

© 2026 г. В.О. НИКИФОРОВ, д-р техн. наук (nikiforov_vo@itmo.ru),
 Д.Н. ГЕРАСИМОВ, канд. техн. наук (dngerasimov@itmo.ru)
 (Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург)

ЗАМКНУТЫЙ ПРЕДИКТОР СОСТОЯНИЯ: РОБАСТНОСТЬ И ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ¹

Рассматривается задача робастной реализации предиктора состояния, используемого в задаче стабилизации линейного стационарного объекта с произвольно большим известным запаздыванием по сигналу управления. Для решения задачи построен наблюдатель ошибки предсказания будущего значения вектора состояния с переключением начальных условий. Полученная ошибка наблюдения используется в качестве корректирующей обратной связи в предикторе состояния. Показана робастность предложенного решения к параметрическим вариациям объекта управления, а также к числовой реализации динамической модели предиктора. Теоретические положения иллюстрируются результатами числового моделирования.

Ключевые слова: линейные системы, запаздывание по управлению, робастность.

DOI: 10.7868/S2413977726090026

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается задача практической реализации стабилизирующего управления для линейного стационарного объекта с запаздыванием по сигналу управления²:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t - h),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – доступный измерениям вектор состояния с начальным условием x_0 , $u \in \mathbb{R}^1$ – сигнал управления ($u(t) \equiv 0$ при $t < h$), матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в общем случае не гурвицева, пара (A, b) полностью управляема, h – известное произвольно большое, но ограниченное запаздывание. Также предполагается, что A и b являются неопределенными и их оценки (номинальные значения) $\hat{A}$ и $\hat{b}$ используются при синтезе закона управления. В общем случае $\hat{A} \neq A$ и $\hat{b} \neq b$.

Замечание 1. Без потери общности будем считать, что состояния всех рассматриваемых и синтезируемых динамических систем являются нулевыми

¹ Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSER-2025-0002).

² Иногда аргумент t будет опускаться в формулах, если это не приводит к ошибочному пониманию.

при $t < 0$, а под начальным состоянием x_0 понимается состояние в момент времени $t = 0$, т.е. $x_0 = x(0)$. Для динамических систем с состоянием $\chi(t)$ под χ_ξ^+ будем понимать значение состояния, установленное (переключенное) в момент времени $t = \xi$ в соответствии с некоторым правилом.

Если A и b являются известными (т.е. $\hat{A} = A$ и $\hat{b} = b$), то для стабилизации объекта (1) можно построить следующее управление с предсказанием (англ. – *prediction-based control*) [1–3]:

$$(2) \quad u(t) = -k^\top \left(e^{Ah} x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \right),$$

где вектор обратных связей $k \in \mathbb{R}^n$ выбран так, что матрица $A_k = A - bk^\top$ является гурвицевой. Следует отметить, что выражение в скобках является точным предсказанием будущего значения вектора состояния и иногда именно оно называется предиктором:

$$(3) \quad e^{Ah} x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau = x(t+h).$$

При этом управление (2) обеспечивает замкнутой системе характеристическое уравнение вида $\det(sI - A + bk^\top) = 0$.

Управление вида (2) получило широкое распространение при решении таких задач, как назначение заданного набора корней замкнутой системы [3, 4], адаптивного регулирования в системах с запаздыванием [5, Глава 6; 6–9], стабилизации многоканальных систем с разными запаздываниями в каждом канале [10] и т.п. (см. также специализированные монографии [2, 4, 11, 12]). Однако, это элегантное решение имеет существенный недостаток, связанный с практической реализацией интегрального члена (предиктора) для неустойчивых объектов (т.е. когда матрица A не гурвицева). В [3] было предложено аппроксимировать интеграл с помощью какого-либо численного метода (например, метода прямоугольников, трапеций, Симпсона и т.п.) с конечным числом членов числовой аппроксимации. При этом было сделано предположение, что замкнутая система будет устойчивой при достаточно точной аппроксимации, т.е. при достаточно большом числе ее членов.

Однако в [13] на примере системы первого порядка было показано, что при числовой реализации предиктора (3) замкнутая система может быть неустойчивой даже при произвольно высокой точности аппроксимации, т.е. при произвольно большом числе ее членов. Другими словами, управление с предсказанием не является робастным по отношению к числовой реализации предиктора³. В то же время, как было отмечено в [3], реализация предикто-

³ В [20] с использованием аппарата матричных линейных неравенств была получена оценка допустимого запаздывания, позволяющего сохранить устойчивость замкнутой системы при числовой реализации интегрального члена и заданных параметрах объекта управления.

ра (3) в виде решения дифференциального уравнения предполагает взаимное сокращение в замкнутой системе неустойчивых нулей и полюсов, что ведет к неустойчивости даже при бесконечно малых параметрических возмущениях, т.е. к неробастности по отношению к параметрическим возмущениям. Особо отметим, что при управлении асимптотически устойчивыми объектами таких проблем практической реализации не возникает, что открывает возможности для синтеза широкого класса различных стабилизирующих управлений (например, см. [14, раздел 2.2; 7, 15–17] и ссылки внутри них).

Для решения отмеченной выше проблемы в [18] для систем с запаздыванием по входу (и в [19] для систем с запаздываниями по входу и по состоянию) было предложено включить в закон управления фильтр низких частот и использовать так называемый динамический предиктор (англ. – *dynamic prediction-based control*):

$$(4) \quad \dot{u} = -(\gamma + k^\top b)u - (k^\top A + \gamma k^\top) \left[e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \right],$$

где $\gamma > 0$. В этом случае характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид $(s + \gamma)\det(sI - A + bk^\top) = 0$. Было доказано, что замкнутая система (1), (4) сохраняет устойчивость, если интегральный член аппроксимируется числовым методом достаточно высокой точности. Позже в [21–23] также была показана робастность закона управления (4) по отношению к малым (в определенном смысле) параметрическим вариациям.

Таким образом, управление с динамическим предиктором (4) сохраняет устойчивость даже если интеграл аппроксимируется числовой суммой с конечным числом членов, а реальные параметры A и b несколько отличаются от их оценок $\hat{A}$ и $\hat{b}$, использованных при синтезе закона управления. Однако практическая реализация закона (4) требует использования специальных числовых методов расчета интеграла с высокой точностью аппроксимации.

Известны два принципиально иных подхода, позволяющие вообще отказаться от задачи расчета интегрального члена. Один из них предполагает использование различных типов статических обратных связей, а второй – использование для оценки будущего значения вектора состояния $x(t + \tau)$ цепочки наблюдателей состояния, названной последовательностью предикторов.

Закон управления в виде статической обратной связи в англоязычных публикациях получил название *truncated predictor feedback* [24–27]. Так как в русскоязычной литературе общепризнанного названия не устоялось, будем называть такой класс законов управления *усеченными статическими предикторами*. Он описывается выражением

$$(5) \quad u(t) = -k^\top(\sigma)e^{Ah}x(t),$$

где вектор коэффициентов обратной связи $\hat{k} = \hat{k}(\sigma)$ параметризован малым параметром $\sigma \in (0, 1)$. Как показано в [26, 27], при специальном выборе “слабой” обратной связи с достаточно малым параметром σ статический предик-

тор обеспечивает стабилизацию линейной системы с произвольно большим входным запаздыванием при условии, что незамкнутая система находится на границе устойчивости (т.е. собственные значения матрицы A не имеют положительных вещественных частей). Дальнейшие модификации статической обратной связи, известные как *псевдо предиктор* (англ. – *pseudo-predictor feedback*) являются применимыми к нестационарным линейным объектам, которые могут быть полиномиально неустойчивыми [28]. Как отмечено в [28], так как статическая обратная связь является линейной, она робастна к малым параметрическим вариациям.

Таким образом, законы управления со статическими предикторами обеспечивают робастную стабилизацию линейных объектов с произвольно большими входными запаздываниями и одновременно полностью снимают проблему своей практической реализации. Однако они применимы только к очень ограниченному классу систем, которые не являются экспоненциально неустойчивыми.

Альтернативный метод, позволяющий снять проблему практической реализации интегрального члена, основан на использовании наблюдателя вида [29]

$$(6) \quad \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + bu(t) + L(\bar{x}(t-h) - x(t)),$$

где матрица коэффициентов обратных связей L выбрана таким образом, что модель

$$(7) \quad \dot{e} = Ae + Le(t-h)$$

ошибки предсказания $e(t) = \bar{x}(t-h) - x(t)$ является асимптотически устойчивой. Если $e(t) \rightarrow 0$, то $\bar{x}(t) \rightarrow x(t+h)$, что позволяет использовать обратную связь вида $u(t) = -k^\top \bar{x}(t)$.

Как известно [30], если матрица $(A + L)$ является гурвицевой, то существует достаточно малое запаздывание $h_m > 0$ такое, что модель (7) асимптотически устойчива для всех $h \in [0, h_m]$. Для того чтобы решить задачу при произвольно больших запаздываниях, в [29] было предложено использовать *последовательность предикторов* (англ. – *sequential sub-predictors*): цепочку из последовательно соединенных наблюдателей (6) для малых сегментов большого запаздывания (см. также [31, 33–37], где последовательные предикторы применены для различных классов линейных и нелинейных систем, систем с запаздыванием по входу, состоянию и выходу). В [29] было показано, что замкнутая система с последовательными предикторами является робастной по отношению к малым параметрическим возмущениям.

Таким образом, законы управления с последовательными предикторами обеспечивают робастную стабилизацию линейных объектов, но требуют для больших значений запаздывания существенного увеличения динамического порядка регулятора в силу необходимости использования цепочки наблюдателей вектора состояния полной размерности.

В настоящей статье предлагается новый замкнутый предиктор, который является робастным по отношению к параметрическим возмущениям, а также к своей числовой реализации. Предлагаемый предиктор состоит из достаточно простого наблюдателя ошибки предсказания и механизма переключения состояния наблюдателя, при этом обладает следующими преимуществами перед известными решениями:

- имеет достаточно простую структуру и является применимым для систем с произвольно большим запаздыванием без повышения динамического порядка и привлечения цепочки наблюдателей;
- является замкнутым по ошибке предсказания будущего значения вектора состояния;
- является робастным по отношению к параметрическим возмущениям, а также к своей числовой реализации;
- практическая реализация динамических блоков предиктора не требует использования специальных методов числового интегрирования и может быть реализована с использованием стандартных методов, предлагаемых пакетом MatLab, таких как ode1 (Euler), ode2 (Heun), ode3 (Bogacki-Shampine), ode4 (Runge-Kutta), ode5, или ode8 (Dormand-Prince).

Настоящая статья расширяет результаты конференционной статьи [38], где был предложен замкнутый предиктор, а его робастность по отношению к числовой реализации была высказана в качестве предположения. В настоящей статье робастность по отношению к параметрическим возмущениям и числовой реализации строго доказана (см. разделы 3 и 4). Проблема робастности по отношению к вариациям запаздывания не анализируется в текущей статье, и читатели отсылаются к соответствующим работам [2, 11].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена основная идея построения замкнутого наблюдателя и проанализированы его свойства для идеального случая (т.е. без параметрических возмущений и числовой аппроксимации). В разделе 3 доказана робастность предложенного наблюдателя по отношению к параметрическим возмущениям, а в разделе 4 – по отношению к числовой реализации. Результаты моделирования приведены в разделе 5. Приложения 1–3 содержат полезный математический инструментарий и доказательства вспомогательных утверждений.

2. Замкнутый предиктор: основная идея

Будем рассматривать интегральный член в (2) в качестве решения дифференциального уравнения

$$(8) \quad \dot{\psi}(t) = A\psi(t) + bu(t) - e^{Ah}bu(t-h), \quad \psi(0) = 0.$$

В этом случае

$$(9) \quad x(t+h) = e^{Ah}x(t) + \psi(t),$$

и управление (2) принимает вид

$$(10) \quad u = -k^\top \left(e^{Ah} x + \psi \right).$$

В дальнейшем будем рассматривать (8) и (9) как математическую модель истинного предсказания вектора состояния $x(t+h)$, а решение $\psi(t)$ уравнения (8) – как истинное значение интегрального члена, не доступное прямым измерениям.

Будем полагать, что для практической реализации закона управления оценка интегрального члена $\hat{\psi}(t)$ рассчитывается как решение (может быть, полученное с использованием стандартных численных методов) дифференциального уравнения

$$(11) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \hat{A}\hat{\psi}(t) + \hat{b}u(t) - e^{\hat{A}h}\hat{b}u(t-h), \quad \hat{\psi}(0) = \hat{\psi}_0,$$

где $\hat{\psi} \in \mathbb{R}^n$. При этом закон управления определяется выражением

$$(12) \quad u(t) = -\hat{k}^\top \left(e^{\hat{A}h} x(t) + \hat{\psi}(t) \right),$$

где вектор $\hat{k}$ выбран так, что матрица $\hat{A}_k = \hat{A} - \hat{b}\hat{k}^\top$ гурвицева. В этом случае оценка предсказания будущего значения вектора состояния записывается в форме

$$(13) \quad \hat{x}(t+h) = e^{\hat{A}h} x(t) + \hat{\psi}(t).$$

Как было отмечено выше, закон управления (11), (12) не является робастным в силу взаимной компенсации неустойчивых (если матрица A не гурвицева) нулей и полюсов [3]. Это означает, что замкнутая система (1), (11) и (12) может терять устойчивость при произвольно малых возмущениях, вызванных вариациями параметров объекта управления или ошибками численного метода решения дифференциального уравнения (11). Для преодоления этой проблемы предлагается новый замкнутый предиктор.

2.1. Синтез закона управления: идеальный случай

Для того чтобы пояснить основную идею, начнем с идеального случая, когда для расчета закона управления использованы истинные значения параметров объекта A и b , а уравнение (11) рассчитывается абсолютно точно. В этом случае вместо уравнений (11)–(13) можем записать

$$(14) \quad \dot{\psi}(t) = A\psi(t) + bu(t) - e^{Ah}bu(t-h), \quad \psi(0) = \psi_0,$$

$$(15) \quad u(t) = -k^\top \left(e^{Ah} x(t) + \psi(t) \right),$$

$$(16) \quad \hat{x}(t+h) = e^{Ah} x(t) + \psi(t).$$

В (14) ненулевое начальное условие $\hat{\psi}_0 \neq 0$ установлено исключительно в целях демонстрации асимптотической устойчивости синтезируемого замкнутого предиктора.

Введем *ошибку предсказания*

$$(17) \quad \varepsilon(t) := x(t+h) - \hat{x}(t+h).$$

Ввиду (9) и (16) имеем

$$(18) \quad \varepsilon(t) = \psi(t) - \hat{\psi}(t),$$

и с учетом (8) и (14) получаем

$$(19) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t), \quad \varepsilon(0) = -\hat{\psi}_0.$$

Ошибка предсказания $\varepsilon(t)$ не измеряема. Однако величина⁴

$$(20) \quad y(t) := \varepsilon(t-h) = x(t) - \hat{x}(t)$$

или (см. (16))

$$(21) \quad y(t) = x(t) - e^{Ah}x(t-h) - \hat{\psi}(t-h)$$

измеряема и может рассматриваться как выход модели (19) с запаздыванием. С учетом (19) и (20) можно записать:

$$(22) \quad y(t) = e^{-Ah}\varepsilon(t).$$

Основная идея замкнутого предиктора состоит в том, чтобы оценить ошибку предсказания $\varepsilon(t)$, описываемую моделью

$$(23) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t), \quad y(t) = \varepsilon(t-h)$$

с измеряемым выходом y с запаздыванием, и затем использовать эту оценку для коррекции оценки предсказания $\hat{x}(t+h)$. Для этого используем наблюдатель вида (который является частным случаем наблюдателя из секции 3.3 книги [2]):

$$(24) \quad \dot{\hat{\varepsilon}}(t) = A\hat{\varepsilon}(t) + Le^{Ah}\left(y(t) - e^{-Ah}\hat{\varepsilon}(t)\right), \quad \hat{\varepsilon}(0) = 0,$$

где $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n$ – оценка ошибки предсказания, а матрица обратных связей $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выбрана так, что $A_L = A - L$ гурвицева.

Вычисляя производную по времени от *ошибки оценки* $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon - \hat{\varepsilon}$ с учетом (19), (22) и (24), получаем

$$(25) \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} = A_L\tilde{\varepsilon},$$

и, следовательно, $\hat{\varepsilon}(t) \rightarrow \varepsilon(t) = x(t+h) - \hat{x}(t+h)$ при $t \rightarrow \infty$.

⁴ Подобный подход был использован в [39], где ошибка предсказания с задержкой $\varepsilon(t-h) = x(t) - \hat{x}(t)$ была использована для парирования постоянного возмущения.

Выражение (18) и модель (25) позволяют сформировать коррекцию оценки будущего значения вектора состояния в виде

$$(26) \quad \hat{x}^*(t+h) := e^{Ah}x(t) + \hat{\psi}(t) + \hat{\varepsilon}(t).$$

Можно показать справедливость следующего выражения:

$$(27) \quad \hat{x}^*(t+h) = x(t+h) - \tilde{\varepsilon}(t),$$

где $\tilde{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому вместо (15) используется управление вида

$$(28) \quad u(t) = -k^\top \hat{x}^*(t+h).$$

Однако несмотря на то, что $\tilde{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, оценки $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\psi}$ могут расти неограниченно, так как модель (23) неустойчива. Для того чтобы предотвратить неограниченный рост $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$, предлагается периодически переключать состояния моделей (14) и (24) в моменты времени $t = iT$, где $i = 1, 2, 3, \dots$, а $0 < T < \infty$ – достаточно большой интервал времени, минимальное значение которого будут определено позже:⁵

$$(29) \quad \hat{\psi}_{iT}^+ = \hat{\psi}(iT) + \hat{\varepsilon}(iT), \quad \hat{\varepsilon}_{iT}^+ = 0.$$

С учетом $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \tilde{\varepsilon} = \psi - \hat{\psi} - \tilde{\varepsilon}$ получаем

$$(30) \quad \hat{\psi}_{iT} = \psi(iT) - \tilde{\varepsilon}(iT).$$

Поэтому если последовательность $\tilde{\varepsilon}(iT)$ является асимптотически убывающей, т.е. $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то $\hat{\psi}_{iT} \rightarrow \psi(iT)$ при $i \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Переменные $\hat{\varepsilon}(t)$ и $\hat{\psi}(t)$ являются внутренними переменными регулятора и не влияют на асимптотическое поведение физических сигналов – состояния $x(t)$ и управления $u(t)$. Однако соображения математической строгости доказательства устойчивости замкнутой системы, а также инженерные соображения практической реализуемости операций с большими числами (с сигналами больших амплитуд) заставляют принимать меры по обеспечению ограниченности всех сигналов в замкнутой системе, что достигается в данном случае периодическим переключением состояний интеграторов (29).

Отметим, что в моменты времени $t = iT$ происходит обнуление сигнала $e^{-Ah}\hat{\varepsilon}(t)$, являющегося оценкой сигнала $y(t) = \varepsilon(t-h)$. Поэтому для корректной работы обратной связи $(y(t) - e^{-Ah}\hat{\varepsilon}(t))$ в наблюдателе (24) предлагается

⁵ Альтернативный подход к переключению состояния в модели (14) был предложен в [40]. Однако при этом предиктор оставался разомкнутым и обеспечивал только ограниченность ошибки предсказания, но не ее асимптотическую сходимость к нулевому значению.

ее принудительно обнулять на интервалах времени $t \in [iT, iT+h]$ и вместо наблюдателя (24) использовать наблюдатель с переключением обратной связи

$$(31) \quad \dot{\hat{\varepsilon}}(t) = A\hat{\varepsilon}(t) + \gamma(t)Le^{Ah} \left(y(t) - e^{-Ah}\hat{\varepsilon}(t) \right), \quad \hat{\varepsilon}_0 = 0,$$

где

$$(32) \quad \gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } iT \leq t < iT+h, \\ 1 & \text{для } iT+h \leq t < (i+1)T. \end{cases}$$

Тогда вместо модели (25) имеем

$$(33) \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} = \bar{A}_L \tilde{\varepsilon},$$

где

$$\bar{A}_L = \begin{cases} A & \text{для } iT \leq t < iT+h, \\ A_L & \text{для } iT+h \leq t < (i+1)T. \end{cases}$$

Таким образом, предложенный закон управления состоит из замкнутого предиктора (14) и (26), наблюдателя ошибки оценки (31), (21), контроллера (28) и схемы переключения состояний (29).

Интервал переключения состояний T выбирается из условия обеспечения асимптотической устойчивости модели (33). Для этого зададим положительно определенную матрицу P с минимальным собственным значением λ_1 и максимальным собственным значением λ_2 как решение матричного уравнения $A_L^\top P + PA_L = -I$. Тогда в силу (33) для интервала времени $t \in [iT, (i+1)T]$ можно записать

$$|\tilde{\varepsilon}((i+1)T)|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\frac{T-h}{\lambda_2}} |\tilde{\varepsilon}(iT+h)|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\frac{T-h}{\lambda_2}} \|e^{Ah}\|^2 |\tilde{\varepsilon}(iT)|^2.$$

Для обеспечения неравенства $|\tilde{\varepsilon}((i+1)T)| < |\tilde{\varepsilon}(iT)|$ выберем T из условия⁶

$$(34) \quad T \geq h - \lambda_2 \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 \|e^{Ah}\|^2} \right).$$

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Если интервал переключения состояний T выбран из условия (34), то $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Следствие 1. При выполнении (34) имеем $\tilde{\varepsilon}(iT+h) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Замечание 3. Выполнение условия (34) гарантирует асимптотическое стремление $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Как показали результаты многочисленных моделирований, для обеспечения монотонности процессов стабилизации в замкнутой системе без всплесков после переключения состояний $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$ рекомендуется выбирать интервал переключения T в полтора-два раза больше предельного значения, определяемого выражением (34).

⁶ Здесь предполагается, что матрица A не гурвицева и, следовательно, $\|e^{Ah}\| \geq 1$.

2.2. Устойчивость при идеальных условиях

Для анализа свойств устойчивости получим модель замкнутой системы. Это удобно сделать в виде двух динамических подсистем: в координатах $(\tilde{\varepsilon}, x, \psi)$ и $(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \hat{\psi})$.

Так как состояния $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$ переключаются в моменты времени iT , а обратная связь в наблюдателе (31) подключается с запаздыванием h , полученные динамические модели будут справедливыми на интервалах времени $iT + h \leq t < (i + 1)T$. Однако эти модели используются для анализа свойств устойчивости на полном интервале времени $t \in [0, \infty)$, учитывая асимптотические свойства дискретных последовательностей $\tilde{\varepsilon}(iT)$ и $\tilde{\varepsilon}(iT + h)$.

Подставляя (27) и (28) в (1), получаем

$$\dot{x} = Ax - bk^\top x + bk^\top \tilde{\varepsilon}(t - h) = A_k x + bk^\top e^{-A_L h} \tilde{\varepsilon}.$$

Далее, подставляя (28) в (8), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= A\psi - bk^\top \left(e^{A_h} x + \hat{\psi} + \hat{\varepsilon} \pm \psi \right) + e^{A_h} bk^\top x - e^{A_h} bk^\top \tilde{\varepsilon}(t - h) = \\ &= A_k \psi + Dx + C\tilde{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $C = bk^\top - e^{A_h} bk^\top e^{-A_L h}$ и $D = e^{A_h} bk^\top - bk^\top e^{A_h}$.

Следовательно, на интервалах времени $iT + h \leq t < (i + 1)T$ имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\varepsilon}} \\ \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & 0 & 0 \\ bk^\top e^{-A_L h} & A_k & 0 \\ C & D & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} \\ x \\ \psi \end{bmatrix},$$

где A_k и A_L гурвицевы. Следовательно, данная динамическая система асимптотически устойчива (в силу ее диагональной структуры). Если интервал T определен в соответствии с (34), переключение состояний не нарушит асимптотической сходимости $\tilde{\varepsilon}(iT + h) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом заключаем, что $\tilde{\varepsilon}(t), x(t), \psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Теперь выведем подсистему в координатах $(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \hat{\psi})$. Для $\hat{\varepsilon}$ имеем

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = A\hat{\varepsilon} + Le^{A_h} \left(e^{-A_h} \varepsilon - e^{-A_h} \hat{\varepsilon} \right) = A_L \hat{\varepsilon} + L\varepsilon.$$

Подставляя (28) в (14), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}} &= A\hat{\psi} - bk^\top \left(e^{A_h} x + \hat{\psi} + \hat{\varepsilon} \right) + e^{A_h} bk^\top x - e^{A_h} bk^\top (\varepsilon(t - h) - \hat{\varepsilon}(t - h)) = \\ &= A_k \hat{\psi} + Dx - K\varepsilon + \hat{K}\hat{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $K = e^{A_h} bk^\top e^{-A_h}$ и $\hat{K} = K - bk^\top$.

Следовательно, на интервалах времени $iT + h \leq t < (i + 1)T$ имеем

$$(35) \quad \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\hat{\varepsilon}} \\ \dot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ L & A_L & 0 \\ -K & \hat{K} & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \hat{\varepsilon} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} x.$$

Данная подсистема является неустойчивой в силу неустойчивости матрицы A . Однако, благодаря переключению начальных условий (29), имеем $\varepsilon(iT) = \tilde{\varepsilon}(iT)$, где $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, $\varepsilon(iT)$ и $\varepsilon(iT + h)$ являются асимптотически убывающими последовательностями. Теперь, учитывая, что $x(t), \varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, из (35) заключаем, что $\hat{\varepsilon}(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. В идеальном случае в замкнутой системе, состоящей из объекта (1), замкнутого предиктора (14) и (26), наблюдателя ошибки оценки (31), (21), контроллера (28) и схемы переключения состояний (29) все сигналы являются ограниченными и $\tilde{\varepsilon}(t), \hat{\varepsilon}(t), \varepsilon(t), x(t), \psi(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых начальных условий x_0 и ψ_0 .

Таким образом, замкнутый предиктор в идеальном случае обеспечивает ограниченность всех сигналов и асимптотическую сходимость вектора состояния для любых начальных условий x_0 и $\hat{\psi}_0$, а не только для $\hat{\psi}_0 = 0$, как классический разомкнутый предиктор (11), (13). В следующих разделах будет доказана робастность предложенного предиктора по отношению к параметрическим возмущениям и численной реализации уравнения (14).

3. Замкнутый предиктор: параметрическая робастность

Предположим, что закон управления использует оценку $\hat{A}$ вместо истинного значения A . Исследуем свойства устойчивости замкнутой системы при малых (в смысле нормы $\|A - \hat{A}\|$) отклонениях $\hat{A}$ от A .

Замечание 4. Все результаты непосредственно распространяются также на случай оценки $\hat{b}$. Однако здесь рассмотрим только случай $\hat{A}$ для упрощения аналитических выкладок.

Следовательно, закон управления состоит из:

– замкнутого предиктора

$$(36) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \hat{A}\hat{\psi}(t) + bu(t) - e^{\hat{A}h}bu(t-h),$$

$$(37) \quad \hat{x}^*(t+h) := e^{\hat{A}h}x(t) + \hat{\psi}(t) + \hat{\varepsilon}(t);$$

– наблюдателя ошибки оценки

$$(38) \quad \dot{\hat{\varepsilon}}(t) = \hat{A}\hat{\varepsilon}(t) + \gamma(t)\hat{L}e^{\hat{A}h} \left(y(t) - e^{-\hat{A}h}\hat{\varepsilon}(t) \right),$$

$$(39) \quad y(t) = x(t) - e^{\hat{A}h}x(t-h) - \hat{\psi}(t-h),$$

где $\hat{L}$ выбирается так, что матрица $\hat{A}_L = \hat{A} - \hat{L}$ является гурвицевой, а γ определена в (32);

– контроллера

$$(40) \quad u(t) = -\hat{k}^\top \hat{x}^*(t+h),$$

где вектор $\hat{k}$ выбран так, что матрица $\hat{A}_k = \hat{A} - b\hat{k}^\top$ является гурвицевой;

– схемы переключения состояний (29), где интервал T выбран из условия

$$(41) \quad T \geq h - \hat{\lambda}_2 \ln \left(\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2 \|e^{\hat{A}h}\|^2} \right),$$

$\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы $\hat{P}$, являющейся решением матричного уравнения $\hat{A}_L^\top \hat{P} + \hat{P} \hat{A}_L = -I$.

Как и в разделе 2.2, сначала выведем модель подсистемы в координатах $(\tilde{\varepsilon}, x, \psi)$.

С учетом (13) для ошибки предсказания имеем

$$(42) \quad \varepsilon(t) = x(t+h) - \hat{x}(t+h) = \tilde{E}x(t) + \psi(t) - \hat{\psi}(t),$$

где $\tilde{E} = e^{Ah} - e^{\hat{A}h}$. Следовательно

$$(43) \quad \hat{\varepsilon} = \tilde{E}x + \psi - \hat{\psi} - \tilde{\varepsilon},$$

и (см. (37))

$$(44) \quad \begin{aligned} \hat{x}^*(t+h) &= e^{\hat{A}h}x + \hat{\psi} + e^{Ah}x - e^{\hat{A}h}x + \psi = \\ &= -\hat{\psi} - \tilde{\varepsilon}e^{Ah}x + \psi - \tilde{\varepsilon} = x(t+h) - \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Как показано в Приложении 1, на интервалах времени $iT + h \leq t < (i+1)T$ имеем

$$(45) \quad \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\varepsilon}} \\ \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_L & \tilde{E} & \tilde{A} \\ 0 & \bar{A}_k & 0 \\ b\hat{k}^\top & \hat{D} & \bar{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} \\ x \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b\hat{k}^\top \\ -e^{Ah}b\hat{k}^\top \end{bmatrix} \tilde{\varepsilon}(t-h) + \begin{bmatrix} \hat{L}e^{\hat{A}h} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\eta}(x, \psi),$$

где $\tilde{\eta}(x, \psi)$ определено в (П.1.3), а $\hat{D} = e^{Ah}b\hat{k}^\top - b\hat{k}^\top e^{Ah}$.

В силу следствия 2 из Приложения 2 можно сделать заключение, что матрица $\bar{A}_k$ является гурвицевой для малых $\|\hat{A}\|$. Так как матрицы $\hat{A}_L$ и $\bar{A}_k$ гурвицевы, то матрица

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_L & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_k & 0 \\ e^{Ah}b\hat{k}^\top & \hat{D} & \bar{A}_k \end{bmatrix}$$

является гурвицевой в силу ее диагональной структуры. В силу леммы 3 из Приложения 2 матрица

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_L & \tilde{E} & \tilde{A} \\ 0 & \bar{A}_k & 0 \\ b\hat{k}^\top & \hat{D} & \bar{A}_k \end{bmatrix}$$

является гурвицевой для малых $\|\hat{A}\|$ (и, как результат, малых $\|\tilde{E}\|$). В силу лемм 4 и 5 из Приложения 2 делаем вывод, что система (45) асимптотически устойчива на интервалах времени $iT \leq t < (i+1)T$. Можно показать, что

последовательность $\tilde{\varepsilon}(iT)$ экспоненциально убывающая для малых $\|\tilde{A}\|$, если интервал T выбран в соответствии с (41). В результате приходим к заключению, что $\tilde{\varepsilon}(t), x(t), \psi(t), \eta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для малых $\|\tilde{A}\|$.

Теперь получим динамическую систему в координатах $(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \hat{\psi})$. Модель ε определена выражением (П.1.7). Как показано в Приложении 1 (см. (П.1.7) и (П.1.8)), на интервалах времени $iT + h \leq t < (i+1)T$ имеем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\hat{\varepsilon}} \\ \dot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 & 0 \\ \hat{L} & \hat{A}_L & 0 \\ 0 & -b\hat{k}^\top & \hat{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \hat{\varepsilon} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{E}_A \\ 0 \\ \bar{D} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \psi + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{L}e^{\hat{A}h}\tilde{A} \\ 0 \end{bmatrix} \eta - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top \end{bmatrix} \tilde{\varepsilon}(t-h). \end{aligned}$$

Выше было показано, что $x(t), \tilde{\varepsilon}(t), \psi(t), \eta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако эта подсистема является неустойчивой в силу матрицы $\hat{A}$. В то же время благодаря переключению состояния (29) в моменты времени (41) имеем $\varepsilon(iT) = \tilde{\varepsilon}(iT)$, где $\tilde{\varepsilon}(iT) \rightarrow 0$. Следовательно, $\varepsilon(iT)$ является убывающей дискретной последовательностью. Учитывая, что $\hat{A}_L$ и $\hat{A}_k$ гурвицевы, заключаем, что $\varepsilon(t), \hat{\varepsilon}(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, доказано следующее

Утверждение 2. Закон управления (36)–(40) и (29) является робастным по отношению к параметрическим возмущениям в том смысле, что свойство асимптотической сходимости, установленное в утверждении 1, сохраняется при малых параметрических вариациях $\|\tilde{A}\|$, т.е. все сигналы в замкнутой системе остаются ограниченными и $\tilde{\varepsilon}(t), \hat{\varepsilon}(t), \varepsilon(t), x(t), \psi(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых начальных условий $x_0, \hat{\psi}_0$.

4. Замкнутый предиктор: робастность по отношению к числовой реализации

В данном разделе рассматривается случай, когда параметры объекта известны точно (т.е. $\hat{A} = A$ и $\hat{b} = b$), но для практической реализации интегрального члена ψ дифференциальное уравнение (14) решается с использованием стандартного численного метода, предлагаемого, например, пакетом MatLab – ode1 (Euler), ode2 (Heun), ode3 (Bogacki-Shampine), ode4 (Runge-Kutta), ode5 или ode8 (Dormand-Prince). Другими словами, исследуем свойства робастности предложенного замкнутого предиктора по отношению к числовой реализации уравнения (14).

Для этого предположим, что используется дискретный контроллер

$$(46) \quad u(m) = -k^\top \left(e^{A\delta} x(m) + \bar{\psi}(m) \right)$$

с интервалом дискретизации δ , где $u(m)$ и $x(m)$ – значения сигналов u и x в дискретные моменты времени $t = m\delta$, $m = 0, 1, 2, \dots$, а $\bar{\psi}(m)$ является числовым решением дифференциального уравнения (14), полученное с тем же

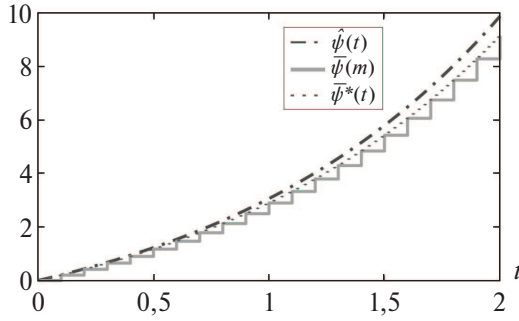


Рис. 1. Решение $\hat{\psi}(t)$ уравнения (14), числовое решение $\bar{\psi}(m)$ и непрерывная мажоранта $\bar{\psi}^*(t)$.

шагом числового интегрирования δ . Интерполяция значений сигнала управления внутри интервала дискретности δ осуществляется с помощью интерполятора нулевого порядка.

Примем следующее допущение, которое является обоснованным с практической точки зрения.

Допущение 1. Числовое решение $\bar{\psi}(m)$ является сходящимся, т.е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{\psi}(m) = \hat{\psi}(t)$$

для любого фиксированного момента времени $t = m\delta$.

Так как уравнение (14) является линейным по $\hat{\psi}$, можно построить модель мажоранты в непрерывном времени

$$(47) \quad \dot{\bar{\psi}}^*(t) = \bar{A}\bar{\psi}^*(t) + \bar{b}u(t) - e^{\bar{A}h}\bar{b}u(t-h),$$

где $\bar{A} = \bar{A}(\delta)$ и $\bar{b} = \bar{b}(\delta)$ зависят от δ и для всех $t = m\delta$ выполняется условие (см. рис. 1): $\bar{\psi}^*(t) = \bar{\psi}(m)$.

Свойства модели (47) определяются следующим утверждением, доказательство которого приведено в Приложении 3.

Лемма 2. Параметры $\bar{A}$ и $\bar{b}$ модели (47) такие, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{A}(\delta) = A, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{b}(\delta) = b.$$

Таким образом, для моментов времени $t = m\delta$ числовое решение $\bar{\psi}(m)$ может быть замещено непрерывной мажорантой $\bar{\psi}^*(t)$, генерируемой параметрически возмущенной (так как $\bar{A} \neq A$) моделью (47). Другими словами, проблема анализа робастности по отношению к числовой реализации интегрального члена сведена к проблеме анализа робастности по отношению к параметрическим вариациям. Поэтому с учетом утверждения 2 непосредственно получаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. Закон управления (14), (26), (31), (21), (28) и (29) является робастным по отношению к числовой реализации (14) в том смысле, что свойство экспоненциальной сходимости, определенное в утверждении 1, сохраняется для достаточно малых интервалов дискретности δ , т.е. все сигналы в замкнутой системе остаются ограниченными и $\tilde{\varepsilon}(t), \hat{\varepsilon}(t), \varepsilon(t), x(t), \psi(t), \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых начальных условий $x_0, \hat{\psi}_0$.

Замечание 5. Очевидно, что утверждения 2 и 3 могут быть объединены, что демонстрирует робастность предложенного решения одновременно, и к параметрическим возмущениям, и к числовой реализации.

5. Результаты моделирования

Пример 1. Асимптотическая сходимость при ненулевом начальном условии $\hat{\psi}_0 \neq 0$. Рассмотрим в методологических целях поведение классического разомкнутого предиктора, замкнутого предиктора без переключения состояния и замкнутого предиктора с переключением состояния для случая ненулевого начального условия $\hat{\psi}_0$.

Рассмотрим экспоненциально неустойчивый объект второго порядка (1) с $h = 1$ с

$$(48) \quad \hat{A} = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

и выберем $k = [2 \ 3,1]^\top$. Моделирование осуществлялось в среде MatLab/Simulink с использованием численного метода ode8 (Dormand-Prince) и фиксированным интервалом дискретности 0,00001 с. Предполагалось, что параметры A и b точно известны и использованы для реализации закона управления, т.е. $\hat{A} = A$ и $\hat{b} = b$.

Сначала, рассмотрим контроллер с классическим разомкнутым предиктором (14) и (15). Результаты моделирования для $\hat{\psi}_0 = 0$ представлены на рис. 2,а и демонстрируют асимптотическую сходимость по x . Однако для $\hat{\psi}_0 = [0 \ 0,1]^\top$ получаем неограниченный рост x и ψ (см. рис. 2,б).

Теперь рассмотрим закон управления с замкнутым предиктором без переключения состояния: (14), (20), (24), и (28). При моделировании были использованы следующие значения параметров:

$$(49) \quad L = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad T = 10 \text{ с.}$$

Результаты для $\hat{\psi}_0 = [0 \ 0,1]^\top$ представлена на рис. 3 и демонстрируют асимптотическую сходимость по x (в противоположность разомкнутому предиктору), но неограниченный рост по $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$.

Рисунок 4 представляет результаты моделирования $\hat{\psi}_0 = [0 \ 0,1]^\top$, полученные при использовании предложенного замкнутого предиктора с переключением состояния. В этом случае контроллер описывается следующими

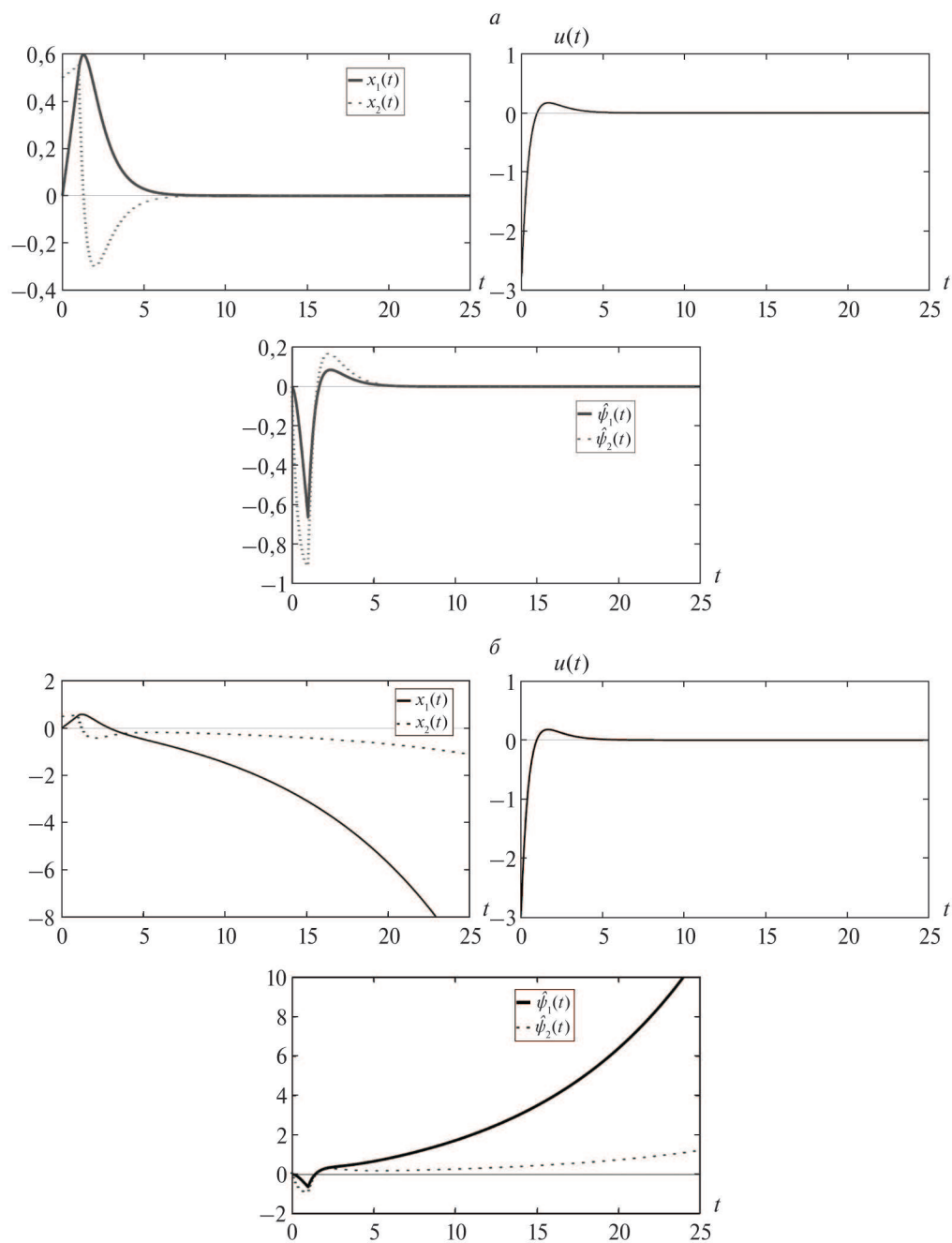


Рис. 2. (Пример 1). Переходные процессы в системе с параметрами (48) и $h = 1$ с, полученные при использовании классического разомкнутого предиктора: $a - \hat{\psi}_0 = 0$; $b - \hat{\psi}_0 \neq 0$.

уравнениями: (14), (26), (31), (21), (28) и (29). Как видно из представленных графиков, предлагаемое решение обеспечивает ограниченность и асимптотическую сходимость по x , $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$ при различных значениях запаздывания.

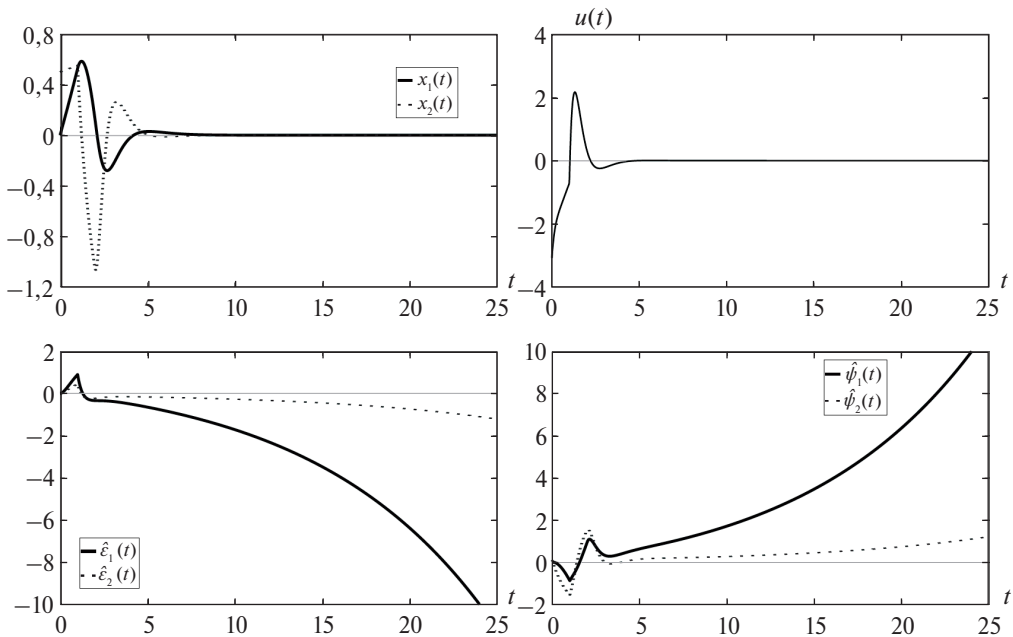


Рис. 3. (Пример 1). Переходные процессы в системе с параметрами (48) и $h = 1$ с, полученные для $\hat{\psi}_0 \neq 0$ при использовании замкнутого предиктора без переключения состояния.

Пример 2. Робастность по отношению к параметрическим возмущениям. Рассмотрим объект (1) с $h = 1$ с

$$(50) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,45 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix},$$

и оценками

$$(51) \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Выберем $\hat{k} = [2 \ 3,1]^\top$. Моделирование осуществлялось в среде MatLab/Simulink с использованием численного метода ode8 (Dormand-Prince) и фиксированным интервалом дискретности 0,00001 с.

Результаты моделирования, полученные для контроллера с классическим разомкнутым предиктором и $\hat{\psi}_0 = 0$ представлены на рис. 5 и демонстрируют неограниченный рост x . Рисунок 6 представляет результаты моделирования, полученные для контроллера с предложенным замкнутым предиктором с переключением начальных условий. При моделировании использовались значения L и T , определенные в (49). Как видно из представленных графиков, несмотря на параметрические возмущения предложенный контроллер обеспечивает ограниченность и асимптотическую сходимость x , $\hat{\psi}$ и $\hat{\varepsilon}$.

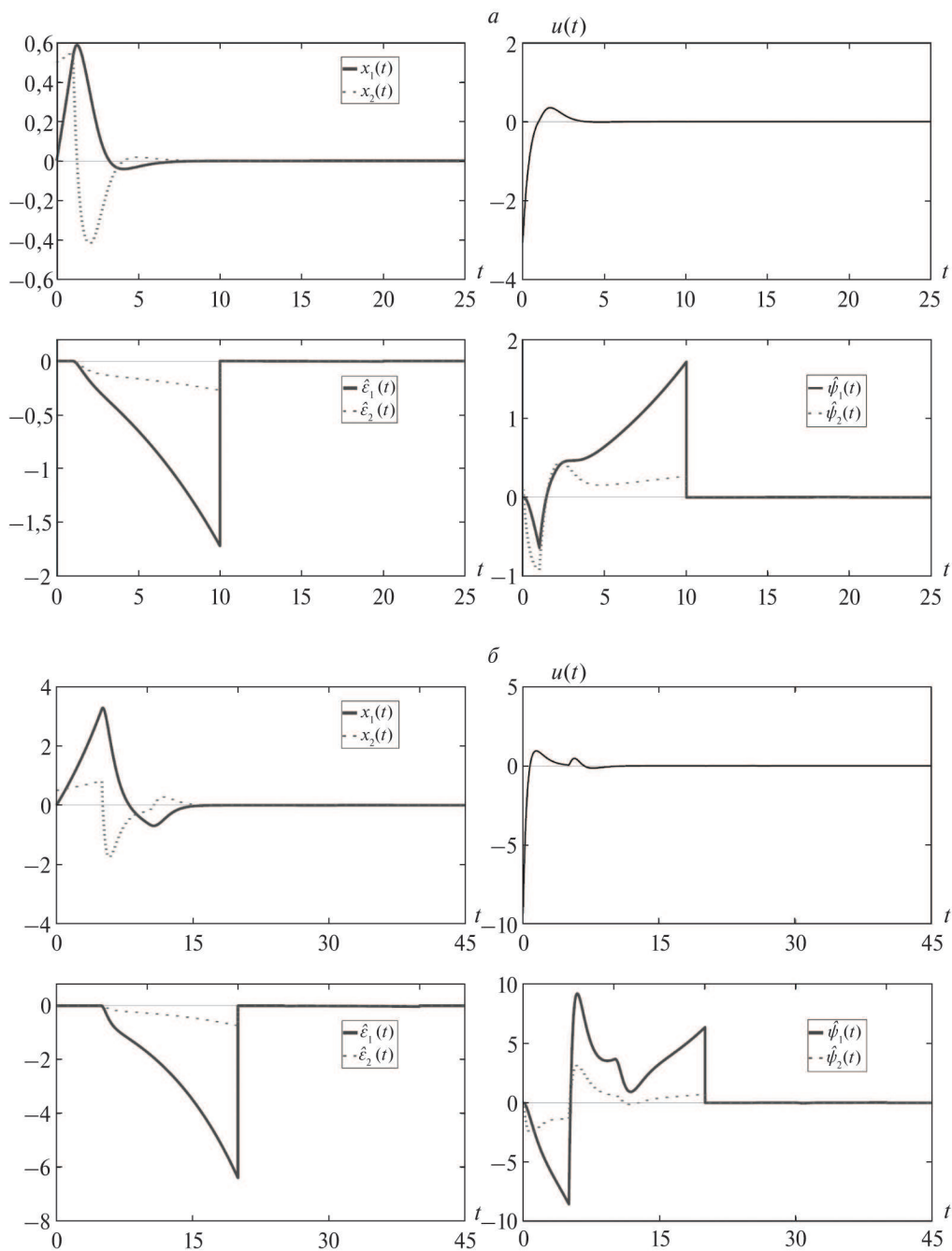


Рис. 4. (Пример 1). Переходные процессы в системе с параметрами (48), полученные для $\hat{\psi}_0 \neq 0$ при использовании замкнутого предиктора с переключением состояния: $a - h = 1$ с и $T = 10$ с; $b - h = 5$ с и $T = 20$ с.

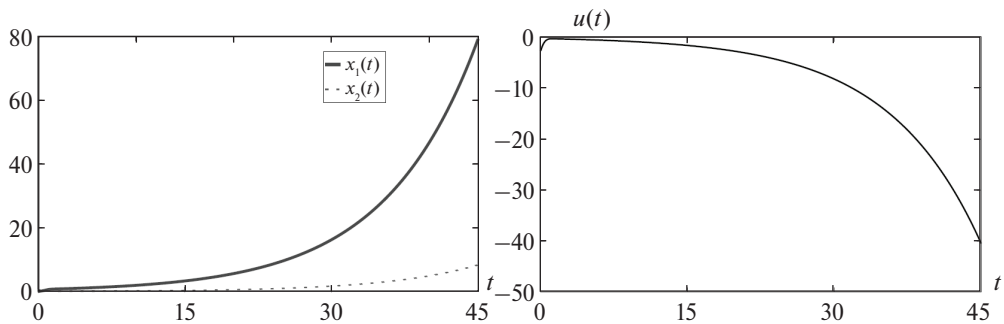


Рис. 5. (Пример 2). Переходные процессы в системе с параметрами (50), (51) и $h = 1$ с, полученные при использовании классического разомкнутого предиктора.

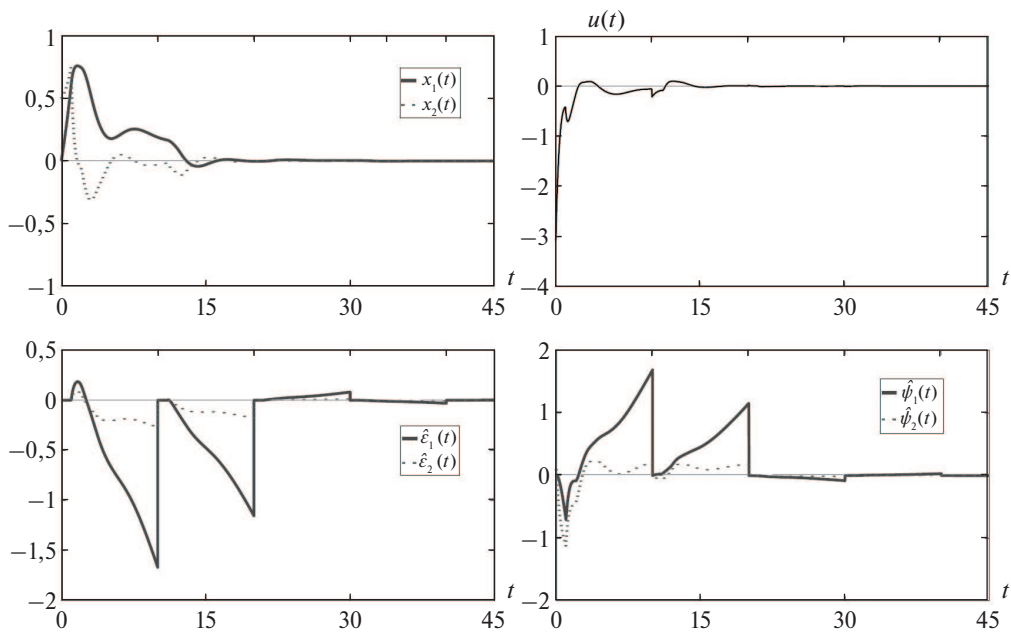


Рис. 6. (Пример 2). Переходные процессы в системе с параметрами (50), (51) и $h = 1$ с, полученные при использовании замкнутого предиктора с переключением состояния.

Пример 3. Робастность по отношению к числовой реализации. Рассмотрим опять объект (1) с параметрами (48), $h = 1$ с, и $k = [2 \ 3,1]^T$. Результаты моделирования для контроллера с классическим разомкнутым предиктором, полученные с использованием метода численного интегрирования `ode8` (Dormand-Prince) и фиксированного интервала дискретности 0,00001 с, представлены на рис. 2,а и демонстрируют асимптотическую сходимость по x на интервале $t \in [0, 25]$ с. Однако для более грубого метода интегрирования `ode1` (Euler) с фиксированным интервалом дискретности 0,0001 с наблю-

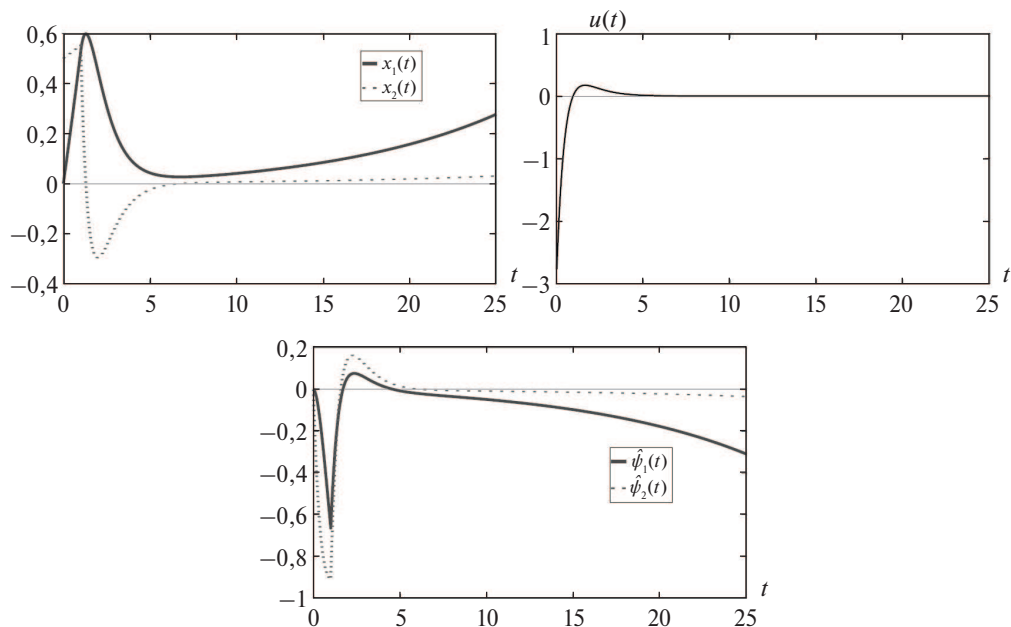


Рис. 7. (Пример 3). Переходные процессы в системе с параметрами (48) и $h = 1$ с, полученные при использовании классического разомкнутого предиктора и метода численного интегрирования ode1 (Euler) с фиксированным интервалом дискретности 0,0001 с.

даются расходящиеся процессы по x (см. рис. 7). При этом предложенный предиктор с L, T , заданными в (49), обеспечивает для метода ode1 (Euler) с фиксированным интервалом дискретности 0,0001 с ограниченность всех сигналов и асимптотическую сходимость $x(t)$, $\hat{\psi}(t)$ и $\hat{\varepsilon}(t)$ с незначительными изменениями вида процессов по сравнению с рис. 4, а.

6. Заключение

В статье предложен новый замкнутый предиктор состояния линейного объекта и показаны свойства его робастности по отношению к параметрическим возмущениям и числовой реализации. Основная идея предложенного предиктора состоит в оценке ошибки предсказания, т.е. разности между истинным (и не доступным прямым измерениям) предсказанием $x(t + h)$ и его оценкой $\hat{x}(t + h)$, генерируемой предиктором, и в использовании этой ошибки предсказания для коррекции $\hat{x}(t + h)$. Задача оценки ошибки предсказания решается с использованием специального наблюдателя состояния для систем с запаздыванием по выходу, а для преодоления неограниченного роста некоторых сигналов в замкнутой схеме предложено периодически переключать состояния в схемах расчета интегрального члена и в наблюдателе ошибки предсказания. Дальнейшее развитие подхода предполагает строгое доказательство свойств робастности по отношению к вариациям величины запаздывания.

Вывод модели (45). Подставляя (44) в (40) и (1), получаем

$$(П.1.1) \quad \dot{x} = \bar{A}_k x + b \hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h),$$

где $\bar{A}_k = A - b \hat{k}^\top$.

Теперь рассмотрим $y(t)$ (39):

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Ah} x(t-h) + \psi(t-h) - e^{\hat{A}h} x(t-h) - \hat{\psi}^*(t-h) = \\ &= \tilde{E}x(t-h) + \psi(t-h) - \hat{\psi}^*(t-h) = \varepsilon(t-h). \end{aligned}$$

С учетом (42), (8) и (36) получаем

$$(П.1.2) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \tilde{E}\dot{x} + \dot{\psi} - \dot{\hat{\psi}} = \tilde{E}Ax + \tilde{E}bu(t-h) + A\psi + \\ &+ bu - e^{Ah}bu(t-h) - \hat{A}\hat{\psi} - bu + e^{\hat{A}h}bu(t-h) = \hat{A}\varepsilon + \tilde{E}_A x + \tilde{A}\psi, \end{aligned}$$

где $\tilde{A} = A - \hat{A}$ и $\tilde{E}_A = \tilde{A}e^{Ah} - e^{\hat{A}h}\tilde{A}$.

Ввиду (П.1.2) имеем (см. раздел 3.3 в [2])

$$\varepsilon(t-h) = e^{-\hat{A}h}\varepsilon(t) - \int_{t-h}^t e^{\hat{A}(t-h-\tau)} \left(\tilde{E}_A x(\tau) + \tilde{A}\psi(\tau) \right) d\tau.$$

Определим

$$(П.1.3) \quad \tilde{\eta}(x, \psi) = - \int_{t-h}^t e^{\hat{A}(t-h-\tau)} \left(\tilde{E}_A x(\tau) + \tilde{A}\psi(\tau) \right) d\tau.$$

Тогда

$$(П.1.4) \quad y(t) = \varepsilon(t-h) = e^{-\hat{A}h}\varepsilon(t) + \tilde{\eta}(x, \psi),$$

и (с учетом (П.1.2) и (38)) получаем

$$(П.1.5) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}} &= \dot{\varepsilon} - \dot{\hat{\varepsilon}} = \hat{A}\varepsilon + \tilde{E}_A x + \tilde{A}\psi - \hat{A}\hat{\varepsilon} + \hat{L}e^{\hat{A}h} \left(e^{-\hat{A}h}\varepsilon + \tilde{\eta}(x, \psi) - e^{-\hat{A}h}\hat{\varepsilon} \right) = \\ &= \hat{A}_L \tilde{\varepsilon} + \tilde{E}x + \tilde{A}\psi + \hat{L}e^{\hat{A}h}\tilde{\eta}(x, \psi). \end{aligned}$$

С учетом (8), (40) и (44) имеем

$$(П.1.6) \quad \begin{aligned} \dot{\psi} &= A\psi - b \hat{k}^\top \left(e^{\hat{A}h} x + \hat{\psi} + \hat{\varepsilon} \pm \psi \right) + e^{Ah} b \hat{k}^\top x - \\ &- e^{Ah} b \hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h) = \bar{A}_k \psi + \hat{D}x + b \hat{k}^\top \tilde{\varepsilon} - e^{Ah} b \hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h), \end{aligned}$$

где $\hat{D} = e^{Ah} b \hat{k}^\top - b \hat{k}^\top e^{Ah}$.

Учитывая равенства (П.1.5), (П.1.1) и (П.1.6), получаем (45).

Для $\hat{\varepsilon}$ с учетом (38) и (П.1.4) имеем

$$(П.1.7) \quad \dot{\hat{\varepsilon}} = \hat{A}\hat{\varepsilon} + \hat{L}e^{\hat{A}h} \left(e^{-\hat{A}h}\varepsilon + \tilde{A}\eta - e^{-\hat{A}h}\hat{\varepsilon} \right) = \hat{A}_L\hat{\varepsilon} + \hat{L}\varepsilon + \hat{L}e^{\hat{A}h}\tilde{A}\eta.$$

Подставляя (40) в (36) вместо $u(t)$ и (40), (44) вместо $u(t-h)$, окончательно получаем

$$(П.1.8) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}} &= \hat{A}\hat{\psi} - b\hat{k}^\top \left(e^{\hat{A}h}x + \hat{\psi} + \hat{\varepsilon} \right) + e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top x - e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h) = \\ &= \hat{A}_k\hat{\psi} - b\hat{k}^\top \hat{\varepsilon} + \bar{D}x - e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top \tilde{\varepsilon}(t-h), \end{aligned}$$

где $\bar{D} = e^{\hat{A}h}b\hat{k}^\top - b\hat{k}^\top e^{\hat{A}h}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Математический инструментарий

В данном приложении приведены некоторые математические сведения, используемые при доказательстве главного результата из раздела 3.

Лемма 3. Если матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ гурвицева, то матрица $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ также гурвицева для достаточно малого параметрического возмущения $\|\tilde{A}\|$, где $\tilde{A} = A - \hat{A}$, а $\|A\|$ – спектральная норма квадратной матрицы.

Справедливость леммы непосредственно следует из свойства робастности экспоненциальной устойчивости по отношению к параметрическим возмущениям (см. раздел 2.1.4 в [32]).

Следствие 2. Если матрица $\hat{A}_k = \hat{A} - b\hat{k}^\top$ гурвицева, где $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $b, \hat{k} \in \mathbb{R}^n$, то матрица $\bar{A}_k = A - b\hat{k}^\top$ также гурвицева для достаточно малого параметрического возмущения $\|\tilde{A}\|$.

Лемма 4. Если линейная стационарная система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где $A, A_1, A_2, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, экспоненциально устойчива, то система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \tilde{A} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} x_1(t-h)$$

также экспоненциально устойчива для достаточно малого параметрического возмущения $\|\tilde{A}\|$.

Доказательство. Для x_1 имеем

$$(П.2.1) \quad \dot{x}_1 = A_1x_1 + \tilde{A}W(s)[x_1(t-h)],$$

где $W(s) = (sI_2 - A_2)^{-1}B$. Можно показать, что характеристический полином $p(s)$ системы (П.2.1) представим в виде [12]:

$$p(s) = P(s) + \sum_{i=1}^n Q_i(\tilde{A}, s)e^{-ihs},$$

где $P(s) = \det(sI_1 - A_1) \det(sI_2 - A_2)$,

$$Q_i(\tilde{A}, s) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} q_{ik}(\tilde{A})s^k,$$

а коэффициенты $q_{ik}(\tilde{A})$ такие, что

$$\lim_{\|\tilde{A}\| \rightarrow 0} q_{ik}(\tilde{A}) = 0.$$

Следовательно, для достаточно малых $\|\tilde{A}\|$ и всех $\omega \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^n |Q_i(\tilde{A}, j\omega)|}{P(j\omega)} < 1,$$

где j – мнимая единица. Тогда в соответствии с леммой 1 из [12, с. 45] делаем заключение, что система (П.2.1) экспоненциально устойчива независимо от величины запаздывания (см. также [11, Утверждение 2.1]).

Лемма 5. Если матрица $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ гурвицева, то состояние равновесия $x = 0$ системы

$$(П.2.2) \quad \dot{x} = A_1 x + B_1 \eta(x),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

$$\eta(x) = \int_{t-h}^t e^{A_2(t-h-\tau)} B_2 x(\tau) d\tau, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

$A_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, и $h > 0$, является экспоненциально устойчивым для малых $\|B_2\|$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}x^\top P x$, где матрица $P = P^\top \succ 0$ является решением уравнения $A_1^\top P + P A_1 = -I_n$. Пусть λ_1 и λ_2 – минимальное и максимальное собственные значения матрицы P соответственно. Следовательно,

$$(П.2.3) \quad \frac{\lambda_1}{2} |x(t)|^2 \leq V(t) \leq \frac{\lambda_2}{2} |x(t)|^2.$$

Тогда производная по времени функции V , вычисленная в силу (П.2.2), будет удовлетворять неравенству

$$\dot{V} = -|x|^2 + x^\top P B_1 \eta(x) \leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \|P B_1\| |x| |\eta(x)|.$$

В силу свойств определенного интеграла [41] можем записать

$$\begin{aligned} |\eta(x)| &= \left| \int_{t-h}^t e^{A_2(t-h-\tau)} B_2 x(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t-h}^t \left| e^{A_2(t-h-\tau)} B_2 x(\tau) \right| d\tau \leq \\ &\leq \|B_2\| \int_{t-h}^t \left\| e^{A_2(t-h-\tau)} \right\| |x(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Так как для любого $\tau \in [t-h, t]$ функция $\left\| e^{A_2(t-h-\tau)} \right\|$ ограничена, например, $r \leq \left\| e^{A_2(t-h-\tau)} \right\| \leq R < \infty$, а постоянные r и R не зависят от времени t , можно записать [41]

$$|\eta(x)| \leq \mu \|B_2\| \int_{t-h}^t |x(\tau)| d\tau,$$

где $\mu > 0$ – константа, зависящая от A_2 и h . Следовательно,

$$(П.2.4) \quad \dot{V} \leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \mu \|P B_1\| \|B_2\| |x| \int_{t-h}^t |x(\tau)| d\tau.$$

Теперь проверим, возможно ли указать такое значение $\|B_2\|$, что система (П.2.2) будет экспоненциально устойчивой и $\dot{V} = -\alpha V$, где $\alpha > 0$. В этом случае $V(t) = e^{-\alpha t} V(0)$ и в силу (П.2.3) $|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} e^{-\frac{\alpha}{2} t} |x(0)|$. Следовательно,

$$\dot{V} \leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \mu \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} e^{-\frac{\alpha}{2} t} \|P B_1\| \|B_2\| |x(0)| \int_{t-h}^t |x(\tau)| d\tau,$$

где

$$\int_{t-h}^t |x(\tau)| d\tau \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \int_{t-h}^t e^{-\frac{\alpha}{2} \tau} |x(0)| d\tau = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \left(e^{\frac{\alpha}{2} h} - 1 \right) e^{-\frac{\alpha}{2} t} |x(0)|.$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \frac{2\mu}{\alpha} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(e^{\frac{\alpha}{2} h} - 1 \right) \|P B_1\| \|B_2\| e^{-\alpha t} |x(0)|^2 \leq \\ &\leq -\frac{2}{\lambda_2} V + \frac{4\mu}{\alpha} \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} \left(e^{\frac{\alpha}{2} h} - 1 \right) \|P B_1\| \|B_2\| e^{-\alpha t} V(0). \end{aligned}$$

Рассмотрим наихудший случай, когда

$$\dot{V} = -\frac{2}{\lambda_2}V + \frac{4\mu}{\alpha} \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} \left(e^{\frac{\alpha}{2}h} - 1 \right) \|PB_1\| \|B_2\| e^{-\alpha t} V(0)$$

и, следовательно,

$$\dot{V} = - \left(\frac{2}{\lambda_2} - \frac{4\mu\lambda_2}{\alpha\lambda_1^2} (e^{\frac{\alpha}{2}h} - 1) \|PB_1\| \|B_2\| \right) V.$$

Из равенства

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_2} - \frac{4\mu\lambda_2}{\alpha\lambda_1^2} \left(e^{\frac{\alpha}{2}h} - 1 \right) \|PB_1\| \|B_2\|$$

делаем заключение, что для любого выбранного $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_2}$ можно вычислить соответствующую величину $\|B_2\| > 0$:

$$\|B_2(\alpha)\| = \frac{\alpha\lambda_1^2}{4\mu\lambda_2} \left(e^{\frac{\alpha}{2}h} - 1 \right)^{-1} \|PB_1\|^{-1} \left(\frac{2}{\lambda_2} - \alpha \right),$$

такую что $\alpha > 0$. Более того, если $\alpha \rightarrow \frac{2}{\lambda_2}$, тогда $\|B_2(\alpha)\| \rightarrow 0$, и если $\alpha \rightarrow 0$, то $\|B_2(\alpha)\| \rightarrow \frac{\lambda_1^2}{\mu\lambda_2^2 h} \|PB_1\|^{-1}$. Следовательно, для всех $\|B_2\| < \frac{\lambda_1^2}{\mu\lambda_2^2 h} \|PB_1\|^{-1}$ имеем $\alpha > 0$, и система (П.2.2) является экспоненциально устойчивой.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Доказательство леммы 2. Рассмотрим линейную стационарную систему

$$(П.3.1) \quad \dot{\chi}(t) = A\chi(t) + b\nu(m),$$

где $\chi \in \mathbb{R}^n$, $\nu(m)$ – дискретное управление, δ – интервал дискретизации и $m = 1, 2, 3, \dots$. Докажем лемму, рассмотрев частный случай применительно к методу Эйлера числового решения дифференциального уравнения (П.3.1):

$$(П.3.2) \quad \bar{\chi}(m+1) = (I + \delta A)\bar{\chi}(m) + \delta b\nu(m).$$

Непрерывная мажоранта описывается уравнением

$$(П.3.3) \quad \dot{\bar{\chi}}^*(t) = \bar{A}\bar{\chi}^*(t) + \bar{b}\nu(m).$$

Для определения матрицы $\bar{A}$ приравняем свободные движения систем (П.3.2) и (П.3.3) в моменты времени $t = m\delta$:

$$e^{\bar{A}m\delta} x_0 = (I + \delta A)^m x_0.$$

Из последнего равенства непосредственно получаем

$$\bar{A}(\delta) = \frac{1}{\delta} \ln(I + \delta A),$$

где $\ln$ – матричный натуральный логарифм. Тогда с использованием правила Лопиталя можно записать

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{A}(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \log(I + \delta A) = A.$$

Для обратимой матрицы A можем показать, что $\bar{b}(\delta) = \bar{A}(\delta)A^{-1}b$, и, следовательно, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{b}(\delta) = b$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artstein Z.* Linear systems with delayed control: a reduction // IEEE Trans. Automatic Control. 1982. V. 27. No. 8. P. 869–879.
2. *Krstic M.* Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive and PDE Systems. Birkhauser. Boston, 2009.
3. *Manitius A., Olbrot A.* Finite spectrum assignment problem for systems with delay // IEEE Trans. Automatic Control. 1979. V. 24. No. 4. P. 541–553.
4. *Wang Q.-G., Lee T.H., Tan K.K.* Finite Spectrum Assignment for Time-Delay Systems. London: Springer-Verlag, 1998.
5. *Nikiforov V.O., Gerasimov D.N.* Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection. Springer Nature. 2022.
6. *Pyrkin A.A., Bobtsov A.A.* Adaptive controller for linear system with input delay and output disturbance // IEEE Trans. Automatic Control. 2016. V. 61. P. 4229–4234.
7. *Буй В.Х., Маргун А.А.* Компенсация внешних возмущений по выходу для класса линейных систем с запаздыванием в канале управления // Научно-технический вестник ИТМО. 2022. Т. 22. № 6. С. 1072–1077.
8. *Никифоров В.О., Парамонов А.В., Герасимов Д.Н.* Алгоритмы адаптивного регулирования в многоканальных линейных системах с запаздыванием по управлению // АиТ. 2020. Т. 6. С. 153–172.
9. *Пыркин А.А., Бобцов А.А., Никифоров В.О. и др.* Компенсация полигармонического возмущения, действующего на состояние и выход линейного объекта с запаздыванием в канале управления // АиТ. 2015. Т. 12. С. 43–64.
10. *Tsubakino D., Krstic M., Olivera T.R.* Exact predictor feedbacks for multi-input LTI systems with distinct input delays // Automatica. 2016. V. 71. P. 143–150.
11. *Fridman E.* Introduction to Time Delay Systems: Analysis and Control. Birkhauser. Boston. New York. Dordrecht, London, 2010.
12. *Niculescu S-I., Gu K.* (Eds.) Advances in Time-Delay Systems. Springer Nature. 2004.

13. *Engelborghs K., Dambrine M., Roose D.* Limitations of a class of stabilization methods for delay systems // IEEE Trans. Automatic Control. 2001. V. 46. No. 2. P. 336–339.
14. *Цыкунов А.* Адаптивное и робастное управление динамическими объектами. М.: Физматлит, 2009.
15. *Smith J.* Closer control of loops with delay time // Chemical Engineering Progress. 1957. V. 53. No. 5. P. 217–219.
16. *Фуртат И.Б.* Адаптивное управление объектом с запаздыванием по управлению без использования прогнозирующих устройств // Управление большими системами. 2012. Т. 40. С. 144–163.
17. *Нижифорова Л.В., Шеленок Е.А.* Система с адаптивными фильтрами для объекта с запаздыванием по состоянию и управлению // Вестник ТОГУ. 2025. Т. 77. С. 77–86.
18. *Mondie S., Michiels W.* Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Trans. Automatic Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2207–2212.
19. *Kharitonov V.L.* Predictor-based controls: the implementation problem // Differential Equations. V. 51. No. 13. P. 1675–1682.
20. *Furtat I., Fridman E., Fradkov A.* Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay // IEEE Trans. Automatic Control. 2018. V. 63. No. 1. P. 298–305.
21. *Juarez L., Mondie S., Kharitonov V.L.* Dynamic predictor for systems with state and input delay: a time-domain robust stability analysis // Int. J. on Robust and Nonlinear Control. 2020. V. 30. No. 6. P. 2204–2218.
22. *Rodriguez-Guerrero L., Kharitonov V.L., Mondie S.* Robust stability of dynamic predictor based control laws for input and state delay systems // Systems and Control Letters. 2016. V. 96. P. 95–102.
23. *Yoon S.Y., Lin Z.I.* Robust output regulation of linear time-delay systems: A state predictor approach // Int. J. on Robust and Nonlinear Control. 2016. V. 26. No. 8. P. 1686–1704.
24. *Lin Z., Fang H.* On asymptotic stabilizability of linear systems with delayed input // IEEE Trans. Automatic Control. 2007. V. 52. No. 6. P. 998–1013.
25. *Zhou B., Lin Z.I., Duan G.* Stabilization of linear systems with input delay and saturation – A parametric Lyapunov equation approach // Int. J. on Robust and Nonlinear Control. 2010. V. 20. P. 1502–1519.
26. *Zhou B., Lin Z., Duan G.* Truncated predictor feedback for linear systems with long time-varying input delays // Automatica. 2012. V. 48. P. 2387–2399.
27. *Zhou B.* Truncated Predictor Feedback for Time-Delay Systems. Berlin. Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.
28. *Zhou B.* Pseudo-predictor feedback stabilization of linear systems with time-varying input delays // Automatica. 2014. V. 50. No. 11. P. 2861–2871.

29. *Najafi M., Hosseinnia S., Sheikholeslam F., Karimadini M.* Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors // *Int. J. of Control.* 2013. V. 86. No. 4. P. 599–609.
30. *Dugard L., Verriet E.* Stability and Control of Time-delay Systems. London: Springer, 1997.
31. *Cacace F., Conte F., Germani, A., Pepe P.* Stabilization of strict-feedback nonlinear systems with input delay using closed-loop predictors // *Int. J. on Robust and Nonlinear Control.* 2016. V. 26. P. 3524–3540.
32. *Фраджов А.Л., Мирошник И.В., Никифоров В.О.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
33. *Фуртат И., Гузич П.* Алгоритм управления объектами с запаздывающим входным сигналом на базе субпредикторов регулируемой величины и возмущения // *АиТ.* 2019. № 2. С. 3–23.
34. *Cacace F., Germani A.* Output feedback control of linear systems with input, state and output delays by chains of predictors // *Automatica.* 2017. V. 85. P. 455–461.
35. *Furtat I., Gushchin P.* Tracking control algorithms for plants with input time-delays based on state and disturbance predictors and sub-predictors // *J. of The Franklin Institute.* 2019. V. 356. No. 8. P. 4496–4512.
36. *Liu Q., Zhou B.* Extended observer based feedback control of linear systems with both state and input delays // *J. of The Franklin Institute.* 2017. V. 354. No. 18. P. 8232–8255.
37. *Zhou B., Liu Q., Mazenc F.* Stabilization of linear systems with both input and state delays by observer-predictors // *Automatica.* 2017. V. 83. P. 368–377.
38. *Nikiforov V.O., Gerasimov D.N.* Robust closed-loop state predictor for unstable systems with input delay // 62nd IEEE Conf. On Decision And Control, Singapore, Dec. 13–15. 2023. P. 5708–5713.
39. *Lechappe V., Moulay E., Plestan F., Glumineau A., Chriette A.* New predictive scheme for the control of LTI systems with input delay and unknown disturbances // *Automatica.* 2015. V. 52. P. 179–184.
40. *Tam P.K.S., Moore J.B.* Stable realization of fixed-lag smoothing equations for continuous-time signals // *IEEE Trans. Automatic Control.* 1974. V. 19. No. 1. P. 84–87.
41. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 31.08.2025

После доработки 29.01.2026

Принята к публикации 16.02.2026