

© 2026 г. К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МЕТОД БЛОЧНО-КООРДИНАТНОГО СПУСКА В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ СТАБИЛИЗАЦИИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Построены алгоритмы решения задач терминальной стабилизации и оптимального быстрогодействия для линейных динамических систем с дискретным временем и выпуклыми множествами геометрических ограничений на управление. В основу алгоритмов положен известный метод блочно-координатного спуска. Приведены следствия из классических результатов, а также получены некоторые новые утверждения о сходимости построенных алгоритмов к решению в указанных задачах.

Ключевые слова: задача терминальной стабилизации, задача быстрогодействия, линейные дискретные системы, последовательное глобальное улучшение.

DOI: 10.7868/S2413977726090034

1. Введение

Настоящее исследование мотивировано результатами, полученными в [1, 2] относительно приложений метода последовательных глобальных улучшений В.Ф. Кротова к задачам терминальной стабилизации и оптимального быстрогодействия для линейных систем дискретного времени. Их расшифровка показывает, что одна из возможных реализаций метода Кротова в рассматриваемом случае приводит к алгоритму, известному в литературе как блочно-координатный спуск [3–5]. В связи с этим возникает естественное желание изложить подход к решению задач стабилизации и быстрогодействия для линейных дискретных систем, основываясь на использовании результатов о сходимости блочно-координатного спуска. В работе предполагается привести наиболее значимые известные результаты и вывести из них некоторые новые содержательные следствия. В сухом остатке планируется получить прозрачное обоснование сходимости алгоритмов из [1, 2], а также предложить потенциально более эффективные численные методы решения указанных задач.

Нужно отметить, что метод Кротова в общем случае существенно отличается от метода блочно-координатного спуска по своей конструкции, области применимости и результатам использования, хотя и имеет с ним множество общих черт. Так, в формулировке метода Кротова участвует заранее не определенная функция (функция Кротова), которая может быть выбрана

из достаточно широкого класса допустимых функций. Получение одинаковых алгоритмических реализаций для этих методов в рамках рассматриваемых задач во многом связано с тем, что метод Кротова здесь применяется при очень специальном выборе функции Кротова. Этапы построения такой функции подробно описаны в [1, 2].

Одним из преимуществ метода блочно-координатного спуска является его широкая известность. Имеется обширный перечень работ, посвященный различным теоретическим и вычислительным аспектам приложения этого метода к тем или иным задачам (см., к примеру, перечень из более чем двух десятков актуальных приложений метода [5]). Известно также, что метод блочно-координатного спуска может оказаться весьма эффективным вычислительным инструментом в том случае, когда рассматриваемая задача имеет явную блочно-композиционную структуру. В то же время он практически не применяется для решения задач терминальной стабилизации и оптимального быстродействия в линейных системах с дискретным временем, хотя именно в теории оптимального управления дискретными системами область допустимых значений переменных уже по постановке задачи раскладывается в прямое произведение конечного числа множеств геометрических ограничений (блоков). Вообще, при исследовании указанных задач достаточно редко используют специальные методы.

Из недавних работ, связанных с исследованием оригинальных методов решения задачи быстродействия для линейной дискретной системы, следует выделить [6]. В [6] разработан численный подход к решению задачи быстродействия, основанный на использовании аппарата опорных функций множеств геометрических ограничений на управление. Особенность состоит в том, что он предполагает решение ряда задач невыпуклой и негладкой оптимизации, в то время как исходная задача, вообще говоря, распадается на последовательность выпуклых задач с гладким функционалом качества. Тем не менее практически все эти задачи можно заменить эквивалентными выпуклыми задачами. Однако остается трудность, связанная с необходимостью использования опорных функций множеств геометрических ограничений в структуре целевой функции, подлежащей оптимизации. Кроме того, после определения времени быстродействия возникает проблема построения оптимального процесса управления. В [6] показано, что оптимальный процесс возможно построить, используя решение последней из упомянутых оптимизационных задач. В то же время такое построение не всегда является тривиальным и в нестрого выпуклом случае требует применения определенных дополнительных конструкций и алгоритмов. Отметим, что частично идеи подобного метода решения задачи быстродействия появлялись ранее в [7].

Методы из [1, 2], обсуждаемые по существу и здесь, предполагают решение только выпуклых задач малой размерности, в которых целевая функция устроена весьма просто. При этом построение оптимального по быстродействию процесса управления осуществляется одновременно с вычислением времени быстродействия.

2. Постановки задач

Рассмотрим линейную нестационарную систему с дискретным временем

$$(1) \quad x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы, $u(k) \in U(k)$ – управление, $U(k)$ – выпуклые компактные множества в $\mathbb{R}^m$, содержащие начало координат, $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $B(k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – произвольные заданные матрицы. Начальное условие для системы фиксировано:

$$(2) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Сперва обсудим постановку задачи терминальной стабилизации для системы (1) с начальным условием (2). Пусть задано некоторое фиксированное значение $N > 0$ дискретного времени окончания переходного процесса. Рассмотрим задачу

$$(3) \quad \|x(N)\| \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}_N},$$

где $\mathcal{U}_N := \{k \mapsto u(k) : \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid u(k) \in U(k)\}$, а $x(N) \in \mathbb{R}^n$ при каждом $u \in \mathcal{U}_N$ определяется в силу системы (1)–(2). Здесь и далее через $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В явном виде полученную задачу (1)–(3) можно переписать так:

$$(4) \quad J_N(u) := \left\| \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u(k) \right\| \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}_N},$$

где $\mathcal{A}_N(k) := A(N-1) \dots A(k)$ при $0 \leq k \leq N-1$, $\mathcal{A}_N(N) := I$, I – единичная матрица размеров $n \times n$. Поскольку элементы множества $\mathcal{U}_N$ естественным образом отождествляются с соответствующими векторами евклидова пространства $\mathbb{R}^{mN}$, то само $\mathcal{U}_N$ представляется в виде прямого произведения $U(0) \times \dots \times U(N-1)$ исходно заданных выпуклых и компактных множеств $U(k) \subset \mathbb{R}^m$.

Задача (4) имеет решение, поскольку при любом значении $N > 0$ функция J_N непрерывна на компактном подмножестве $\mathcal{U}_N$ пространства $\mathbb{R}^{mN}$.

Рассмотрим теперь задачу быстрогодействия. В задаче быстрогодействия требуется вычислить минимальное число шагов $N_{\min}$, за которое возможно перевести систему (1) из заданного начального состояния x_0 в начало координат, и построить оптимальный процесс $\{\bar{x}(k), \bar{u}(k-1)\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $\bar{x}(N_{\min}) = 0$. Число $N_{\min}$ принято называть временем быстрогодействия системы (1) с начальным условием (2).

Задача быстрогодействия в общем случае может не иметь решения. Например, пусть $n = m = 1$ и система (1)–(2) имеет вид

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad u(k) \in U(k) = [-1/2^k; 1/2^k].$$

Для этой системы задача быстрогодействия разрешима в точности тогда, когда $|x_0| < 2$.

В настоящей работе будем заведомо предполагать, что задача быстрогодействия для системы (1)–(2) разрешима и соответствующее конечное значение $N_{\min}$ существует. Исключая тривиальный случай $x_0 = 0$, будем также считать, что $N_{\min} > 0$.

Поскольку по условию имеем $0 \in U(k)$ при всех $k = 0, 1, \dots$, то оптимальное значение $\overline{J_N}$ в задаче (4) равняется нулю в том и только том случае, когда $N \geq N_{\min}$. Соответственно, в предположении $0 < N_{\min} < \infty$ задача быстрогодействия может быть сформулирована так:

$$(5) \quad N \rightarrow \min, \quad N \in \left\{ M > 0 \mid \overline{J_M} := \min_{u \in \mathcal{U}_M} J_M(u) = 0 \right\}.$$

3. Метод блочно-координатного спуска

Задачи (4) и (5) связаны с минимизацией функции J_N на множестве $\mathcal{U}_N$ в пространстве $\mathbb{R}^{mN}$. Функция $J_N : \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и множество $\mathcal{U}_N \subset \mathbb{R}^{mN}$ обладают рядом полезных свойств. В частности, $u \mapsto J_N(u)^2$ является выпуклой и гладкой функцией на $\mathbb{R}^{mN}$, а множество $\mathcal{U}_N$ компактно и выпукло. Кроме того, справедлива декомпозиция $\mathcal{U}_N$ в прямое произведение множеств $U(0) \times \dots \times U(N-1)$, где все $U(k)$ также выпуклы и компактны.

Отметим, что размерность множества $\mathcal{U}_N$ может быть существенно выше размерности каждого из множеств $U(k)$. При этом именно множества $U(k)$ входят в исходную постановку задачи, в то время как $\mathcal{U}_N$ является искусственной конструкцией. В силу этих причин минимизация на множествах $U(k)$ может оказаться существенно проще, чем минимизация на всем множестве $\mathcal{U}_N$. Подходящим алгоритмом минимизации, учитывающим указанные особенности, является алгоритм блочно-координатного спуска, для которого теоретические основы сходимости были заложены в [3]. Приведем его формулировку в общем виде.

3.1. Формулировка метода

Пусть задан набор непустых компактных подмножеств $K_1, \dots, K_\nu$ конечномерных евклидовых пространств $V_1, \dots, V_\nu$ соответственно. Пусть на прямом произведении $V := V_1 \times \dots \times V_\nu$ задана непрерывная функция $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Решается задача

$$(6) \quad f(v) = f(v_1, \dots, v_\nu) \rightarrow \min_{v \in K}, \quad K := K_1 \times \dots \times K_\nu.$$

Зафиксируем произвольную точку $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, \dots, v_\nu^{(0)}) \in K$ и рассмотрим следующую итерационную процедуру. Пусть при некотором $l \geq 0$ точка $v^{(l)} \in K$ задана. Тогда точку $v^{(l+1)} \in K$ определим по правилу

$$(7) \quad v_i^{(l+1)} \in \operatorname{Arg} \min_{\mu \in K_i} f(v_1^{(l+1)}, \dots, v_{i-1}^{(l+1)}, \mu, v_{i+1}^{(l)}, \dots, v_\nu^{(l)}), \quad i = 1, \dots, \nu.$$

В случае $V_1 = \dots = V_\nu = \mathbb{R}$ правило (7) определяет шаг классического численного метода Гаусса–Зейделя (или покоординатного спуска) решения задачи условной конечномерной оптимизации функции f , зависящей от ν скалярных переменных. В общем случае полученный алгоритм обычно именуют методом блочно-координатного спуска или обобщенным (нелинейным) методом Гаусса–Зейделя [4, 5].

По построению очевидно, что при любом выборе $v^{(0)} \in K$ выполняется

$$f(v^{(l+1)}) \leq f(v^{(l)}), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Однако при сделанных предположениях не может идти речи о сходимости последовательности чисел $f(v^{(l)})$ к минимальному значению в задаче (6). Более того, как было показано уже в [3], даже условий выпуклости всех множеств K_i и самой функции f оказывается недостаточно. Тем более нельзя говорить о какой-либо разумной сходимости последовательности элементов $v^{(l)}$ к решению задачи (6). В то же время известен ряд результатов, позволяющих в том или ином виде гарантировать указанную сходимость при выполнении дополнительных предположений.

3.2. Сходимость

Основным известным результатом, касающимся сходимости метода (7), является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть в задаче (6) все компактные множества K_i выпуклы, а непрерывная функция f выпукла на множестве $K = K_1 \times \dots \times K_\nu$. Пусть, кроме этого, выполняются предположения:

- (i) *функция f непрерывно дифференцируема на множестве K ;*
- (ii) *функция $\mu \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, \mu, v_{i+1}, \dots, v_\nu)$ имеет единственный минимум на множестве K_i при каждом i и произвольных значениях $v_j \in K_j$, $j \neq i$.*

Тогда если точка $\bar{v}$ является предельной для последовательности $\{v^{(l)}\}$, построенной по правилу (7) из произвольной начальной точки $v^{(0)} \in K$, то

$$f(\bar{v}) = \min_{v \in K} f(v).$$

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 и далее по тексту под предельной точкой последовательности $\{v^{(l)}\}$ с элементами из конечномерного евклидова пространства V понимается предельная точка множества $\{v^{(l)}\} \subset V$, т.е. любая такая точка $\bar{v} \in V$, для которой найдется сходящаяся к ней подпоследовательность последовательности $\{v^{(l)}\}$.

Справедливость теоремы 1 вытекает из [4, Proposition 2.7.1] и [4, Proposition 2.1.2]. Отметим, что в [3] утверждение теоремы 1 получено при несколько иных предположениях, а именно, условие (i) теоремы 1 ослаблено в [3] до локальной непрерывной дифференцируемости f в окрестности всякой неподвижной точки метода (7), а условие (ii) усилено до строгой выпуклости всех функций $\mu \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, \mu, v_{i+1}, \dots, v_\nu)$.

Как будет показано далее, условие (ii) теоремы 1 можно несколько ослабить, но полностью от него отказаться, по-видимому, нельзя. Существенность условия (i) в его локальном варианте показывает следующий простой пример из [3].

Пример 1. На множестве $K = [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим функцию

$$f(v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - 2v_2, & v_2 \leq v_1, \\ v_2 - 2v_1, & v_1 < v_2. \end{cases}$$

В этом примере множества $K_i = [0; 1] \subset \mathbb{R}$ выпуклы и функция $f(v_1, v_2) = |v_1 - v_2| - \min\{v_1, v_2\}$ выпукла на K , причем $\text{Arg min}_{0 \leq \mu \leq 1} f(v_1, \mu) = \{v_1\}$ и $\text{Arg min}_{0 \leq \mu \leq 1} f(\mu, v_2) = \{v_2\}$, однако условие (i) теоремы 1 не выполнено ни в какой окрестности любой из неподвижных точек метода (7), определяемых равенством $v_1 = v_2$, и для любой начальной точки $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)})$ имеем $v^{(l)} = (v_2^{(0)}, v_2^{(0)})$ и $f(v^{(l)}) = -v_2^{(0)}$ при $l \geq 1$. Следовательно, утверждение теоремы 1 также нарушается при $v_2^{(0)} \neq 1 = -\min_{v \in K} f(v)$. Пример разобран.

В контексте приложений указанных результатов к решению задач предыдущего раздела понадобится следующее незначительное обобщение теоремы 1, ослабляющее условие (ii).

Следствие 1. Пусть в задаче (6) все компактные множества K_i выпуклы, а непрерывная функция f имеет вид

$$f(v) = g(\Lambda_1 v_1 + \lambda_1, \dots, \Lambda_\nu v_\nu + \lambda_\nu),$$

где Λ_i – линейный оператор из конечномерного евклидова пространства V_i в конечномерное евклидово пространство V'_i , $\lambda_i \in V'_i$, $i = 1, \dots, \nu$, $g : V'_1 \times \dots \times V'_\nu \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть функция g на множестве

$$\Lambda K + \lambda := (\Lambda_1 K_1 + \lambda_1) \times \dots \times (\Lambda_\nu K_\nu + \lambda_\nu)$$

удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда если точка $\bar{v}$ является предельной для последовательности $\{v^{(l)}\}$, построенной по правилу (7) из произвольной начальной точки $v^{(0)} \in K$, то

$$f(\bar{v}) = \min_{v \in K} f(v).$$

Доказательство. Рассмотрим точку $z^{(0)} = \Lambda v^{(0)} + \lambda$, где $\Lambda v + \lambda := (\Lambda_1 v_1 + \lambda_1, \dots, \Lambda_\nu v_\nu + \lambda_\nu) \in \Lambda K + \lambda$ для $v \in K$. Всякая последовательность $\{v^{(l)}\} \subset K$, построенная по правилу (7) из точки $v^{(0)} \in K$, порождает последовательность $\{z^{(l)}\} = \{\Lambda v^{(l)} + \lambda\} \subset \Lambda K + \lambda$, удовлетворяющую правилу

$$z_i^{(l+1)} = \arg \min_{\mu \in \Lambda K_i + \lambda_i} g(z_1^{(l+1)}, \dots, z_{i-1}^{(l+1)}, \mu, z_{i+1}^{(l)}, \dots, z_\nu^{(l)}), \quad i = 1, \dots, \nu, \quad l \geq 0.$$

Поскольку множества $\Lambda_i K_i + \lambda_i$ непусты, компактны и выпуклы, а функция g на $\Lambda K + \lambda$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$g(\bar{z}) = \min_{z \in \Lambda K + \lambda} g(z)$$

для всякой предельной точки $\bar{z}$ последовательности $\{z^{(l)}\}$. Полагая теперь $\bar{z} = \Lambda \bar{v} + \lambda$ и пользуясь непрерывностью конечномерных линейных операторов Λ_i , получаем требуемое. Следствие 1 доказано.

Продemonстрируем результат следствия 1 следующим важным примером.

Пример 2. Рассмотрим квадрат значений функции J_N из задачи (4). Положим $\nu = N$, $v_i = u(i-1)$, $K_i = U(i-1)$. Получаем функцию

$$f(v) = \left\| \mathcal{A}_\nu(0)x_0 + \sum_{i=1}^{\nu} \mathcal{A}_\nu(i)B(i-1)v_i \right\|^2.$$

Здесь $\mathcal{A}_\nu(i)$ и $B(i)$ – известные матрицы, x_0 – известный вектор. Положим $\Lambda_i = \mathcal{A}_\nu(i)B(i-1)$, $\lambda_1 = \mathcal{A}_\nu(0)x_0$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_\nu = 0$. Тогда функция f и множества K_i удовлетворяют условиям следствия 1. При этом они могут не удовлетворять условиям теоремы 1. Действительно, если какая-либо из матриц $\mathcal{A}_\nu(i)$ вырождена, то минимум в задаче $f(v_1, \dots, v_{i-1}, \mu, v_{i+1}, \dots, v_\nu) \rightarrow \min_{\mu \in K_i}$ может быть неединственным. В то же время функция g вида

$$g(z) = \left\| \sum_{i=1}^{\nu} z_i \right\|^2$$

является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}^{n\nu}$, а каждая из функций

$$\mu \mapsto g(z_1, \dots, z_{i-1}, \mu, z_{i+1}, \dots, z_\nu) = \left\| \mu + \sum_{j \neq i} z_j \right\|^2$$

строого выпукла на $\Lambda_i K_i + \lambda_i$ при любых фиксированных значениях $z_j \in \Lambda_j K_j + \lambda_j$, $j \neq i$, где $i = 1, \dots, \nu$. Поэтому g удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, для $f(v) = g(\Lambda v + \lambda)$ справедливо утверждение следствия 1. Пример разобран.

Отметим, что гладкость функции $g(z)$ из примера 2 не столь существенна. В частности, можно проверить непосредственно, что для функции

$$f(v) = \left\| \sum_{i=1}^{\nu} v_i \right\|,$$

где вместо евклидовой нормы допустимо брать любую норму в пространстве $\mathbb{R}^n$, и произвольного набора непустых выпуклых компактов $K_i \subset \mathbb{R}^n$ метод блочно-координатного спуска в задаче $f(v) \rightarrow \min_{v \in K}$, $K = K_1 \times \dots \times K_\nu$, сходится в том же смысле, какой указан в теореме 1 и следствии 1, несмотря на то, что условие (i) теоремы 1 для нее может не выполняться даже локально в окрестности решения. Здесь не будем останавливаться на этом подробно.

Вводя для удобства обозначения

$$\bar{f} := \min_{v \in K} f(v), \quad \bar{K} := \text{Arg min}_{v \in K} f(v), \quad \text{dist}(\mu, \bar{K}) := \min_{v \in \bar{K}} \|\mu - v\|,$$

получаем следующие результаты.

Следствие 2. В условиях следствия 1 для любой последовательности $\{v^{(l)}\}$, построенной по правилу (7) из произвольной начальной точки $v^{(0)} \in K$, имеет место сходимость

$$f(v^{(l)}) \rightarrow \bar{f}, \quad \text{dist}(v^{(l)}, \bar{K}) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Предположим, что $f(v^{(l)}) \not\rightarrow \bar{f}$. Тогда найдется подпоследовательность $\{v^{(l_m)}\}$ со свойством $|f(v^{(l_m)}) - \bar{f}| > \delta > 0$ для некоторого $\delta > 0$. Переходя при необходимости еще раз к подпоследовательности, можем считать, что $\{v^{(l_m)}\}$ сходится к некоторому $\bar{v} \in K$. Тогда в силу следствия 1 получаем $f(\bar{v}) = \bar{f}$. Но в силу непрерывности f на K и сделанного предположения имеем $|f(\bar{v}) - \bar{f}| \geq \delta > 0$ – противоречие. Аналогичные рассуждения дают сходимость $\text{dist}(v^{(l)}, \bar{K}) \rightarrow 0$. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. Пусть выполнены предположения следствия 1. Тогда необходимым и достаточным условием оптимальности точки $\bar{v}$ в задаче (6) является соотношение

$$\bar{v}_i \in \text{Arg min}_{\mu \in K_i} f(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \mu, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_\nu), \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Доказательство. Необходимость проверяемого условия очевидна. Предположим, что оно выполнено. Тогда для $v^{(0)} = \bar{v}$ последовательность точек $v^{(l)} \equiv \bar{v}$ удовлетворяет правилу (7). В силу следствия 2 это означает, что $f(v^{(l)}) = \bar{f}$, что и требовалось установить. Следствие 3 доказано.

В завершение данного подраздела кратко обсудим сходимость последовательности $\{v^{(l)}\}$, построенной по правилу (7), к одной точке $\bar{v} \in \bar{K}$. Классический результат о наличии такой сходимости в условиях теоремы 1 получен в [8] для случая $V_1 = \dots = V_\nu = \mathbb{R}$ и $K_i = [a_i; b_i]$. Там же отмечено, что он естественным образом обобщается на случай, когда множества K_i являются замкнутыми параллелепипедами в $\mathbb{R}^{n_i}$. Однако в общей ситуации проверка такого рода сходимости остается открытым вопросом.

Следующий пример показывает, что в одномерной задаче вида (4) имеет место сходимость метода (7) к одному решению за одну итерацию.

Пример 3. Рассмотрим задачу

$$|\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\nu v_\nu + \gamma| \rightarrow \min, \quad v_i \in [a_i; b_i].$$

Пусть числа $v_i^{(0)} \in [a_i; b_i]$ заданы. Тогда для всех тех i , для которых $\lambda_i \neq 0$, числа $v_i^{(1)}$ определяются согласно (7) из условий

$$v_i^{(1)} = \arg \min_{\mu \in [a_i; b_i]} |\lambda_i \mu + \sigma_i|,$$

$$\sigma_i = \lambda_1 v_1^{(1)} + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1}^{(1)} + \lambda_{i+1} v_{i+1}^{(0)} + \dots + \lambda_\nu v_\nu^{(0)} + \gamma.$$

Для $i = 1, \dots, \nu$ в случае $\lambda_i \neq 0$ последовательно положим

$$v_i^{(1)} = \begin{cases} \max\{\lambda_i a_i, \lambda_i b_i\}/\lambda_i, & \sigma_i < -\max\{\lambda_i a_i, \lambda_i b_i\}, \\ \min\{\lambda_i a_i, \lambda_i b_i\}/\lambda_i, & \sigma_i > -\min\{\lambda_i a_i, \lambda_i b_i\}, \\ -\sigma_i/\lambda_i & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для прочих i выберем $v_i^{(1)} \in [a_i; b_i]$ произвольно. Непосредственно проверяется, что так построенные точки $v_i^{(1)}$ удовлетворяют (7) и доставляют минимум в рассматриваемой задаче. Пример разобран.

3.3. Критерии остановки

Критерием остановки классического метода координатного спуска обычно выступает условие

$$(8) \quad f(v^{(l)}) - f(v^{(l+1)}) < \varepsilon$$

для выбранного заранее малого значения $\varepsilon > 0$. В том случае, если доказана сходимость последовательности $\{v^{(l)}\}$, применяют также альтернативное условие $\|v^{(l+1)} - v^{(l)}\| < \varepsilon$ [9]. Однако в общем случае для процедуры (7) такой сходимости нет, поэтому остается только условие (8). Несомненным достоинством условия (8) является простота его проверки. В то же время выполнение (8) в отсутствие дополнительных предположений не может гарантировать близость найденного значения $f(v^{(l+1)})$ к неизвестному оптимальному.

Более надежный критерий остановки можно получить, используя следующее свойство рассматриваемого класса задач. Предположим, что в задаче (6) множества K_i выпуклы, а функция f непрерывно дифференцируема и выпукла на K (т.е., например, выполняются условия сходимости из теоремы 1 или следствия 1). Тогда для любого $w \in K$ имеет место двусторонняя оценка

$$f(w) \geq \bar{f} \geq f(w) + \min_{w+h \in K} \langle f'(w), h \rangle = f(w) - \sum_{i=1}^{\nu} \max_{\mu \in K_i} \left\langle -\frac{\partial f(w)}{\partial v_i}, \mu - w_i \right\rangle.$$

В самом деле, первое неравенство явствует из определения минимального значения $\bar{f}$, второе неравенство следует из того, что надграфик собственной выпуклой функции f располагается выше всякой своей опорной и, в частности, касательной гиперплоскости, а последнее равенство вытекает из декомпозиции

$$\langle f'(w), h \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \left\langle \frac{\partial f(w)}{\partial v_i}, h_i \right\rangle.$$

В качестве критерия остановки теперь может быть использовано условие

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{\nu} \max_{\mu \in K_i} \left\langle \frac{\partial f(v^{(l)})}{\partial v_i}, v_i^{(l)} - \mu \right\rangle < \varepsilon.$$

Выполнение условия (9) гарантирует справедливость неравенства $f(v^{(l)}) < \bar{f} + \varepsilon$ для заданной заранее величины погрешности $\varepsilon > 0$. При этом максимизация в (9) осуществляется по тем же самым множествам K_i , которые фигурируют и в (7). Поэтому критерий останова (9) согласуется с методом (7).

Заметим еще, что равенство

$$\max_{v \in K} \langle f'(\bar{v}), \bar{v} - v \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \max_{\mu \in K_i} \left\langle \frac{\partial f(\bar{v})}{\partial v_i}, \bar{v}_i - \mu \right\rangle = 0$$

представляет собой классическое необходимое и достаточное условие оптимальности точки $\bar{v} \in K$ в гладкой и выпуклой задаче вида (6) [10, теорема 7.1.3].

Отметим, что критерии останова (8) и (9) могут быть использованы совместно. Сперва проверяется более простое с вычислительной точки зрения условие (8), а затем, если оно оказывается выполнено, проверяется гарантирующее условие (9).

Наконец, приведенная выше двусторонняя оценка позволяет при построении последовательности $\{v^{(l)}\}$ на каждом шаге уточнять интервал значений, которому принадлежит число $\bar{f}$. А именно, для всякого $l \in \{0, 1, \dots\}$ верно включение

$$(10) \quad \bar{f} \in \left[f(v^{(l)}) - \sum_{i=1}^{\nu} \max_{\mu \in K_i} \left\langle \frac{\partial f(v^{(l)})}{\partial v_i}, v_i^{(l)} - \mu \right\rangle; f(v^{(l)}) \right].$$

В случае, если выполняются условия теоремы 1 или следствия 1, с ростом l границы указанных здесь интервалов сходятся к точке $\bar{f}$. Кроме этого, построение интервальной оценки (10) может позволить заранее ответить на вопрос о том, какие значения может принимать $\bar{f}$. Последнее актуально, например, при рассмотрении поставленной ранее задачи быстрогодействия в форме (5), в которой ключевую роль играет значение $\bar{f} = 0$.

Перейдем теперь непосредственно к решению задач (4) и (5).

4. Решение задач

4.1. Задача терминальной стабилизации

Применим метод блочно-координатного спуска для решения задачи (4). Как было отмечено в примере 2, в задаче (4) выполняются условия следствия 1, которое гарантирует в силу следствия 2 сходимость полученных методом (7) значений функционала качества к минимуму, а также сходимость построенной им последовательности управлений ко множеству решений. При этом могут быть использованы критерии останова (8) и (9). Остается конкретизировать формулы (7)–(9).

В задаче (4) имеем $\nu = N$, $K_i = U(i - 1)$, $V_i = \mathbb{R}^m$, $f = J_N^2$.

Формула (7) принимает вид

$$u^{(l+1)}(k) \in \operatorname{Arg} \min_{\mu \in U(k)} \left\| \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_N(i+1)B(i)u^{(l+1)}(i) + \right. \\ \left. + \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \sum_{i=k+1}^{N-1} \mathcal{A}_N(i+1)B(i)u^{(l)}(i) \right\|, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

По определению матрицы $\mathcal{A}_N(k)$ выполняется

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_N(i+1)B(i)u^{(l+1)}(i) = \\ & = \mathcal{A}_N(k) \left(\mathcal{A}_k(0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_k(i+1)B(i)u^{(l+1)}(i) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, рассматривая значения $x^{(l)}(k)$ и $\xi^{(l)}(k)$, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} x^{(l)}(k+1) &= A(k)x^{(l)}(k) + B(k)u^{(l)}(k), \quad x^{(l)}(0) = x_0, \\ \xi^{(l)}(k) &= \xi^{(l)}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u^{(l)}(k), \quad \xi^{(l)}(N) = 0, \end{aligned}$$

находим, что метод (7) в задаче (4) записывается как

$$(11) \quad u^{(l+1)}(k) \in \operatorname{Arg} \min_{\mu \in U(k)} \left\| \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1) \right\|$$

при $k = 0, \dots, N-1$. Здесь значения $x^{(l+1)}(k)$ определяются значениями $u^{(l+1)}(i)$, $i < k$, а $\xi^{(l)}(k+1)$ — значениями $u^{(l)}(i)$, $i > k$, поэтому формула (11) корректно реализует метод (7).

Формула (8) принимает вид

$$(12) \quad \|x^{(l)}(N)\|^2 - \|x^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon.$$

Наконец, формулу (9) запишем с использованием значений классической двойственной переменной $\psi(k)$ в задаче (1)–(3). Пусть $\psi^{(l)}(k)$ удовлетворяют равенствам

$$\psi^{(l)}(k) = A(k)^T \psi^{(l)}(k+1), \quad \psi^{(l)}(N) = -2x^{(l)}(N).$$

Тогда для $\mu \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial f(v^{(l)})}{\partial v_{k+1}}, \mu \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J(u^{(l)})^2}{\partial u(k)}, \mu \right\rangle = \\ & = 2 \left\langle \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{A}_N(i+1)B(i)u^{(l)}(i), \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu \right\rangle = \\ & = \langle 2x^{(l)}(N), \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu \rangle = -\langle \mathcal{A}_N(k+1)^T \psi^{(l)}(N), B(k)\mu \rangle = \\ & = -\langle \psi^{(l)}(k), B(k)\mu \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, условие (9) принимает вид

$$(13) \quad \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in U(k)} \left\langle \psi^{(l)}(k), B(k)(\mu - u^{(l)}(k)) \right\rangle < \varepsilon.$$

Рассмотрим два способа построения алгоритма. Первый из них состоит в применении метода (11) с критериями остановки (12) и (13) без дополнительных преобразований.

Алгоритм 1.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$.
1. Положить $l = 0$, задать начальное приближение равенствами $u^{(0)}(k) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, \dots, N-1$, подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Вычислить значения $\xi^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\xi^{(l)}(k) = \xi^{(l)}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u^{(l)}(k), \quad \xi^{(l)}(N) = 0.$$

3. Для каждого $k = 0, \dots, N-1$ последовательно найти и зафиксировать некоторое решение $u^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in U(k)},$$

где значения $x^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = A(k)x^{(l+1)}(k) + B(k)u^{(l+1)}(k), \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

4. Проверить первое условие остановки

$$\|x^{(l)}(N)\|^2 - \|x^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении перейти к шагу 5, в противном случае увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

5. Вычислить значения $\psi^{(l+1)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\psi^{(l+1)}(k) = A(k)^T \psi^{(l+1)}(k+1), \quad \psi^{(l+1)}(N) = -2x^{(l+1)}(N).$$

6. Вычислить значение $D_N^{(l+1)}$ по формуле

$$D_N^{(l+1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in U(k)} \langle \psi^{(l+1)}(k+1), B(k)(\mu - u^{(l+1)}(k)) \rangle.$$

7. Проверить второе условие остановки

$$D_N^{(l+1)} < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $u_\varepsilon = u^{(l+1)}$, иначе увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Сходимость алгоритма 1 вытекает из теоремы 1 и ее следствий 1–3. Шаги 0–4 применялись в [1] для приближенного решения задачи быстродействия (5) в случае, когда $m = n$, $A(k) \equiv A$, $\det A \neq 0$, $B(k) \equiv I$ и известна двусторонняя оценка времени быстродействия.

Второй способ построения алгоритма предусматривает замену переменных в задаче (4), позволяющую упростить выполнение итераций из (11). При этом для нахождения требуемого решения по результатам применения метода необходимо выполнить обратное преобразование, которое определено неоднозначно и представляет собой отдельную подзадачу.

Основная идея здесь состоит в переходе от системы (1)–(2) к линейной системе простейшего вида

$$y(k+1) = y(k) + \theta(k), \quad y(0) = y_0$$

за счет вырожденной замены переменных $\theta(k) = \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u(k)$, $y_0 = \mathcal{A}_N(0)x_0$. В этом случае $\theta(k) \in \Theta(k) := \mathcal{A}_N(k+1)B(k)U(k) \subset \mathbb{R}^n$ и $y(k) = \mathcal{A}_N(k)x(k)$. В частности, $y(N) = x(N)$. Из последнего следует, что если $\bar{\theta}(k) \in \Theta(k)$ минимизируют величину $\|y(N)\|$, то любой элемент $\bar{u} \in \mathcal{U}_N$, удовлетворяющий системе уравнений

$$(14) \quad \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\bar{u}(k) = \bar{\theta}(k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

является решением задачи (4). Если по условию $m = n$ и при некотором k матрица $\mathcal{A}_N(k+1)B(k)$ обратима, то $\bar{u}(k)$ определено однозначно. В общем случае предполагается решение системы уравнений (14) с ограничениями $\bar{u}(k) \in U(k)$. По построению эта задача разрешима. Значения $\bar{\theta}(k)$ можно найти, следуя алгоритму 1, поскольку множества $\Theta(k)$ выпуклы, компактны и содержат начало координат в $\mathbb{R}^n$. Отличие состоит в том, что $\bar{\theta}(k)$ определяются при этом единственным образом.

Алгоритм 2.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$.
1. Задать начальное приближение равенствами $\theta^{(0)}(k) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, N-1$, положить $l = 0$ и по заданным множествам $U(k)$ определить множества $\Theta(k) = \mathcal{A}_N(k+1)B(k)U(k)$, где $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, $\mathcal{A}_N(N)$ – единичная $n \times n$ -матрица.
2. Вычислить значения $\eta^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\eta^{(l)}(k) = \eta^{(l)}(k+1) - \theta^{(l)}(k), \quad \eta^{(l)}(N) = 0.$$

3. Для каждого $k = 0, \dots, N-1$ последовательно найти и зафиксировать единственное решение $\theta^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mu + y^{(l+1)}(k) - \eta^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in \Theta(k)},$$

где значения $y^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$y^{(l+1)}(k+1) = y^{(l+1)}(k) + \theta^{(l+1)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad y^{(l+1)}(0) = \mathcal{A}_N(0)x_0.$$

4. Проверить первое условие останковки

$$\|y^{(l)}(N)\|^2 - \|y^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении перейти к шагу 5, в противном случае увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

5. Вычислить значение $D_N^{(l+1)}$ по формуле

$$D_N^{(l+1)} = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in \Theta(k)} \langle y^{(l+1)}(N), \theta^{(l+1)}(k) - \mu \rangle.$$

6. Проверить второе условие останковки

$$D_N^{(l+1)} < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты и определить ответ u_ε из решения системы

$$\mathcal{A}_N(k+1)B(k)u_\varepsilon(k) = \theta^{(l+1)}(k), \quad u_\varepsilon(k) \in U(k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

иначе увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Несмотря на то, что указанный на шаге 6 алгоритма 2 обратный переход представляет собой отдельную проблему, она в действительности неявным образом присутствует и в алгоритме 1, причем решать ее приходится на каждой итерации. Естественно вынести такого рода нетривиальное преобразование за пределы итерационного процесса. В то же время применение алгоритма 2 требует построения преобразованных множеств, что само по себе может быть непросто.

4.2. Задача быстрогодействия

В качестве основного алгоритма решения задачи (5) будем рассматривать последовательное применение метода (11) для построения улучшений управления в задаче (4) при $N = 1, 2, \dots$ и дополняющее его вычисление интервальной оценки (10), обеспечивающей своевременный переход к следующему значению N . Уточним лишь, что оценка (10) в соответствии с записанной выше конкретизацией формул (7)–(9) принимает вид

$$\bar{J}_N^2 \in \left[J_N(u^{(l)})^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \langle \psi^{(l)}(k+1), B(k)(u - u^{(l)}(k)) \rangle; J_N(u^{(l)})^2 \right].$$

Алгоритм 3.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$, положить $N = 1$.
1. Положить $l = 0$, задать/дополнить начальное приближение равенством $u^{(0)}(N-1) = 0 \in \mathbb{R}^n$ и подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Вычислить значения $\xi^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\xi^{(l)}(k) = \xi^{(l)}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u^{(l)}(k), \quad \xi^{(l)}(N) = 0.$$

3. Для каждого $k = 0, \dots, N - 1$ последовательно найти и зафиксировать некоторое решение $u^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in U(k)},$$

где значения $x^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = A(k)x^{(l+1)}(k) + B(k)u^{(l+1)}(k), \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

4. Проверить условие внешней остановки

$$\|x^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $N_\varepsilon = N$, $u_\varepsilon = u^{(l+1)}$.

5. Вычислить значения $\psi^{(l+1)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\psi^{(l+1)}(k) = A(k)^T \psi^{(l+1)}(k+1), \quad \psi^{(l+1)}(N) = -2x^{(l+1)}(N).$$

6. Вычислить оценку $E_N^{(l+1)}$ по формуле

$$E_N^{(l+1)} = \|x^{(l+1)}(N)\|^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in U(k)} \langle \psi^{(l+1)}(k+1), B(k)(\mu - u^{(l+1)}(k)) \rangle.$$

7. Проверить условие внутренней остановки

$$E_N^{(l+1)} > 0,$$

при выполнении зафиксировать найденное $u^{(l+1)}$ в качестве нового начального приближения, т.е. положить $u^{(0)}(k) = u^{(l+1)}(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$, увеличить N на единицу и перейти к шагу 1, иначе увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Алгоритм 3 дословно совпадает с алгоритмом решения задачи быстродействия, предложенном в [2] (в целях упрощения выкладок в [2] был рассмотрен случай $m = n$ и $B(k) \equiv I$). По построению видно, что сходимость алгоритма, установленная в [2, теорема 5], а также связанные с этим результаты об оптимальности и улучшении (см. [2, теоремы 1 – 4]) вытекают в общем случае из известной теоремы 1 и ее следствий 1–3.

Отметим, что замена переменных, которая обсуждалась в предыдущем подразделе при решении задачи (4), здесь менее актуальна. Дело в том, что при каждом N , кроме больших значений, близких к $N_{\min}$, в силу условий остановки на основе оценки (10) решается малое количество преобразованных задач и переход к новым переменным не дает особого ускорения.

В качестве альтернативного подхода к решению задачи (5) рассмотрим следующий алгоритм, основанный на результатах [6, 7]. Будем применять численный метод из [6] для вычисления времени быстродействия $N_{\min}$, а затем решать оставшуюся задачу терминальной стабилизации так же, как в предыдущем подразделе. Для полноты изложения приведем здесь формулировку и краткое обоснование метода вычисления величины $N_{\min}$ из [6, 7].

Для произвольного компактного множества K в $\mathbb{R}^n$ рассмотрим его опорную функцию

$$s_K(p) := \max_{\mu \in K} \langle p, \mu \rangle.$$

В первую очередь рассмотрим опорные функции множеств $U(k)$. Поскольку $U(k)$ выпуклы и содержат начало координат, то $s_{U(k)}$ принимают конечные неотрицательные значения, выпуклы, непрерывны и положительно однородны [11, следствие 13.2.2]. Так как все множества $U(k)$ заданы заранее, функции $s_{U(k)}$ можно с определенными оговорками считать известными.

Рассмотрим множество X_N достижимости системы (1)–(2) в момент времени $N \geq 0$. При помощи матриц $\mathcal{A}_N(k)$ и операции сложения множеств по Минковскому его можно представить в виде

$$X_N = \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_N(k+1)B(k)U(k).$$

Множество X_N выпукло и компактно, $\mathcal{A}_N(0)x_0 \in X_N$. Поскольку $0 \in U(k)$, то

$$0 \in X_N \Leftrightarrow N \geq N_{\min}.$$

При этом опорная функция множества X_N имеет вид

$$\begin{aligned} s_{X_N}(z) &= \max_{x \in X_N} \langle z, x \rangle = \max_{u \in \mathcal{U}_N} \left\langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u(k) \right\rangle = \\ &= \langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \max_{\mu \in U(k)} \langle z, \mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu \rangle = \\ &= \langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} s_{U(k)}(B(k)^T \mathcal{A}_N(k+1)^T z). \end{aligned}$$

Функция $s_{X_N} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла, непрерывна и положительно однородна, причем

$$s_{X_N}(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{B}^n \Leftrightarrow 0 \in X_N \Leftrightarrow N \geq N_{\min},$$

где $\mathbb{B}^n$ обозначает замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, задача нахождения времени быстрогодействия для системы (1)–(2) может быть переформулирована в терминах известных функций $s_{U(k)}$ и заданной точки x_0 :

$$(15) \quad N \rightarrow \min, \quad \min_{z \in \mathbb{B}^n} \left(\langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} s_{U(k)}(B(k)^T \mathcal{A}_N(k+1)^T z) \right) = 0.$$

Таким образом, вопрос вычисления времени быстрогодействия для системы (1) с начальным условием (2) сводится к решению последовательности выпуклых конечномерных оптимизационных задач одинаковой размерности n . Поскольку все функции $s_{U(k)}$ принимают неотрицательные значения, непрерывны и в начале координат равняются нулю, то минимизацию

можно проводить на меньшем выпуклом и компактном множестве $\mathbb{B}_-^n := \{z \in \mathbb{B}^n : \langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle \leq 0\}$. Кроме того, в силу положительной однородности функций $s_{U(k)}$ решение задачи (15) не изменится, если заменить $\mathbb{B}^n$ единичной сферой $\mathbb{S}^n$ или компактным множеством $\mathbb{S}_-^n := \{z \in \mathbb{S}^n : \langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle \leq 0\}$. Последнее обстоятельство используется в [6] для построения оптимального по быстродействию процесса. Здесь в этих целях будем применять метод блочно-координатного спуска.

Итак, еще один способ решения задачи (5) заключается в непосредственном определении величины $N_{\min}$ путем решения задачи (15), а затем нахождении оптимального управления методом (11) при $N = N_{\min}$. Отметим, что при таком подходе может также быть эффективна упомянутая выше замена переменных, т.е. речь идет о возможности применения как алгоритма 1, так и алгоритма 2. Кроме того, не возникает необходимости использовать критерии остановки (12) и (13). Вместо этого расчеты завершаются по достижении требуемой близости величины $\|x(N)\|$ к нулю. В то же время необходимо отметить, что такой подход может приводить к существенным трудностям в тех частых случаях, когда опорные функции $s_{U(k)}$ не удастся построить в явном виде и оптимизационные задачи в (15) становятся минимаксными.

В результате получаем следующие две вариации алгоритма.

Алгоритм 4.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$, положить $N = 1$.
1. Подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Вычислить величину

$$\bar{S}_N = \min_{z \in \mathbb{B}^n} \left(\langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} s_{U(k)}(B(k)^T \mathcal{A}_N(k+1)^T z) \right).$$

3. Проверить условие $\bar{S}_N < 0$. В случае выполнения увеличить N на единицу и перейти к шагу 1. В противном случае перейти к шагу 4.
4. Задать начальное приближение равенствами $u^{(0)}(k) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, \dots, N-1$, положить $l = 0$.
5. Вычислить значения $\xi^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\xi^{(l)}(k) = \xi^{(l)}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)B(k)u^{(l)}(k), \quad \xi^{(l)}(N) = 0.$$

6. Для каждого $k = 0, \dots, N-1$ последовательно найти и зафиксировать некоторое решение $u^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mathcal{A}_N(k+1)B(k)\mu + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in U(k)},$$

где значения $x^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = A(k)x^{(l+1)}(k) + B(k)u^{(l+1)}(k), \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

7. Проверить условие остановки

$$\|x^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $N_\varepsilon = N$, $u_\varepsilon = u^{(l+1)}$, в противном случае увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Алгоритм 5.

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$, положить $N = 1$.
1. Подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Вычислить величину

$$\bar{S}_N = \min_{z \in \mathbb{B}^n} \left(\langle z, \mathcal{A}_N(0)x_0 \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} s_{U(k)} (B(k)^T \mathcal{A}_N(k+1)^T z) \right).$$

3. Проверить условие $\bar{S}_N < 0$. В случае выполнения увеличить N на единицу и перейти к шагу 1. В противном случае перейти к шагу 4.
4. Задать начальное приближение равенствами $\theta^{(0)}(k) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, N-1$, положить $l = 0$ и по заданным множествам $U(k)$ определить множества $\Theta(k) = \mathcal{A}_N(k+1)B(k)U(k)$.
5. Вычислить значения $\eta^{(l)}(k)$, $k = 1, \dots, N$, по формулам

$$\eta^{(l)}(k) = \eta^{(l)}(k+1) - \theta^{(l)}(k), \quad \eta^{(l)}(N) = 0.$$

6. Для каждого $k = 0, \dots, N-1$ последовательно найти и зафиксировать единственное решение $\theta^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mu + y^{(l+1)}(k) - \eta^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{\mu \in \Theta(k)},$$

где значения $y^{(l+1)}(k)$ поэтапно вычисляются по формулам

$$y^{(l+1)}(k+1) = y^{(l+1)}(k) + \theta^{(l+1)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad y^{(l+1)}(0) = \mathcal{A}_N(0)x_0.$$

7. Проверить условие остановки

$$\|y^{(l+1)}(N)\|^2 < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $N_\varepsilon = N$ и u_ε , найденным из решения системы

$$\mathcal{A}_N(k+1)B(k)u_\varepsilon(k) = \theta^{(l+1)}(k), \quad u_\varepsilon(k) \in U(k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

в противном случае увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Отметим, что по построению в результате применения алгоритмов 4 и 5 имеет место точное равенство $N_\varepsilon = N_{\min}$ при любом значении $\varepsilon > 0$.

5. Заключение

Использование построенных в настоящей работе алгоритмов, по-видимому, является актуальным в задачах с нестрогими выпуклыми множествами геометрических ограничений, с ограничениями, описываемыми смешанными системами неравенств, в задачах с вырожденными матрицами системы. В иных ситуациях эффективным представляется использование классических алгоритмов конечномерной численной оптимизации, а также отдельно отмеченного выше метода на основе аппарата опорных функций из [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А.* Об одном подходе к решению задачи быстродействия на основе метода Кротова // *АиТ.* 2024. № 11. С. 3–35.
2. *Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А.* Численный метод решения задачи быстродействия для линейных нестационарных дискретных систем общего вида // *АиТ.* 2025. № 11. С. 3–34.
3. *Warga J.* Minimizing Certain Convex Functions // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1963. V. 11. No. 3. P. 588–593.
4. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. Athena Scientific, 1999.
5. *Peng L., Vidal R.* Block Coordinate Descent on Smooth Manifolds: Convergence Theory and Twenty-One Examples // *arxiv.org.* 2023. (arXiv:2305.14744)
6. *Бортаковский А.С.* Применение опорных функций для решения задачи быстродействия дискретных линейных систем с выпуклым множеством управлений // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2025. № 2. С. 52–69.
7. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. № 3. С. 3–25.
8. *Luo Z., Tseng P.* On the convergence of the coordinate descent method for convex differentiable minimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1992. V. 72(1). P. 7–35.
9. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. Спб.: Изд-во Лань, 2022.
10. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
11. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 12.01.2026

После доработки 13.03.2026

Принята к публикации 23.03.2026