

© 2026 г. Я.И. КВИНТО, канд. техн. наук (yanakvinto@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УПРАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ: РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматриваются методы управления на основе данных для дискретных линейных стационарных систем, основанные на синтезе управления по конечным наборам измерений входа и выхода системы с неизвестными матрицами. Обсуждаемый подход также характеризуется применением аппарата линейных матричных неравенств. Рассмотрены методы на основе фундаментальной леммы и концепции информативности данных для решения задачи квадратичной стабилизации системы (при точных данных и в случае воздействия на систему ограниченных внешних возмущений), задачи о синтезе оптимального линейно-квадратичного регулятора и $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления. Рассматриваются особенности применения методов, обсуждаются преимущества и недостатки, числовые примеры иллюстрируют их работу.

Ключевые слова: управление на основе данных, фундаментальная лемма, информативность данных, дискретная линейная стационарная система, линейные матричные неравенства, ограниченные внешние возмущения, оптимальное управление.

DOI: 10.7868/S2413977726090018

1. Введение

За последние полтора-два десятилетия заметно расширилось такое сравнительно молодое направление теории управления, как управление на основе данных (Data-Driven Control, DDC). Его основной идеей является синтез управления для динамической системы с частично или полностью неизвестной моделью по измеренным значениям входных и выходных сигналов этой системы без ее идентификации.

На данный момент известно большое количество очень отличающихся друг от друга методов DDC для решения самых разнообразных задач, и постоянно появляются новые. Обсуждение истории и идеологии в целом направления DDC, а также отдельных его аспектов, подходов и методов можно найти, например, в обзорах [1–7], книгах [8–12] и др.

Классические постановки задач управления остаются по-прежнему актуальными. Прежде всего это задачи стабилизации, в том числе при внешних возмущениях, синтез оптимального линейно-квадратичного регулятора

ра (LQR), $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления. Для всех них также имеются варианты методов управления на основе данных, которые и будут рассмотрены подробнее в настоящем обзоре.

Обзор посвящен прямым методам управления на основе данных, использующим для решения перечисленных выше задач различные способы параметризации системы при недостаточной информации о ее модели и опирающимся на известные и хорошо себя зарекомендовавшие методы традиционного модельного управления, например основанные на построении функций Ляпунова. Этот подход объединяет методы DDC на основе поведенческой теории систем Яна Виллемса (Behavioral Systems Theory) [13, 14] и его фундаментальной леммы [15–17] и методы, опирающиеся на концепцию информативности данных [18–20].

Фундаментальная лемма (или лемма Я. Виллемса и др., Fundamental Lemma, ФЛ) утверждает, что для управляемой линейной системы все входо-выходные траектории конечной длины могут быть параметризованы с использованием всего лишь одной траектории конечной длины, генерируемой неисчезающе возбуждающей последовательностью входов. т.е. через векторы измеренных значений сигналов конечной длины. К настоящему времени известны разнообразные модификации и расширения ФЛ, например: конструктивное доказательство с оценкой нижней границы выполнения условия неисчезающего возбуждения [22], анализ и синтез непрерывных систем [23, 24], ФЛ для стохастических систем [25–27], для проверки управляемости [28]; ослабление условий управляемости и неисчезающего возбуждения [29], ФЛ для проверки устойчивости [30]; робастная ФЛ [31, 32], для нестационарных систем [33–35], для систем с насыщением входного сигнала [36, 37], аффинных систем [38], систем с переключениями [39], билинейных [40] и нелинейных [41, 42] систем, авторегрессионных моделей [43], в прогнозирующем управлении [44–49], в оптимальном управлении с ограничениями по неточным данным [50], в задачах слежения [51, 52] и о консенсусе [53], расширенная ФЛ для нескольких наборов данных [54], дополненная ФЛ для конструирования альтернативных неминимальных векторов состояний [55] и универсальных входных сигналов [56] и многие другие.

В альтернативной концепции данные должны удовлетворять определенным требованиям, различным в каждой конкретной задаче и, как правило, более мягким по сравнению с ФЛ, – так называемым условиям информативности данных (ИД). Варианты использования концепции информативности данных также разнообразны: анализ структурных свойств линейных систем по зашумленным данным [57], исследование наблюдаемости [58], анализ и синтез непрерывных систем [59], распределенная положительная стабилизация [60], анализ линейных систем с коническими ограничениями [61], синтез диссипативных систем [62], аффинных систем [63], систем с переменными параметрами [64], авторегрессионных моделей [65], синтез алгебраического регулятора в задаче слежения [66], deadbeat-регулятор [18], ИД для случая

нескольких наборов данных и расширения ФЛ [67], применительно к задачам оптимизации на основе данных [68] и многие другие результаты.

Выбор для обзора именно этого направления внутри DDC обусловлен следующими соображениями. Во-первых, как видно по публикациям выше, оно является достаточно универсальным и решает самые разнообразные задачи управления. Во-вторых, эти методы имеют строгое теоретическое обоснование, в том числе относительно минимальных требований к объему и «качеству» исходных данных. В-третьих, с практической точки зрения они весьма удобны тем, что синтез управления производится по конечным наборам экспериментальных данных, а для теоретических выводов и вычислений применяются хорошо разработанные и эффективные методы линейной алгебры, выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования, аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) и т.п. И в-четвертых, методы из указанной группы можно комбинировать с принципиально другими подходами управления на основе данных (например, с ПИД-регуляторами при неизвестной модели системы [21]). Естественно, имеются и недостатки: например, применение аппарата линейных матричных неравенств может ограничивать объем данных, с которым возможно производить манипуляции без серьезных вычислительных сложностей.

В рамках одного обзора невозможно объять все имеющиеся результаты. Объектом внимания здесь будут только *дискретные линейные стационарные системы* и тот случай, когда имеется возможность получить конечный набор измерений входного и выходного сигналов (известных размерностей) *разомкнутой системы*. Кроме того, ограничимся рассмотрением управления в виде линейной статической обратной связи по состоянию, а для синтеза управления будем использовать только экспериментальные данные, предполагая, что они точны. Случаи, когда в измерениях входа и/или выхода системы имеются ошибки, рассматриваются в [19, 69–74] и др. Другие классы систем и регуляторов в настоящей работе не затрагиваются, также не рассматриваются альтернативные методы, например основанные на разного вида обучении, онлайн-управление и др.

В некоторых из представленных задач предполагается воздействие на систему постоянно действующих *внешних возмущений*, которые часто невозможно измерить непосредственно, но для них известны некоторые общие ограничения.

Во всех рассматриваемых задачах будем считать, что в самих системах, помимо неизвестных матриц и внешних возмущений, нет неопределенностей иного типа. Но стоит отметить, что в настоящий момент для систем с неопределенностью в структуре и/или параметрах имеются значимые результаты, основанные на совместном использовании экспериментальных данных и априорной информации. Так, в [75] в системе предполагается наличие структурированной неопределенности. В ряде русскоязычных публикаций предлагаемые методы для нестационарных систем [76] и для систем с па-

раметрической неопределенностью [77–79] основаны на функции Ляпунова, используют «погружение» исходной неопределенной системы в расширенную полностью определенную систему с дополнительным искусственным возмущением и не требуют выполнения условий фундаментальной леммы и даже – в некоторых задачах – информативности данных.

Цель обзора – представить разнообразие методов DDC, которые объединены идеологией поведенческой теории систем (а именно, применением фундаментальной леммы и условий информативности данных) и использованием аппарата ЛМН для решения ряда классических задач теории управления, исследовать особенности их применения в каждой задаче, обсудить преимущества и недостатки.

Статья организована следующим образом: раздел 2 посвящен задаче квадратичной стабилизации и подходам к ее решению на основе данных; раздел 3 посвящен способам решения задачи об оптимальном линейно-квадратичном регуляторе, раздел 4 – методам DDC для систем с внешними возмущениями, а именно: квадратичной стабилизации (подраздел 4.2); методом синтеза оптимального $\mathcal{H}_2$ - (подраздел 4.3) и $\mathcal{H}_\infty$ -управления (подраздел 4.4). Для каждой из рассматриваемых задач приводятся иллюстративные числовые примеры. В разделе 5 подведены итоги обзора.

Обозначения: $\mathbb{R}^{m \times n}$ – множество вещественных матриц $m \times n$; $\mathbb{S}^n$ – множество симметричных матриц $n \times n$; $\mathbb{S}_{++}^n$ – множество симметричных положительно определенных матриц $n \times n$; $\|\cdot\|$ – спектральная норма матрицы; $^\top$ – символ транспонирования; † – правая псевдообратная матрица; I – единичная матрица соответствующей размерности. Все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц, в линейных матричных неравенствах знаком $*$ отмечены блоки, симметричные явно указанным.

Для сигналов $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, будем обозначать конечные матрицы длительности $T \geq 0$, составленные из их измерений, следующим образом:

$$\begin{aligned} U &:= [u(0) \quad u(1) \quad \dots \quad u(T-1)] \in \mathbb{R}^{m \times T}; \\ X &:= [x(0) \quad x(1) \quad \dots \quad x(T)] \in \mathbb{R}^{n \times (T+1)}; \\ X_- &:= [x(0) \quad x(1) \quad \dots \quad x(T-1)] \in \mathbb{R}^{n \times T}; \\ X_+ &:= [x(1) \quad x(2) \quad \dots \quad x(T)] \in \mathbb{R}^{n \times T}. \end{aligned}$$

2. Квадратичная стабилизация

Рассмотрим дискретную линейную стационарную систему

$$(1) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Здесь и далее считаем, что пара (A, B) управляема, а наблюдаемый выход совпадает с состоянием системы:

$$y(k) = x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Задача состоит в синтезе квадратично стабилизирующего регулятора в виде статической линейной обратной связи по состоянию:

$$u(k) = Kx(k), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Когда матрицы A, B известны (традиционный «модельный» подход, Model-Based Control), задача сводится к поиску матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, для которых выполняется хорошо известное матричное неравенство Ляпунова

$$(2) \quad (A + BK)P(A + BK)^\top - P \prec 0,$$

или в эквивалентном виде [80]:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} P & AP + BY \\ * & P \end{bmatrix} \succ 0.$$

Решение $\hat{P}, \hat{Y}$ доставляет регулятор с матрицей $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$, квадратично стабилизирующий систему (1).

Теперь перейдем к представлению системы с помощью векторов измеренных значений: если даны (U, X) , то систему (1) с точно известными матрицами A_{tr}, B_{tr} можно записать как

$$(4) \quad X_+ = \begin{bmatrix} B_{tr} & A_{tr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix},$$

а множество *всех* систем с матрицами A, B , способных генерировать такие данные (U, X) , обозначим как

$$(5) \quad \Sigma = \left\{ (A, B) : X_+ = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} \right\}.$$

Поскольку данные получены от системы (4), то $(A_{tr}, B_{tr}) \in \Sigma$. Однако по этим данным невозможно отличить систему с матрицами (A_{tr}, B_{tr}) от какой-либо другой системы в Σ , и, следовательно, в задаче управления требуется синтезировать регулятор, который квадратично стабилизирует *все* системы в Σ .

С точки зрения функции Ляпунова в подходе DDC требуется найти общую матрицу P , удовлетворяющую (2) для всех $(A, B) \in \Sigma$.

В следующих подразделах приводятся наиболее известные методы синтеза квадратично стабилизирующего регулятора на основе данных, опирающиеся на фундаментальную лемму (подраздел 2.1), концепцию информативности данных (подраздел 2.2) и с помощью квадратичных матричных неравенств (подраздел 2.3).

2.1. Параметризация на основе фундаментальной леммы

В [69] предлагается модификация традиционной «модельной» постановки задачи квадратичной стабилизации системы (1) на случай управления на основе данных с помощью непараметрического представления системы на основе измеренных данных и с применением фундаментальной леммы (Виллемса и др.) [15, 16], согласно которой данные (измерения) (U, X) должны быть достаточно «полными» для идентифицируемости системы и, следовательно, для возможности синтеза управления.

Определение 1 [15]. Входной сигнал системы $[u(0) \ u(1) \ \dots \ u(T-1)] \in \mathbb{R}^{m \times T}$ называется *неисчезающе возбуждающим* (*persistently exciting*) порядка $n + L$, $1 \leq L \leq T$, если матрица, составленная из сдвигов измерений входного сигнала и измерений выходного сигнала (состояний)

$$(6) \quad H_L = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(T-L) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(L-1) & u(L) & \dots & u(T-1) \\ x(0) & x(1) & \dots & x(T-L) \end{bmatrix},$$

имеет полный ранг:

$$\text{rank } H_L = n + mL.$$

Фактически это означает, что набор сигналов на входах «охватывает» все пространство возможных динамик системы, т.е. заставляет проявиться все состояния и взаимодействия между входами и выходами. Далее везде полагаем $L = 1$.

Важно отметить, что первоначально условия неисчезающего возбуждения, на которые опирается ФЛ, появились в 1970-х гг., т.е. задолго до появления теории DDC, и использовались в работах по адаптивному управлению. Так, например, в [81, теорема 2.4.2] и [82, п. 3.3] устанавливаются идентифицирующие свойства в адаптивных системах при выполнении условия неисчезающего возбуждения. И в целом идеология DDC внутренне тесно связана с адаптивным и робастным управлением [77], поскольку опирается на совместное использование экспериментальных и априорных данных для синтеза управления системами с неопределенностями в модели и действующими на них возмущениями (см. [76–79]).

Лемма 1 (фундаментальная лемма, [15, теорема 1], [16, лемма 1]). Если в системе (1) вход U длительности T является неисчезающе возбуждающим порядка $n + 1$, то

1. выполняется так называемое ранговое условие фундаментальной леммы:

$$(7) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} = n + m.$$

2. любая траектория $\begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{X}_- \end{bmatrix}$ длины T представима в виде линейной комбинации измеренных данных:

$$\begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{X}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} g \quad \forall g \in \mathbb{R}^T;$$

и наоборот: любая линейная комбинация $\begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} g$, $g \in \mathbb{R}^T$, будет являться траекторией длины T для системы (1).

В ряде методов, включая представленный в настоящем разделе, именно условие (7) является важным для синтеза управления непосредственно по данным без предварительной идентификации модели.

Полагаем, что векторы измерений U и X_- получены измерением сигналов разомкнутой системы. В рассматриваемом методе авторы показывают (см. [69], теорема 2), что матрица регулятора K удовлетворяет соотношению

$$(8) \quad \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G$$

с некоторой (вообще говоря, не единственной) неизвестной матрицей $G \in \mathbb{R}^{T \times n}$, откуда следует, что регулятор имеет вид

$$(9) \quad K = UG,$$

а матрица замкнутой системы записывается на основе данных как

$$(10) \quad A_K = A + BK = X_+ G$$

с той же матрицей G .

Таким образом, для стабилизирующего регулятора матрица $A_K = X_+ G$ должна удовлетворять классическому условию Ляпунова (2). В результате доказана теорема о том, как синтезировать стабилизирующий регулятор на основе данных с использованием квадратичной функции Ляпунова и линейных матричных неравенств.

Теорема 1 [69, теорема 3]. Пусть выполняется условие фундаментальной леммы (7). Тогда любая матрица $Q \in \mathbb{R}^{T \times n}$, удовлетворяющая неравенству

$$(11) \quad \begin{bmatrix} X_- Q & X_+ Q \\ * & X_- Q \end{bmatrix} \succ 0,$$

доставляет матрицу регулятора

$$(12) \quad \hat{K} = U \hat{Q} (X_- \hat{Q})^{-1}.$$

Обратное также верно: если K – стабилизирующий регулятор, то он может быть представлен в виде (12) с матрицей Q , удовлетворяющей (11).

Замечание 1. Важным результатом является то, что эта теорема дает характеристику *всего множества стабилизирующих регуляторов* вида $u = Kx$ для всех систем с матрицами $(A, B) \in \Sigma$, соотносящихся с исходными измерениями.

Отметим, что в этой задаче размерность матричной переменной Q зависит от объема экспериментальных данных T , и с учетом (7) должно выполняться $T \geq n + m$.

Замечание 2. Здесь и далее рассматриваются измерения, полученные от разомкнутой системы. И если эта система неустойчива, то могут возникать проблемы с применением рассматриваемых методов, поскольку физически может быть неосуществимым получить измерения минимального необходимого объема из-за проявлений неустойчивости. В такой ситуации требуются другие подходы к синтезу регулятора.

2.2. Синтез регулятора на базе концепции информативности данных

Поведенческая теория систем Я. Виллемса и фундаментальная лемма дали сильный толчок к развитию управления на основе данных и показали широкие возможности параметризации системы и закона управления с помощью измерений входных и выходных сигналов. Однако эта лемма накладывает существенные ограничения на минимальный необходимый объем и «качество» используемых данных. Поэтому логичным стало развитие данного направления в сторону смягчения требований к измерениям, когда для прямого синтеза управления по ним уже не обязательна идентифицируемость системы (т.е. выполнение фундаментальной леммы). В результате появилась концепция информативности данных [18, 19].

Так, в [18] авторы вместо условия исчезающего возбуждения предлагают более мягкие условия информативности данных, при выполнении которых траектория $[U^\top \ X^\top]^\top$ конечной длины T несет в себе столько же информации, что и модель системы в пространстве состояний с известными матрицами (1). Как правило, необходимые и достаточные условия информативности данных для разрешимости конкретной задачи формулируются индивидуально и имеют вид линейного матричного равенства или неравенства (или их системы).

Применительно к задаче стабилизации системы (1) обратной связью по состоянию $u = Kx$ данные (U, X) являются информативными, если существует матрица $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такая, что матрица замкнутой системы $A + BK$ устойчива по Шуру при всех $(A, B) \in \Sigma$, соответствующих экспериментальным данным. И оказывается, что данным не обязательно обладать свойством исчезающего возбуждения для того, чтобы синтезировать на их основе закон управления. А именно, доказана следующая

Теорема 2 [18, теорема 16]. *Экспериментальные данные (U, X) являются информативными для стабилизации системы обратной связью по со-*

стоянию тогда и только тогда, когда

$$(13) \quad \text{rank } X_- = n$$

и существует правая обратная матрица $X_-^\dagger$ к X_- такая, что $X_+X_-^\dagger$ устойчива.

На основе этой теоремы сформулирован конструктивный способ построения стабилизирующего регулятора на базе концепции информативности данных.

Теорема 3 [18, теорема 17]. Экспериментальные данные (U, X) являются информативными для стабилизации системы обратной связью по состоянию тогда и только тогда, когда существует матрица $Q \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такая, что выполняются

$$(14) \quad \begin{bmatrix} X_-Q & X_+Q \\ * & X_-Q \end{bmatrix} \succ 0, \\ X_-Q = (X_-Q)^\top.$$

При этом K является стабилизирующим регулятором тогда и только тогда, когда для некоторой матрицы $\hat{Q}$, удовлетворяющей (14),

$$\hat{K} = U\hat{Q}(X_- \hat{Q})^{-1}.$$

Очевидно, что здесь ЛМН и параметризация регулятора K имеют тот же вид (11)–(12), что и при синтезе регулятора на основе фундаментальной леммы (раздел 2.1), однако в случае условий информативности данных не требуется выполнение рангового условия (7): вместо него появляется более мягкое условие $X_-Q = (X_-Q)^\top$.

И еще одно важное отличие вытекает из (13) и состоит в том, что при синтезе регулятора на основе информативности данных требуется всего $T \geq n$ измерений, тогда как для выполнения условий фундаментальной леммы требуется как минимум $T \geq n + m$ измерений.

Таким образом, концепция информативности данных расширяет доступность экспериментальных данных, подходящих для синтеза управления: для некоторых (U, X) условия фундаментальной леммы могут не выполняться (система неидентифицируема), но метод с выполнением условий информативности этих данных успешно решает задачу управления.

2.3. Синтез регулятора при помощи квадратичных матричных неравенств

Еще один способ параметризации с условием информативности данных предложен в [83–85] и основан на применении матричной леммы Финслера к ограничениям, записанным в виде квадратичных матричных неравенств

([85, теорема 1], см. также раздел 4.1, лемма 3). Этот результат является частным случаем теоремы, полученной для синтеза управления системами с внешними возмущениями; более подробно этот подход представлен во второй части статьи и, в частности, в разделе 4.2.2. Здесь для краткости приведем сразу готовый результат, представляющий интерес с точки зрения вычислений.

Теорема 4 [85, теорема 2]. *Данные (U, X) , сгенерированные системой (1), информативны для стабилизации обратной связи по состоянию тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скаляр $\beta > 0$, такие что*

$$(15) \quad \begin{bmatrix} P - \beta I & * & * & * \\ 0 & -P & * & * \\ 0 & -Y & 0 & * \\ 0 & 0 & Y^\top & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_+ \\ -X_- \\ -U \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_+ \\ -X_- \\ -U \\ 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0.$$

Для таких $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ при некотором $\hat{\beta}$ стабилизирующий регулятор имеет вид $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для всех $(A, B) \in \Sigma$.

Принципиальное отличие данного способа от двух предыдущих проявляется в разном устройстве переменных в линейном матричном неравенстве: в (11), (14) неизвестная матрица Q имеет размерность $T \times n$, т.е. непосредственно зависит от длительности эксперимента и объема полученных данных, тогда как переменные в матричном неравенстве (15) не зависят от T .

Для данной задачи условие информативности накладывает ограничение на длительность эксперимента $T \geq n$, поскольку для существования стабилизирующего регулятора должна существовать правая псевдообратная матрица $X_-^\dagger$ (см. подраздел 2.2, теорема 2), т.е. X_- имеет полный ранг n [18].

Таким образом, в зависимости от размерности системы и доступного объема измерений можно выбирать наиболее выгодный с вычислительной точки зрения способ.

Пример 1. Здесь и во всех дальнейших примерах будем рассматривать в качестве объекта дискретизированную с шагом дискретизации 0,1 с модель неустойчивого химического реактора периодического действия [69, 86] с матрицами

$$(16) \quad A = \begin{bmatrix} 1,178 & 0,001 & 0,511 & -0,403 \\ -0,051 & 0,661 & -0,011 & 0,061 \\ 0,076 & 0,335 & 0,560 & 0,382 \\ 0 & 0,355 & 0,089 & 0,849 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,004 & -0,087 \\ 0,467 & 0,001 \\ 0,213 & -0,235 \\ 0,213 & -0,016 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы в методах на основе данных считаем неизвестными и используем их лишь для моделирования измерений, а также для решения задачи модельным подходом, чтобы сравнивать с ним решения на основе данных.

Синтезируем квадратично стабилизирующие регуляторы каждым из приведенных выше способом и сравним их с результатом модельного подхода и между собой. Зададим начальные условия $x(0)$ равномерно распределенными на единичном шаре: $\|x(0)\| = 1$. Зададим $T \geq n + m$ для того, чтобы заведомо выполнялись условия всех используемых методов. Пусть $T = 10$. Будем подавать на систему управляющие воздействия $u(k)$, равномерно распределенные на $[-1, 1]$, в результате получим векторы измерений $U = [u(0) \dots u(9)]$, $X_- = [x(0) \dots x(9)]$, $X_+ = [x(1) \dots x(10)]$. Все вычисления в статье выполнены в среде MatLab с использованием пакета `svx` [87].

Решение традиционным модельным способом по формуле (3) доставляет регулятор

$$\hat{K}_{mbc} = \begin{bmatrix} 0,6377 & -1,4696 & 0,0944 & -1,2149 \\ 3,0471 & 0,0622 & 2,9947 & -0,7239 \end{bmatrix}.$$

Перед применением метода на основе фундаментальной леммы было еще раз проверено выполнение рангового условия по полученным данным. Вычисления по теореме 1 (подраздел 2.1) дали регулятор

$$\hat{K}_{fl} = \begin{bmatrix} 0,6320 & -1,4699 & 0,0940 & -1,2254 \\ 3,0371 & 0,0612 & 3,0009 & -0,7457 \end{bmatrix},$$

а решением методом с условием информативности данных (подраздел 2.2, теорема 3) является

$$\hat{K}_{di} = \begin{bmatrix} 0,6455 & -1,4713 & 0,1016 & -1,2018 \\ 3,0770 & 0,0563 & 3,0210 & -0,6770 \end{bmatrix}.$$

Регулятор

$$\hat{K}_{qmi} = \begin{bmatrix} 0,9537 & -1,45460,1305 & -1,5784 \\ 4,5344 & -0,15273,1986 & -1,5027 \end{bmatrix}$$

был получен решением задачи на основе квадратичных матричных неравенств (подраздел 2.3, теорема 4) при $\hat{\beta} = 7,8 \cdot 10^{-6}$.

На рис. 1 приведены траектории выходов системы. Здесь отображены выходы $y(k) = x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, разомкнутой системы (жирной пунктирной линией, кружками обозначены использующиеся измерения X) и замкнутой системы: в модельном случае – $y_{mbc}(k)$, тонкая сплошная линия; в методе с фундаментальной леммой – $y_{fl}(k)$, тонкая пунктирная линия; с условием информативности данных – $y_{di}(k)$, тонкая точечная линия; в методе с условием информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств – $y_{qmi}(k)$, тонкая штрихпунктирная линия.

Сравним полученные результаты с модельным примером, оценив близость траекторий:

$$\begin{aligned} \|y_{mbc}(k) - y_{fl}(k)\|_2 &= 0,0073, & \|y_{mbc}(k) - y_{di}(k)\|_2 &= 0,0088, \\ \|y_{mbc}(k) - y_{qmi}(k)\|_2 &= 0,0696, & k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

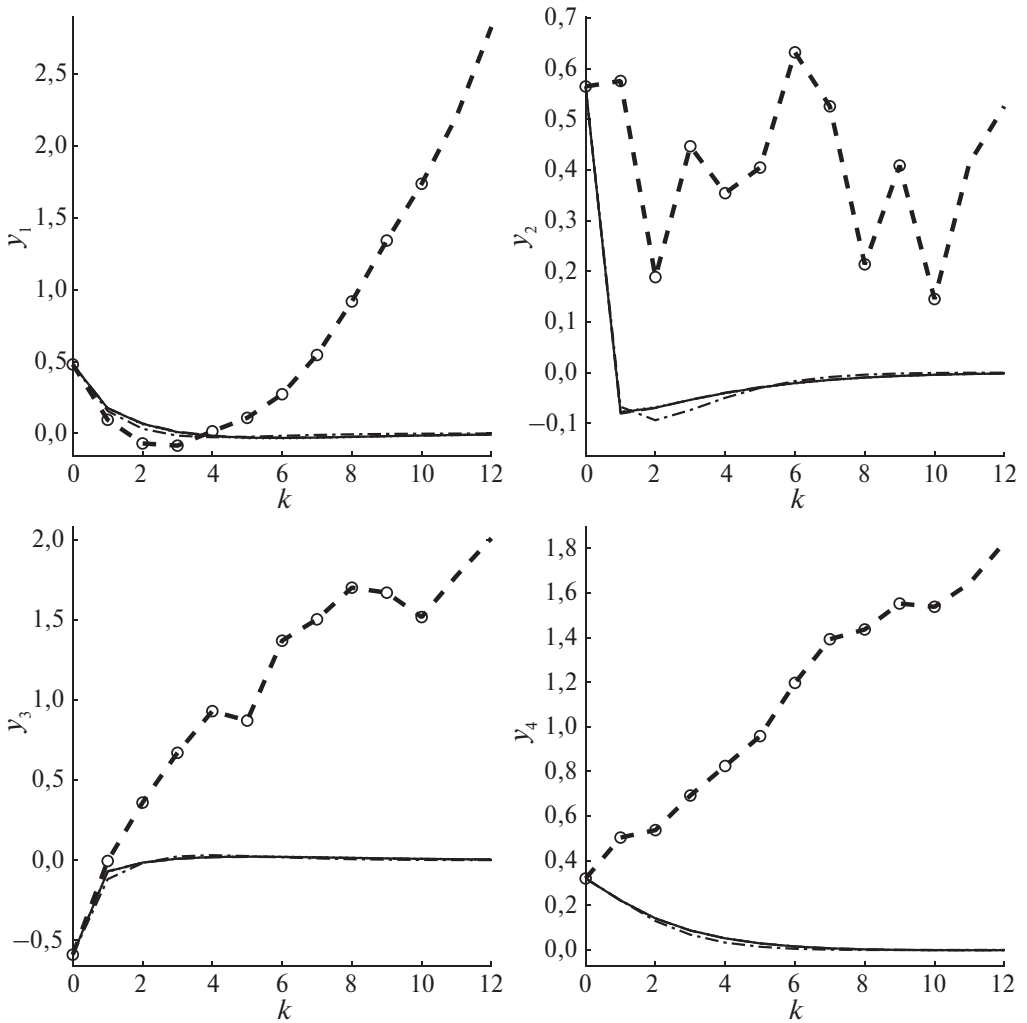


Рис. 1. Траектории выходов системы при решении задачи квадратичной стабилизации.

При увеличении длительности измерений T траектория в методе с использованием квадратичных матричных неравенств все больше приближается к модельной.

На самом деле, по постановке задачи нет никаких требований к управлению, кроме того, что оно должно быть стабилизирующим. Поэтому близость матриц $\hat{K}$ и траекторий здесь в целом никоим образом не характеризует качество решений: эффективность методов подтверждается самим фактом, что они все успешно стабилизировали систему. Однако наблюдение того, что модельное и DDC-решения настолько близки, хоть это и не требуется, является дополнительным плюсом в пользу DDC.

3. Задача об оптимальном линейно-квадратичном регуляторе

Рассмотрим систему

$$(17) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

с фиксированным начальным условием $x(0) = x_0$; $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Если не указано иное, то рассматриваем оптимизируемый выход

$$z(k) = x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Задача LQR состоит в синтезе закона управления в виде обратной связи по состоянию

$$u(k) = Kx(k), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

который минимизирует критерий качества

$$(18) \quad J(x_0, u) = \sum_{k=1}^{\infty} (x(k)^{\top} Q x(k) + u(k)^{\top} R u(k))$$

и при этом матрица замкнутой системы $A + BK$ устойчива. Предполагается, что матрицы подходящих размерностей $Q = Q^{\top} \succcurlyeq 0$ и $R = R^{\top} \succ 0$ заданы, пара (Q, A) наблюдаема.

Известно (см., например, [88]), что решение данной задачи доставляет регулятор

$$(19) \quad K = -(R + B^{\top} P^+ B)^{-1} B^{\top} P^+ A,$$

где $P^* \in \mathbb{S}_{++}^n$ – единственное решение дискретного уравнения Риккати

$$(20) \quad A^{\top} P A - P - A^{\top} P B (R + B^{\top} P B)^{-1} B^{\top} P A + Q = 0.$$

При этом получаем минимум функционала качества

$$(21) \quad J_{MBC}^{LQR} = x_0^{\top} P^* x_0.$$

Если матрицы A и B неизвестны, то в рамках управления на основе данных на данный момент имеется несколько способов решения. Большинство из них основано на применении функции Ляпунова и неравенства Риккати и использует различные способы параметризации системы на основе данных. Ниже рассмотрим подходы на основе фундаментальной леммы (подраздел 3.1) и концепции информативности данных (подраздел 3.2). Также будут представлены результаты для задачи о синтезе субоптимального линейно-квадратичного регулятора с условием информативности данных (подраздел 3.3) и для задачи LQR на конечном горизонте с фундаментальной леммой (подраздел 3.4).

3.1. Параметризация на основе фундаментальной леммы

Считаем, что выполняется ранговое условие фундаментальной леммы (7).

В [69, 89] исходная задача LQR записывается в виде

$$\min_{P, K} \text{trace}(QP + K^\top RKP)$$

при ограничениях

$$(A + BK)P(A + BK)^\top - P + I \preceq 0, \quad P \succ I.$$

Используя параметризацию (9)–(10), авторы указанных работ переходят к задаче непосредственно на основе измеренных данных следующим образом:

$$\min_{P, K, G} \text{trace}(QP + K^\top RKP)$$

при ограничениях

$$(X_+G)P(X_+G)^\top - P + I \preceq 0, \\ \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G, \quad P \succ I.$$

После замены переменных $Y = KP$ и ряда стандартных преобразований получаем задачу полуопределенного программирования, сформулированную с использованием экспериментальных данных:

$$(22) \quad \min_{Y \in \mathbb{R}^{T \times n}, Z \in \mathbb{R}^{m \times m}} \text{trace}(QX_-Y) + \text{trace}(Z)$$

при ограничениях

$$(23) \quad \begin{bmatrix} X_-Y - I & X_+Y \\ * & X_-Y \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} Z & R^{1/2}UY \\ * & X_-Y \end{bmatrix} \succeq 0,$$

решение которой доставляет оптимальный линейно-квадратичный регулятор

$$(24) \quad \hat{K} = U\hat{Y}(X_- \hat{Y})^{-1}.$$

Для того чтобы гарантировать единственность матрицы G в используемой параметризации $K = UG$, $A + BK = X_+G$, в [89] предлагается дополнить ограничения (23) условием

$$\left(I - \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} \right) Y = 0,$$

при этом оптимальный регулятор по-прежнему будет иметь вид (24).

Доказана теорема ([69], теорема 4) о том, что в случае точных данных (U, X) при выполнении рангового условия фундаментальной леммы регулятор (24) совпадает с точным модельным решением (19).

Очевидно, что для возможности применения данного метода необходимо количество измерений $T \geq n + m$.

3.2. Параметризация на основе концепции информативности данных

Для случае LQR оказывается, что условие информативности данных совпадает с фундаментальной леммой. Оно сформулировано в [18, теорема 28] и состоит в том, что по имеющимся измеренным данным синтез оптимального линейно-квадратичного регулятора возможен тогда и только тогда, когда выполняется ранговое условие фундаментальной леммы (7); отсюда же вытекает ограничение на длину вектора измерений: $T \geq m + n$. Конструктивный алгоритм синтеза оптимальной обратной связи дается там же и состоит из следующих шагов.

Алгоритм 1 ([18], теорема 29).

1. Решить задачу полуопределенного программирования

$$(25) \quad \max_{P \in \mathbb{S}_{++}^n} \text{trace } P$$

при ограничении

$$(26) \quad L(P) \preceq 0,$$

где линейный оператор $P \mapsto L(P)$:

$$L(P) := X_-^\top P X_- - X_+^\top P X_+ - X_-^\top Q X_- - U^\top R U.$$

Полученное единственное решение обозначим через P^* .

2. Найти правую псевдообратную матрицу $\hat{X}_-^\dagger$ такую, что

$$(27) \quad L(P^*) \hat{X}_-^\dagger = 0.$$

3. Оптимальный линейно-квадратичный регулятор вычисляется как

$$(28) \quad \hat{K} = U \hat{X}_-^\dagger,$$

доставляя функционалу (18) наименьшее значение

$$(29) \quad J_{ID}^{LQR} = x_0^\top P^* x_0.$$

При решении задачи LQR с помощью этого алгоритма размерность неизвестной матрицы P всего $n \times n$ и не зависит от длительности измерений, тогда как в задаче (22)–(23) неизвестные матрицы Y и Z имеют размеры $T \times n$ и $m \times t$ соответственно. Несомненным плюсом при решении на основе понятия информативности данных является возможность вычислить минимальное значение функционала (29) непосредственно по измеренным данным, что невозможно сделать способом на основе фундаментальной леммы из предыдущего подраздела.

В [90, 91] предлагается принципиально иной подход к решению задачи LQR на бесконечном горизонте. Векторы измерений конечной длины используются для оценивания расширенной (на 1 шаг вперед) матрицы наблюдаемости и вспомогательной матрицы, по которым затем строится регулятор.

Отмечается [18, 90], что найденное таким способом управление *стремится к оптимальному* по линейно-квадратичному критерию лишь при неограниченном увеличении числа измерений и нельзя гарантировать оптимальность при недостаточно больших длительностях экспериментов. Это отличает упомянутый способ от синтеза оптимального LQR на основе данных с помощью фундаментальной леммы (раздел 3.1) и концепции информативности данных (раздел 3.2), где *точное оптимальное* решение получают по набору данных конечной длины, поэтому не будем останавливаться на нем подробнее.

3.3. Субоптимальный LQR с условием информативности данных

Концепция информативности данных оказалась также весьма полезной для синтеза субоптимального линейно-квадратичного управления. В [92] показано, как для системы (17) с фиксированным начальным условием $x(0) = x_0$ и оптимизируемым выходом

$$z(k) = Cx(k) + B_2u(k)$$

с известными матрицами $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ построить по измеренным данным конечной длины закон управления в виде обратной связи $u = Kx$ такой, что матрица замкнутой системы $A + BK$ устойчива по Шуру и квадратичный критерий качества (18) принимает значения меньше заданного $\gamma > 0$: $J(x_0, u) < \gamma$.

Авторы опираются в своих выкладках на следующее утверждение [92, предложение 1]: если матрицы A , B известны, то K является субоптимальным линейно-квадратичным регулятором тогда и только тогда, когда существует матрица $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, такая что

$$(A + BK)^\top P(A + BK) - P + Q + K^\top RK \prec 0, \\ x_0^\top P x_0 \prec \gamma.$$

В случае неизвестных матриц системы при построении субоптимального LQR используется условие информативности данных (U, X) для стабилизации системы обратной связью $u = Kx$ (раздел 2.2, теорема 2).

В результате получена теорема (см. [92], теорема 9), в которой утверждается, что при заданных x_0 и $\gamma > 0$ по измеренным данным возможно построить субоптимальный линейно-квадратичный регулятор тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ и правая псевдообратная $X_-^\dagger$ к X_- такие, что

$$(X_+ X_-^\dagger)^\top P X_+ X_-^\dagger - P + Q + (U X_-^\dagger)^\top R U X_-^\dagger \prec 0, \\ x_0^\top P x_0 \prec \gamma.$$

Для найденной $\hat{X}_-^\dagger$ субоптимальный линейно-квадратичный регулятор имеет вид $\hat{K} = U \hat{X}_-^\dagger$.

Для вычислений удобнее перейти к задаче в форме ЛМН с помощью стандартных преобразований. Для этого положим в (18) $Q = C^\top C$, $R = B_2^\top B_2$, $C^\top B_2 = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ и после стандартных преобразований получаем следующую формулировку.

Предложение 1 [92, предложение 10]. *Данные (U, X) информативны для субоптимального линейно-квадратичного управления тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такие, что выполняются*

$$(30) \quad \begin{bmatrix} P & * & * \\ X_+ Y & P & * \\ (CX_- + B_2 U)Y & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \gamma & * \\ x_0^\top & P \end{bmatrix} \succ 0, \\ P = X_- Y.$$

Более того, K является субоптимальным линейно-квадратичным регулятором для всех систем с матрицами $(A, B) \in \Sigma$ из (5) тогда и только тогда, когда $\hat{K} = U \hat{Y} \hat{P}^{-1}$ для некоторых матриц $\hat{P}$, $\hat{Y}$, найденных из (30).

Для выполнения этих условий матрица X_- должна иметь полный ранг, т.е. для синтеза субоптимального линейно-квадратичного регулятора приведенным способом требуется всего $T \geq n$ измерений входа и выхода. Напомним, что для однозначной идентификации матриц A , B системы и для построения оптимального LQR (подразделы 3.1 и 3.2) требуется $T \geq n + m$ измерений.

Далее приведем один из способов решения задачи синтеза оптимального линейно-квадратичного регулятора на конечном горизонте по конечному набору измеренных данных и ниже в примере сравним его точность с методами для бесконечного горизонта.

3.4. LQR на конечном горизонте на основе фундаментальной леммы

В [93] рассматривается задача об оптимальном линейно-квадратичном регуляторе на конечном горизонте $N \geq 0$ для системы (17), а именно, задан критерий качества

$$J = x(N)^\top Q_f x(N) + \sum_{k=1}^{N-1} (x^\top Q x + u^\top R u),$$

где $Q_f \succ 0$.

При известных матрицах A , B оптимальное решение в форме последовательности $u^*(0), \dots, u^*(N-1)$ с $u^*(k) = K(k)x(k)$, $k = 1, \dots, N-1$, дается соотношением

$$(31) \quad K(k) = -(R + B^\top P(k+1)B)^{-1} B^\top P(k+1)A,$$

где $P(k)$ – решение дискретного уравнения Риккати

$$P(k) = A^\top P(k+1)A - A^\top P(k+1)B(R + B^\top P(k+1)B)^{-1} B^\top P(k+1)A + Q, \\ P(N) = Q_f.$$

Очевидно, что управление (31) зависит от времени и определено на временном интервале $[0, N]$. При $N \rightarrow \infty$ при наблюдаемых матрицах (Q, A) последовательность матриц $P(k)$ сходится к матрице P^+ , которая является решением дискретного уравнения Риккати (20), при этом получим оптимальный линейно-квадратичный регулятор на бесконечном горизонте (19).

При неизвестных матрицах A, B используется параметризация задачи на основе данных (8) с применением фундаментальной леммы (7). Доказана

Теорема 5 [93, теорема 3]. Оптимальным решением задачи об LQR на конечном горизонте является последовательность $K = (K_0, \dots, K_{N-1})$ такая, что

$$(32) \quad \hat{K}_k = U \hat{Y}_k \hat{P}_k^{-1},$$

где матрицы $\hat{P}_k \in \mathbb{S}_{++}^n$, $\hat{Y}_k \in \mathbb{R}^{T \times n}$ являются решением задачи полуопределенного программирования

$$(33) \quad \min_{P_k, Y_k, Z_k} \text{trace}(Q_f P_N) + \sum_{k=1}^{N-1} (\text{trace} Q P_k + \text{trace} Z_k)$$

при ограничениях

$$(34) \quad \begin{aligned} P_0 &\succcurlyeq I_n, \quad P_k = X_- Y_k, \\ \begin{bmatrix} P_{k+1} - I_n & X_+ Y_k \\ * & P_k \end{bmatrix} &\succcurlyeq 0, \quad \begin{bmatrix} Z_k & R^{1/2} U Y_k \\ * & P_k \end{bmatrix} &\succcurlyeq 0, \quad k = 0, \dots, N-1, \\ P &= (P_1, \dots, P_N), \quad Y = (Y_0, \dots, Y_{N-1}), \quad Z = (Z_0, \dots, Z_{N-1}). \end{aligned}$$

Для наблюдаемой пары (Q, A) при $N \rightarrow \infty$ это решение сходится к оптимальному решению задачи LQR на бесконечном горизонте (19), а минимальное необходимое количество измерений диктуется фундаментальной леммой: $T \geq n + m$. Важно, что размерность матричных переменных Y_k зависит от T . Еще одна отличительная особенность заложена в самой постановке и в методе решения задачи и заключается в том, что решением является не одно значение матрицы K , а целый набор.

Упомянем здесь другой способ синтеза оптимального LQR на конечном горизонте по измеренным данным из [94] (не будем его приводить для краткости изложения), где комбинируются условия стабилизации и классического LQR на конечном горизонте.

Пример 2. Для сравнения приведенных выше методов решения задачи LQR рассмотрим более общую модель реактора из примера 1 с матрицами (16) и оптимизируемым выходом

$$z(k) = Cx(k) + B_2 u(k),$$

положив $C = I$, $B_2 = 0$, так что $C^\top B_2 = 0$. Зададим матрицы $Q = I$, $R = I$. Измерения входа и выхода системы генерируем при $T = 10$ тем же образом,

как в примере 1, тогда выполняются условия применимости всех приведенных методов.

Найдем модельный оптимальный линейно-квадратичный регулятор по формулам (19)–(20) (либо в среде MatLab с помощью функции `idare`):

$$\hat{K}_{mbc}^{LQR} = \begin{bmatrix} 0,0811 & -0,7246 & -0,1444 & -0,6792 \\ 2,1509 & 0,0667 & 1,4934 & -0,9709 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_{mbc}^{LQR} = 3,9116.$$

Решением задачи на основе имеющихся данных с помощью фундаментальной леммы (22)–(24) (подраздел 3.1) и условий информативности данных (25)–(28) (подраздел 3.2) являются соответственно

$$\hat{K}_{fl}^{LQR} = \begin{bmatrix} 0,0811 & -0,7246 & -0,1444 & -0,6791 \\ 2,1508 & 0,0667 & 1,4934 & -0,9709 \end{bmatrix},$$

$$\hat{K}_{di}^{LQR} = \begin{bmatrix} 0,0811 & -0,7246 & -0,1444 & -0,6792 \\ 2,1509 & 0,0667 & 1,4934 & -0,9709 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_{di}^{LQR} = 3,9116.$$

Очевидно, что полученные регуляторы практически совпадают с теоретическим модельным.

Поскольку решения на основе моделей и на основе данных с условиями информативности очень близки: $\|\hat{K}_{mbc}^{LQR} - \hat{K}_{di}^{LQR}\| \approx 4,1350 \cdot 10^{-7}$, то получаем также очень близкие значения функционалов качества (21), (29).

С учетом строго неравенства $J(x_0, u) < \gamma$ в постановке задачи синтеза субоптимального управления (30) из подраздела 3.3 зададим чуть большее значение $\gamma = 3,9117$. Поскольку изначально постановка этой задачи несколько иная, ожидается, что результат при тех же параметрах, где возможно, будет все же отличаться от модельного случая и первых двух методов на основе данных. Так, при заданных выше значениях C , B_2 получаем субоптимальный регулятор:

$$\hat{K}_{sub}^{LQR} = \begin{bmatrix} -0,6008 & -1,5819 & -0,2738 & -2,4524 \\ 3,0702 & -0,0725 & 3,0633 & -2,2513 \end{bmatrix}.$$

Для синтеза оптимального линейно-квадратичного регулятора на конечном горизонте зададим $N = 20$, $Q_f = I$ и решим задачу (33)–(34) (подраздел 3.4). Решением является последовательность управляющих сигналов вида (32): $\hat{K}_{fin}^{LQR} = (\hat{K}_{fin 0}^{LQR}, \dots, \hat{K}_{fin 19}^{LQR})$ (не будем приводить значения в целях сокращения изложения), применяя которые ко входу, получаем траекторию системы на интервале $[0, 20]$.

На рис. 2 приведены траектории оптимизируемых выходов рассматриваемого реактора $z_i(k) = x_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Траектория разомкнутой системы отображена жирным пунктиром с выделенными кружками исходными измерениями X ; для замкнутой системы в модельном случае – $z_{mbc}(k)$, жирная сплошная линия; в методе на основе фундаментальной леммы – $z_{fl}(k)$, тонкая пунктирная линия; в методе с условием информативности данных – $z_{di}(k)$,

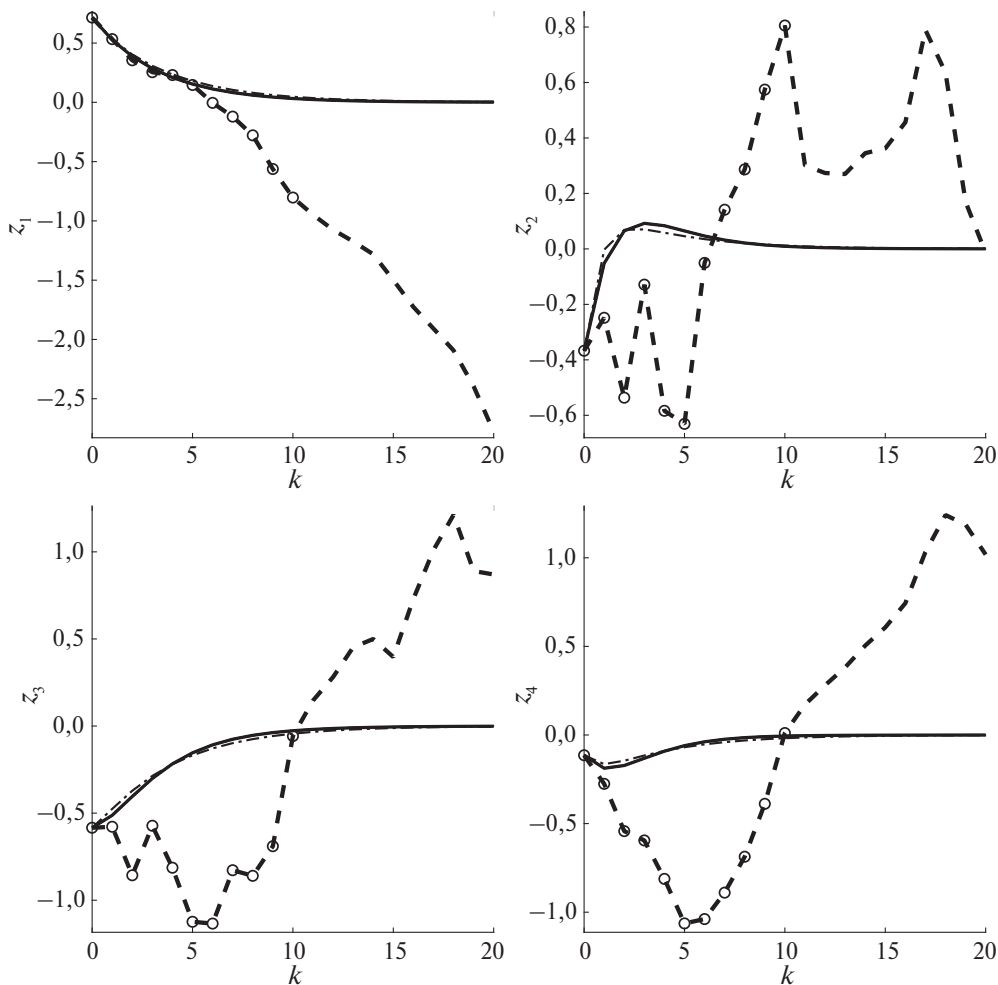


Рис. 2. Траектории выходов системы при решении задачи LQR.

тонкая точечная линия; в случае субоптимального управления – $z_{sub}(k)$, тонкий штрихпунктир; выходы системы с LQR на конечном горизонте – $z_{fin}(k)$, тонкая сплошная линия.

Оценим близость траекторий численно:

$$\begin{aligned} \|z_{mbc}(k) - z_{fl}(k)\|_2 &= 2,3563 \cdot 10^{-5}, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{di}(k)\|_2 = 1,4229 \cdot 10^{-7}, \\ \|z_{mbc}(k) - z_{sub}(k)\|_2 &= 0,1030, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{fin}(k)\|_2 = 0,0066, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В данном примере задан критерий качества и существует единственное оптимальное решение задачи, поэтому близость решений (найденных регуляторов и получаемых выходных траекторий) к теоретическому модельному напрямую характеризует точность рассматриваемых методов DDC. Как видим, методы на основе фундаментальной леммы и с условием информативности данных дают высокую точность. Задача о субоптимальном LQR дает

в целом приемлемое решение, с учетом различий в постановках. Для LQR на конечном горизонте уже при заданных 20 шагах получаем очень близкое к точному решение (в смысле близости траектории $x_{fin}(k)$ к модельной точной $x_{mbc}(k)$), и при увеличении числа шагов N точность будет возрастать.

4. Управление системами с ограниченными внешними возмущениями

В синтезе управления для систем с внешними возмущениями возможны два альтернативных подхода. В первом, который в англоязычной литературе называют Certainty Equivalence, все построения производятся в предположении отсутствия возмущения, но при этом даются оценки его уровня, при котором такое управление не только возможно, но и гарантированно стабилизирует систему с требуемым качеством. Этот подход представляется менее интересным с точки зрения управления на основе данных, поскольку на практике по измеренным значениям входа и состояния и/или выхода системы невозможно оценить границы, в которых можно пренебречь этим, вообще говоря, неизвестным возмущением в силу частой недоступности его измерений; отмечается лишь, что подобные методы управления эффективны при малых возмущениях [89, 95]. С вычислительной точки зрения методы этого направления сводятся к методам на основе точных данных, например приведенным в разделах 2.1, 3.1 и т.п., а основной акцент делается на оценивании допустимого уровня возмущений [69]. В настоящей статье не будем подробно останавливаться на подходе Certainty Equivalence, желающие могут ознакомиться с ним, например, в [18, 69, 89, 96–98].

Второй подход непосредственно учитывает наличие возмущений, пытаясь ограничить их влияние. При этом необходимо каким-либо образом описывать само множество допустимых возмущений, чтобы в результате синтезировать управление (в том числе оптимальное по какому-либо критерию), стабилизирующее систему при любых возможных возмущениях из этого множества. Именно этот подход и рассматривается в следующих разделах применительно к задаче квадратичной стабилизации системы с внешними возмущениями и для задач о синтезе $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления.

4.1. Описание системы и множества возмущений

Рассмотрим дискретную систему общего вида с внешними возмущениями:

$$(35) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1u(k) + Dw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + B_2u(k), \end{aligned}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $z(k) \in \mathbb{R}^l$, матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ при управлении на основе данных неизвестны; матрицы $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ заданы.

Значения возмущений $w(k) \in \mathbb{R}^p$ считаются неизвестными и недоступными для измерения, но некоторую их реализацию длины T будем обозначать как

$$W = [w(0) \quad w(1) \quad \dots \quad w(T-1)] \in \mathbb{R}^{p \times T}.$$

Систему вида

$$(36) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + Dw(k)$$

можно записать в терминах измерений:

$$X_+ = AX_- + B_1U + DW = [B_1 \quad A \quad D] \begin{bmatrix} U \\ X_- \\ W \end{bmatrix},$$

а множество всех систем со всеми такими матрицами (A, B_1, D) , которые способны генерировать данные (U, X, W) , будем обозначать

$$(37) \quad \Sigma_W = \left\{ (A, B_1, D) : X_+ = [B_1 \quad A \quad D] \begin{bmatrix} U \\ X_- \\ W \end{bmatrix} \right\};$$

в том числе получаем, что система вида (36) с точно известными матрицами $(A_{tr}, B_{1tr}, D_{tr})$ также принадлежит этому множеству: $(A_{tr}, B_{1tr}, D_{tr}) \in \Sigma_W$.

Во многих публикациях, посвященных управлению на основе данных системами с внешними возмущениями (например, [19, 20, 83–85, 95]), используется параметризованная форма записи множества допустимых внешних возмущений с использованием квадратичных матричных неравенств. А именно, неизвестная матрица возмущений W должна принадлежать множеству

$$(38) \quad \mathbf{W} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{p \times T} : \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}$$

с заданными матрицами $\Phi_{11} \in \mathbb{S}^p$, $\Phi_{12} \in \mathbb{R}^{p \times T}$, $0 \succ \Phi_{22} \in \mathbb{S}^T$. Далее будем обозначать $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{(n+T) \times (n+T)}$.

Данное неравенство квадратично относительно матрицы возмущений W , откуда вытекает, что все допустимые возмущения содержатся в *матричном эллипсоиде*. Квадратичное матричное неравенство подобного вида удобно для описания множества возмущений тем, что с его помощью можно выразить различные ограничения на возмущения.

Так, при $\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{22} = -I$ получаем возмущение W с ограниченной сверху энергией на протяжении всего времени эксперимента $[0, \dots, T-1]$:

$$(39) \quad WW^\top = \sum_{k=0}^{T-1} w_k w_k^\top \preccurlyeq \Phi_{11}.$$

1. Для W с ограниченным максимальным собственным значением $\sigma_{\max}(W) \leq \hat{\sigma}$ в (39) нужно задать $\Phi_{11} = \hat{\sigma}I$.

2. Для W с ограниченной сверху энергией: для $\|w_k\|_2 \leq \varepsilon$, $k = 0, \dots, T-1$, ограничения записываются как (39) с $\Phi_{11} = \varepsilon^2 TI$. Такое ограничение вносит консерватизм, возрастающий с увеличением T [19].

3. Границы максимальных отклонений каждой компоненты W вида $\|w_{k,j}\|_2 \leq \hat{w}_j$, $k = 0, \dots, T-1$, $j = 1, \dots, p$, можно записать в форме (39) с $\Phi_{11} = \sum_{j=1}^p \hat{w}_j^2 TI$.

4. Случай точных измерений ($w = 0$) можно характеризовать матрицей $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$.

При дальнейших выкладках форма описания множества допустимых возмущений (38) дает возможность использовать матричную S -процедуру [83–85] и матричную лемму Финслера [85]. Приведем их в том виде, в каком они применяются в рассматриваемых нами задачах.

Лемма 2 (строгая матричная S -процедура, [85, предложение 3]). *Даны матрицы $M, N \in \mathbb{S}^{k+l}$ следующего вида:*

$$(40) \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{bmatrix} \quad u \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^\top & N_{22} \end{bmatrix},$$

где $M_{22} \prec 0$, $N_{22} \prec 0$ и $\ker N_{22} \subseteq \ker N_{12}$.

Предположим, что существует некоторая матрица $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{l \times k}$, для которой выполняется

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{Z} \end{bmatrix}^\top N \begin{bmatrix} I \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \succ 0.$$

Тогда квадратичное матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top M \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \succ 0$$

верно для всех $Z \in \mathbb{R}^{l \times k}$, таких что

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top N \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

тогда и только тогда, когда существуют скаляры $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$, для которых

$$M - \alpha N \succcurlyeq \begin{bmatrix} \beta I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 3 (матричная лемма Финслера, [85, теорема 1]). Пусть матрицы $M, N \in \mathbb{S}^{k+l}$ заданы в виде (40) и выполняются следующие условия:

- 1) $M_{11} = 0$, $M_{22} \preccurlyeq 0$;
- 2) $N_{22} \preccurlyeq 0$ и $N_{11} - N_{12}N_{22}^\dagger N_{12}^\top = 0$;
- 3) существует матрица G : $M_{11} + G^\top M_{22}G \succ 0$ и $N_{22}G = N_{12}^\top$.

Тогда неравенство

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top M \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

верно для всех $Z \in \mathbb{R}^{l \times k}$, таких что

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top N \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} = 0,$$

тогда и только тогда, когда существует такой скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$M - \alpha N \succcurlyeq 0.$$

Теперь перейдем к рассмотрению известных методов управления на основе данных системами с ограниченными внешними возмущениями.

4.2. Квадратичная стабилизация систем с внешними возмущениями

Если матрицы A, B_1 в системе с внешними возмущениями

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + Dw(k), \quad \|w_k\|_2 \leq w^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

известны, то, как и в случае системы без возмущений (раздел 2), задача квадратичной стабилизации системы, замкнутой регулятором $u = Kx$, сводится к поиску матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ в неравенстве Ляпунова (3) [80].

В случае неизвестных матриц A, B_1 требуется найти *общую* матрицу квадратичной функции Ляпунова P для всех систем с матрицами $(A, B_1) \in \Sigma_W$ (37).

Ниже покажем, как эта задача решается методами управления на основе данных с помощью фундаментальной леммы и дробно-линейного преобразования (подраздел 4.2.1), концепции информативности данных и квадратичных матричных неравенств (подраздел 4.2.2), с применением фундаментальной леммы и леммы Питерсена (подраздел 4.2.3), с построением квадратичных матричных неравенств отдельно для каждого момента измерения входа и выхода системы (подраздел 4.2.4) и затем сравним данные способы в числовом примере.

4.2.1. Фундаментальная лемма и дробно-линейное преобразование

В [99] для синтеза квадратично стабилизирующего регулятора на основе данных предлагается помимо параметризации, опирающейся на фундаментальную лемму (раздел 2.1), использовать дробно-линейное преобразование (Linear Fractional Transformation, LFT). Исходная система задана в виде

$$(41) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + Dw(k),$$

здесь обозначения те же, что в (35).

Авторы используют эквивалентное к (38) описание множества возмущений:

$$(42) \quad \tilde{\mathbf{W}} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{p \times T} : \begin{bmatrix} W \\ I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ \tilde{\Phi}_{12}^\top & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\},$$

где $\tilde{\Phi}_{11} \in \mathbb{S}^p$, $\tilde{\Phi}_{12} \in \mathbb{R}^{p \times T}$, $\tilde{\Phi}_{22} \in \mathbb{S}_{++}^T$.

Предварительно необходимо параметризовать множество всех систем, замкнутых регулятором $u = Kx$. Так, для записанной в терминах измерений системы

$$X_+ = AX_- + B_1U + DW$$

множество квадратично стабилизирующих регуляторов можно параметризовать с использованием измеренных данных точно так же, как и в (8):

$$\begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G, \quad G \in \mathbb{R}^{T \times n}.$$

И тогда матрица регулятора вычисляется как $K = UG$ при условии $X_-G = I$.

Отсюда получаем параметризацию множества матриц системы (41), замкнутых регулятором с матрицей $K = UG$, на основе измеренных данных:

$$(43) \quad A_G = (X_+ - DW)G$$

при некотором $W \in \tilde{\mathbf{W}}$, таком что $(X_+ - DW) \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix}^\perp = 0$. Здесь $^\perp$ означает матрицу, содержащую базис ядра указанной матрицы.

Как видим, в отличие от (10) здесь параметризация матриц замкнутой системы содержит в качестве параметра неизвестную матрицу возмущений W , т.е. не является единственной.

Далее рассматривается более широкое множество всех устойчивых матриц вида (43) с любыми допустимыми возмущениями из множества $\tilde{\mathbf{W}}$:

$$(44) \quad A_G^{st} = \{A_K : A_K = (X_+ - DW)G, W \in \tilde{\mathbf{W}}\}.$$

Такой переход хотя и приводит к более консервативным результатам, но позволяет избежать вычисления ядра матрицы $[U^\top \ X_-^\top]^\top$ и дает возможность использовать более удобную параметризацию и применять стандартные методы управления. Так, матрицы из (44) представляются в виде нижнего дробно-линейного преобразования замкнутой исходной системы (41) с возмущением $W \in \tilde{\mathbf{W}}$:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{z}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_+G & D \\ -G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{w}(k) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{w}(k) = W\tilde{z}(k),$$

$$X_-G = I.$$

Полученное представление позволило сформулировать следующее

Предложение 2 [99, предложение 6]. Если существуют матрицы $\Psi \succ 0$, $G \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такие, что выполняются

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -\Psi & 0 & 0 & 0 \\ * & -\Psi & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ * & * & * & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_+G & D \\ 0 & I \\ -G & 0 \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$X_-G = I,$$

то регулятор с матрицей $K = UG$ является стабилизирующим для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$.

После конгруэнтного преобразования, применения леммы Шура и замены переменных получаем окончательный результат.

Предложение 3 [99, замечание 7]. Если для данных (U, X) выполняется условие фундаментальной леммы, то решение задачи

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * \\ -\tilde{\Phi}_{12}Y & \tilde{\Phi}_{11} & * & * \\ X_+Y & D & -P & * \\ Y & 0 & 0 & -\tilde{\Phi}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$X_-Y = P$$

относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{T \times n}$ доставляет регулятор $\hat{K} = U\hat{Y}\hat{P}^{-1}$, квадратично стабилизирующий все системы из Σ_W .

Как отмечалось выше, в таком подходе присутствует консерватизм, поскольку в параметризации (43) имеется параметр W , и, кроме того, строится общая функция Ляпунова для всего множества систем $(A, B_1) \in \Sigma_W$, соотносящихся с измерениями (U, X) .

Здесь размерность матричной переменной Y зависит от объема данных T , а поскольку метод опирается на фундаментальную лемму, должно выполняться ранговое условие (7), т.е. $T \geq n + m$.

4.2.2. Условие информативности данных на основе
квадратичных матричных неравенств

В [84, 85] рассматривается задача о синтезе управления $u = Kx$, квадратично стабилизирующего обратной связью систему с внешними возмущениями

$$(45) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + w(k),$$

где обозначения те же, что в (35). Здесь рассматривается случай $D = I$, в иных случаях требуется несложная модификация метода [19, 83, 84].

Сначала ограничения задачи записываются в виде квадратичных матричных неравенств. Для этого из представления системы с неизвестными матрицами A , B_1 , W с помощью измеренных значений (U, X) выражается

$$W = X_+ - AX_- - B_1U$$

и подставляется в квадратичное матричное неравенство, описывающее множество допустимых возмущений (38). Получаем

$$(46) \quad \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Далее к аналогичной форме приводится условие квадратичной стабилизации всех систем $(A, B_1) \in \Sigma$ с помощью общей функции Ляпунова:

$$(A + B_1K)P(A + B_1K)^\top - P \prec 0, \quad P \in \mathbb{S}_{++}^n;$$

получаем квадратичное матричное неравенство относительно неизвестных матриц A и B_1 :

$$(47) \quad \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & * & * \\ 0 & -P & * \\ 0 & -KP & -KPK^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \succ 0.$$

К полученным квадратичным матричным неравенствам применяем строгую матричную S -процедуру (лемма 2, раздел 4.1), взяв матрицу M из (47), а N – из (46). В результате получаем следующее предложение, которое дает необходимое и достаточное условие информативности данных для квадратичной стабилизации системы с внешними возмущениями.

Предложение 4 [85, предложение 4]. Если для некоторой матрицы $Z \in \mathbb{R}^{(n+m) \times n}$ выполняется условие (Слейтера)

$$\begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \succ 0,$$

то данные (U, X) , сгенерированные системой (45), информативны для квадратичной стабилизации обратной связью по состоянию тогда и только то-

гда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скаляр $\beta > 0$, такие что

$$(48) \quad \begin{bmatrix} P - \beta I & * & * & * \\ 0 & -P & * & * \\ 0 & -Y & 0 & * \\ 0 & 0 & Y^\top & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0.$$

Для таких $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ при некотором $\hat{\beta}$ стабилизирующий регулятор имеет вид $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$.

В данном подходе ограничением на длительность измерений служит требование полного ранга матрицы X_- , вытекающее из условия информативности данных для существования регулятора, стабилизирующего все множество систем $(A, B_1) \in \Sigma_W$ [18]. Таким образом, должно быть $T \geq n$.

А если еще дополнительно к условиям приведенного предложения будет $\Phi_{22} \prec 0$ и $\text{rank} [U^\top \ X_-^\top]^\top = n + m$ (т.е. выполняется фундаментальная лемма), то условие (48) принимает вид строгого неравенства [19]:

$$(49) \quad \begin{bmatrix} P & * & * & * \\ 0 & -P & * & * \\ 0 & -Y & 0 & * \\ 0 & 0 & Y^\top & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succ 0,$$

решение которого доставляет регулятор того же вида: $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$.

Замечание 3. В приведенных формулах для упрощения скаляр α , присутствующий в исходной публикации [84], включен в линейно входящие в матричное неравенство переменные P , Y , β .

Замечание 4. В [84, 85] показано, что квадратичная стабилизация при точных данных (см. раздел 2, теорема 4) является частным случаем приведенного предложения (при $\Phi_{11} = 0$, $\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{22} = -I$). Однако здесь условие Слейтера не выполняется, поскольку матрица

$$N = \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top$$

не является положительно определенной. Тем не менее можно установить связь между этими двумя случаями с помощью матричной леммы Финслера (см. лемму 3 в разделе 4.1), для которой не требуется выполнение условия Слейтера [85]. Этот результат, подробно рассмотренный в [85], и был приведен выше в разделе 2.3.

Авторы также отмечают, что представленный метод неконсервативен, а также удобен для использования больших наборов данных, поскольку размерность ЛМН здесь не зависит от T . Так, с учетом ограниче-

ний на $P \succ 0$ и $\beta > 0$ линейное матричное неравенство (48) имеет размерность $4n + m + 1$ и содержит $\frac{n(n+1)}{2} + nm + 1$ неизвестных. В [20, теорема 3] показано, что этот результат можно улучшить в плане уменьшения вычислительной сложности, так что размерность ЛМН будет равна $4n + 1$ с $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ неизвестными.

4.2.3. Фундаментальная лемма и лемма Питерсена

В [95] рассматривается система в том же виде, как в предыдущем подразделе:

$$(50) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + w(k),$$

где возмущения $w(k) \in \mathbb{R}^n$ имеют ограниченную энергию и их множество описывается квадратичным матричным неравенством

$$(51) \quad \bar{\mathbf{W}} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{n \times T} : \begin{bmatrix} I & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta\Delta^\top & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix} \preceq 0 \right\}, \quad \Delta > 0.$$

Как видно, это описание эквивалентно (39) с $\Phi_{11} = \Delta\Delta^\top$, но возможно также применение более обобщенного описания вида (38) (здесь не рассматривается).

В отличие от раздела 4.2.2 здесь авторы действуют при выполнении условия фундаментальной леммы (7) и предлагают описание множества всех систем (A, B_1) , сопоставимых с исходными данными (U, X) при возмущениях $W \in \bar{\mathbf{W}}$, в виде *матричного эллипсоида*. Так, используя квадратичное матричное неравенство из (51), получаем множество систем

$$(52) \quad \Sigma_E = \left\{ (A, B_1) : \begin{bmatrix} I & A & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & * \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \preceq 0 \right\} = \\ = \{[A \ B_1] = Z^\top : \mathbf{C} + \mathbf{B}^\top Z + Z^\top \mathbf{B} + Z^\top \mathbf{A} Z \preceq 0\},$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix}^\top$, $\mathbf{B} = -X_+ \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix}^\top$, $\mathbf{C} = X_+ X_+^\top - \Delta\Delta^\top$.

Условие фундаментальной леммы гарантирует, что $\mathbf{A} \succ 0$, и тогда этот матричный эллипсоид можно сначала представить в более удобной форме:

$$\Sigma_E = \{[A \ B_1] = Z^\top : (Z - \zeta)^\top \mathbf{A} (Z - \zeta) \preceq \mathbf{Q}\},$$

где $\zeta := -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{Q} := \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C}$, а затем, доказав, что $\mathbf{Q} \succcurlyeq 0$ [95], перейти к эквивалентной параметризации множества систем Σ_E (52) также в виде матричного эллипсоида:

$$(53) \quad \mathcal{E} = \left\{ (\zeta + \mathbf{A}^{-1/2} \Upsilon \mathbf{Q}^{1/2})^\top : \|\Upsilon\| \leq 0 \right\}.$$

Далее используется условие квадратичной стабилизации на основе функции Ляпунова

$$P - (A + B_1 K)P(A + B_1 K)^\top \succ 0$$

относительно неизвестных матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, Y , которое приводится к форме квадратичного матричного неравенства относительно неизвестных матриц A и B_1 :

$$(54) \quad P - [A \ B_1] \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} P P^{-1} P \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix}^\top [A \ B_1]^\top \succ 0.$$

Приведем использующуюся далее лемму Питерсена [100, 101] в строгой формулировке.

Лемма 4 (строгая лемма Питерсена). Пусть $G \in \mathbb{S}^n$, $M \neq 0$, $N \neq 0$ – матрицы соответствующих размерностей, $\tilde{\Delta} \in \mathbb{S}^q$, $\tilde{\Delta} \succcurlyeq 0$, и пусть

$$\mathcal{F} := \{\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q} : \Delta^\top \Delta \preccurlyeq \tilde{\Delta}\};$$

тогда неравенство

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \prec 0$$

выполняется для всех $\Delta \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$G + \varepsilon M M^\top + \varepsilon^{-1} N^\top \tilde{\Delta} N^\top \prec 0.$$

В результате совместного применения параметризации (53), условия (54) и строгой леммы Питерсена доказано следующее необходимое и достаточное условие построения квадратично стабилизирующего регулятора на основе измеренных данных (здесь для удобства и краткости изложения сразу перейдем к обозначениям через исходные данные (U, X)).

Теорема 6 [95, теорема 1]. Для измеренных данных (U, X) системы (50), удовлетворяющих ранговому условию фундаментальной леммы, решение ЛМН (если существует)

$$(55) \quad \begin{bmatrix} P + X_+ X_+^\top - \Delta \Delta^\top & * & * \\ 0 & P & * \\ X_+ \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix}^\top & - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_- \\ U \end{bmatrix}^\top \end{bmatrix} \succ 0$$

относительно неизвестных матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ доставляет регулятор $\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$, квадратично стабилизирующий все системы $(A, B_1) \in \Sigma_E$.

Примечательно, что условие (55) при применении леммы Шура оказывается очень похожим на условие (48) в предыдущем разделе. Но при этом есть и существенные различия. Так, при выводе (48) использовалось условие

Слейтера и не требовалось выполнение рангового условия фундаментальной леммы, поэтому способ из раздела 4.2.2 может охватить случай неограниченного множества Σ_E , но не включает в себя непосредственным образом случай точно заданных данных (однако, как уже отмечалось, при некотором изменении формулировок и применении матричной леммы Финслера это становится возможным [85, теорема 2]).

Поскольку предлагаемый способ основан на фундаментальной лемме, для выполнения рангового условия требуется количество измерений $T \geq n + m$. Однако несомненным плюсом является то, что размеры переменных в (55) не зависят от длины используемых данных.

4.2.4. Квадратичные матричные неравенства для отдельных моментов измерений входа и выхода системы

В статье [102], вышедшей чуть раньше работы [95], упомянутой в предыдущем разделе, те же авторы также используют представление множества достижимости системы (50) в виде матричного эллипса, а сам способ синтеза квадратично стабилизирующего регулятора по форме очень близок к рассмотренному в разделе 4.2.2 (см. [84, 85]), однако есть существенные отличия, которые значительно уменьшают консерватизм. А именно: используются ограничения для внешних возмущений в каждый момент времени: $\|w_k\|_2 \leq \varepsilon$, $k = 0, 1, \dots, T - 1$, тогда как в предыдущих методах возмущения, как правило, имеют ограниченную сверху энергию всей последовательности векторов $W = [w(0) \ w(1) \ \dots \ w(T - 1)]$: $WW^\top \preceq \varepsilon^2 TI$, что увеличивает консерватизм с возрастанием T .

Благодаря такому предположению множество систем (A, B_1) , способных генерировать данные (U, X) , можно описать с помощью отдельных соотношений в каждый момент времени:

$$\Sigma_i = \{(A, B_1) : x_{i+1} = Ax_i + B_1 u_i + w_i, \quad w_i w_i^\top \preceq \varepsilon^2 I\} \quad i = 0, \dots, T - 1.$$

Отсюда получаем квадратичное неравенство вида (46) отдельно для каждого момента измерения:

$$\begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad i = 0, \dots, T - 1,$$

где матрицы вида (38) описывают множество допустимых возмущений:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varepsilon^2 I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

И тогда множество *всех* систем (A, B_1) , которые могут генерировать *все* полученные измерения в моменты времени $i = 0, 1, \dots, T - 1$, является пересечением

$$\Sigma_c = \bigcap_{i=0}^{T-1} \Sigma_i.$$

Авторы доказывают [102, предложение 3], что множество, полученное таким пересечением, является *подмножеством* всех систем вида

$$\begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^2 T I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

(т.е. использующих векторы, составленные из измерений, и в предположении ограниченной энергии внешних возмущений, см. (46)) и, соответственно, подмножеством множества систем Σ_E из (52). Таким образом, предлагаемый в настоящем разделе метод является менее консервативным, чем в разделах 4.2.2 и 4.2.3, и дает более точный результат при возрастании числа измерений T (сравнения и доказательства см. подробнее в [102]).

Затем авторы предлагают способ непосредственного представления множества достижимости по измеренным данным, что в итоге приводит к методу синтеза квадратично стабилизирующего регулятора. Основные выкладки здесь приводить не будем, поскольку они аналогичны представленным в разделе 4.2.2, но с учетом соотношений отдельно для каждого момента измерений входа и выхода. В результате получено следующее

Предложение 5 [102, предложение 1]. Пусть выполняется условие фундаментальной леммы (7). Решение задачи

$$\begin{bmatrix} P - \beta I & * & * & * \\ 0 & -P & * & * \\ 0 & -Y & 0 & * \\ 0 & 0 & Y^\top & P \end{bmatrix} - \sum_{i=0}^{T-1} \tau_i \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^2 I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0,$$

$$i = 0, \dots, T-1,$$

относительно неизвестных матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скалярных переменных $\beta > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 0, \dots, T-1$, доставляет регулятор $\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$, квадратично стабилизирующий все системы $(A, B_1) \in \Sigma_c$.

Очевидно, в этой задаче размерности матричных переменных не зависят от длины векторов экспериментальных данных, но количество скалярных переменных возрастает с увеличением числа используемых измерений. Вообще говоря, изначально не требуется выполнение условий фундаментальной леммы, так что ограничение на длительность измерений вытекает из условия информативности данных для стабилизации: $T \geq n$. Но авторы отмечают [102, замечание 1]), что выполнение условия $T \geq n + m$ гарантирует замкнутость множества достижимости и облегчает решение ЛМН. Кроме того, увеличение числа используемых измерений ведет к более точному решению, но также может приводить к вычислительным сложностям, поэтому при решении задач больших размерностей и с большими объемами данных приходится выбирать некий консенсус при выборе между точностью и сложностью вычислений либо применять другие методы.

Применение отдельных измерений вместо составленных из них векторов в целом отличает этот способ от большинства подходов, рассматриваемых в настоящем обзоре.

Пример 3. Рассмотрим химический реактор периодического действия из примера 1. Для моделирования действия на него ограниченных внешних возмущений $\|w_k\|_2 \leq \varepsilon$, $k = 0, \dots, T-1$, зададим $D = I$, $T = 10$.

Поскольку все примеры в настоящем обзоре носят иллюстративный характер, здесь и далее приводим результаты для единственной реализации внешнего возмущения W с очень малым ε для того, чтобы во всех рассматриваемых методах гарантированно получить решение. Так, зададим $\varepsilon = 0,001$ и сгенерируем последовательность величин $\check{w}(k) \in \mathbb{R}^n$, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$. Возьмем

$$w(k) = \varepsilon \frac{\check{w}(k)}{\|\check{w}(k)\|_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вектор входных значений U и начальное условие $x(0)$ используем те же, что и в примере 1.

В традиционном модельном подходе в случае наличия в системе вида (36) ограниченных внешних возмущений с $\|w(k)\|_2 \leq 1$ (и при $D = I$, как в рассматриваемом случае) регулятор дается решением задачи того же вида (3), что и в случае системы без возмущений:

$$\hat{K}_{mbc}^{st} = \begin{bmatrix} 0,6377 & -1,4696 & 0,0944 & -1,2149 \\ 3,0471 & 0,0622 & 2,9947 & -0,7239 \end{bmatrix}.$$

В результате решения задачи на основе дробно-линейного преобразования (предложение 3 в подразделе 4.2.1) получаем регулятор

$$\hat{K}_{lft}^{st} = \begin{bmatrix} 1,0018 & -1,4901 & 0,1370 & -1,8788 \\ 4,1643 & -0,0818 & 3,2851 & -2,5132 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в данном случае длительность эксперимента и входное воздействие выбраны так, что выполняется фундаментальная лемма, в методе с условием информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств (подраздел 4.2.2, предложение 4) будем использовать для решения неравенство (49). Получаем

$$\hat{K}_{qni}^{st} = \begin{bmatrix} 0,9949 & -1,5262 & 0,1471 & -1,9208 \\ 4,1617 & -0,0413 & 3,2424 & -2,4442 \end{bmatrix}.$$

Для стабилизации с использованием леммы Питерсена получаем значение неопределенности $\Delta = \varepsilon\sqrt{T}I = 0,0032I_4$, и решение задачи из теоремы 6 (подраздел 4.2.3) доставляет регулятор

$$\hat{K}_{pet}^{st} = \begin{bmatrix} 0,9894 & -1,5534 & 0,1013 & -1,9177 \\ 4,1600 & 0,0096 & 3,2913 & -2,4432 \end{bmatrix}.$$

Способ с отдельными квадратичными матричными неравенствами для каждого момента измерения (подраздел 4.2.4, предложение 5) дает более

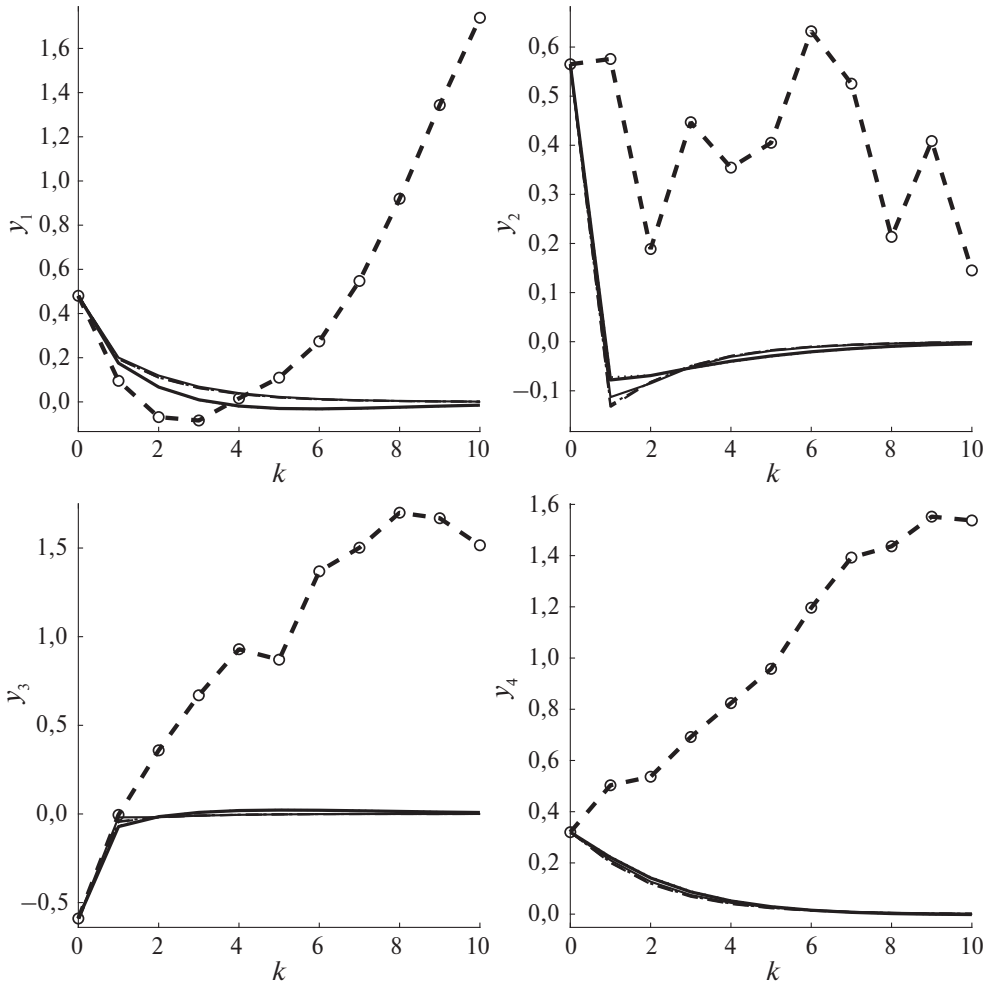


Рис. 3. Траектории выходов при решении задачи квадратичной стабилизации системы с внешними возмущениями.

точный результат при большем числе измерений, поэтому для него зададим $T = 20$. Таким образом, получим значения двадцати скалярных переменных $\hat{\tau}_i$, которые здесь для краткости не будем приводить, и $\hat{\beta} = 9,9971 \cdot 10^{-7}$. При этих значениях получен регулятор

$$\hat{K}_{ins}^{st} = \begin{bmatrix} 0,6576 & -1,4449 & 0,1234 & -1,1973 \\ 3,0850 & 0,0522 & 3,0250 & -0,7318 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3 приведены траектории выходов рассматриваемого реактора $y_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Здесь выход разомкнутой системы обозначен жирным пунктиром с выделенными кружками измерениями X ; выходы замкнутой системы: в модельном случае – $y_{mbc}(k)$, жирная сплошная линия; в методе на основе дробно-линейного преобразования – $y_{lft}(k)$, тонкая сплошная линия; с условием информативности данных на основе квадратичных мат-

ричных неравенств $-y_{qmi}(k)$, тонкая пунктирная линия; с применением леммы Питерсена $-y_{pet}(k)$, тонкая штрихпунктирная линия; с квадратичными матричными неравенствами в отдельные моменты времени $-y_{ins}(k)$, тонкая точечная линия.

Оценки близости траекторий следующие:

$$\begin{aligned} \|y_{mbc}(k) - y_{lft}(k)\|_2 &= 0,1409, & \|y_{mbc}(k) - y_{qmi}(k)\|_2 &= 0,1328, \\ \|y_{mbc}(k) - y_{pet}(k)\|_2 &= 0,1338, & \|y_{mbc}(k) - y_{ins}(k)\|_2 &= 0,0079, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что все используемые методы стабилизируют систему, т.е. цель управления во всех случаях достигнута, и при этом точность (в смысле близости матриц регулятора либо близости траекторий с модельными), вообще говоря, не требуется по постановке задачи. Однако наиболее точным в данном примере оказался метод с использованием отдельных измерений, что в целом совпадает с ожиданиями в связи с его устройством, нацеленным на уменьшение консерватизма.

Читателей, интересующихся более глубокими исследованиями работоспособности приведенных в обзоре методов для систем с внешними возмущениями при больших областях неопределенности и при различных реализациях возмущений, а также зависимости гарантированных оценок качества от уровня значений возмущений и от длительностей эксперимента, направляем к соответствующим исходным публикациям по каждому методу.

4.3. $\mathcal{H}_2$ -оптимальное управление

Рассматривается линейная дискретная стационарная система с внешними возмущениями

$$(56) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 u(k) + Dw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + B_2 u(k), \end{aligned}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $z(k) \in \mathbb{R}^l$, $w(k) \in \mathbb{R}^p$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$; матрицы $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ заданы.

Система замкнута обратной связью $u = Kx$. Рассматривается $\mathcal{H}_2$ -норма передаточной функции от w к z :

$$G(z) = (C + B_2 K)(zI - (A + B_1 K))^{-1} D.$$

Задача субоптимального $\mathcal{H}_2$ -управления состоит в отыскании такого закона управления $u = Kx$, чтобы для некоторого $\gamma > 0$ выполнялось $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \gamma$. В случае наименьшего $\gamma = \gamma^*$ получаем оптимальное $\mathcal{H}_2$ -управление и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} = \gamma^*$.

При известных матрицах A и B_1 решение дается следующим утверждением: матрица $A + B_1 K$ устойчива по Шуру и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} = \gamma$ тогда и только тогда, когда существует матрица $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, такая что

$$(57) \quad \begin{aligned} P &\succ (A + B_1 K)^\top P (A + B_1 K) + (C + B_2 K)^\top (C + B_2 K), \\ \text{trace } D^\top P D &< \gamma^2. \end{aligned}$$

В терминах линейных матричных неравенств задача формулируется следующим образом [103].

Для системы (56) существует $\mathcal{H}_2$ -оптимальное управление вида $u = Kx$ тогда и только тогда, когда существует решение задачи выпуклого программирования

$$(58) \quad \min_{P, Y, Z} \gamma$$

$$\begin{bmatrix} P & AP + B_1 Y & D \\ * & P & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} Z & CP + B_2 Y \\ * & P \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\text{trace } Z < \gamma^2, \quad \gamma > 0,$$

относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z \in \mathbb{S}_{++}^p$. При этом $\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} = \hat{\gamma}$.

При неизвестных матрицах A , B_1 получаем аналогичную постановку: по измерениям U , X сигналов системы необходимо синтезировать закон управления в виде статической обратной связи по состоянию такой, чтобы замкнутая система была устойчива и для всего множества систем, соответствующих полученным измерениям, выполнялось $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \gamma$.

В следующих подразделах приведем методы решения этой задачи, основанные на условии информативности данных и квадратичных матричных неравенствах (подраздел 4.3.1), субоптимальном управлении с условием информативности данных (подраздел 4.3.2), метод на основе фундаментальной леммы с разделением матриц системы и матрицы Ляпунова в линейном матричном неравенстве (подраздел 4.3.3) и метод с использованием квадратичных матричных неравенств для отдельных моментов измерений входа и выхода (подраздел 4.3.4).

4.3.1. Условие информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств

В [19, 84] предлагается синтезировать $\mathcal{H}_2$ -субоптимальный регулятор с помощью параметризации матриц замкнутой системы, соотносящихся с экспериментальными данными. Основной идеей этого подхода является применение в рамках концепции информативности данных квадратичных матричных неравенств для описания как множества соответствующих систем, так и целей управления.

Рассматривается система вида (56) с $D = I$ и внешними возмущениями w , описываемыми (38). Случай $D \neq I$ требует незначительных изменений, см. [19, 83, 84].

Сначала условие (57) преобразуется к квадратичному матричному неравенству относительно неизвестных A , B_1 , а затем к полученному выражению применяется строгая матричная S -процедура (лемма 2 в разделе 4.1). В итоге сформулирована

Теорема 7 [84, теорема 17]. Если для некоторой матрицы $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times n}$ выполняется условие Слейтера

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{Z} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

то данные (U, X) , сгенерированные системой (56), информативны для $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления при $\gamma > 0$ тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z \in \mathbb{S}_{++}^n$ и скаляры $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, такие что

$$\begin{bmatrix} P - \beta I & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & P & Y^\top & P & * \\ 0 & 0 & 0 & CP + B_2Y & I \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} P & * \\ CP + B_2Y & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} Z & * \\ I & P \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\text{trace } Z < \gamma^2.$$

Для полученных $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ при некоторых $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ $\mathcal{H}_2$ -субоптимальный регулятор имеет вид $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} < \hat{\gamma}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$.

Отметим, что размерность матричных переменных здесь не зависит от объема данных, который в данном случае ограничивается лишь условием информативности для стабилизации системы (13), т.е. $T \geq n$.

4.3.2. $\mathcal{H}_2$ -субоптимальное управление на основе концепции информативности данных

В [92] приведено необходимое и достаточное условие информативности данных для синтеза $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления $u = Kx$ для системы (56) в том случае, когда возможно измерить значения внешних возмущений, т.е. известен вектор $W = [w(0) \ w(1) \ \dots \ w(T-1)] \in \mathbb{R}^{p \times T}$. Это условие принципиально отличает представленный в данном разделе результат от всех остальных, описываемых в настоящем обзоре.

Предложение 6 [92, предложение 15]. Данные (U, X, W) информативны для $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления тогда и только тогда, когда для заданного $\gamma > 0$ выполняется как минимум одно из условий:

1. Существует матрица $Q \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такая, что $X_-Q = (X_-Q)^\top$,

$$\begin{bmatrix} W_- \\ CX_- + B_2U \end{bmatrix} Q = 0 \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} X_-Q & * \\ X_+Q & X_-Q \end{bmatrix} \succ 0.$$

2. Существуют правая псевдообратная матрица $W_-^\dagger$ и матрицы $Y \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{T \times n}$ такие, что $X_-Q = (X_-Q)^\top$, $W_-Q = X_-W_-^\dagger = UW_-^\dagger = 0$ и

$$\begin{bmatrix} X_-Q & * & * \\ X_+Q & X_-Q & * \\ (CX_- + B_2U)Q & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} Y & * \\ X_+W_-^\dagger & X_-Q \end{bmatrix} \succ 0, \\ \text{trace}(Y) < \gamma.$$

При этом K является $\mathcal{H}_2$ -субоптимальным регулятором для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} < \gamma$ тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\hat{Q}$, удовлетворяющей условиям 1 или 2, регулятор можно записать в виде $\hat{K} = U\hat{Q}(X_- \hat{Q})^{-1}$.

Очевидно, что при таком способе решения размерность переменной матрицы в ЛМН зависит от длительности эксперимента T и, соответственно, от объема используемых данных. Для данной задачи условие информативности накладывает ограничение $T \geq n$ (подраздел 2.2, теорема 2). Таким образом, требования к минимальному объему данных мягче, чем условие фундаментальной леммы, но тем не менее при больших T могут возникать вычислительные трудности.

Замечание 5. Задача о субоптимальном LQR из раздела 3.3 является частным случаем представленной здесь задачи о $\mathcal{H}_2$ -субоптимальном регуляторе при $D = x_0$, $CC^\top = Q$, $B_2B_2^\top = R$, $C^\top B_2 = 0$, однако эти два метода немного отличаются в способе использования исходных данных при решении.

Предположение о том, что известен вектор измерений внешних возмущений W , на практике реализуется нечасто, что является основным недостатком данного метода. Однако в случае выполнения этого условия метод показывает хорошие результаты (рассмотрим это в примере 4 ниже).

4.3.3. $\mathcal{H}_2$ -субоптимальное управление на основе квадратичных матричных неравенств и с дополнительной матрицей

В случае полностью известной системы в плане уменьшения консервативности хорошо себя зарекомендовал способ из [104, 105], заключающийся в построении ЛМН с разделением матриц системы A и матрицы Ляпунова путем введения дополнительной матричной переменной. Так, в [106] данное условие предлагается использовать для синтеза γ -субоптимального $\mathcal{H}_2$ -регулятора, в том числе и для регулятора фиксированной разреженной структуры (путем добавления в систему дополнительных ограничений). Способ разделения матриц здесь совмещен с применением квадратичных матричных неравенств, и метод опирается на концепцию информативности данных.

Рассматривается система (56), замкнутая регулятором $u = Kx$.

Если матрицы A , B_1 известны, то параметры γ -субоптимального $\mathcal{H}_2$ -регулятора являются решением задачи из следующей теоремы [105].

Теорема 8 [105, теорема 5]. Регулятор K является γ -субоптимальным $\mathcal{H}_2$ -регулятором для системы (56) тогда и только тогда, когда существу-

ют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{S}^l$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такие, что существует решение

$$\begin{bmatrix} P - DD^\top & AG + B_1Y \\ * & G + G^\top - P \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} Q & CG + B_2Y \\ * & G + G^\top - P \end{bmatrix} \succ 0, \\ \text{trace } Q < \gamma^2,$$

при этом $K = YG^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} < \gamma$.

Переходя к задаче синтеза на основе измеренных данных (U, X) , полагаем, что матрица возмущений W принадлежит рассматриваемому ранее множеству (38):

$$\mathbf{W} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{n \times T} : \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}.$$

Используя результат из [105, теорема 1] и матричную S -процедуру [83], получаем задачу синтеза γ -субоптимального $\mathcal{H}_2$ -регулятора следующего вида:

Теорема 9 [106, теорема 3.2]. *Если для измерений (U, X) системы (56) с ограничением на внешние возмущения вида (38) задача*

$$(59) \quad \min_{P, Q, G, L, \alpha, \beta, \gamma} \gamma \\ \begin{bmatrix} P - DD^\top - \beta I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & G \\ * & * & 0 & Y \\ * & * & * & G + G^\top - P \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\ \begin{bmatrix} Q & CG + B_2Y \\ * & G + G^\top - P \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\ \text{trace } Q \leq \gamma^2$$

относительно матриц $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{S}^l$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скаляров $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ имеет решение $\hat{\gamma}$ при некоторых $\hat{Y}$, $\hat{G}$, то регулятор $\hat{K} = \hat{Y}\hat{G}^{-1}$ является $\hat{\gamma}$ -субоптимальным по $\mathcal{H}_2$ -критерию для всех систем $(A, B_1) \in \Sigma_W$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \gamma$.

Отметим, что здесь в первом ограничении уже не удастся избавиться от множителя α масштабированием других неизвестных, поскольку в первое слагаемое входит постоянный член $DD^\top$.

Преимуществом данного способа получения γ -субоптимального $\mathcal{H}_2$ -регулятора, помимо уже упомянутого снижения степени консерватизма, является независимость вычислительной сложности от объема используемых данных, для которого должно выполняться (13), т.е. $T \geq n$.

4.3.4. Квадратичные матричные неравенства для отдельных моментов измерений входа и выхода системы

Здесь кратко рассмотрим подход из [107] применительно к системе вида (56). По форме он во многом похож на приведенный в предыдущем подраз-

деле, хотя авторы не используют разделение матриц-переменных. Основной идеей здесь является использование ограничений для возмущений в каждый момент времени и последующее применение матричных квадратичных неравенств для каждого момента времени измерений. Так, остаются в силе все предпосылки из раздела 4.2.4, в частности, получаем

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \varepsilon^2 I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{(n+1) \times (n+1)}, \\ \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix}^\top \Psi_i \begin{bmatrix} I \\ A^\top \\ B_1^\top \end{bmatrix} &\succcurlyeq 0, \\ \Psi_i &= \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix}^\top, \quad i = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Таким образом, множество *всех* систем вида (56) с матрицами (A, B_1) , которые могут генерировать *все полученные измерения* в моменты времени $i = 0, 1, T-1$, является пересечением

$$\Sigma_c = \bigcap_{i=0}^{T-1} \Sigma_i.$$

Авторы [107] утверждают, что единственное множество, полученное таким пересечением, является *подмножеством* всех систем из [106], т.е. предлагаемый ими метод является менее консервативным и ведет к более точному результату.

Дальнейшие выкладки повторяют стандартный путь и включают в себя применение матричной S -процедуры, леммы Шура и т.д. В результате получаем следующую задачу относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скалярных переменных $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, T-1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$:

$$(60) \quad \min_{P, Y, Q, \alpha_i, \beta, \gamma} \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} (61) \quad & \begin{bmatrix} P - DD^\top - \beta I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & P \\ * & * & 0 & Y \\ * & * & * & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T-1} \alpha_i \Psi_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\ & \begin{bmatrix} Q & CP + B_2 Y \\ * & P \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \text{trace } Q \leq \gamma^2. \end{aligned}$$

Ее решение доставляет $\mathcal{H}_2$ -субоптимальный регулятор $\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$, при этом $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{\gamma}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_c$.

Очевидно, что здесь размерности переменных не зависят от объема данных T , однако количество скалярных переменных задается непосредственно этой величиной, что может вызывать вычислительные затруднения при большой длительности измерений.

Условие на длительность эксперимента T вытекает из (13): $T \geq n$.

Замечание 6. В [107] доказана теорема [107, теорема 3] о том, что значение γ^* , являющееся решением задачи (60)–(61), монотонно убывает при увеличении времени T .

Далее в рассматриваемой статье предлагается расширение предложенного метода (итеративный алгоритм) на случай регуляторов фиксированной (разреженной) структуры, а также доказываются преимущества предложенного подхода в сравнении с методом из предыдущего подраздела 4.3.3 [106].

Из других инструментов, которые можно применять для синтеза оптимального по критерию $\mathcal{H}_2$ управления, можно отметить, например, дробно-линейное преобразование [108]. При его применении преимуществом является независимость переменных в задаче полуопределенного программирования от используемого объема данных.

Пример 4. Продолжаем моделировать работу неустойчивого химического реактора периодического действия из примера 1. Считаем, что $C = I$, $B_2 = 0$, т.е. оптимизируемый выход системы есть

$$z(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Зададим длительность эксперимента $T = 20$ и положим $\varepsilon = 0,001$ (при котором все используемые методы дают положительный результат – для наглядной иллюстрации). При этом в матрице Φ в (38) имеем $\Phi_{11} = 0,2 \cdot 10^{-4}I$, $\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{22} = -I$. Измерения входа и выхода системы и внешние возмущения моделируем так же, как в примере 3.

Расчеты для модельного случая (58) (раздел 4.3) дают

$$\hat{K}_{mbc}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9674 & -1,5118 & 0,1646 & -1,8382 \\ 4,7270 & -0,0118 & 3,4519 & -1,9159 \end{bmatrix},$$

при этом получено оптимальное

$$\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2} = 2,7707.$$

Логически понятно, что методы на основе данных не могут превзойти оптимальное значение $\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2}$, полученное при точно известных параметрах модели системы, поэтому в них закономерны несколько большие значения γ .

Так, вычисления с применением условия информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств согласно теореме 7 (подраздел 4.3.1) приводят при найденных $\hat{\alpha} = 319,54$, $\hat{\beta} = 0,001$ к субоптимальному регулятору

$$\hat{K}_{qmi}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9745 & -1,5120 & 0,1616 & -1,8590 \\ 4,7494 & -0,0151 & 3,4368 & -1,9681 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{qmi}^{H_2} = 2,7951.$$

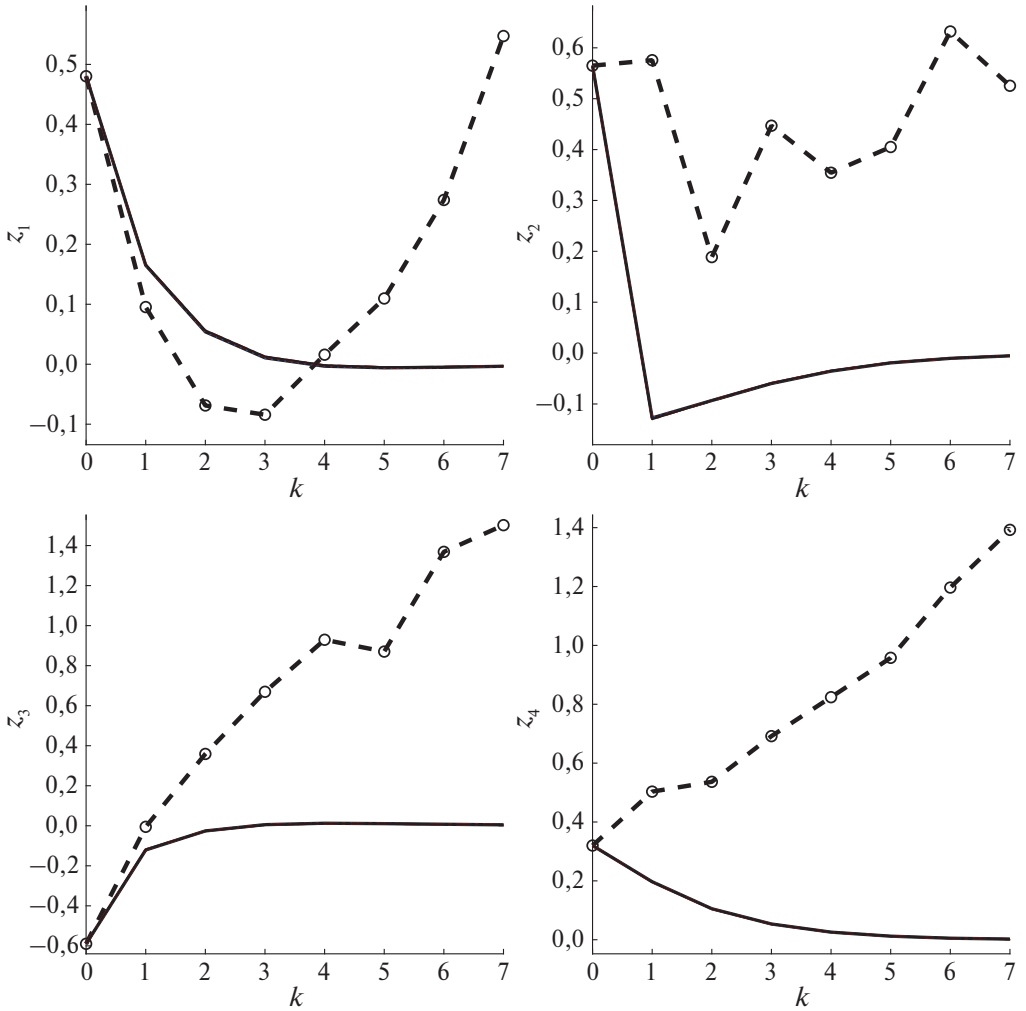


Рис. 4. Траектории выходов системы при решении задачи $\mathcal{H}_2$ -оптимального управления.

С учетом строгого неравенства для критерия в постановке задачи синтеза субоптимального регулятора метода с условием информативности данных (предложение 6 в подразделе 4.3.2) зададим γ чуть больше найденного модельным подходом: $\gamma = 2,7708$. Также помним, что в этом методе вектор измерений внешних возмущений W известен и напрямую используется в вычислениях. Оба этих факта существенно влияют на увеличение точности решения (см. рис. 4 и оценку близости траектории к модельной ниже). Так, получаем

$$\hat{K}_{sub}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9673 & -1,5118 & 0,1646 & -1,8378 \\ 4,7263 & -0,0118 & 3,4517 & -1,9151 \end{bmatrix}.$$

В методе синтеза субоптимального регулятора на основе квадратичных матричных неравенств и с дополнительной матрицей в ЛМН (59) (подраздел 4.3.3) значение γ не задается, а находится наименьшее возможное при решении этой задачи. Так, имеем

$$\hat{K}_{do}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9521 & -1,5119 & 0,1598 & -1,8413 \\ 4,7003 & -0,0124 & 3,4428 & -1,9355 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{do}^{H_2} = 2,8028.$$

Учитывая замечание 6 в подразделе 4.3.4, в методе с квадратичными матричными неравенствами для отдельных моментов измерений входа и выхода системы (60)–(61) будем использовать все 20 имеющихся измерений. Тогда получаем скалярные переменные $\hat{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \dots, 20$ (упустим их для краткости), $\hat{\beta} = 2,2745 \cdot 10^{-5}$ и регулятор

$$\hat{K}_{ins}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9556 & -1,5116 & 0,1610 & -1,8425 \\ 4,7132 & -0,0132 & 3,4475 & -1,9450 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{ins}^{H_2} = 2,7957.$$

На рис. 4 приведены траектории оптимизируемых выходов рассматриваемого реактора $z_i(k) = x_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Здесь траектория разомкнутой системы отображена жирным пунктиром с выделенными кружками исходными измерениями X ; для замкнутой системы в модельном случае – $z_{mbc}(k)$, жирная сплошная линия; в методе на основе квадратичных матричных неравенств и условием ИД – $z_{qmi}(k)$, тонкая пунктирная; для субоптимального регулятора с условием информативности данных – $z_{sub}(k)$, тонкая точечная линия; для метода с дополнительной матрицей – $z_{do}(k)$, штрихпунктирная линия; выходы в методе с отдельными квадратичными матричными неравенствами в каждый момент времени – $z_{ins}(k)$, тонкая сплошная линия.

Сравним полученные результаты с модельным примером:

$$\begin{aligned} \|\hat{K}_{mbc}^{H_2} - \hat{K}_{qmi}^{H_2}\|_2 &= 0,0629, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{qmi}(k)\|_2 = 0,0021, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2} - \hat{\gamma}_{qmi}^{H_2}| = 0,0245, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_2} - \hat{K}_{sub}^{H_2}\|_2 &= 0,0011, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{sub}(k)\|_2 = 4,9881 \cdot 10^{-5}, \quad \hat{\gamma}_{sub}^{H_2} = 2,7708 - \text{задано}, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_2} - \hat{K}_{do}^{H_2}\|_2 &= 0,0376, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{do}(k)\|_2 = 0,0045, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2} - \hat{\gamma}_{do}^{H_2}| = 0,0321, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_2} - \hat{K}_{ins}^{H_2}\|_2 &= 0,0340, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{ins}(k)\|_2 = 0,0044, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_2} - \hat{\gamma}_{ins}^{H_2}| = 0,0250, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что все рассмотренные методы хорошо справляются с поставленной задачей: полученные регуляторы $\hat{K}$ и значения $\hat{\gamma}$ близки к оптимальным. В частности, в данном примере при условии неизвестных измерений внешних возмущений метод с квадратичными матричными неравенствами и информативностью данных и метод с отдельными квадратичными матричными неравенствами для каждого момента времени дают более точные решения, и их точность будет возрастать при увеличении длительности исходного эксперимента T . В целом можно использовать любой из приведенных методов, исходя из особенностей доступных априорных данных.

4.4. $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальное управление

Для дискретной системы

$$(62) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 u(k) + Dw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + B_2 u(k), \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $z(k) \in \mathbb{R}^l$, $w(k) \in \mathbb{R}^p$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$; матрицы $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ заданы, требуется синтезировать управление $u = Kx$, которое стабилизирует замкнутую систему с матрицами

$$(63) \quad A_K = A + B_1 K, \quad C_K = C + B_2 K$$

и минимизирует норму $\mathcal{H}_\infty$ -передаточной функции от возмущения w к выходу z :

$$G(z) = C_K(zI - A_K)^{-1}D.$$

Если при некотором $\gamma > 0$ выполняется $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma$, то получаем $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимальный регулятор, а в случае наименьшего $\gamma = \gamma^*$ получаем $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальное управление и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \gamma^*$.

При известных матрицах (A, B_1) эта задача записывается в виде ЛМН следующим образом [103].

$\mathcal{H}_\infty$ -оптимальный регулятор существует тогда и только тогда, когда существует матрица $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ такая, что

$$(64) \quad \min_{P \in \mathbb{S}_{++}^n, Y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \gamma > 0} \gamma$$

$$\begin{bmatrix} P & AP + B_1 Y & D & 0 \\ * & P & 0 & PC + Y^\top B_2^\top \\ * & * & \gamma I & 0 \\ * & * & * & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0;$$

решение $\hat{P}$, $\hat{Y}$ доставляет оптимальный регулятор $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \hat{\gamma}$.

Далее приведем методы решения данной задачи на основе данных с применением фундаментальной леммы и дробно-линейного преобразования (подраздел 4.4.1), фундаментальной леммы и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах (подраздел 4.4.2), с условием информативности данных и квадратичных матричных неравенств (подраздел 4.4.3) и квадратичных матричных неравенств для отдельных моментов измерений входного и выходного сигналов системы (раздел 4.4.4).

4.4.1. Фундаментальная лемма и дробно-линейное преобразование

В [99] рассматривается система вида (62) с неизвестными матрицами (A, B_1) .

Согласно той же методике, что и в разделе 4.2.1, при выполненном ранговом условии фундаментальной леммы (7) замкнутая регулятором $u = Kx$ система представляется в виде дробно-линейного преобразования с учетом канала от w к z :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \\ \tilde{z}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_+G & D & D \\ C + B_2UG & 0 & 0 \\ -G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ \tilde{w}(k) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{w}(k) = W\tilde{z}(k), \quad W \in \tilde{\mathbf{W}},$$

$$X_-G = I.$$

Далее авторы формулируют условия синтеза $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального регулятора, содержащие матричное неравенство, которое затем приводится к линейному виду путем замены переменных и эквивалентных преобразований. Здесь для краткости приведем сразу готовое утверждение.

Предложение 7 [99, предложение 10]. Если для данных (U, X) выполняется условие фундаментальной леммы и существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{T \times n}$ и скаляр $\lambda > 0$ такие, что

$$X_-Y = P,$$

то решение задачи

$$(65) \quad \begin{bmatrix} -P & * & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ -\lambda \Phi_{12}Y & 0 & \lambda \Phi_{11} & * & * & * \\ X_+Y & D & D & -P & * & * \\ CP + B_2U & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda \Phi_{22}^{-1}) \end{bmatrix} \prec 0$$

доставляет при некотором $\hat{\lambda}$ регулятор $\hat{K} = U\hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \hat{\gamma}$.

Таким образом, ЛМН (65) можно решать одномерной оптимизацией по параметру λ , и в этой постановке длительность эксперимента $T \geq n + m$ напрямую влияет на размерность задачи. Более того, при увеличении T точность решения возрастает [99, пример 1], поэтому при больших размерностях системы и объемах данных приходится выбирать некий консенсус между удовлетворительной точностью и возможностью решать ЛМН приемлемых размерностей.

4.4.2. Фундаментальная лемма и дискретная лемма об ограниченно-вещественных матрицах

В отличие от предыдущего раздела и [99] в [109] предлагается для системы (62) осуществлять синтез $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального регулятора на основе квадратичных матричных неравенств и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах при условии выполнения фундаментальной леммы. Для замкнутой системы с матрицами (63) автор формулирует и доказывает эту лемму в следующей форме.

Лемма 5 [109, лемма 6, приложение А.1]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Матрица A_K шуровская и $\|G(z)\|_\infty < \gamma$.
2. Выполняется линейное матричное неравенство

$$(66) \quad \begin{bmatrix} P & * & * & * \\ 0 & \gamma I & * & * \\ PA_K & PD & P & * \\ C_K & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0,$$

где $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ – матрица Ляпунова, $\gamma > 0$.

Затем к ЛМН (66) применяется уже известная из разделов 2.1, 4.2.1 параметризация матрицы регулятора (8), для чего обязательно выполнение рангового условия фундаментальной леммы (7). Тогда $K = UG$ при условии $X_-G = I$, а матрицы замкнутой системы можно представить с помощью измеренных данных следующим образом:

$$(67) \quad A_K = (X_+ - DW)G, \quad C_K = C + B_2UG$$

для неизвестной [неединственной] матрицы G и некоторой матрицы возмущений $W \in \mathbf{W}$, удовлетворяющей условию

$$(X_+ - DW) \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix}^\dagger = 0.$$

Подставляя (67) в (66) и используя приведенную в разделе 4.2.1 более общую характеристику множества возмущений (42), получаем задачу синтеза $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального регулятора на основе данных, которое путем стандартных преобразований и замены переменных приводится к виду ЛМН относительно переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{T \times n}$ и с параметром $W \in \tilde{\mathbf{W}}$:

$$\begin{bmatrix} P & * & * & * \\ 0 & \gamma I & * & * \\ (X_+ - DW)Y & D & P & * \\ CP + B_2UY & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0.$$

Следуя способу, приведенному в [109], к этому ограничению последовательно применяются дробно-линейное преобразование, матричная S -процедура (с учетом неравенства в (42)) [19, 84] и лемма Шура. В результате получаем окончательный вид задачи синтеза $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального регулятора на основе данных:

$$(68) \quad \min_{P, Y} \gamma$$

при ограничениях

$$(69) \quad \begin{bmatrix} P & * & * & * & * & * \\ 0 & \gamma I & * & * & * & * \\ X_+ Y & D & P & * & * & * \\ CP + B_2 UY & 0 & 0 & \gamma I & * & * \\ Y \Phi_{12} & 0 & -D^\top & 0 & \Phi_{11} & * \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi_{22}^{-1} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$P = X_- Y,$$

решение которой доставляет регулятор $\hat{K} = U \hat{Y} \hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \hat{\gamma}$.

Важно отметить, что поскольку параметризация матрицы A_K в (67) не единственна, а цель управления достигается для всех систем с матрицей $A_K = (X_+ - DW)G$ при любых $W \in \tilde{\mathbf{W}}$, то синтез управления в данном случае дает потенциально консервативные результаты.

Размерность матричных переменных в рассматриваемой задаче напрямую зависит от объема используемых данных, который, с учетом фундаментальной леммы, должен быть $T \geq n + m$.

4.4.3. Условие информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств

В [19] рассматривается система вида

$$(70) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 u(k) + w(k), \\ z(k) &= Cx(k) + B_2 u(k), \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $z(k) \in \mathbb{R}^l$, $w(k) \in \mathbb{R}^p$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$; матрицы $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ заданы. Матрица W должна удовлетворять (38):

$$\mathbf{W} = \left\{ W \in \mathbb{R}^{n \times T} : \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ W^\top \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}.$$

Как и в случае $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления (раздел 4.3.1), здесь авторы используют концепцию информативности данных и инструментарий квадратичных матричных неравенств (матричная S -процедура, условие Слейтера и т.д.) для получения условий оптимальности синтезируемого управления. В результате сформулирована следующая

Теорема 10 [19, теорема 13]. Данные (U, X) , полученные от системы (70) с возмущениями, описываемыми множеством $\mathbf{W}$, информативны для $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального управления с $\gamma > 0$ тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скаляры $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ такие, что выполняются

$$\begin{bmatrix} P - \frac{1}{\gamma^2}I - \beta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & P & 0 \\ * & * & 0 & Y & 0 \\ * & * & * & P & (CP + B_2Y)^\top \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & X_+ \\ 0 & -X_- \\ 0 & -U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} P & * \\ CP + B_2Y & I \end{bmatrix} \succ 0.$$

Тогда решение этой задачи $\hat{P}$, $\hat{Y}$ доставляет регулятор $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ и $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \hat{\gamma}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_W$.

Здесь, в сравнении с методами из предыдущих двух подразделов, несомненным плюсом является независимость размерности матричных переменных в ЛМН от длительности входо-выходных измерений, которая ограничивается лишь условием информативности для стабилизации системы (13): $T \geq n$.

В [110] предложен итеративный метод синтеза $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления по нескольким наборам данных. Авторы утверждают, что по сравнению с приведенным в данном подразделе способом их вариант менее консервативен и, кроме того, строит управление более широким множеством систем, поскольку матрицы C и B_2 полагаются *неизвестными*. В целях сокращения изложения здесь метод из [110] не приводится.

4.4.4. Квадратичные матричные неравенства для отдельных моментов входо-выходных измерений

По аналогии с решением задачи синтеза $\mathcal{H}_2$ -субоптимального управления из подраздела 4.3.4 авторы [107] предлагают строить $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимальное управление путем использования отдельных измерений в каждый момент времени. Тем самым, как доказывается в статье, уменьшается консерватизм.

Поскольку исходные данные и дальнейшие построения те же, что и в подразделе 4.3.4, здесь приведем сразу готовый результат.

Для системы (62) решение задачи

$$(71) \quad \min_{P, Y, Q, \alpha_i, \beta, \gamma} \gamma$$

при ограничениях

$$(72) \quad \begin{bmatrix} P - DD^\top - \beta I & * & * \\ 0 & -Q & * \\ 0 & [C \ B_2]Q & \gamma^2 I - [C \ B_2]Q[C \ B_2]^\top \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T-1} \alpha_i \Psi_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I & x_{i+1} \\ 0 & -x_i \\ 0 & -u_i \end{bmatrix}^\top, \quad i = 0, \dots, T-1,$$

$$\begin{bmatrix} Q - \begin{bmatrix} P & * \\ Y & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} \\ * & P \end{bmatrix} \succ 0$$

относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n+m}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и скалярных переменных $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, T-1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ доставляет H_∞ -субоптимальный регулятор $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$, при этом $\|G(z)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \hat{\gamma}$ для всех $(A, B_1) \in \Sigma_c$.

Замечание 7. В [107] доказана теорема [107, теорема 5] о том, что значение γ^* , являющееся решением задачи (71)–(72), монотонно убывает при увеличении времени $T \geq n$ (ограничение вытекает из (13)).

Там же в [107] предложенный метод распространяется на случай регуляторов фиксированной (разреженной) структуры (итеративный алгоритм), а также теоретически и на примере показываются его достоинства.

Пример 5. При условиях из предыдущего примера синтезируем $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальное управление, следуя представленным выше методам.

Сначала построим управление для модельного случая, решив задачу (64) из начала раздела 4.4:

$$\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,7141 & -1,5677 & 0,3249 & -3,2775 \\ 6,8823 & -0,1974 & 3,8621 & -4,6649 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{mbc}^\infty = 2,5607.$$

Далее, применяя способ на основе дробно-линейного преобразования (подраздел 4.4.1, предложение 7), получаем при $\hat{\lambda} = 346,98$

$$\hat{K}_{lft}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,6453 & -1,6010 & 0,2668 & -3,3096 \\ 6,8780 & -0,1381 & 3,9277 & -4,5610 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{lft}^{H_\infty} = 2,6102.$$

Решение задачи (68)–(69) на основе фундаментальной леммы и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах из подраздела 4.4.2 дает

$$\hat{K}_{brl}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,6642 & -1,6052 & 0,2650 & -3,3001 \\ 6,9270 & -0,1262 & 3,9583 & -4,5406 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{brl}^{H_\infty} = 2,7206.$$

Вычисления согласно теореме 10 (подраздел 4.4.3) с использованием условия информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств приводит к $\hat{\alpha} = 149,81$, $\hat{\beta} = 0,001$ и

$$\hat{K}_{di}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,6645 & -1,5930 & 0,2825 & -3,2925 \\ 6,8529 & -0,1515 & 3,9036 & -4,5931 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{di}^{H_\infty} = 2,6132.$$

Для метода с квадратичными матричными неравенствами для отдельных моментов измерений входа и выхода системы (71)–(72) с учетом замечания 7 (подраздел 4.4.4) получены $\hat{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \dots, 20$ (упустим их для краткости), $\hat{\beta} = 2,2745 \cdot 10^{-5}$ и регулятор

$$\hat{K}_{ins}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,6459 & -1,5946 & 0,2779 & -3,3306 \\ 6,9028 & -0,1491 & 3,9194 & -4,5696 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_{ins}^{H_\infty} = 2,6031.$$

На рис. 5 приведены траектории выходов рассматриваемого реактора $y_i(k)$, $i = 1, 2, 3, 4$: выход разомкнутой системы обозначен жирным пунктиром с выделенными кружками измерениями X ; выходы замкнутой системы в модельном случае – $z_{mbc}(k)$, жирная сплошная линия; в методе на основе дробно-линейного преобразования – $z_{lft}(k)$, тонкая пунктирная линия; на основе фундаментальной леммы и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах – $z_{brl}(k)$, тонкая точечная линия; с условием информативности данных на основе квадратичных матричных неравенств – $z_{di}(k)$, тонкая штрихпунктирная линия; с квадратичными матричными неравенствами для отдельных измерений – $z_{ins}(k)$, тонкая сплошная линия.

Сравним полученные траектории выходов с модельным примером:

$$\begin{aligned} \|\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{K}_{lft}^{H_\infty}\|_2 &= 0,1555, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{lft}(k)\|_2 = 0,0197, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{\gamma}_{lft}^{H_\infty}| = 0,0495, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{K}_{brl}^{H_\infty}\|_2 &= 0,1946, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{brl}(k)\|_2 = 0,0187, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{\gamma}_{brl}^{H_\infty}| = 0,1599, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{K}_{di}^{H_\infty}\|_2 &= 0,1047, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{di}(k)\|_2 = 0,0122, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{\gamma}_{di}^{H_\infty}| = 0,0524, \\ \|\hat{K}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{K}_{ins}^{H_\infty}\|_2 &= 0,1532, \quad \|z_{mbc}(k) - z_{ins}(k)\|_2 = 0,0254, \quad |\hat{\gamma}_{mbc}^{H_\infty} - \hat{\gamma}_{ins}^{H_\infty}| = 0,0423, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Как видно, все используемые методы успешно решили поставленную задачу. С точки зрения точности оценки $\hat{\gamma}$ и близости траекторий в данном примере лучше всего показал себя метод с использованием отдельных измерений в матричном неравенстве, и его точность возрастает с увеличением числа исходных измерений T . Метод на основе совместного применения фундаментальной леммы и дискретной леммы об ограниченно-вещественных матрицах из всех оказался наименее точен в оценке $\hat{\gamma}$, хотя эта разница не критична. Остальные два метода примерно одинаковы.

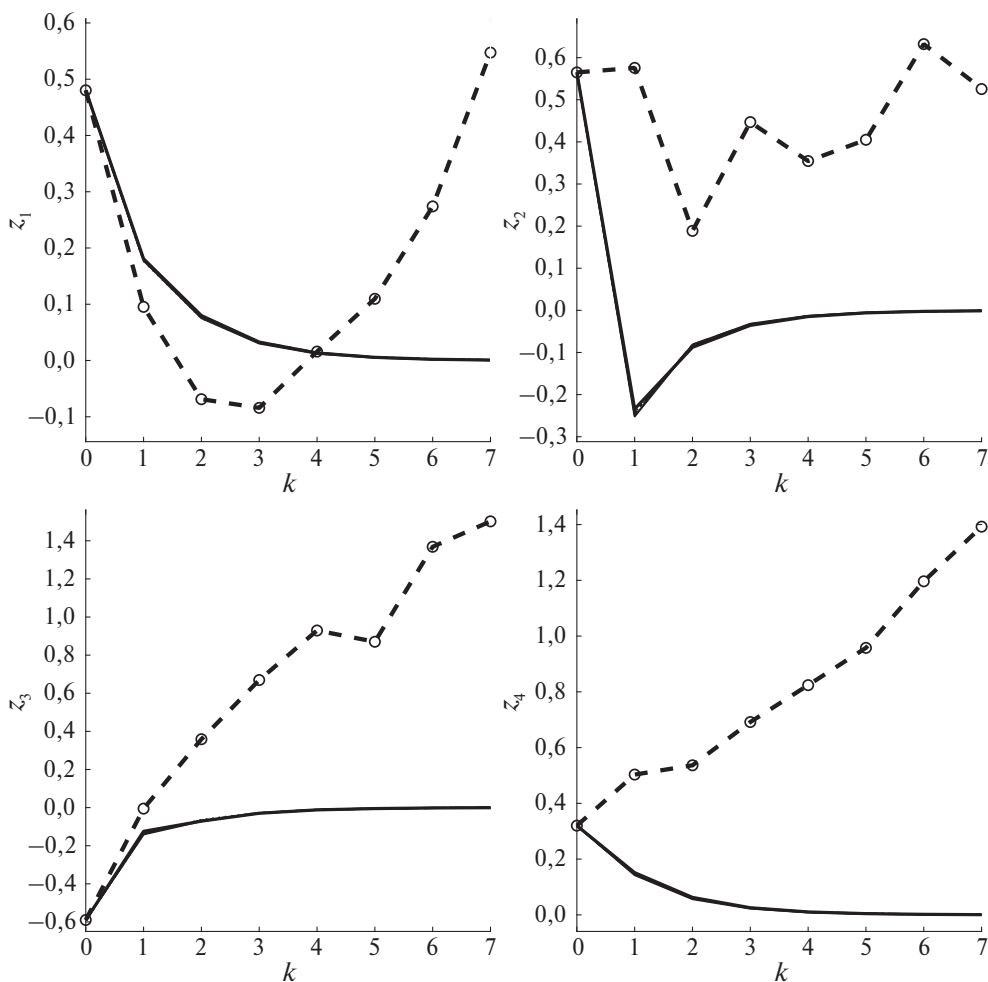


Рис. 5. Траектории выходов при решении задачи $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления.

5. Заключение

Проведенный обзор позволяет сделать следующие выводы относительно рассмотренных методов прямого управления на основе данных по конечным наборам измерений, имеющих в своей основе фундаментальную лемму или концепцию информативности данных и использующих аппарат линейных матричных неравенств при решении задач квадратичной стабилизации (при точных измерениях и при воздействии на систему ограниченных внешних возмущений), синтеза оптимального линейно-квадратичного регулятора, а также $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления дискретными линейными стационарными системами:

– В основе рассмотренных методов лежат известные традиционные модельные подходы и методы решения задач – неравенства Ляпунова, дробно-линейное преобразование, лемма Питерсена, S -процедура и лемма Финслера

(в том числе матричные), дискретная лемма об ограниченно-вещественных матрицах, применяются аппараты линейных и квадратичных матричных неравенств и др.

- Априорно о системе известно лишь то, что она линейная стационарная, а также известны размерности (или их оценки) ее входов и выходов.

- Также считается, что все выходы наблюдаемы и доступны измерения *всех состояний*, т.е. $y(k) = x(k)$, что тоже не всегда возможно в реальных задачах. В таких случаях приходится применять другие методы DDC, в том числе разработанные в рамках рассмотренного подхода, но не вошедшие в обзор из-за отличий в постановках задач.

- Во всех приведенных методах считается, что доступны измерения входа и выхода *разомкнутой системы*. Во-первых, это не всегда реализуемо на практике, во-вторых, может вызывать сложности в случае неустойчивых систем, и в обоих случаях требуется применять иные подходы к управлению в рамках DDC.

- Фундаментальная лемма дает возможность параметризации непосредственно матрицы замкнутой системы, в том числе при наличии внешних воздействий (при этом увеличивается консерватизм), однако для выполнения ее условий требуется больший объем исходных данных.

- Условия информативности данных мягче и позволяют применять менее консервативные методы, в том числе с использованием отдельных измерений, и меньшие объемы исходных данных.

- Размерности матричных переменных в разных методах могут как зависеть, так и не зависеть от длительности эксперимента, что существенно влияет на применимость метода: если размерности переменных зависят от объема данных, то его увеличение повышает точность решения – и это можно считать преимуществом таких методов, но в то же время могут возникать вычислительные трудности при решении ЛМН.

- При наличии постоянно действующих на систему внешних возмущений последние обычно считаются неизвестными и используется описание множества всех допустимых возмущений, при этом рассматриваются возмущения с ограниченной энергией или с ограниченными по норме значениями в отдельные моменты времени (этот подход снижает консерватизм). Есть, однако, и методы, в которых измерения возмущений считаются известными и напрямую используются в решении задачи (см. подраздел 4.3.2).

- Разработаны методы в том числе и для более частных задач, например LQR на конечном горизонте (подраздел 3.4).

Таким образом, в обзоре приведены достаточно разнообразные методы управления на основе данных, разработанные для решения ряда классических задач управления, рассмотрены особенности их устройства и применения, работа методов продемонстрирована на числовых примерах.

Приведенные методы являются частью одного из самых активно развивающихся направлений внутри DDC и используются (включая различные их

модификации) в исследовании, моделировании и синтезе управления разнообразными реальными объектами, системами и процессами, такими как магнитная подвесная система [19], однозвенная роботизированная рука [63], простая ректификационная колонна [70], самолет-истребитель [84], предкомпенсированная подсистема помпажа осевого компрессора [111], устойчивая активная система подвески автомобиля и неустойчивая вращательно-перевернутая маятниковая система [71], перевернутый маятник на неподвижном основании [69, 97] и на тележке [65], система из двух тележек, соединенных пружиной (двухмассовая система) [69], децентрализованное управление микросетевыми системами постоянного тока с распределенными генерирующими установками, соединенными между собой линиями электропередачи [112]; движение группы роботов [113], группы автомобилей с лидером [60] и двух автомобилей на безопасном расстоянии [73]; иные мультиагентные системы [29, 53, 92], рост популяций [94] и др.

Автор признателен д-ру физ.-мат. наук, профессору РАН М.В. Хлебникову за конструктивное обсуждение статьи и за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhong-Sheng Hou, Zhuo Wang*. From Model-Based Control to Data-Driven Control: Survey, Classification and Perspective // *Information Sciences*. 2013. V. 235. P. 3–35. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.07.014>
2. *Xu Jian-Xin, Hou Zhong-Sheng*. Notes on Data-driven System Approaches // *Acta Automatica Sinica*. 2009. V. 35. No. 6. P. 668–675. [https://doi.org/10.1016/S1874-1029\(08\)60090-7](https://doi.org/10.1016/S1874-1029(08)60090-7)
3. *Dörfler F.* Data-Driven Control: Part Two of Two: Hot Take: Why not go with Models? // *IEEE Control Systems Magazine*. 2023. V. 43. Iss. 6. P. 27–31. <https://doi.org/10.1109/MCS.2023.3310302>
4. *Soudbakhsh D., Annaswamy A.M., Yan Wang, et al.* Data-Driven Control: Theory and Applications // *American Control Conf. (ACC–2023)*, 31 May 2023–02 June 2023, San Diego, CA, USA. P. 1–18. <https://doi.org/10.23919/ACC55779.2023.10156081>
5. *Fernández R.* Data-Driven Control: A New Important Field in Control Theory // *15th Latinamerican Control Conf.* 2012. 6 p.
6. *Bazanella A.S., Campestri L., Eckhard D.* An Introduction to Data-Driven Control, From Kernels to Behaviors // *IEEE 61st Conf. on Decision and Control (CDC–2022)*, December 6–9, 2022. Cancún, Mexico. <https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9992589>
7. *Bazanella A.S., Campestri L., Eckhard D.* The Data-Driven Approach to Classical Control Theory // *Annual Reviews in Control*. 2023. V. 56. Article 100906. P. 1–20. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2023.100906>
8. *Khaki-Sedigh A.* An Introduction to Data-Driven Control Systems. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2024.
9. *Wang Jianhong, Ramirez-Mendoza R.A., Morales-Menendez R.* Data Driven Strategies: Theory and Applications. CRC Press, 2023.

10. *Bazanella A.S., Campestrini L., Eckhard D.* Data-Driven Controller Design: The H_2 Approach. Dordrecht: Springer, 2012.
11. *Brunton S.L., Kutz J.N.* Data-Driven Science and Engineering. Machine Learning, Dynamical Systems, and Control. Cambridge University Press, 2021.
12. *Precup R.-E., Roman R.-C., Safaei A.* Data-Driven Model-Free Controllers. Boca Raton: CRC Press, 2022.
13. *Willems J.C.* From Time Series to Linear System: Part I. Finite Dimensional Linear Time Invariant Systems // *Automatica*. 1986. V. 22. Iss. 5. P. 561–580. Part II. Exact Modelling // *Automatica*. 1986. V. 22. Iss. 6. P. 675–694. Part III: Approximate Modelling // *Automatica*. 1987. V. 23. Iss. 1. P. 87–115.
14. *Willems J.C., Polderman J.W.* Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 1997. ISBN 9780387982663.
URL: <https://books.google.com/books?id=AbmTA1HbhKsC>
15. *Willems J.C., Rapisarda P., Markovsky I. et al.* A Note on Persistency of Excitation // *Control Letters*. 2005. V. 54. No. 4. P. 325–329.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2004.09.003>
16. *Markovsky I., Willems J., De Moor B.* State Representations from Finite Time Series // *Proc. 44th IEEE Conf. Decis. Control*, Seville, Spain, 2005. P. 832–835.
<https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1582260>
17. *Markovsky I., Dörfler F.* Behavioral Systems Theory in Data-Driven Analysis, Signal Processing, and Control // *Annual Reviews in Control*. 2021. V. 52. P. 42–64.
<https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.09.005>
18. *Van Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., et al.* Data Informativity: A New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2020. V. 65. Iss. 11. P. 4753–4768.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2020.2966717> // arXiv: 1908.00468
19. *Van Waarde H.J., Eising J., Camlibel M.K., et al.* The Informativity Approach: To Data-Driven Analysis and Control. *IEEE Control Systems* // *IEEE Control Systems*. 2023. V. 43. Iss. 6. P. 32–66. <https://doi.org/10.1109/MCS.2023.3310305> // arXiv:2302.10488v1
20. *Van Waarde H.J., Eising J., Camlibel M.K., et al.* A Tutorial on the Informativity Framework for Data-Driven Control // *Proc. of the 61st IEEE Conf. on Decision and Control (CDC–2022)*, 2022. V. 2022-December. P. 1085–1090.
<https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9992611>
21. *Rouis N., N'Doye I., Laleg-Kirati T.-M.* Model-Free LQR Based PID Controller for Trajectory Tracking of 2-DoF Helicopter: Comparison and Experimental Results // arXiv: 2103.10988v1
22. *Berberich J., Iannelli A., Padoan A., et al.* A Quantitative and Constructive Proof of Willems' Fundamental Lemma and its Implications // *American Control Conf. (ACC–23)*, 31 May 2023–02 June 2023, San Diego, CA, USA.
<https://doi.org/10.23919/ACC55779.2023.10156227> // arXiv:2208.00905v2
23. *Bosso A., Borghesi M., Iannelli A., et al.* Derivative-Free Data-Driven Control of Continuous-Time Linear Time-Invariant Systems // arXiv:2410.24167v1
24. *Schmitz P., Faulwasser T., Rapisarda P., et al.* A Continuous-Time Fundamental Lemma and its Application in Data-Driven Optimal Control // *Systems & Control*

- Letters. 2024. V. 194. 105950. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2024.105950> // arXiv:2407.12179v1
25. *Guanru Pan, Ruchuan Ou, Faulwasser T.* On a Stochastic Fundamental Lemma and Its Use for Data-Driven Optimal Control // IEEE Trans. on Automatic Control. 2023. V. 68. Iss. 10. P. 5922–5937. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3232442>
 26. *Ruchuan Ou, Guanru Pan, Faulwasser T.* A Stochastic Fundamental Lemma with Reduced Disturbance Data Requirements // arXiv:2502.09131v1
 27. *Faulwasser T., Ruchuan Ou, Guanru Pan, et al.* Behavioral Theory for Stochastic Systems? A Data-driven Journey from Willems to Wiener and Back Again // Annual Reviews in Control. 2023. V. 55. P. 92–117.
<https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2023.03.005> // arXiv: 2209.06414v3
 28. *Mishra V.K., Markovsky I., Grossmann B.* Data-Driven Tests for Controllability // IEEE Control Systems Letters. 2021. V. 5. Iss. 2. P. 517–522.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2020.3003770>
 29. *Yue Yu, Talebi Sh., van Waarde H.J., et al.* On Controllability and Persistency of Excitation in Data-Driven Control: Extensions of Willems’ Fundamental Lemma // arXiv: 2102.02953v2
 30. *Yujie Yang, Zhilong Zheng, Shengbo Eben Li* On the Stability of Datatic Control Systems // arXiv:2401.16793v1
 31. *Coulson J., van Waarde H., Dörfler F.* Robust Fundamental Lemma for Data-driven Control // arXiv:2205.06636v1
 32. *Coulson J., van Waarde H.J., Lygeros J., et al.* A Quantitative Notion of Persistency of Excitation and the Robust Fundamental Lemma // IEEE Control Systems Letters. 2023. V. 7. P. 1243–1248. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3232303>
 33. *Verhoek C., Tóth R., Haesaert S., et al.* Fundamental Lemma for Data-Driven Analysis of Linear Parameter-Varying Systems // 60th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC), 14–17 December 2021, Austin, TX, USA.
<https://doi.org/10.1109/CDC45484.2021.9683151> // arXiv:2103.16171v2
 34. *Verhoek C., Eising J., Dörfler F., Tóth R.* Decoupling Parameter Variation from Noise: Biquadratic Lyapunov Forms in Data-Driven LPV Control // arXiv:2403.16565v2
 35. *Nortmann B., Mylvaganam T.* Direct Data-Driven Control of LTV Systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2023. V. 68. Iss. 8. P. 4888–4895.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3276909> // arXiv:2111.02342v3
 36. *Breschi V., Zaccarian L., Formentin S.* Data-Driven Stabilization of Input-Saturated Systems // IEEE Control Systems Letters. 2023. V. 7. P. 1640–1645.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2023.3266254>
 37. *Xiaoyun Lu, Dongpeng Zhou, Wu-Hua Chen, et al.* Data-Driven Control for Linear Discrete-Time Systems with Input Saturation // Circuits, Systems, and Signal Processing. 2024. V. 43. P. 6211–6227. <https://doi.org/10.1007/s00034-024-02751-w>
 38. *Martinelli A., Gargiani M., Draskovic M., et al.* Data-Driven Optimal Control of Affine Systems: A Linear Programming Perspective // IEEE Control Systems Letters. 2022. V. 6. P. 3092–3097. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3180898> // arXiv:2203.12044v2
 39. *Chin-Yao Chang, Bernstein A.* Robust Data-Driven Control with Noisy Data // arXiv:2207.09587v4

40. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-Based Stabilization of Unknown Bilinear Systems with Quaranteed Basin of Attraction // *Systems & Control Letters*. 2020. V. 145. 104788. P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104788>
41. *De Persis C., Tesi P.* Designing Experiments for Data-Driven Control of Nonlinear Systems // *IFAC-PapersOnLine*. 2021. V. 54. Iss. 9. P. 285–290. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.06.085>
42. *Martin T., Schön B.T.B., Allgöwer F.* Guarantees for Data-Driven Control of Nonlinear Systems Using Semidefinite Programming: A Survey // *Annual Reviews in Control*. 2023. V. 56. 100911. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2023.100911> // [arXiv:2306.16042v2](https://arxiv.org/abs/2306.16042v2)
43. *Padoan A., Coulson J., Van Waarde H.J., et al.* Behavioral Uncertainty Quantification for Data-Driven Control // *Proc. of the IEEE 61st Conf. on Decision and Control (CDC)*, December 6-9, 2022. Cancún, Mexico. V. 2022-December. P. 4726–4731. <https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9993002>
44. *Alsalti M., Barkey M., Lopez V.G., et al.* Sample- and Computationally Efficient Data-Driven Predictive Control // *IEEE European Control Conf. (ECC–2024)*, Stockholm, Sweden, 2024. <https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10591022> // [arXiv:2309.11238v2](https://arxiv.org/abs/2309.11238v2).
45. *Coulson J., Lygeros J., Dörfler F.* Data-enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC // *Proc. of the 18th European Control Conf. (ECC–2019)*, 25–28 June 2019, Naples, Italy. P. 307–312. <https://doi.org/10.23919/ECC.2019.8795639> // [arXiv:1811.05890v2](https://arxiv.org/abs/1811.05890v2).
46. *Lazar M., Verheijen P.C.N.* Generalized Data-Driven Predictive Control: Merging Subspace and Hankel Predictors // *Mathematics*. 2023. V. 11(9). Article 2216. 17 p. <https://doi.org/10.3390/math11092216> // [arXiv:2304.01418v1](https://arxiv.org/abs/2304.01418v1)
47. *Markovsky I., Linbin Huang, Dörfler F.* Data-Driven Control Based on the Behavioral Approach: From Theory to Applications in Power Systems // *IEEE Control Systems Magazine*. 2023. V. 43. Iss. 5. P. 28–68. <https://doi.org/10.1109/MCS.2023.3291638>
48. *Mattsson P., Bonassi F., Breschi V., et al.* On the Equivalence of Direct and Indirect Data-Driven Predictive Control Approaches // *IEEE Control Systems Letters*. 2024. V. 8. P. 796–80. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3403473>
49. *Meijer T.J., Scheres K.J.A., Nouwens S.A.N., et al.* From a Frequency-Domain Willems’ Lemma to Data-Driven Predictive Control // [arXiv:2501.19390v1](https://arxiv.org/abs/2501.19390v1)
50. *Дмитрук Н.М., Манжулина Е.А.* Оптимальное управление линейными стационарными дискретными системами без предварительной параметрической идентификации // *АиТ*. 2022. № 2. С. 3–21. <https://doi.org/10.31857/S0005231022020015>
51. *Breschi V., De Persis C., Formentin S., et al.* Direct Data-Driven Model-Reference Control with Lyapunov Stability Guarantees // *Proc. of the 60th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC-2021)*, 14–17 December 2021, Austin, TX, USA. 9 p. <https://doi.org/10.1109/CDC45484.2021.9683437> // [arXiv:2103.12663v2](https://arxiv.org/abs/2103.12663v2)
52. *Markovsky I., Rapisarda P.* On the Linear Quadratic Data-Driven Control // *Proc. of the European Control Conf. (ECC–2007)*, Kos, Greece, July 2–5, 2007. P. 5313–5318. <https://doi.org/10.23919/ECC.2007.7068299>
53. *Zeze Chang, Junjie Jiao, Zhongkui Li.* Localized Data-driven Consensus Control // [arXiv:2401.12707v1](https://arxiv.org/abs/2401.12707v1)

54. *Van Waarde H.J., De Persis C., Camlibel M.K., et al.* Willems' Fundamental Lemma for State-space Systems and its Extension to Multiple Datasets // IEEE Control Systems Letters. 2020. V. 4. Iss. 3. P. 602–607.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2020.2986991> // arXiv:2002.01023v2
55. *Alsalti M., Lopez V.G., Müller M.A.* Notes on Data-Driven Output-Feedback Control of Linear MIMO Systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2025. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2025.3553073> // arXiv:2311.17484v2
56. *Shakouri A., Van Waarde H.J., Camlibel M.K.* A New Perspective on Willems' Fundamental Lemma: Universality of Persistently Exciting Inputs // arXiv:2503.12489
57. *Eising J., Trentelman H.L.* Informativity of Noisy Data for Structural Properties of Linear Systems // Systems & Control Letters. 2021. V. 158. 105058. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2021.105058>
58. *Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity for Observability: An Invariance-based Approach // European Control Conf. (ECC–2020), 12–15 May 2020, St. Petersburg, Russia. P. 1057–1059.
<https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143925>
59. *Berberich J., Wildhagen S., Hertneck M., et al.* Data-Driven Analysis and Control of Continuous-Time Systems under Aperiodic Sampling // IFAC-PapersOnLine. 2021. V. 54. Iss. 7. P. 210–215. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.08.360>
60. *Iwata T., Azuma S.-I., Ariizumi R., et al.* Data Informativity for Distributed Positive Stabilization // IEEE Control Systems Letters. 2024. V. 8. P. 826–831.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3404219>
61. *Eising J., Camlibel M.K.* Data Informativity for Analysis of Linear Systems with Convex Conic Constraints // IEEE Control Systems Letters. 2022. V. 6. P. 391–396.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3077367>
62. *Nguyen E.T. Van Waarde H.J.* Synthesis of Dissipative Systems Using Input-State Data // Proc. of the IEEE European Control Conf. (ECC–2024). P. 2959–2964.
<https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10590889> // arXiv:2501.18330v1
63. *Kaijian Hu, Tao Liu.* Data-Driven H_∞ Control for Unknown Piecewise Affine Systems with Bounded Disturbances // European Control Conf. (ECC–2024) June 25–28, 2024, Stockholm, Sweden. P. 2623–2628.
<https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10590818>
64. *Miller J., Sznaiar M.* Data-Driven Gain Scheduling Control of Linear Parameter-Varying Systems using Quadratic Matrix Inequalities // IEEE Control Systems Letters. 2022. V. 7. P. 835–840. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3227182> // arXiv:2209.06251v4
65. *Van Waarde H.J., Eising J., Camlibel M.K., et al.* A Behavioral Approach to Data-Driven Control with Noisy Input-Output Data // IEEE Trans. on Automatic Control. 2024. V. 69. Iss. 2. P. 813–827. <https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3275014> // arXiv:2206.08408v1
66. *Trentelman Harry L., Van Waarde H.J., Camlibel M.K.* An Informativity Approach to the Data-Driven Algebraic Regulator Problem // IEEE Trans. on Automatic Control. 2022. V. 67. Iss. 11. P. 6227–6233.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3129457> // arXiv:2009.01552v2
67. *Ao Cao, Fuyong Wang* Informativity Conditions for Multiple Signals: Properties, Experimental Design, and Applications // arXiv:2501.10030v1

68. *Eising J., Cortés J.* Cautious Optimization via Data Informativity // arXiv:2307.10232v1
69. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality, and Robustness // IEEE Trans. on Automatic Control. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924. <https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2959924>
70. *Bisoffi A., Lidong Li, De Persis C., et al.* Controller Synthesis for Input-State Data With Measurement Errors // IEEE Control Systems Letters. 2024. V. 8. P. 2475–1456. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3402135>
71. *Esmzad R., Sankar G.S., Teawon Han, et al.* Direct Data Driven Control Using Noisy Measurements // arXiv:2505.06407
72. *Chin-Yao Chang, Bernstein A.* Robust Data-Driven Control for Systems with Noisy Data // arXiv:2207.09587v4
73. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Controller Design for Robust Invariance From Noisy Data // IEEE Trans. on Automatic Control. 2023. V. 68. Iss. 1. P. 636–643. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3170373>
74. *Kaminaga T., Sasahara H.* Data Informativity under Data Perturbation // arXiv:2505.01641v1
75. *Berberich J., Scherer C.W., Allgöwer F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // IEEE Trans. Automat. Control. 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3209342> // arXiv:2009.05253v4
76. *Коган М.М., Степанов А.В.* Как улучшить робастное управление линейной нестационарной системой с помощью экспериментальных данных // АиТ. 2024. № 6. С. 115–139. <https://doi.org/10.31857/S0005231024060086>
77. *Коган М.М.* От адаптивного и робастного к управлению на основе априорных и экспериментальных данных // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ–2024): Сборник научных трудов, 17–20 июня 2024 г., Москва / Под общ. ред. Д.А. Новикова. ИПУ РАН, 2024. С. 450–454.
78. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез обобщенного H_∞ -субоптимального управления по экспериментальным и априорным данным // АиТ. 2024. № 1. С. 3–20. <https://doi.org/10.31857/S0005231024010015>
79. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // АиТ. 2023. № 8. С. 24–42. <https://doi.org/10.31857/S0005231023080020>
80. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
81. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
82. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление в сложных динамических системах. СПб.: Наука, 2000.
83. *Van Waarde H.J., Camlibel M.K., Eising J., et al.* Quadratic Matrix Inequalities with Applications to Data-Based Control // SIAM J. on Control and Optimization. 2023. V. 61(4). P. 2251–2281. <https://doi.org/10.1137/22M1486807>
84. *Van Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M.* From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // IEEE Trans. Autom. Control. 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175. <https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3047577>

85. *Van Waarde H., Camlibel K.* A Matrix Finsler's Lemma with Applications to Data-Driven Control // Proc. of the 60 IEEE Conf. on Decision and Control. IEEE, 2022. P. 5777–5782. <https://doi.org/10.1109/CDC45484.2021.9683285>
86. *Walsh G., Ye H.* Scheduling of Networked Control Systems // IEEE Control Syst. Mag. 2001. V. 21. No. 1. P. 57–65. <https://doi.org/10.1109/37.898792>
87. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2.1. URL: <http://cvxr.com>
88. *Chen T., Francis B.* Optimal Sampled-Data Control Systems. London, U.K.: Springer, 1995.
89. *Dörfler F., Tesi P., De Persis C.* On the Certainty-Equivalence Approach to Direct Data-Driven LQR Design // IEEE Trans. on Automatic Control. 2023. V. 68. No. 12. P. 7989–7996. <https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3253787> // arXiv: 2109.06643
90. *Gonçalves Da Silva G.R.G., Bazanella A.S., et al.* Data-Driven LQR Control Design // IEEE Control Systems Letters. Jan. 2018. V. 3. No. 1. P. 180–185. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2018.2868183> // arXiv:1807.03263v1
91. *Umar A.A., Ryu K., Back J., et al.* Stability Margin of Data-Driven LQR and Its Application to Consensus Problem // Mathematics. 2024. V. 12. Iss. 2. 199. <https://doi.org/10.3390/math12020199>
92. *Van Waarde H.J., Mesbahi M.* Data-Driven Parameterizations of Suboptimal LQR and H2 Controllers // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53-2. P. 4234–4239. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2470>
93. *Rotulo M., De Persis C., Tesi P.* Data-Driven Linear Quadratic Regulation via Semidefinite Programming // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53(2). P. 3995–4000. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2264>
94. *Scampicchio A., Aravkin A., Pillonetto G.* LQR Design under Stability Constraints // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. Iss. 2. P. 5556–5560. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1566>
95. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen's Lemma // Automatica. 2022. V. 145. Article 110537. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110537>
96. *Dörfler F., Tesi P., De Persis C.* On the Role of Regularization in Direct Data-Driven LQR Control // Proc. of the IEEE 61st Conf. on Decision and Control (CDC-2022). IEEE, 2022. P. 1091–1098. <https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9992770>
97. *De Persis C., Tesi P.* Low-complexity learning of Linear Quadratic Regulators from noisy data // Automatica. 2021. V. 128. Article 109548. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109548>
98. *Xiong Zeng, Bako L., Ozay N.* Noise Sensitivity of the Semidefinite Programs for Direct Data-Driven LQR // arXiv:2412.19705v1
99. *Berberich J., Koch A., Scherer C.W., et al.* Robust Data-Driven State-Feedback Design // American Control Conf. (ACC-2020), Denver, CO, USA, 2020. P. 1532–1538. <https://doi.org/10.23919/ACC45564.2020.9147320>
100. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems & Control Letters. 1987. V. 8(4). P. 351–357. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(87\)90102-2](https://doi.org/10.1016/0167-6911(87)90102-2)

101. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // *АвтТ.* 2008. №11. С. 125–139.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Petersen's lemma on matrix uncertainty and its generalizations // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. P. 1932–1945.
<https://doi.org/10.1134/S000511790811009X>
102. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Trade-Offs in Learning Controllers from Noisy Data // *Systems & Control Letters.* 2021. V. 154. 104985.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2021.104985>
103. *Caverly R.J., Forbes J. R.* LMI Properties and Applications in Systems, Stability, and Control Theory // *arXiv:1903.08599*
104. *De Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A New Discrete-Time Robust Stability Condition // *Systems & Control Letters.* 1999. V. 37. P. 261–265.
[https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(99\)00035-3](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00035-3)
105. *De Oliveira M.C., Geromel J.C., Bernussou J.* Extended H_2 and H_∞ Norm Characterizations and Controller Parametrizations for Discrete-Time Systems // *Int. J. of Control.* 2002. V. 75. No. 9. P. 666–679.
<https://doi.org/10.1080/00207170210140212>
106. *Miller J., Eising J., Dörfler F., et al.* Data-Driven Structured Robust Control of Linear Systems // *arXiv: 2411.11542v1*
107. *Zhaohua Y., Yuxing Zh., Nachuan Y., et al.* Data-Driven Structured Controller Design Using the Matrix S-Procedure // *arXiv:2503.14949v1*
108. *Brändle F., Allgöwer F.* A System Parametrization for Direct Data-Driven Analysis and Control with Error-in-Variables // *arXiv:2411.06787v2*
109. *De Boer R.* Robust Data-Driven State-Feedback Synthesis from Data Corrupted by Perturbations with Bounded Norms and Rates-of-Variation. MSc Thesis. University of Twente, 2023.
110. *Kaijian Hu, Tao Liu.* A Robust Data-Driven Iterative Control Method for Linear Systems with Bounded Disturbances // *arXiv:2405.02537v1*
111. *Luppi A., De Persis C., Tesi P.* On Data-Driven Stabilization of Systems with Nonlinearities Satisfying Quadratic Constraints // *Systems & Control Letters.* 2022. V. 163. 105206. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2022.105206>
112. *Nakano T., Aboudonia A., Eising J., et al.* Dissipativity-Based Data-Driven Decentralized Control of Interconnected Systems // *arXiv:2509.14047*
113. *Wenjia Liu, Yifei Li, Jian Sun, et al.* Data-driven Internal Model Control for Output Regulation // *arXiv:2505.09255*

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фраджовым.

Поступила в редакцию 12.07.2025

После доработки 20.05.2026

Принята к публикации 29.05.2026