключения управления. Но поскольку правый конец по x_2 не фиксирован, то из условия трансверсальности следует, что $\psi_2(T) = 0$. И, значит, переключений управления нет и существуют только тривиальные решения ЗОУ.

7. Заключение

Все три варианта задачи об оптимальном итеративном обучении имеют либо вырожденное (не зависящее от динамики интенсивности обучения), либо тривиальное (максимальная допустимая интенсивность обучения) решение. Для получения нетривиальных решений необходимо учитывать в модели эффекты уставания, забывания, а также, возможно, ограниченность когнитивных и иных возможностей обучаемой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краткий психологический словарь. М.: ИПЛ, 1985.
2. Белов М.В., Новиков Д.А. Модели технологий. М.: Ленанд, 2019.
3. Гребенков Д.И., Козлова А. А., Лемтюжникова Д. В., и др. Модели утомления и отдыха при обучении. Ч. 1. // Проблемы управления. 2025. № 3. С. 28–37.
4. Новиков Д.А. Закономерности итеративного обучения. М.: Институт проблем управления РАН, 1998.
5. Новиков Д.А. Модели обучения в процессе работы // Управление большими системами. 2007. № 19. С. 5–22.
6. Learning Curves: Theory, Models, and Applications / Edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011.
7. Qi Z. Learning Curve / Kan. Z. (eds) The ECPH Encyclopedia of Psychology. Singapore: Springer, 2024. P. 826–828.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 23.04.2026

После доработки 26.05.2026

Принята к публикации 01.06.2026

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Квинто Я.И. Управление на основе данных: решение некоторых классических задач теории управления	3
--	---

Линейные системы

Никифоров В.О., Герасимов Д.Н. Замкнутый предиктор состояния: робастность и практическая реализация	63
Царьков К.А. Метод блочно-координатного спуска в приложении к задачам стабилизации и быстродействия для линейных дискретных систем	91

Нелинейные системы

Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. О нахождении функций Ляпунова в задачах устойчивости по части переменных	110
--	-----

Заметки, хроника, информация

Новиков Д.А. Задача об оптимальном итеративном обучении	127
--	-----

CONTENTS

Surveys

Kvinto Ya.I. Data-Driven Control: Solving Some Classical Problems of Control Theory	3
--	---

Linear Systems

Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. Closed-Loop State Predictor: Robustness and Safe Implementation	63
Tsarkov K.A. Block Coordinate Descent Method Applied to Stabilization and Time-Optimization Problems for Linear Discrete Systems	91

Nonlinear Systems

Vorotnikov V.I., Martyschenko Yu.G On Lyapunov Functions Finding in the Partial Stability Problems	110
---	-----

Notes, Meetings, Information

Novikov D.A. Optimal Iterative Learning Problem	127
--	-----