

Заметки, хроника, информация

© 2026 г. Д.А. НОВИКОВ, академик РАН, д-р техн. наук (novikov@ipu.ru),
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИТЕРАТИВНОМ НАУЧЕНИИ

Показано, что три варианта задачи об оптимальном итеративном обучении – максимизация ожидаемого результата при фиксированных суммарном числе попыток и времени; минимизация времени достижения заданного ожидаемого результата; минимизация числа попыток, необходимых для достижения заданного ожидаемого результата – имеют либо вырожденное (не зависящее от динамики интенсивности обучения), либо тривиальное (максимальная допустимая интенсивность обучения) решение.

Ключевые слова: итеративное научение, кривая научения, оптимальная интенсивность научения.

DOI: 10.7868/S2413977726090059

1. Введение

Научение в общем случае – «процесс и результат приобретения индивидуального опыта» [1–5]. Рассматривается один из видов научения, а именно итеративное научение (от лат. *iterativus* – повторяемый) – многократное повторение обучаемой системой (живой или неживой) действий, проб, попыток и т.д. для достижения фиксированной цели при постоянных внешних условиях.

Итеративное научение как обучение в строго повторяющихся условиях – одна из простейших разновидностей научения. Оно имеет место в широком классе явлений: формирование разнообразных навыков, усвоение информации человеком, научение животных (выработка условных рефлексов) и обучение технических и кибернетических систем. Различные аспекты итеративного научения исследуются в педагогике, психологии и физиологии человека и животных, в теории управления и в других науках (см. обзоры в [4, 6]). Современные математические модели ИН и соответствующий обзор можно найти в [2].

Постоянство внешних условий позволяет проводить количественное описание ИН в виде графиков – кривых научения (КН), представляющих собой зависимость критерия уровня научения от времени или от числа повторений (итераций) [4, 7]. Как правило, уровень научения интерпретируется как вероятность правильного выполнения действия или операции и соответственно принимает значения от нуля до единицы.

2. Постановка задачи

Рассматривается процесс научения в непрерывном времени. Вводятся следующие предположения.

A.1. Интенсивность научения $u(t) \geq 0$ – непрерывная неотрицательная и ограниченная сверху функция времени:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max}(t).$$

A.2. Научение описывается непрерывной кривой научения $L(U(t))$ – отображением суммарного числа сделанных к моменту времени t попыток, проб, повторений в отрезок $[0; 1]$.

A.3. Фиксировано суммарное число попыток $U(T) > 0$, которые обучаемая система может сделать за время $T > 0$. При этом

$$U(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad U(0) = 0.$$

Очевидно, $u(t) = U'(t)$.

A.4. Ожидаемое число успешных попыток в момент времени t равно произведению интенсивности научения на текущий уровень научения: $u(t)L(U(t))$. Тогда ожидаемое число успешных попыток $Z(T)$ за время T равно

$$(1) \quad Z(T) = \int_0^T U'(t) L(U(t)) dt.$$

Задача об оптимальном итеративном научении заключается в максимизации ожидаемого числа успешных попыток выбором динамики интенсивности научения (в [5] эта задача формулировалась в дискретном времени):

$$(2) \quad \int_0^T U'(t) L(U(t)) dt \rightarrow \max_{U(\cdot)}.$$

3. Основной результат

Сделаем в интеграле (1) замену переменной:

$$Z(T) = \int_0^T U'(t) L(U(t)) dt = \int_{U(0)}^{U(T)} L(U) dU.$$

Обозначим через $W(\cdot)$ первообразную кривой научения $L(\cdot)$. Тогда

$$(3) \quad Z(T) = W(U(T)) - W(0).$$

Из (3) видно, что ожидаемое число успешных попыток *не зависит* от динамики интенсивности научения, а определяется лишь видом кривой научения и суммарным числом попыток $U(T)$.

Содержательная интерпретация: при итеративном научении (фиксированная цель, постоянные внешние условия) уровень научения зависит только от суммарного числа сделанных попыток и не зависит от их распределения во времени. Эффекты усталания, забывания, вработывания и др. [3] в данной модели не учитываются.

Утверждение. Если выполнены предположения А.1–А.4, то значение критерия эффективности в задаче об оптимальном итеративном научении (2) не зависит от динамики интенсивности научения.

4. Пример: экспоненциальная кривая научения

Наиболее массовым примером КН является экспоненциальная кривая:

$$L(U) = 1 - \exp[-\gamma U(t)], \quad \gamma > 0,$$

где γ – скорость научения. Если интенсивность u постоянна во времени, то получается классическая кривая $1 - e^{-gt}$ с приведенной скоростью научения $g = \gamma u$.

Для экспоненциальной КН выражение (1) принимает вид

$$(4) \quad Z(T) = \int_0^T U'(t)[1 - e^{-\gamma U(t)}] dt = U(T) - \int_0^T U'(t)e^{-\gamma U(t)} dt.$$

Задача (2) с учетом (4) сводится к минимизации числа неуспешных попыток:

$$(5) \quad \int_0^T U'(t)e^{-\gamma U(t)} dt \rightarrow \min_{U(t)}.$$

Для экспоненциальной КН можно выполнить замену $v(t) = e^{-\gamma U(t)}$, $U(t) = -\frac{1}{\gamma} \ln v(t)$. Тогда (5) преобразуется к виду

$$-\frac{1}{\gamma} \int_0^T v'(t) dt \rightarrow \min,$$

это эквивалентно $\frac{1}{\gamma} [1 - e^{-\gamma U(T)}] \rightarrow \min$, что также не зависит от вида $u(\cdot)$.

5. Два дополнительных варианта постановки

По аналогии возможны следующие два варианта оптимизационных задач.

- 1) **Минимизация времени** T достижения заданного ожидаемого результата Z . В силу (3) и монотонности кривой научения решение тривиально: время научения минимально при условии, что в каждый момент времени интенсивность научения максимальна:

$$u(t) \equiv u_{\max}(t).$$

- 2) **Минимизация числа попыток** U , необходимых для достижения заданного ожидаемого результата Z . В силу (3) эта задача имеет вырожденное решение (не зависящее от динамики интенсивности обучения). Содержательно: обучаемая система должна неизбежно сделать определенное количество ошибок, иначе научиться невозможно.

6. Задача оптимального управления (ЗОУ)

6.1. Переход к ЗОУ

Вводим фазовые переменные $x_1 = U$ и $x_2 = u$. Тогда двуточечная краевая задача имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad u \in [0, 1],$$

$$c = (0, ?)^T, \quad d = (?, ?)^T, \quad - \int_0^T x_2(t) L(x_1(t)) dt \rightarrow \min.$$

6.2. Применение принципа максимума Понтрягина (ПМП)

Задача автономная, T задано, система линейная. Применим локальный принцип максимума. Функция Понтрягина при $\lambda_0 = 1$ имеет вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 w + x_2(t) L(x_1(t)).$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi}_1(t) = -x_2(t) L_{x_1}(x_1(t)), \quad \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) - L(x_1(t)).$$

Откуда следует, что $\psi_1(t) = L(x_1(0)) - L(x_1(t))$, $\dot{\psi}_2(t) = -L(x_1(0))$ – которая является константой. Тогда $\psi_2(t) = -L(x_1(0))t + a$ – линейная функция.

Оптимальное управление $u^* = \text{sign}(\psi_2)$. Поскольку ψ_2 линейная функция, то существует не более одного переключения управления. Но поскольку правый конец по x_2 не фиксирован, то из условия трансверсальности следует, что $\psi_2(T) = 0$. И, значит, переключений управления нет и существуют только тривиальные решения ЗОУ.

7. Заключение

Все три варианта задачи об оптимальном итеративном обучении имеют либо вырожденное (не зависящее от динамики интенсивности обучения), либо тривиальное (максимальная допустимая интенсивность обучения) решение. Для получения нетривиальных решений необходимо учитывать в модели эффекты уставания, забывания, а также, возможно, ограниченность когнитивных и иных возможностей обучаемой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краткий психологический словарь. М.: ИПЛ, 1985.
2. Белов М.В., Новиков Д.А. Модели технологий. М.: Ленанд, 2019.
3. Гребенков Д.И., Козлова А. А., Лемтюжникова Д. В., и др. Модели утомления и отдыха при обучении. Ч. 1. // Проблемы управления. 2025. № 3. С. 28–37.
4. Новиков Д.А. Закономерности итеративного обучения. М.: Институт проблем управления РАН, 1998.
5. Новиков Д.А. Модели обучения в процессе работы // Управление большими системами. 2007. № 19. С. 5–22.
6. Learning Curves: Theory, Models, and Applications / Edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011.
7. Qi Z. Learning Curve / Kan. Z. (eds) The ECPH Encyclopedia of Psychology. Singapore: Springer, 2024. P. 826–828.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 23.04.2026

После доработки 26.05.2026

Принята к публикации 01.06.2026