

© 2026 г. В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru)
(Российский университет дружбы народов, Сочинский институт),
Ю.Г. МАРТЫШЕНКО, канд. физ.-мат. наук (j-mart@mail.ru)
(Российский государственный университет нефти и газа, Москва)

О НАХОЖДЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью рассматривается задача анализа устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия в контексте прямого метода Ляпунова. Нахождение функций Ляпунова в этой задаче трактуется как выбор пары «основная функция Ляпунова – вспомогательная функция», в которой вспомогательная функция используется для корректировки области фазового пространства системы, где вводится и анализируется основная функция Ляпунова. Приводятся примеры построения пар для некоторых нелинейных систем двух и трех дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, устойчивость по части переменных, метод функций Ляпунова, построение функций Ляпунова.

DOI: 10.7868/S2413977726090042

1. Введение

Наряду с задачами устойчивости по всем переменным в современной теории управления также часто изучаются более общие задачи устойчивости по части переменных (частичной устойчивости), восходящие к классическим работам А.М. Ляпунова [1] и В.В. Румянцева [2, 3]. Эти задачи естественным образом возникают в приложениях и рассматриваются для моделей разной формы математического описания: с непрерывной и дискретной динамикой, с учетом эффекта эрeditарности (запаздывания) и случайных воздействий; см. обзоры в [3–5]. Также получили развитие новые задачи устойчивости: от входа к выходу (input-output stability) [6, 7] и по выходу на конечном интервале времени (finite-time output stability) [8–10].

Как и в задаче устойчивости по всем переменным, основным строгим методом исследования задач частичной устойчивости является метод функций Ляпунова при соответствующей модификации, успешно использующийся, например, при анализе устойчивости сложных механических систем [3, 11]. Однако несмотря на доказанную обратимость ряда теорем, составляющих основу метода, и его дальнейшее развитие, вопросы конструктивного нахождения

функций Ляпунова как для общих классов, так и для конкретных систем остаются наиболее актуальными и трудными.

Если задача устойчивости по всем переменным «в малом» во многих случаях решается посредством анализа линейного приближения, то анализ устойчивости по части переменных даже в этой ситуации является *нелокальным* из-за наличия «неконтролируемых» переменных, и в значительно большей степени зависит от структуры и параметров исследуемых систем. Такой анализ может быть успешно проведен с помощью подходящей функции Ляпунова.

В данной статье рассматривается один из возможных подходов к нахождению функций Ляпунова в задаче устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы нелинейных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью. В его основе – переход к анализу «*расширенной*» частичной устойчивости: не только по изначально заданной части переменных, но и по отношению к некоторым дополнительным переменным – функциям фазовых переменных изучаемой системы дифференциальных уравнений. Указанный переход не связан с изменением (или уточнением) содержательного смысла исходной задачи частичной устойчивости, а имеет другую цель: *сузить* область фазового пространства системы, где ведется подбор подходящей функции Ляпунова, и облегчить выбор функции с нужными свойствами. Естественно, по смыслу решаемой задачи предполагается, что «расширенная» частичная устойчивость является «промежуточной» между устойчивостью по изначально заданной части переменных и устойчивостью по всем переменным.

Формализация данного подхода предполагает нахождение наряду с основной функцией Ляпунова еще одной (векторной, вообще говоря) вспомогательной функции, определяющей набор дополнительных переменных, и рассмотрение этих функций как *пары* (связки) для решения исходной задачи устойчивости по части переменных. При этом вспомогательная функция используется для корректировки области фазового пространства системы, где вводится основная функция Ляпунова и анализируются ее свойства. Требования к основной функции Ляпунова являются *более слабыми*, чем при анализе устойчивости по изначально заданной части переменных.

Выделяются структурные формы нелинейных систем двух и трех дифференциальных уравнений, для которых возможно конструктивное построение указанных пар и нахождение областей устойчивости по части переменных в пространстве параметров. Анализ «расширенной» частичной устойчивости этих структурных форм сводится к анализу устойчивости по всем переменным по линейному приближению положений равновесия специально построенных вспомогательных систем дифференциальных уравнений, получающихся из исходной системы соответствующими преобразованиями фазовых переменных. Данные структурные формы используются далее в качестве нели-

нейного приближения для анализа устойчивости по части переменных систем с нелинейностями полиномиального вида.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p) = (\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad m + p = n, \end{aligned}$$

в которой переменные, входящие в фазовый вектор $\mathbf{x}$, представлены в виде двух групп переменных [3, 4, 12]: 1) $\mathbf{y}$ -переменные, по отношению к которым исследуется устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 2) оставшиеся («неконтролируемые») $\mathbf{z}$ -переменные. Далее $\|\mathbf{x}\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{x}$.

Введем обычные для теории частичной устойчивости ($\mathbf{y}$ -устойчивости) предположения [3, 4] о непрерывности вектор-функции $\mathbf{X}$ в области

$$(2) \quad t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty,$$

а также о единственности и $\mathbf{z}$ -продолжимости решений системы (1) (это значит, что любое решение $\mathbf{x}(t)$ определено при всех $t \geq 0$, при которых $\|\mathbf{y}(t)\| \leq h$). Обозначим через $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ решение системы (1), определенное начальным условием $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0)$.

Определения. Нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1):

1) *$\mathbf{y}$ -устойчиво*, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

2) *равномерно $\mathbf{y}$ -устойчиво*, если $\delta = \delta(\varepsilon)$ в определении 1);

3) *асимптотически $\mathbf{y}$ -устойчиво*, если оно $\mathbf{y}$ -устойчиво в смысле определения 1) и найдется $\Delta(t_0) > 0$ такое, что произвольное решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1) с $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ удовлетворяет предельному соотношению

$$(3) \quad \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty;$$

при этом неравенство $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ определяет область $\mathbf{y}$ -притяжения положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) для начального момента t_0 ;

4) *равномерно асимптотически $\mathbf{y}$ -устойчиво*, если оно равномерно $\mathbf{y}$ -устойчиво в смысле определения 2), Δ не зависит от t_0 и предельное соотношение (3) выполняется равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ из области $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$.

Для анализа $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) в контексте прямого метода Ляпунова будем рассматривать функции:

1) скалярную $V(t, \mathbf{x})$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ – непрерывно дифференцируемую в области (2) и ее производную V' в силу системы (1) в качестве функции Ляпунова;

2) векторную $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, $\mathbf{w}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ – непрерывную в области (2), используемую для оценки (сверху) функции Ляпунова и ее производной;

3) $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ – стандартные используемые в теории устойчивости непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in [0, h]$ такие, что $a(0) = b(0) = c(0) = 0$ (функции Хана [3]).

В.В. Румянцев показал [2], что если для системы (1) в области

$$(4) \quad t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| < h_1 \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty$$

при достаточно малом $h_1 > 0$ можно указать V -функцию такую, что

$$(5) \quad V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\|), \quad V'(t, \mathbf{x}) \leq 0,$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}$ -устойчиво.

Если условия (5) заменить условиями [3, 4, 12]

$$a(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|), \quad V'(t, \mathbf{x}) \leq -c(\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{y}, \mathbf{w}(\mathbf{x})],$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равномерно асимптотически $\mathbf{y}$ -устойчиво.

При исследовании устойчивости по всем переменным построение функции Ляпунова не только решает вопрос об устойчивости, но и позволяет дать оценки области притяжения. Оценки получаются посредством аппроксимации области притяжения множествами, лежащими внутри поверхностей уровня функций Ляпунова.

Описание ряда аналитических и численных методов построения функций Ляпунова и оценки областей притяжения можно найти, например, в монографиях [13–16], обзорах [17–20], а также в работах [21–27]; рассматриваются системы не только с непрерывной, но и разрывной правой частью [28]. Укажем также на *дивергентный* метод анализа устойчивости (см. [29]), альтернативный методу функций Ляпунова.

Задача устойчивости по части переменных ($\mathbf{y}$ -устойчивости) имеет свои особенности. Даже при анализе $\mathbf{y}$ -устойчивости «в малом» положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) имеет место нелокальная задача анализа свойств функции Ляпунова в цилиндрической области (4) фазового пространства. Более того, при анализе $\mathbf{y}$ -устойчивости «в малом» (по $\mathbf{y}_0$) могут быть допустимы большие начальные возмущения по «неконтролируемым» $\mathbf{z}$ -переменным (по $\mathbf{z}_0$). Нахождение функций Ляпунова для анализа таких ситуаций является актуальной и малоисследованной задачей теории частичной устойчивости.

3. Предлагаемый подход к нахождению функций Ляпунова

В общем случае при исследовании задачи $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) прямым методом Ляпунова имеет место зависимость функций Ляпунова не только от t , $\mathbf{y}$, но и от «неконтролируемых» $\mathbf{z}$ -переменных.

Поэтому допущение $\|\mathbf{z}\| < \infty$, определяющее область (4), где подбирается и анализируется функция Ляпунова, может оказаться излишне ограничительным и значительно затрудняет проверку свойств знакоопределенности как самих функций, так и их производных в силу системы (1).

Дополнительные возможности появляются при переходе от исходной задачи $\mathbf{y}$ -устойчивости к анализу «расширенной» частичной устойчивости: $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1); в данном случае вместо области (4) рассматривается более узкая область фазового пространства

$$(6) \quad t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\| < h_1 \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty,$$

где $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ – непрерывная в области (2) функция такая, что $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

Подобный подход мотивируется тем, что при анализе $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) «расширенная» $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ -устойчивость всегда фактически имеет место для некоторых комбинаций фазовых переменных, определяющих $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функцию. Указание конкретной $\boldsymbol{\mu}$ -функции, однако, требует отдельного анализа; поэтому формализация данного подхода включает нахождение, наряду с *основной функцией Ляпунова* $V(t, \mathbf{x})$, еще одной (векторной, вообще говоря) *вспомогательной* $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функции для соответствующей корректировки области (6), где вводится основная функция Ляпунова. Эти функции рассматриваются как пара $\{V(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\}$ для решения задачи $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1).

Введение пары дает возможность использования в процессе решения задачи функций Ляпунова $V(t, \mathbf{x})$, производные которых в силу системы (1), и даже сами функции, могут быть *знакопеременными* в области (4).

Теорема 1. Допустим, что для системы (1) возможно указать пару $\{V(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\}$, такую что при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (6) выполняются условия

$$(7) \quad V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|), \quad V'(t, \mathbf{x}) \leq 0.$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}$ -устойчиво.

Если условия (7) заменить условиями

$$(8) \quad a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|), \quad V'(t, \mathbf{x}) \leq -c(\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|),$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равномерно асимптотически $\mathbf{y}$ -устойчиво.

Доказательство теоремы проводится по схеме, указанной в [2–4, 12].

В рамках предложенного подхода к анализу $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) в качестве кандидата на основную функцию $V(t, \mathbf{x})$ в паре естественно выбрать квадратичную форму (Т – знак транспонирования)

$$(9) \quad V(t, \mathbf{x}) = \mathbf{y}A_1(t)\mathbf{y}^T + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})A_2(t)\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{x})$$

переменных $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\mu}$ при надлежащем подборе элементов матричных функций A_1 и A_2 соответствующих размеров (в частности, эти элементы могут и не зависеть от t) или форму более высокого порядка $V(t, \mathbf{x}) \equiv V^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\mu}$.

Данный путь построения пары допускает конструктивную реализацию, если систему (1) возможно представить в виде

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Y}^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{Y}^{**}(t, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\mu}' = \mathbf{M}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{M}^*(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{z}' = \mathbf{Z}(t, \mathbf{x}),$$

и вопрос $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ -устойчивости нулевого положения равновесия полученной системы решается исследованием устойчивости по *всем* переменным нулевого положения равновесия системы первого (линейного или нелинейного) приближения

$$(10) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{Y}^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{\mu}' = \mathbf{M}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}).$$

Тогда функции Ляпунова вида (9) могут быть построены как функции Ляпунова для системы (10) с использованием уже разработанных аналитических или численных методов применительно к задаче устойчивости по *всем* переменным.

Отметим, что ряд условий устойчивости по части переменных по линейному и нелинейному приближению приводится в [2–5, 30, 31].

Другой путь выбора кандидата на основную функцию $V(t, \mathbf{x})$ предполагает знание первых интегралов системы (1); начиная с работ Н.Г. Четаева [32] построение функций Ляпунова в виде связи первых интегралов используется при анализе устойчивости механических систем как по *всем*, так и по части переменных [3, 5]. В рассматриваемой задаче $\mathbf{y}$ -устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) введение дополнительной $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функции позволяет в ряде случаев упростить структуру функции Ляпунова путем представления ее в виде

$$(11) \quad V(t, \mathbf{x}) = V^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})) + W(t, \mathbf{x}),$$

где $V^*(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}))$ – знакоопределенная (по $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\mu}$) в области (6) функция, а функция $W(t, \mathbf{x})$ в области (6) удовлетворяет условию $W(t, \mathbf{x}) \geq 0$.

Для линейных систем с постоянными коэффициентами алгоритм выбора $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функции и построения функций Ляпунова в форме (9) рассмотрен в [12].

Замечание 1. Вместо основной скалярной функции Ляпунова $V(t, \mathbf{x})$ пары могут включать векторную основную функцию $\mathbf{V} = [V_1(t, \mathbf{x}), \dots, V_k(t, \mathbf{x})]$ с последующим анализом этой функции в области (6) в рамках метода сравнения [33].

Замечание 2. Пара «функция Ляпунова – обратная связь» (стабилизирующая пара) введена ранее [34] для решения задачи стабилизации управляемых систем, а пара «функция Ляпунова – векторное поле» [35] и корректирующая вспомогательная функция для построения функции Ляпунова

непосредственно по правой части исследуемой системы [36] – для анализа устойчивости по всем переменным.

Идея построения пары $\{V(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\}$, которую можно считать решением задачи нахождения функции Ляпунова при анализе частичной устойчивости, в общем виде не формулировалась. Однако условия $\mathbf{y}$ -устойчивости (7), проверяемые в области (6), указаны и обсуждались в [4, 5, 12], а условия равномерной асимптотической $\mathbf{y}$ -устойчивости (8) анонсированы в [5, 12]. В этой связи отметим, что в рамках предложенного подхода выбор пары может быть сделан и при других условиях на функцию Ляпунова в области (6), отличных от условий (8).

Замечание 3. Для выбранной вспомогательной функции $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ проверка условий (7), (8) в области (6) упрощается, если функция Ляпунова и нелинейности в системе (1) *полиномиальны*, а также известна $\mathbf{z}$ -ограниченность решений системы (1), начинающихся в малой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Если вспомогательную систему типа (10) можно *отделить* от исходной системы (1), то достаточно проверить знакоопределенность по *всем* переменным построенной функции Ляпунова $V(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}))$ и ее производной в силу вспомогательной системы.

Пример 1. Движение голономной механической системы в потенциальном поле сил описывается уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i},$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергия, x_i – обобщенные координаты.

Пусть наложенные связи не зависят явно от времени t и система допускает положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$. Компоненты вектора $\mathbf{x}$ обобщенных координат разобьем на две группы $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ и допустим, что найдется вспомогательная $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ -функция, такая что в области

$$(12) \quad \|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{x}'\| < h_1 \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty$$

выполняются условия: 1) T определено положительно по обобщенным скоростям; 2) Π не зависит явно от времени t и является определено положительной не только по $\mathbf{y}$, но и по дополнительным переменным $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$, т.е. $\Pi(\mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|)$.

При сделанных допущениях имеет место интеграл энергии $T + \Pi = \text{const}$ и, следовательно, пара $\{V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \Pi(\mathbf{x}), \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\}$ решает задачу частичной устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$: равномерной устойчивости по $\mathbf{y}, \mathbf{x}'$ (по части обобщенных координат и по всем обобщенным скоростям).

Рассмотрим, в частности, движение точки единичной массы по расположенной над горизонтальной плоскостью Oy_1z_1 поверхности [4, 12]

$$(13) \quad f = \frac{y_1^2(1 + z_1^2)}{1 + y_1^4 z_1^4}.$$

В данном случае $\mathbf{x} = (y_1, z_1)$ и

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left\{ y_1'^2 + z_1'^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f}{\partial z_1} z_1' \right]^2 \right\}, \quad \Pi(\mathbf{x}) = gf(y_1, z_1);$$

g – ускорение свободного падения.

Пару конкретизируем следующим образом:

$$(14) \quad \{V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \Pi(\mathbf{x}), \mu_1(\mathbf{x}) = y_1 z_1\},$$

так что основная функция Ляпунова $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ имеет структуру (11), если $\mathbf{y} = (y_1, \mathbf{x}')$, а $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ определяется слагаемым в квадратных скобках в выражении для $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Поскольку в области (12) при достаточно малом h_1 имеем

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \geq a(|y_1| + |\mu_1| + \|\mathbf{x}'\|), \quad V'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv 0,$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ точки равномерно устойчиво по $y_1, \mathbf{x}'$.

Вместе с тем в области (4) при $\mathbf{y} = (y_1, \mathbf{x}')$ условие $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \geq a(|y_1| + \|\mathbf{x}'\|)$ не выполняется: $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rightarrow 0$ при $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, любом фиксированном значении y_1 и $|z_1| \rightarrow \infty$. Значит, функция Ляпунова $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ в паре (14) не является знакоопределенной по $y_1, \mathbf{x}'$ в смысле [2] и не удовлетворяет первому из условий (5) в области (4).

Введенная пара (14) позволяет выявить нелокальный характер равномерной устойчивости по $y_1, \mathbf{x}'$ и оценить область допустимых начальных возмущений $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0$ переменных $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$. Действительно, основная функция $V(y_1, z_1, \mathbf{x}')$ удовлетворяет условию $V(0, z_1, \mathbf{0}) \equiv 0$ и, следовательно, равномерная устойчивость по $y_1, \mathbf{x}'$ положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ точки будет иметь место не только при достаточно малых значениях $y_{10}, \|\mathbf{x}'_0\|$, но и при больших (но конечных) значениях z_{10} .

В дополнение к [4, 12] можно показать, что при достаточно малом значении $\|\mathbf{x}'_0\|$ область допустимых начальных значений y_{10}, z_{10} определяется неравенством

$$(15) \quad \frac{y_{10}^2(1 + z_{10}^2)}{1 + y_{10}^4 z_{10}^4} < \frac{1}{2}.$$

Для доказательства рассмотрим уравнение $f(y_1, z_1) = c$ ($c = \text{const} > 0$), определяющее линии уровня поверхности (13). В переменных (y_1, μ_1) это

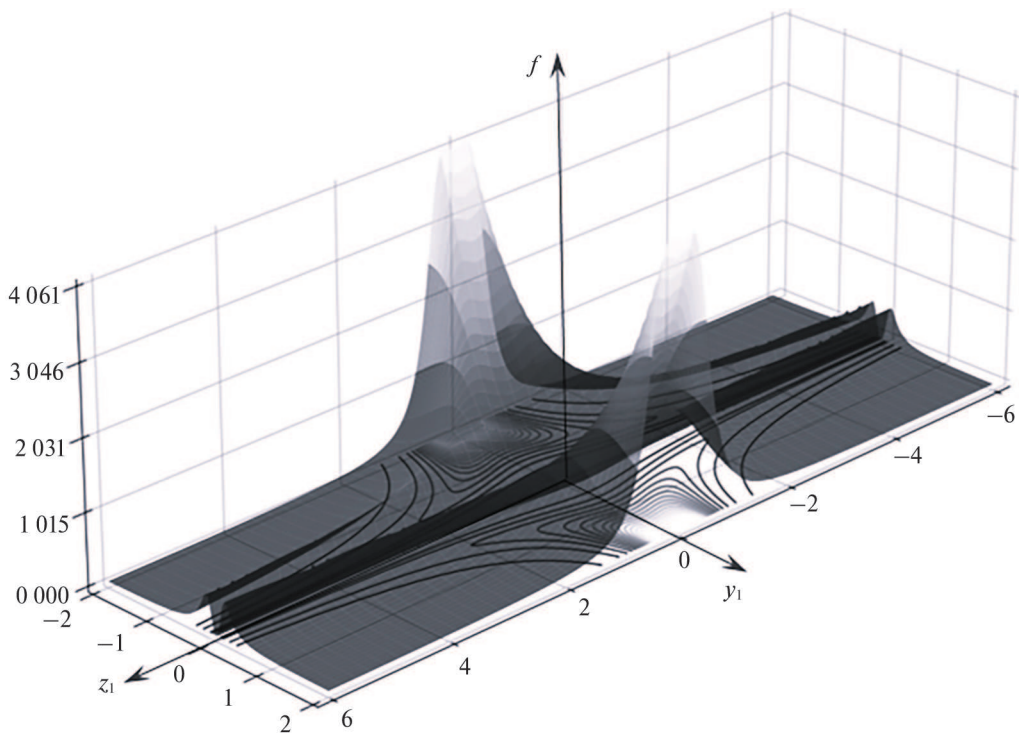


Рис. 1. Поверхность (13).

уравнение можно представить в виде биквадратного (относительно μ_1) уравнения

$$(16) \quad cr^2 - r + (c - y_1^2) = 0 \quad (r = \mu_1^2).$$

При $4cy_1^2 \geq 4c^2 - 1$ уравнение (16) имеет два действительных решения

$$r_1(c, y_1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c(c - y_1^2)}}{2c}, \quad r_2(c, y_1) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c(c - y_1^2)}}{2c}.$$

С учетом формул Виета заключаем, что: 1) $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ при $0 < c < 1/2$, $y_1^2 < c$, а также при $c \geq 1/2$, $c - 1/(4c) \leq y_1^2 < c$; 2) $r_2 > 0$ при $y_1^2 > c$ и любом $c > 0$. Как следствие, также $r_2 > 0$ при $0 < c < 1/2$ и всех y_1 .

При $0 < c < 1/2$ рассмотрим решение $r_1 > 0$. Поскольку $r_1 \rightarrow 0$ при $c \rightarrow 0$ и $r_1 \rightarrow 1$ при $c \rightarrow 1/2$, $y_1 \rightarrow 0$, то на плоскости (y_1, μ_1) можно выделить область $y_1^2 < 1/2$, $\mu_1^2 < 1$, где линии уровня поверхности (13) являются замкнутыми, охватывающими точку $y_1 = \mu_1 = 0$ кривыми эллиптического типа, пересекающими прямую $y_1 = 0$ в точках $\mu_1 = \pm\sqrt{r_1}$.

Этим линиям уровня на плоскости (y_1, z_1) в области $(y_1^2 < 1/2) \cap \cap (y_1^2 < 1/z_1^2)$ соответствуют разомкнутые кривые, охватывающие прямую $y_1 = 0$ и приближающиеся к ней асимптотически при $c \rightarrow 0$, $|z_1| \rightarrow \infty$.

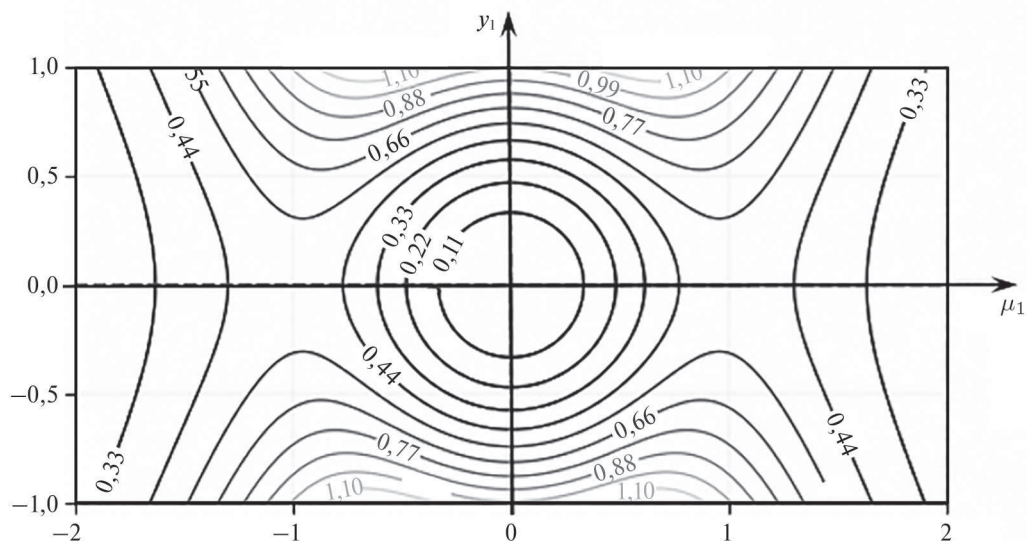


Рис. 2. Линии уровня поверхности (13) на плоскости (y_1, μ_1) .

Вторые ветви линий уровня в случае $0 < c < 1/2$ (соответствующие решению $r_2 > 0$), а также линии уровня при $c \geq 1/2$ определяются кривыми, лежащими за пределами указанных областей. Действительно, $r_2 \rightarrow +\infty$ при $c \rightarrow 0$ и $r_2 \rightarrow 1$ при $c \rightarrow 1/2$, $y_1 \rightarrow 0$, и вторые ветви линий уровня на плоскости (y_1, μ_1) являются разомкнутыми кривыми в области $\mu_1^2 \geq 1$ (пересекающие прямую $y_1 = 0$ в точках $\mu_1 = \pm\sqrt{r_2}$) и разомкнутыми кривыми в области $y_1^2 \geq 1/z_1^2$ на плоскости (y_1, z_1) . При $c \geq 1/2$ линии уровня поверхности (13) лежат в области $y_1^2 \geq 1/2$.

В результате при достаточно малом значении $\|\mathbf{x}'_0\|$ и при значениях y_{10}, z_{10} из области (15) можно не только сделать значение $V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0)$ функции $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ меньше любого сколь угодно малого числа, но и добиться расположения точки между охватывающими прямую $y_1 = 0$ линиями уровня поверхности (13). Учитывая тождество $V'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv 0$, заключаем, что в дальнейшем при всех $t \geq t_0$ точка не выходит за пределы указанных линий уровня поверхности (13).

Анализируя неравенство (15), отметим также, что равномерная устойчивость по $y_1, \mathbf{x}'$ положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ точки возможна при достаточно малых значениях $z_{10}, \|\mathbf{x}'_0\|$ и при $y_{10}^2 < 1/2$.

4. Выделение некоторых «опорных» систем

Используя предложенный подход, выделим некоторые структурные формы нелинейных систем двух и трех уравнений, для которых рассматриваемые пары могут быть конструктивно построены. Далее $f_i(y_1)$ ($i = 1, 2$) – либо функции вида $d_i y_1$ (d_i – постоянные), либо удовлетворяют в области $|y_1| < h_1$ условиям $|f_i(y_1)| \leq A|y_1|^{1+\alpha}$, где A, α – положительные постоянные.

1. Пусть система (1) состоит из уравнений (a, b, l – постоянные параметры)

$$(17) \quad y_1' = ay_1 + ly_1^2 z_1, \quad z_1' = bz_1 + f_1(y_1)z_1.$$

Найдем, при каких условиях на параметры положение равновесия $y_1 = z_1 = 0$ системы (17) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво.

При введении дополнительной переменной $\mu_1 = y_1 z_1$ от уравнений

$$y_1' = ay_1 + ly_1\mu_1, \quad \mu_1' = (a+b)\mu_1 + l\mu_1^2 + \mu_1 f_1(y_1), \quad z_1' = bz_1 + f_1(y_1)z_1$$

отделяется система

$$(18) \quad y_1' = ay_1 + ly_1\mu_1, \quad \mu_1' = (a+b)\mu_1 + l\mu_1^2 + \mu_1 f_1(y_1).$$

Если выполняются условия

$$(19) \quad a < 0, \quad a + b < 0,$$

то систему (18) можно рассматривать как систему типа (10) в предложенной в разделе 3 схеме построения пар применительно к исходной системе (17), поскольку положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ системы (18) асимптотически устойчиво (по y_1, μ_1) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Возможность выделения системы (18) и допустимый выбор функции $V = y_1^2 + \mu_1^2$ в качестве функции Ляпунова для этой системы предопределяют выбор пары

$$(20) \quad \{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (y_1 z_1)^2, \mu_1(\mathbf{x}) = y_1 z_1\}.$$

Входящая в пару (20) основная функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$ имеет структурную форму (9), а ее производная V' в силу системы (17)

$$V' = 2\{ay_1^2 + (a+b)\mu_1^2(\mathbf{x}) + l\mu_1(\mathbf{x})[y_1^2 + \mu_1^2(\mathbf{x})] + \mu_1^2(\mathbf{x})f_1(y_1)\}$$

при выполнении условий (19) удовлетворяет в области (6) условиям (8) при $u_1 = [y_1, \mu_1(\mathbf{x})]$, хотя является *знакопеременной* в области (4).

В результате при условиях (19) положение равновесия $y_1 = z_1 = 0$ системы (17) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво на основании теоремы 1. Кроме того, основная функция $V(y_1, z_1)$ в паре (20) также удовлетворяет условию $V(0, z_1) \equiv 0$ и, следовательно, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} , но и при больших (но конечных) значениях z_{10} .

Область притяжения в системе (18) можно оценить по известным методам (см. [22]) с помощью функции Ляпунова из параметрического класса квадратичных форм переменных y_1, μ_1 ; при этом на плоскости (y_1, z_1) получаем соответствующую область y_1 -притяжения положения равновесия $y_1 = z_1 = 0$ системы (17).

2. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(21) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + lz_1z_2, \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1, \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2, \end{aligned}$$

где a, b, c, l – постоянные параметры.

Введением переменной $\mu_1 = z_1z_2$ можно выделить систему

$$y_1' = ay_1 + l\mu_1, \quad \mu_1' = (b+c)\mu_1 + [f_1(y_1) + f_2(y_1)]\mu_1,$$

что предопределяет выбор пары

$$\{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (z_1z_2)^2, \mu_1(\mathbf{x}) = z_1z_2\}.$$

Аналогично проведенному анализу в случае 1 можно показать, что при выполнении условий $a < 0, b+c < 0$ положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (21) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво. Кроме того, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} и z_{10} (z_{20}), но и при больших (но конечных) значениях z_{20} (z_{10}).

3. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(22) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + ly_1^2z_1z_2, \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1, \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2. \end{aligned}$$

Введением переменной $\mu_1 = y_1z_1z_2$ можно выделить систему

$$y_1' = ay_1 + ly_1\mu_1, \quad \mu_1' = (a+b+c)\mu_1 + l\mu_1^2 + [f_1(y_1) + f_2(y_1)]\mu_1,$$

что предопределяет выбор пары

$$\{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (y_1z_1z_2)^2, \mu_1(\mathbf{x}) = y_1z_1z_2\}.$$

При выполнении условий $a < 0, a+b+c < 0$ положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (22) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво. Кроме того, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} , но и при больших (но конечных) значениях z_{10} и z_{20} .

4. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(23) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1y_1^2z_1 + l_2y_1z_1z_2, \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1, \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2. \end{aligned}$$

Введением переменных $\mu_1 = y_1z_1$ и $\mu_2 = z_1z_2$ можно выделить систему

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1y_1\mu_1 + l_2y_1\mu_2, \\ \mu_1' &= (a+b)\mu_1 + l_1\mu_1^2 + \mu_1f_1(y_1) + l_2\mu_1\mu_2, \\ \mu_2' &= (b+c)\mu_2 + [f_1(y_1) + f_2(y_1)]\mu_2, \end{aligned}$$

что предопределяет выбор пары

$$(24) \quad \{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (y_1 z_1)^2 + (z_1 z_2)^2, \mu(\mathbf{x}) = (y_1 z_1, z_1 z_2)\}$$

с векторной вспомогательной $\mu(\mathbf{x})$ -функцией.

При выполнении условий $a < 0$, $a + b < 0$, $b + c < 0$ положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (23) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво. Кроме того, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} , z_{20} , но и при больших (но конечных) значениях z_{10} .

5. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$(25) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1 y_1^2 z_2 + l_2 y_1 z_1 z_2, \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1, \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2. \end{aligned}$$

Введением переменных $\mu_1 = y_1 z_2$ и $\mu_2 = z_1 z_2$ можно выделить систему

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1 y_1 \mu_1 + l_2 y_1 \mu_2, \\ \mu_1' &= (a + c)\mu_1 + l_1 \mu_1^2 + \mu_1 f_2(y_1) + l_2 \mu_1 \mu_2, \\ \mu_2' &= (b + c)\mu_2 + [f_1(y_1) + f_2(y_1)]\mu_2. \end{aligned}$$

При выполнении условий $a < 0$, $a + c < 0$, $b + c < 0$ положение равновесия $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (25) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво. Кроме того, равномерная y_1 -устойчивость имеет место не только при достаточно малых значениях y_{10} , z_{10} , но и при больших (но конечных) значениях z_{20} .

Пара, решающая задачу:

$$\{V(\mathbf{x}) = y_1^2 + (y_1 z_2)^2 + (z_1 z_2)^2, \mu(\mathbf{x}) = (y_1 z_2, z_1 z_2)\}.$$

5. Использование «опорных» систем в качестве систем первого приближения

Выделенные структурные формы можно использовать в качестве нелинейного приближения для систем с нелинейностями полиномиального вида.

1. Рассмотрим «возмущенную» систему (17), состоящую из уравнений

$$(26) \quad y_1' = ay_1 + l y_1^2 z_1 + Y_1(t, \mathbf{x}), \quad z_1' = bz_1 + f_1(y_1)z_1 + Z_1(t, \mathbf{x}).$$

Введением переменной $\mu_1 = y_1 z_1$ система преобразуется к виду

$$(27) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l y_1 \mu_1 + Y_1(t, \mathbf{x}), \quad \mu_1' = (a + b)\mu_1 + l \mu_1^2 + \mu_1 f_1(y_1) + Y_1^*(t, \mathbf{x}), \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1 + Z_1(t, \mathbf{x}), \\ Y_1^*(t, \mathbf{x}) &= y_1 Z_1(t, \mathbf{x}) + z_1 Y_1(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Используя анализ системы (17) и пару (20), можно показать, что при выполнении условий (19), а также при выполнении в области (6) условия

$$(28) \quad |Y_1(t, \mathbf{x})| + |Y_1^*(t, \mathbf{x})| \leq \alpha_1 |y_1| + \alpha_2 |y_1 z_1|,$$

где α_1, α_2 – достаточно малые положительные постоянные, положение равновесия $y_1 = \mu_1 = z_1 = 0$ системы (27) равномерно асимптотически (y_1, μ_1) -устойчиво.

Поэтому при выполнении указанных условий положение равновесия $y_1 = z_1 = 0$ исходной системы (26) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво.

Условие (28) выполнено, например, при $Y_1 = y_1^2 z_1^2$, $Z_1 = y_1 z_1^2$, $Z_2 = y_1^2 z_1$.

2. Рассмотрим «возмущенную» систему (23), состоящую из уравнений

$$(29) \quad \begin{aligned} y_1' &= ay_1 + l_1 y_1^2 z_1 + l_2 y_1 z_1 z_2 + Y_1(t, \mathbf{x}), \\ z_1' &= bz_1 + f_1(y_1)z_1 + Z_1(t, \mathbf{x}), \quad z_2' = cz_2 + f_2(y_1)z_2 + Z_2(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Используя анализ системы (23) и пару (24), можно показать, что при выполнении условий $a < 0$, $a + b < 0$, $b + c < 0$, а также при выполнении в области (6) условия

$$(30) \quad \begin{aligned} |Y_1(t, \mathbf{x})| + |Y_1^*(t, \mathbf{x})| + |Z_1^*(t, \mathbf{x})| &\leq \alpha_1 |y_1| + \alpha_2 |y_1 z_1| + \alpha_3 |z_1 z_2|, \\ Z_1^*(t, \mathbf{x}) &= z_1 Z_2(t, \mathbf{x}) + z_2 Z_1(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

где α_i – достаточно малые положительные постоянные, положение равновесия $y_1 = z_1 = 0$ системы (29) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво.

Условие (30) выполнено, например, в случае $Y_1 = y_1^2 z_1^2$, $Z_1 = y_1^2 z_1$, $Z_2 = y_1 z_1 z_2^2$.

6. Заключение

Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью предложен один из возможных подходов к нахождению функций Ляпунова, решающих задачу анализа устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия. В рамках этого подхода производится выбор пары «основная функция Ляпунова – вспомогательная функция»; вспомогательная функция используется для корректировки области фазового пространства системы, где вводится основная функция Ляпунова.

Указывается способ построения указанных пар, основанный на преобразовании исходной системы и использовании условий устойчивости по части переменных по первому (линейному или нелинейному) приближению.

Приводятся примеры построения пар для некоторых нелинейных систем двух и трех дифференциальных уравнений, где основная функция Ляпунова является квадратичной формой переменных, устойчивость по которым изучается, а также дополнительных переменных. Для этих систем найдены области устойчивости по части переменных в пространстве параметров.

Аналогичный подход к анализу частичной устойчивости рассматривался для дискретных систем [37], а также для стохастических систем с непрерывной и дискретной динамикой [38–40].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сборник. 1893. Т. 17. № 2. С. 253–333.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
3. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 255 с.
4. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
5. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.
Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.
6. *Sontag E.D., Wang Y.* Notions of Input to Output Stability // Syst. & Control Lett. 1999. V. 38. No. 4–5. P. 235–248.
7. *Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // АиТ. 2011. № 8. С. 3–40.
Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to State Stability and Allied System Properties // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 8. P. 1579–1614.
8. *Jammazi C.* On a Sufficient Condition for Finite-Time Partial Stability and Stabilization: Applications // IMA J. Mathematical Control and Information. 2010. V. 27. No. 1. P. 29–56.
9. *Haddad W.M., L’Afflitto A.* Finite-Time Partial Stability and Stabilization, and Optimal Feedback Control // J. Franklin Institute. 2015. V. 352. No. 6. P. 2329–2357.
10. *Zimenko K., Efimov D., Polyakov A., Kremlev A.* On Necessary and Sufficient Conditions for Output Finite-Time Stability // Automatica. 2021. V. 125. Art. 109427.
11. *Zuyev A.L.* Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements. Cham: Springer Int. Publ., 2015. 245 p.
12. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
13. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
14. *Giesl P.* Construction of Global Lyapunov Functions using Radial Basis Functions. Berlin: Springer Verlag, 2007. 274 p.
15. *Hafstein S.* An Algorithm for Constructing Lyapunov Functions // Electronic J. Diff. Equat. (Monograph 8). 2007. 101 p.
16. *Malisoff M., Mazenc F.* Constructions of Strict Lyapunov Functions. Springer: London, 2009. 386 p.
17. *Genesio R., Tartaglia M., Vicino A.* On the Estimation of Asymptotic Stability Regions: State of the art and New Proposals // IEEE Trans. Autom. Control. 1985. V. AC-30. No. 8. P. 747–756.
18. *Giesl P., Hafstein S.* Review on Computational Methods for Lyapunov Functions // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2015. V. 20. No. 8. P. 2291–2331.

19. *Anderson J., Papachristodoulou A.* Advances in Computational Lyapunov Analysis using Sum-of-Squares Programming // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2015. V. 20. No. 8. P. 2361–2381.
20. *Красильников П.С.* Об обобщенной схеме построения функций Ляпунова из первых интегралов // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 199–210.
21. *Дьяченко И.В., Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Численный метод построения функций Ляпунова и анализ устойчивости нелинейных динамических систем на ЭВМ // АиТ. 1994. № 4. С. 23–38.
D'yachenko I.V., Molchanov A.P., Pyatnitski E.S. A Numerical Method for Constructing Lyapunov Functions and the Analysis of the Stability of Nonlinear Dynamical Systems on a Computer // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 4. P. 475–487.
22. *Каменецкий В.А.* Построение областей притяжения методом функций Ляпунова // АиТ. 1994. № 6. С. 10–26.
Kamenetskii V.A. Construction of Domains of Attraction by the Method of Lyapunov Functions // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 6. P. 778–791.
23. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 916–921.
24. *Johansen T.* Computation of Lyapunov Functions for Smooth, Nonlinear Systems using Convex Optimization // Automatica. 2000. V. 36. No. 11. P. 1617–1626.
25. *Marinossan S.* Lyapunov Function Construction for Ordinary Differential Equations with Linear Programming // Dynamical Systems – an Intern. J. 2002. V. 17. No. 2. P. 137–150.
26. *Grune L.* Computing Lyapunov Functions Using Deep Neural Networks // J. Comput. Dyn. 2021. V. 8. No. 2. P. 131–152.
27. *Зенкин А.М., Перегудин А.А., Бобцов А.А.* Метод поиска функции Ляпунова для анализа устойчивости нелинейных систем с использованием генетического алгоритма // Научно-техн. вест. информ. технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23. № 5. С. 886–893.
28. *Mendoza-Avila J., Efimov D., Ushirobira R., Moreno J.A.* Numerical Design of Lyapunov Functions for a Class of Homogeneous Discontinuous Systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2021. V. 31. No. 9. P. 3708–3729.
29. *Фуртат И.Б.* Дивергентные условия устойчивости динамических систем // АиТ. 2020. № 2. С. 62–75.
Furtat I.B. Divergent Stability Conditions of Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 247–257.
30. *Щенников В.Н.* Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями // Диффер. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1645–1649.
31. *Александров А.Ю.* Исследование устойчивости решений одного класса сложных систем // Вест. СПбГУ. 2011. Сер.10. № 4. С. 3–13.
32. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. 4-е изд. (с примечаниями В.В. Румянцева) М.: Наука, 1990. 176 с.
33. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.

34. *Пятницкий Е.С.* Синтез систем стабилизации программных движений нелинейных объектов управления // *АиТ.* 1993. № 7. С. 19–37.
Pyatnitski E.S. Design of Systems for the Stabilization of Programmed Motions of Nonlinear Control Plants // *Autom. Remote Control.* 1993. V. 54. No. 7. P. 1046–1062.
35. *Пропой А.И.* О построении функций Ляпунова. I // *АиТ.* 2000. № 5. С. 32–38.
Propoi A.I. On the Construction of Lyapunov Functions. I // *Autom. Remote Control.* 2000. V. 61. No. 5. P. 742–748.
36. *Жуков В.П.* Об условиях, определяющих характер устойчивости некоторых классов нелинейных динамических систем // *Проблемы управления.* 2007. № 2. С. 8–10.
37. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* Об одном подходе к анализу устойчивости «частичных» положений равновесия нелинейных дискретных систем // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2022. Т. 63. Вып. 3. С. 57–68.
38. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // *АиТ.* 2019. № 5. С. 86–98.
Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On the Partial Stability in Probability of Nonlinear Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 5. P. 856–866.
39. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // *АиТ.* 2021. № 9. С. 116–132.
Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On the Problem of Partial Stability for Discrete-Time Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 1554–1567.
40. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических дискретных систем с запаздыванием // *АиТ.* 2024. № 8. С. 20–35.
Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On Partial Stability Problem in Probability for Nonlinear Stochastic Discrete-Time Systems with Delay // *Autom. Remote Control.* 2024. V. 85. No. 8. P. 761–772.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 20.11.2025

После доработки 30.04.2026

Принята к публикации 04.05.2026