

© 2026 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, д-р физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

ОПИСАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ И 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И СУММАРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

Рассматривается линейная система с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление второго порядка. Исследуются свойства предельных множеств достижимости и 0-управляемости системы. Получены необходимые и достаточные условия ограниченности данных множеств, в том числе для не полностью управляемых систем. Доказано, что в случае ограниченности эти множества являются эллипсоидами, а их опорная функция построена явным образом. Проведено численное моделирование.

Ключевые слова: системы с дискретным временем, управляемость, достижимость, предельное множество достижимости, предельное множество управляемости, суммарные ограничения на управление.

DOI: 10.7868/S2413977726100015

1. Введение

Исследование множеств достижимости и 0-управляемости является одной из актуальных задач математической теории управления. С прикладной точки зрения эти множества могут быть использованы для конструирования регуляторов, проверки разрешимости краевых задач, анализа качества процессов. Например, такой подход применяется в следующих современных работах [1–5]. При изучении свойств управляемости и достижимости также оказываются важны предельные множества достижимости и 0-управляемости. Это связано с тем, что для систем с ограниченным управлением классических ранговых условий Калмана недостаточно, чтобы судить о достижимости тех или иных состояний за произвольное конечное время.

Следует отметить, что по применяемому математическому аппарату и методам решения задач анализа и синтеза динамические системы в теории управления разделяются на два фундаментальных класса: системы с дискретным временем и системы с непрерывным временем. Однако в настоящее время в связи с развитием цифровых технологий изучение непрерывных систем часто производится методом дискретизации и сведения их к дискретным

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 25-21-00487).

аналогам [6]. Это определяет актуальность разработки эффективных численных методов исследования именно систем с дискретным временем. По вышеописанным причинам интерес представляют методы построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости, которые для дискретного времени сводятся к вычислению предела последовательности компактов.

Для систем общего вида единственным доступным подходом к решению этой задачи является исследование отдельных состояний на достижимость и управляемость, что фактически является поточечным построением искомых множеств [7–9]. Для класса линейных систем доступны различные аналитические методы, основанные на применении аппарата выпуклого и функционального анализа. Хорошо себя зарекомендовал метод, заключающийся в рассмотрении предельных множеств достижимости и 0-управляемости в качестве неподвижных точек сжимающих отображений в пространстве Хаусдорфа [10, 11]. Такой подход позволяет, с одной стороны, использовать метод простой итерации для приближения к неподвижной точке, с другой стороны, строить внешние оценки предельных множеств с произвольным порядком точности.

Основная часть изложенных результатов касается систем с геометрическими ограничениями на управление. В случае суммарных ограничений ситуация сложнее: множества достижимости и 0-управляемости не являются многогранниками даже при скалярном управлении [12], а их описание в рекуррентной форме оказывается невозможным при помощи стандартных математических конструкций [13]. На данный момент в [14] предложено обобщение подхода, основанного на принципе сжимающих отображений [10, 11], для систем с суммарными ограничениями на скалярное управление. Отдельно в [14, лемма 3] для ограничений второго порядка и диагонализированной матрицы системы получено описание множеств достижимости и 0-управляемости в виде эллипсоидов.

Целью данной статьи является обобщение [14] на случай линейных систем с произвольной матрицей динамики и суммарными ограничениями второго порядка на векторное управление. В частности, требуется установить необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости и управляемости в терминах параметров системы, получить их явное описание при помощи опорной функции или функционала Минковского.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 вводятся понятия предельных множеств достижимости и 0-управляемости, производится постановка задачи. В разделе 3 формулируются необходимые и достаточные условия ограниченности этих множеств. Раздел 4 посвящен описанию структуры предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с суммарными ограничениями второго порядка. В разделе 5 демонстрируются полученные теоретические результаты при помощи численного моделирования.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная стационарная система с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление второго порядка (A, B, H, t) :

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} u(k)^T H u(k) &\leq t^2, \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления, $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – положительно определенная симметрическая матрица, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрицы системы, $t > 0$ – параметр, определяющий суммарное ограничение.

Обозначим для системы (1) через $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ предельное множество достижимости – множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1) из начала координат за конечное число шагов:

$$(2) \quad \mathcal{Y}_{t,2,\infty} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathbb{R}^m, \right. \\ \left. \sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T H u(k) \leq t^2, x(0) = 0, x(N) = x \right\}.$$

Аналогично обозначим для системы (1) через $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ предельное множество 0-управляемости – множество тех состояний, из которых можно перевести систему (1) в начало координат за конечное число шагов:

$$(3) \quad \mathcal{X}_{t,2,\infty} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathbb{R}^m, \right. \\ \left. \sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T H u(k) \leq t^2, x(0) = x, x(N) = 0 \right\}.$$

Требуется получить точное описание множеств $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ в терминах их функционалов Минковского и опорных функций, а также определить необходимые и достаточные условия ограниченности.

Замечание 1. Обозначения для множеств (2) и (3) выбраны в соответствии с [12, 14]. В данных работах допускается произвольный порядок ограничений $r \in (1; +\infty)$, и аналогичные множества обозначаются через $\mathcal{Y}_{t,r,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,r,\infty}$. Эта статья сфокусирована на изучении важного частного случая квадратичных ограничений, задаваемых через положительно определенную квадратичную форму, что определяет наличие знака 2 в индексах $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$.

3. Необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств

Как продемонстрировано в [12, теоремы 2, 3] и [15, теорема 3], условия ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости определяются соотношением между матрицами A и B . Обозначим через $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ вещественный жорданов базис матрицы A [16, разд. 3.4, Гл. 3], состоящий из ее собственных и присоединенных векторов либо из их мнимых и вещественных частей. Рассмотрим следующие инвариантные подпространства:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{<1} &= \text{Lin}\{h: h \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| < 1\}, \\ \mathbb{L}_{>1} &= \text{Lin}\{h: h \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| > 1\}.\end{aligned}$$

Сгруппируем элементы вещественного жорданова базиса следующим образом:

$$(4) \quad h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{M,1}, \dots, h_{M,n_M},$$

где $h_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ – присоединенный вектор матрицы A ранга j , соответствующий собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{R}$, или $h_{i,j} = (h_{i,j}^{re} \ h_{i,j}^{im}) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ – действительная и мнимая части присоединенного вектора матрицы A ранга j , соответствующего собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда вещественная жорданова форма матрицы A состоит из M клеток, а n_i или $2n_i$ – размерность i -й клетки в зависимости от типа собственного значения. Причем в силу [16, теорема 3.4.5] верно представление

$$\begin{aligned}(5) \quad A &= S \Lambda S^{-1}, \\ S &= (h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{M,1}, \dots, h_{M,n_M}), \\ \Lambda &= \text{diag}(J_1, \dots, J_M).\end{aligned}$$

Для всех $i = \overline{1, M}$ жорданова клетка J_i имеет один из следующих двух видов:

$$(6) \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$(7) \quad J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & \cdots & O \\ O & r_i A_{\varphi_i} & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ O & O & \cdots & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}, \quad \lambda_i = r_i e^{i\varphi_i} \in \mathbb{C}.$$

Здесь и далее через A_{φ} и $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ обозначены матрица поворота и единичная матрица соответственно:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Справедлив следующий критерий ограниченности множеств $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$.

Теорема 1. Пусть в системе (1) множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ определяются соотношениями (2) и (3) соответственно, $B = (b_1, \dots, b_m)$. Тогда

- 1) $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$;
- 2) $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$.

Доказательство теоремы 1 и всех последующих утверждений вынесено в Приложение.

Пример 1. Рассмотрим для $n = 3$ и $m = 2$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 1 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вообще говоря, в классическом понимании для дискретной системы (1) матрица A не является устойчивой, так как обладает собственным значением $\lambda_1 = 2$, превосходящим 1 по модулю. В то же время верно представление

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_{<1}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_{<1}.$$

Отсюда следует, что условие п. 1 теоремы 1 выполнено и предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ системы (A, B, H, t) ограничено.

С другой стороны, если для $m = 1$ выбрать

$$B = (2, 2, 0)^T, \quad H = 1,$$

то окажутся верными представления

$$\mathbb{L}_{>1} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad b_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_{>1}.$$

Тогда система (A, B, H, t) будет удовлетворять условиям п. 2 теоремы 1, и ограниченным окажется предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$.

4. Описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости в виде эллипсоидов

Теорема 1 определяет необходимые и достаточные условия ограниченности множеств (2) и (3), но не конкретизирует их структуру. В действительности в случае ограниченности множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ являются эллипсоидами. Аналогичный результат был получен в [14, лемма 3], но только в случае

скалярного управления и диагонализированной матрицы A . Для системы (1) задача построения матриц квадратичных форм эллипсоидов $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ сводится к суммированию матричных рядов. Приведем необходимые для этого теоретические сведения.

Лемма 1. Пусть в системе (1) $B = (b_1, \dots, b_m)$.

1) Если $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$, то следующий ряд сходится:

$$H_Y \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T;$$

2) если $\det A \neq 0$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$, то следующий ряд сходится:

$$H_X \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} B H^{-1} B^T (A^{-k})^T.$$

Для описания предельных множеств достижимости и 0-управляемости системы (1) обобщим понятие эллипсоида. Классическое определение предполагает, что для некоторой положительно определенной симметрической $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $t > 0$ эллипсоидом называется множество

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T H u \leq t^2\}.$$

В этом случае $\mathcal{U}$ определяется фактически через функционал Минковского [17, §15, гл. III].

Однако данное определение не подходит для описания эллипсоидальных множеств, размерность которых меньше размерности пространства. В этом случае оказывается удобнее определить множество $\mathcal{U}$ через опорную функцию [17, §4, гл. II]. Для неотрицательно определенной симметрической $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $t > 0$ эллипсоидом будем называть множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, опорная функция которого определяется равенством

$$(8) \quad \mathcal{S}(p, \mathcal{U}) \triangleq \sup_{u \in \mathcal{U}} p^T u = t \sqrt{p^T \tilde{H} p}.$$

Если матрица $\tilde{H}$ положительно определена и, как следствие, невырождена, то верно также и представление для функционала Минковского:

$$(9) \quad \mu(u, \mathcal{U}) \triangleq \inf\{\gamma > 0 : u \in \gamma \mathcal{U}\} = \frac{1}{t} \sqrt{u^T \tilde{H}^{-1} u}.$$

Пример 2. Рассмотрим двумерный круг в трехмерном пространстве:

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 \leq 1, u_3 = 0\}.$$

Множество $\mathcal{U}$ можно считать эллипсоидом в обобщенном смысле, хотя оно не описывается единственным неравенством для квадратичной формы. Тем не

менее для опорной функции $\mathcal{U}$ справедливо представление

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{U}) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{p^T \tilde{H} p}, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ является неотрицательно определенной и вырожденной, что не позволяет с ее помощью перейти к формуле (9) для функционала Минковского.

Теорема 2. Пусть $H_{\mathcal{U}}, H_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ взяты из леммы 1. Тогда

1) *если $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, то верно представление для опорной функции*

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{Y}_{t,2,\infty}) = t \sqrt{p^T H_{\mathcal{U}} p};$$

2) *если $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ ограничено, то верно представление для опорной функции*

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{X}_{t,2,\infty}) = t \sqrt{p^T H_{\mathcal{X}} p}.$$

Теорема 2 утверждает, что в случае ограниченности множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ являются эллипсоидами. Переход к описанию с помощью функционала Минковского возможен только в случае обратимости матриц $H_{\mathcal{U}}$ и $H_{\mathcal{X}}$. Гарантировать это свойство можно, например, для частного случая управляемых систем.

Лемма 2. Пусть для системы (1) выполнено условие управляемости

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n.$$

Тогда

1) *если $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$, то $\det H_{\mathcal{U}} \neq 0$;*

2) *если $\det A \neq 0$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$, то $\det H_{\mathcal{X}} \neq 0$.*

Согласно лемме 2, теореме 2 и выражениям (8)–(9) в случае управляемой системы (1) верно представление для функционала Минковского:

$$\mu(x, \mathcal{Y}_{t,2,\infty}) = \frac{1}{t} \sqrt{x^T H_{\mathcal{U}}^{-1} x}, \quad \mu(x, \mathcal{X}_{t,2,\infty}) = \frac{1}{t} \sqrt{x^T H_{\mathcal{X}}^{-1} x}.$$

Замечание 2. Матрицы $H_{\mathcal{U}}$ и $H_{\mathcal{X}}$ обычно называются грамианами линейной системы с дискретным временем. Если матрица A шуровская, т.е. все ее собственные значения по модулю меньше 1, то $H_{\mathcal{U}}$ является решением дискретного уравнения Ляпунова [18, Теорема К.2]:

$$P = APA^T + BH^{-1}B^T.$$

Известно большое количество численных методов решения данного уравнения [19, 20]. Также одним из распространенных аналитических подходов является использование канонического жорданова разложения матрицы A [21]. Далее в статье уточним этот подход для более общего случая, который определяется теоремой 1 и допускает не только шуровские матрицы A , и построим явный вид грамианов $H_{\mathcal{U}}$ и $H_{\mathcal{X}}$.

Хоть теорема 2 и определяет структуру множеств (2) и (3) системы (1), их построение сводится к вычислению матричных рядов из леммы 1 для H_Y и H_X . Для вычисления этих рядов используем каноническую жорданову форму матрицы A [16, теорема 3.1.11]:

$$\begin{aligned}
 A &= S \Lambda S^{-1}, \\
 S &\in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \det S \neq 0, \quad \Lambda = \text{diag}(J_1, \dots, J_M) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \\
 (10) \quad J_i &= \lambda_i I + P_{n_i} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, \quad P_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad i = \overline{1, M}, \\
 n_1 + \dots + n_M &= n.
 \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_i \in \mathbb{C}$ является собственным значением матрицы A кратности n_i .

В обозначениях (10) для всех $i, j = \overline{1, M}$ определим матрицы $D_{ij} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_j}$ из следующих соотношений:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{M1} & \cdots & D_{MM} \end{pmatrix} \triangleq S^{-1} B H^{-1} B^T (S^{-1})^T,$$

для $\lambda_i \lambda_j \neq 1$ введем матрицы

$$\Gamma_{ij} \triangleq \sum_{r=0}^{n_i-1} \sum_{q=0}^{n_j-1} \sum_{l=0}^{\min\{r,q\}} \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!(q-l)!l!} \frac{\lambda_i^{r-l} \lambda_j^{q-l}}{(1-\lambda_i \lambda_j)^{r+q-l+1}} P_{n_i}^r D_{ij} (P_{n_j}^q)^T.$$

Теорема 3. Пусть H_Y и H_X взяты из леммы 1. Тогда

1) *если $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$, то*

$$H_Y = S \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^Y & \cdots & \Gamma_{1M}^Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{M1}^Y & \cdots & \Gamma_{MM}^Y \end{pmatrix} S^T,$$

где для всех $i, j = \overline{1, M}$ в случае $|\lambda_i| \geq 1$ или $|\lambda_j| \geq 1$ верно, что $\Gamma_{ij}^Y = O$, либо в случае $|\lambda_i|, |\lambda_j| \in [0; 1)$ верно, что $\Gamma_{ij}^Y = \Gamma_{ij}$;

2) *если $\det A \neq 0$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$, то*

$$H_X = S \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^X & \cdots & \Gamma_{1M}^X \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{M1}^X & \cdots & \Gamma_{MM}^X \end{pmatrix} S^T,$$

где для всех $i, j = \overline{1, M}$ в случае $|\lambda_i| \leq 1$ или $|\lambda_j| \leq 1$ верно, что $\Gamma_{ij}^X = O$, либо в случае $|\lambda_i|, |\lambda_j| \in (1; +\infty)$ верно, что $\Gamma_{ij}^X = -\Gamma_{ij}$.

В общем случае матрицы в разложении (10) и, как следствие, матрицы Γ_{ij} могут быть комплексными. Однако в результате преобразований $H_{\mathcal{Y}}$ и $H_{\mathcal{X}}$ окажутся действительными.

Пример 3. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A обладает комплексно-сопряженными собственными значениями $\lambda_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ и следующим разложением вида (10):

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

В силу теоремы 1 предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ ограничено, и в обозначениях теоремы 3 верно, что $M = 2$, $n_1 = n_2 = 1$ и

$$S^{-1}BH^{-1}B(S^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Это приводит к следующим значениям:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{11}^{\mathcal{X}} &= \sum_{r=0}^{1-1} \sum_{q=0}^{1-1} \sum_{l=0}^{\min\{r,q\}} \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!(q-l)!l!} \frac{\lambda_1^{r-l}\lambda_1^{q-l}}{(1-\lambda_1\lambda_1)^{r+q-l+1}} P_1^T D_{11} (P_1^q)^T = \\ &= \frac{1}{1 - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2} \frac{i}{2}, \\ -\Gamma_{22}^{\mathcal{X}} &= \frac{1}{1 - (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2} \left(-\frac{i}{2}\right), \quad -\Gamma_{12}^{\mathcal{X}} = -\Gamma_{21}^{\mathcal{X}} = \frac{1}{1 - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}, \\ H_{\mathcal{X}} &= \begin{pmatrix} \frac{22}{51} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{46}{51} \end{pmatrix}, \quad S(p, \mathcal{X}_{t,2,\infty}) = \sqrt{\frac{22}{51}p_1^2 - \frac{2}{17}p_1p_2 + \frac{46}{51}p_2^2}. \end{aligned}$$

5. Численные эксперименты

Продemonстрируем результаты теорем 1–3 при помощи численного моделирования. Рассмотрим различные дискретные системы вида (1), обладающие ограниченными множествами достижимости $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$. Сначала построим данные множества явно при помощи теоремы 3. Затем сгенерируем набор допустимых процессов и отметим их терминальные состояния как элементы предельного множества достижимости. Все численные значения для краткости будем округлять до четвертого знака после запятой.

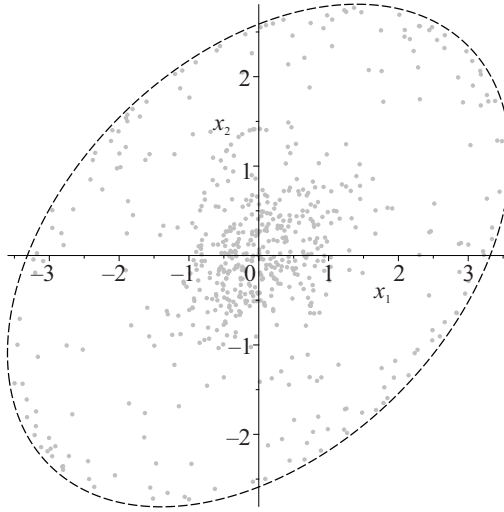


Рис. 1. Множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и различные терминальные состояния для системы (A, B, H, t) из примера 4.

Пример 4. Рассмотрим систему (1) для $n = m = 2$ и следующих значений параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 0,8791 & -1,1321 \\ 0,6429 & 0,0934 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0,4863 + 0,7573\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0,4863 - 0,7573\mathbf{i} \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0,7986 & 0,7986 \\ 0,2771 - 0,5342\mathbf{i} & 0,2771 + 0,5342\mathbf{i} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad t = 1.$$

Матрица A обладает парой комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = 0,4863 \pm 0,7573\mathbf{i}$, которые по модулю строго меньше 1. Следовательно, в силу теоремы 1 множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, а согласно теореме 2 является эллипсоидом. Матрица H_y может быть вычислена явно при помощи теоремы 3. Верны следующие значения параметров:

$$M = 2, \quad n_1 = n_2 = 1,$$

$$D_{11} = -1,5609 - 0,2711\mathbf{i}, \quad D_{12} = D_{21} = 2,0836, \quad D_{22} = -1,5609 + 0,2711\mathbf{i}.$$

Это приводит к равенству

$$H_y = S \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{1 - \lambda_1 \lambda_1} & \frac{D_{12}}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{D_{21}}{1 - \lambda_2 \lambda_1} & \frac{D_{22}}{1 - \lambda_2 \lambda_2} \end{pmatrix} S^T = \begin{pmatrix} 12,9553 & 3,9416 \\ 3,9416 & 7,8973 \end{pmatrix}.$$

Предельное множество достижимости (2) и терминальные состояния различных процессов изображены на рис. 1.

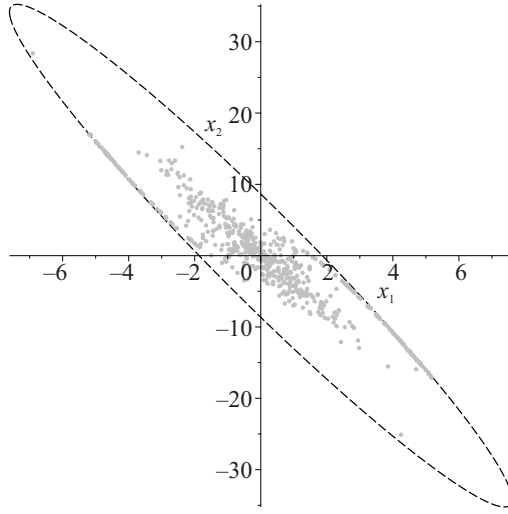


Рис. 2. Множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и различные терминальные состояния для системы (A, B, H, t) из примера 5.

Пример 5. Рассмотрим систему (1) для $n = m = 2$ и следующих значений параметров:

$$A = \begin{pmatrix} -1,3315 & -0,0769 \\ 2,7692 & -0,4085 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} -0,87 & 1 \\ 0 & -0,87 \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}, \quad t = 1.$$

Матрица A обладает одним вещественным собственным значением $\lambda_1 = -0,87$, которое по модулю строго меньше 1. Следовательно, в силу теоремы 1 множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, а согласно теореме 2 является эллипсоидом. Матрица H_y может быть вычислена явно при помощи теоремы 3. Верны следующие значения параметров:

$$M = 1, \quad n_1 = 2, \quad D_{11} = \begin{pmatrix} 0,2975 & -0,2739 \\ -0,2739 & 0,2975 \end{pmatrix}.$$

Это приводит к равенству

$$H_y = S \left(\frac{D_{11}}{1 - \lambda_1^2} + \frac{\lambda_1 D_{11} P_2^T}{(1 - \lambda_1^2)^2} + \frac{\lambda_1 P_2 D_{11}}{(1 - \lambda_1^2)^2} + \frac{P_2 D_{11} P_2^T}{(1 - \lambda_1^2)^2} + 2 \frac{\lambda_1^2 P_2 D_{11} P_2^T}{(1 - \lambda_1^2)^3} \right) S^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 57,9130 & -259,9758 \\ -259,9758 & 1241,6945 \end{pmatrix}.$$

Предельное множество достижимости (2) и терминальные состояния различных процессов изображены на рис. 2.

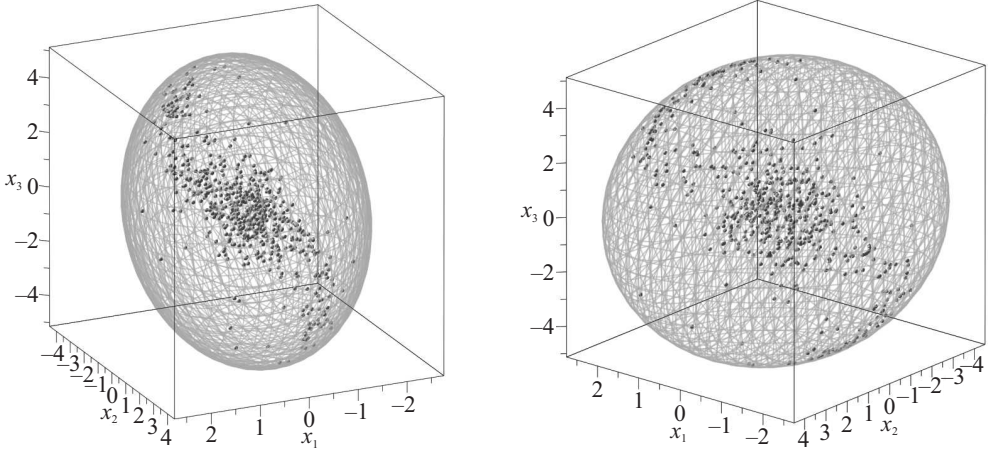


Рис. 3. Множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и различные терминальные состояния для системы (A, B, H, t) из примера 6.

Пример 6. Рассмотрим систему (1) для $n = 3$, $m = 2$ и следующих значений параметров:

$$A = \begin{pmatrix} -0,8421 & -0,0196 & 0,0976 \\ 0,3013 & -0,9058 & 0,1081 \\ -0,1239 & -0,0093 & -0,9540 \end{pmatrix} =$$

$$= S \begin{pmatrix} -0,8910 + 0,1270i & 0 & 0 \\ 0 & -0,8910 - 0,1270i & 0 \\ 0 & 0 & -0,92 \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0,1703 + 0,3405i & 0,1703 - 0,3405i & -0,1562 \\ 0,8513 & 0,8513 & 0,9370 \\ -0,3575 + 0,0511i & -0,3575 - 0,0511i & 0,3123 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Также примем $t = 1$. Матрица A обладает парой комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = -0,8910 \pm 0,1270i$ и одним вещественным собственным значением $\lambda_3 = -0,92$, которые по модулю строго меньше 1. Следовательно, в силу теоремы 1 множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, а согласно теореме 2 является эллипсоидом. Матрица H_y может быть вычислена явно при помощи теоремы 3 аналогично примеру 4:

$$M = 3, \quad n_1 = n_2 = n_3 = 1,$$

$$H_y = \begin{pmatrix} 7,5669 & 4,6171 & 1,4047 \\ 4,6171 & 20,2330 & -5,4371 \\ 1,4047 & -5,4371 & 26,3126 \end{pmatrix}.$$

Предельное множество достижимости (2) и терминальные состояния различных процессов изображены на рис. 3.

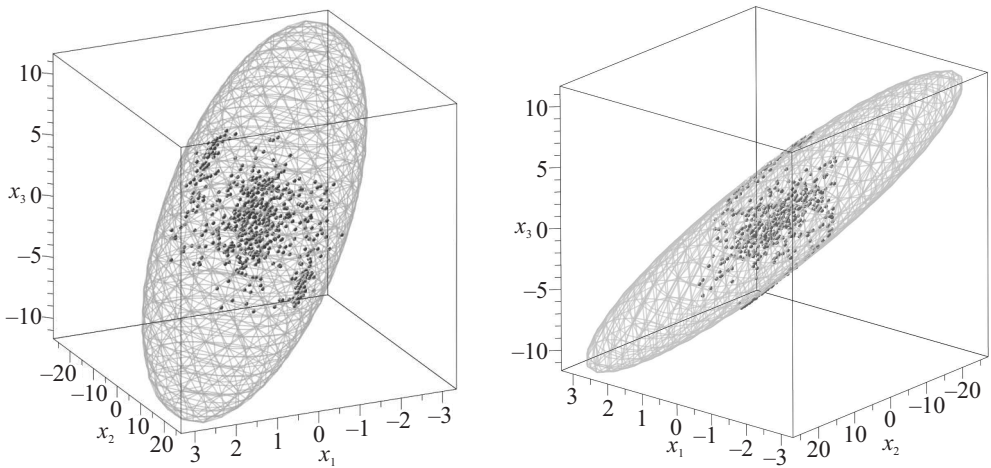


Рис. 4. Множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и различные терминальные состояния для системы (A, B, H, t) из примера 7.

Пример 7. Рассмотрим систему (1) для $n = 3$, $m = 2$ и следующих значений параметров:

$$A = \begin{pmatrix} -0,4838 & -0,1586 & -0,2412 \\ 1,9715 & 0,2153 & 3,1897 \\ -1,1023 & 0,3068 & -0,5215 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & -0,87 & 1 \\ 0 & 0 & -0,87 \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad t = 1.$$

Матрица A обладает вещественным некрратным собственным значением $\lambda_1 = 0,95$ и вещественным кратным собственным значением $\lambda_2 = -0,87$, которые по модулю строго меньше 1. Следовательно, в силу теоремы 1 множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, а согласно теореме 2 является эллипсоидом. Матрица H_Y может быть вычислена явно при помощи теоремы 3 аналогично примеру 5:

$$M = 2, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 2,$$

$$H_Y = \begin{pmatrix} 11,1345 & 52,5427 & -32,4125 \\ 52,5427 & 735,8157 & -266,4128 \\ -32,4125 & -266,4128 & 136,2212 \end{pmatrix}.$$

Предельное множество достижимости (2) и терминальные состояния различных процессов изображены на рис. 4.

В примерах 4–7 рассмотрено построение только предельных множеств достижимости (2), так как численное моделирование его элементов является более простым в сравнении с множеством 0-управляемости (3). В то же время согласно теоремам 1–3 построение множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ происходит аналогичным образом. Также следует отметить, что случай $m = 1$ подробно рассмотрен в [14], а потому здесь не приводится.

6. Заключение

В статье решена задача построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями второго порядка. Сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности данных множеств в виде теоремы 1, которые сводятся к соотношению матрицы B и собственных подпространств $\mathbb{L}_{<1}$ и $\mathbb{L}_{>1}$. В случае управляемых по Калману систем эти условия эквивалентны ограничению на спектральный радиус матрицы A для множеств достижимости и матрицы A^{-1} для множеств 0-управляемости соответственно. Также строго доказано, что в случае ограниченности множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ являются эллипсоидами. Их опорная функция построена явно при помощи жорданова разложения матрицы A , что сформулировано в виде теоремы 3. Для подтверждения полученных теоретических результатов проведены численные эксперименты для систем разной размерности с различными типами собственных значений у матрицы A .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Введем в $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение и векторную норму по формулам

$$\langle x, y \rangle \triangleq x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности будем считать, что элементы базиса (4) сгруппированы таким образом, что для некоторого $M_0 \leq M$ верно представление

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin} \{h_{i,j} : i = \overline{1, M_0}, j = \overline{1, n_i}\}.$$

Для каждого $u(k) \in \mathbb{R}^m$ определим разложение по базису (4):

$$Bu(k) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}(k),$$

где $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}$, если $\lambda_i \in \mathbb{R}$, и $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}^2$, если $\lambda_i \in \mathbb{C}$. С учетом представления (5) оказываются верными равенства

$$S^{-1}Bu(k) = \text{vect}(\alpha_{1,1}(k), \dots, \alpha_{1,n_1}(k), \dots, \alpha_{M,1}(k), \dots, \alpha_{M,n_M}(k)),$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_M \end{pmatrix} \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda^k S^{-1}Bu(N-k-1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} J_1^k \text{vect}(\alpha_{1,1}(N-k-1), \dots, \alpha_{1,n_1}(N-k-1)) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} J_M^k \text{vect}(\alpha_{M,1}(N-k-1), \dots, \alpha_{M,n_M}(N-k-1)) \end{pmatrix}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Пусть $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$. Тогда для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{M_0 + 1, M}$ при всех $j = \overline{1, n_i}$ верно, что $\alpha_{i,j}(k) = 0$, а, следовательно, $\beta_i = 0$.

Зафиксируем $i = \overline{1, M_0}$. Пусть для жордановой клетки J_i верно представление (6). Введем матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}.$$

Отметим следующее свойство матрицы P :

$$(P^l x)_j = \begin{cases} x_{j+l}, & j+l \leq n_i, \\ 0, & j+l > n_i, \end{cases} = \begin{cases} x_{j+l}, & l \leq n_i - j, \\ 0, & l > n_i - j. \end{cases}$$

Обозначим через C_k^l биномиальные коэффициенты. По биному Ньютона

$$\begin{aligned} J_i^k &= (\lambda_i I + P)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l \lambda_i^{k-l} P^l, \\ \begin{pmatrix} \beta_{i,1} \\ \vdots \\ \beta_{i,n_i} \end{pmatrix} &\triangleq \beta_i = \sum_{k=0}^{N-1} J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(N-k-1) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(N-k-1) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k C_k^l \lambda_i^{k-l} P^l \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(N-k-1) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(N-k-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом свойств матрицы P для всех $j = \overline{1, n_i}$ верно представление

$$(II.1) \quad \beta_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\min\{k, n_i-j\}} C_k^l \lambda_i^{k-l} \alpha_{i,j+l}(N-k-1).$$

Полагая $N-1 \geq n_i - j$, поменяем порядок суммирования:

$$\begin{aligned} (II.2) \quad \beta_{i,j} &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^{N-1} C_k^l \lambda_i^{k-l} \alpha_{i,j+l}(N-k-1) = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l \lambda_i^k \alpha_{i,j+l}(N-k-l-1). \end{aligned}$$

Учтем, что $u(k)$ в силу (1) принадлежит эллипсоидальному множеству $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T H u \leq t^2\}$, которое является компактом. Тогда по теореме Вейерштрасса [22, гл. VII, §2, разд. 2] и непрерывной зависимости чисел $\alpha_{i,j}(k)$

от $u(k)$ найдется число $\alpha_{\max} > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, n_i}$ верно ограничение $|\alpha_{i,j}(k)| \leq \alpha_{\max}$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\beta_{i,j}| &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l |\lambda_i|^k |\alpha_{i,j+l}(N-k-l-1)| \leq \\ &\leq \alpha_{\max} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l |\lambda_i|^k = \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(1-|\lambda_i|)^{l+1}} = \\ &= \frac{(n_i-j+1)\alpha_{\max}}{(1-|\lambda_i|)^{n_i-j+1}} \leq \frac{n_i\alpha_{\max}}{(1-|\lambda_i|)^{n_i}}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$(П.3) \quad \|\beta_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n_i} |\beta_{i,j}|^2 \leq \frac{n_i^3 \alpha_{\max}^2}{(1-|\lambda_i|)^{2n_i}}.$$

Пусть для жордановой клетки J_i верно представление (7). Полагая $P \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}$, получим по биному Ньютона

$$\begin{aligned} J_i^k &= (\text{diag } (r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i}) + P^2)^k = \\ &= \sum_{l=0}^k C_k^l \text{diag } (r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i}, \dots, r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i}) P^{2l}, \\ \begin{pmatrix} \beta_{i,1} \\ \vdots \\ \beta_{i,n_i} \end{pmatrix} &\triangleq \beta_i = \sum_{k=0}^{N-1} J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(N-k-1) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(N-k-1) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k \text{diag } (r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i}, \dots, r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i}) P^{2l} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(N-k-1) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(N-k-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом свойств матрицы P для всех $j = \overline{1, n_i}$ верно представление

$$(П.4) \quad \beta_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\min\{k, n_i-j\}} C_k^l r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(N-k-1).$$

Полагая $N-1 \geq n_i-j$, поменяем порядок суммирования:

$$\begin{aligned} (П.5) \quad \beta_{i,j} &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^{N-1} C_k^l r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(N-k-1) = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(N-k-l-1). \end{aligned}$$

Учтем, что $u(k)$ в силу (1) принадлежит эллипсоидальному множеству $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T H u \leq t^2\}$, которое является компактом. Тогда в силу теоремы Вейерштрасса [22, гл. VII, §2, разд. 2] и непрерывной зависимости двумерных векторов $\alpha_{i,j}(k)$ от $u(k)$ найдется число $\alpha_{\max} > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, n_i}$ верно ограничение $\|\alpha_{i,j}(k)\| \leq \alpha_{\max}$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\beta_{i,j}\| &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l r_i^k \|A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(N-k-l-1)\| = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l r_i^k \|\alpha_{i,j+l}(N-k-l-1)\| \leq \\ &\leq \alpha_{\max} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l r_i^k = \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(1-r_i)^{l+1}} = \\ &= \frac{(n_i-j+1)\alpha_{\max}}{(1-r_i)^{n_i-j+1}} \leq \frac{n_i \alpha_{\max}}{(1-r_i)^{n_i}}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$(II.6) \quad \|\beta_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \|\beta_{i,j}\|^2 \leq \frac{n_i^3 \alpha_{\max}^2}{(1-r_i)^{2n_i}}.$$

Учтем неравенства (II.3) и (II.6) и получим для всех $N \geq n$ и условия $x(0) = 0$ оценку

$$\begin{aligned} \|x(N)\| &\stackrel{(1)}{=} \left\| S \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda^k S^{-1} B u(k) \right\| \leq \\ &\leq \|S\| \left(\sum_{i=1}^{M_0} \|\beta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|S\| (M_0 n^3 \alpha_{\max}^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \max_{i=\overline{1, M_0}} |\lambda_i|\right)^{\frac{1}{n}}}, \end{aligned}$$

т.е. по определению $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено.

Теперь предположим, что для некоторого $\tilde{m} = \overline{1, m}$ выполнено условие $b_{\tilde{m}} \notin \mathbb{L}_{<1}$. Т.е. существует $u \in \mathbb{R}^m$ такой, что в разложении по базису (4)

$$Bu = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}$$

для некоторого $i = \overline{M_0+1, M}$ и $j = \overline{1, n_i}$ верно, что $\alpha_{i,j} \neq 0$. Зафиксируем эти i, j и $N \geq n$. Без ограничения общности будем полагать, что или $j = n_i$, или

$\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$. Пусть J_i удовлетворяет представлению (6). Выберем

$$u(N-k-1) = \frac{\sqrt{6}t \operatorname{sign}(\lambda_i^k)}{(k+1)\pi} \frac{u}{\sqrt{u^T H u}}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T H u(k) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\sqrt{6}t \operatorname{sign}(\lambda_i^k)}{(k+1)\pi} \right)^2 \frac{u^T H u}{\sqrt{u^T H u} \sqrt{u^T H u}} < \\ &< \frac{6t^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = t^2, \end{aligned}$$

т.е. выбранные управляющие воздействия являются допустимыми для системы (1). С другой стороны, для этого управления согласно (П.2) $\beta_{i,j}$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l \lambda_i^k \alpha_{i,j+l}(N-k-l-1) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_i^k \alpha_{i,j}(N-k-1) = \sum_{k=0}^{N-1} |\lambda_i|^k \frac{\sqrt{6}t}{(k+1)\pi} \frac{\alpha_{i,j}}{\sqrt{u^T H u}} \geq \\ &\leq \frac{\sqrt{6}t \alpha_{i,j}}{\pi \sqrt{u^T H u}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Пусть J_i удовлетворяет представлению (7). Выберем возрастающую последовательность $k_1, k_2, \dots \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, чтобы выполнялось условие $|\varphi_i k_p| \bmod 2\pi < \frac{\pi}{6}$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Такая последовательность существует. Для случая $\varphi_i = 2\pi \frac{K'}{K''}$ достаточно положить $k_p = pK''$. Для противоположного случая в силу теоремы Вейля множество $\{k\varphi_i \bmod 2\pi : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ плотно в $[0; 2\pi)$. Положим для всех $k = \overline{0, k_N}$

$$u(k_N - k) = \begin{cases} 0, & k \notin \{k_1, \dots, k_N\}, \\ \frac{\sqrt{6}t}{p\pi} \frac{u}{\sqrt{u^T H u}}, & k = k_p \in \{k_1, \dots, k_N\}. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{k_N} u(k)^T H u(k) = \sum_{p=1}^N \left(\frac{\sqrt{6}t}{p\pi} \right)^2 \frac{u^T H u}{\sqrt{u^T H u} \sqrt{u^T H u}} < \frac{6t^2}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = t^2,$$

т.е. выбранные управляющие воздействия являются допустимыми для системы (1). С другой стороны, для этого управления согласно (П.5) $\beta_{i,j}$ удовле-

творяет соотношению

$$\begin{aligned}
\|\beta_{i,j}\|^2 &= \left\langle \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{k_N-l} C_{k+l}^l r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k_N - k - l), \right. \\
&\quad \left. \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{k_N-l} C_{k+l}^l r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k_N - k - l) \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{k_N} r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k), \sum_{k=0}^{k_N} r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k) \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{p=1}^N r_i^{k_p} A_{k_p\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k_p), \sum_{q=1}^N r_i^{k_q} A_{k_q\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k_q) \right\rangle = \\
&= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N r_i^{k_p+k_q} \langle A_{(k_p-k_q)\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k_p), \alpha_{i,j}(k_N - k_q) \rangle = \\
&= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N r_i^{k_p+k_q} \frac{6t^2}{\pi^2 pq} \frac{\|\alpha_{i,j}\|^2}{u^T H u} \cos(\varphi_i(k_p - k_q)) \geq \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{6t^2}{\pi^2 pq} \frac{\|\alpha_{i,j}\|^2}{2u^T H u} = \\
&= \frac{\|\alpha_{i,j}\|^2}{u^T H u} \frac{3t^2}{\pi^2} \left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{q=1}^N \frac{1}{q} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, поскольку

$$\left\| \sum_{k=0}^{k_N} \Lambda^k S^{-1} B u(k_N - k) \right\| = \|S^{-1} x(k_N + 1)\| \leq \|S^{-1}\| \|x(k_N + 1)\|,$$

то

$$\begin{aligned}
\|x(k_N + 1)\| &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{k=0}^{k_N} \Lambda^k S^{-1} B u(k_N - k) \right\| = \\
&= \frac{\left(\sum_{l=1}^M \|\beta_l\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\|S^{-1}\|} \geq \frac{\|\beta_{i,j}\|}{\|S^{-1}\|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, по определению $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ неограничено.

Теперь докажем 2-й пункт. Если $\det A = 0$, то существует элемент вещественного жорданова базиса $h_{i,j} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, соответствующий собственному значению $\lambda_i = 0$. Тогда в силу (1) верно включение $\text{Lin}\{h_{i,j}\} \subset \mathcal{X}_{t,2,\infty}$, которое приводит к тому, что множество (3) неограничено. Если $\det A \neq 0$, то в силу определений (2) и (3) множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ для системы (A, B, H, t) и множество $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ для системы $(A^{-1}, A^{-1}B, H, t)$ совпадают. Отсюда следует пункт 2.

Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 1. Без ограничения общности будем считать, что элементы базиса (4) сгруппированы таким образом, что для некоторого $M_0 \leq M$ верно представление

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin} \{h_{i,j} : i = \overline{1, M_0}, j = \overline{1, n_i}\}.$$

Поскольку H^{-1} положительно определенная и симметрическая, то для нее справедливо разложение Холецкого [16, следствие 7.2.9], т.е. найдется нижнетреугольная невырожденная матрица $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ такая, что $H^{-1} = LL^T$. В терминах (5) введем обозначение

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,1}(k) & \dots & \gamma_{1,m}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M,1}(k) & \dots & \gamma_{M,m}(k) \end{pmatrix} \triangleq \Lambda^k S^{-1} BL,$$

где $\gamma_{i,1}(k), \dots, \gamma_{i,m}(k)$ являются векторами, размерность которых совпадает с размерностью жордановой клетки J_i . Тогда из включения $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$ следует, что $\gamma_{i,l}(k) = 0$, если $i = \overline{M_0 + 1, M}$, $l = \overline{1, m}$. В случае $i = \overline{1, M_0}$ векторы $\gamma_{i,l}(k)$ представляют собой произведение степеней жордановых клеток J_i^k на соответствующие блоки матрицы $S^{-1}BL$. Следовательно, порядок малости элементов векторов $\gamma_{i,l}(k)$ совпадает с порядком малости элементов J_i^k , которая согласно рассуждениям из [16, разд. 3.2.5] может быть оценена сверху величиной

$$k^{n_i} |\lambda_i|^k \leq k^n \lambda_{\max}^k, \text{ где } \lambda_{\max} \triangleq \max\{|\lambda| : \lambda - \text{собственное значение } A, |\lambda| < 1\}.$$

Отсюда по достаточному признаку сходимости [22, гл. III, §1, разд. 4, следствие 2] следует поэлементная сходимость матричного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{i,l}(k) \gamma_{j,l}(k)^T$ для всех $i, j = \overline{1, M}$.

Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} H_y &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T = S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k S^{-1} B H^{-1} B^T (S^{-1})^T (\Lambda^k)^T \right) S^T = \\ &= S \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m \begin{pmatrix} \gamma_{1,l}(k) \gamma_{1,l}(k)^T & \dots & \gamma_{1,l}(k) \gamma_{M,l}(k)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M,l}(k) \gamma_{1,l}(k)^T & \dots & \gamma_{M,l}(k) \gamma_{M,l}(k)^T \end{pmatrix} S^{-1} = \\ &= \sum_{l=1}^m S \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{1,l}(k) \gamma_{1,l}(k)^T & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{1,l}(k) \gamma_{M,l}(k)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{M,l}(k) \gamma_{1,l}(k)^T & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{M,l}(k) \gamma_{M,l}(k)^T \end{pmatrix} S^{-1}. \end{aligned}$$

Из сходимости матричных рядов в крайней правой части этих соотношений следует п. 1 леммы 1.

Второй пункт леммы следует из первого в силу того, что собственные значения A взаимно обратны собственным значениям A^{-1} .

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем п. 1. Для произвольных $N \in \mathbb{N}$, $u(0), \dots, u(N-1) \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ введем обозначения

$$p_0 = \begin{pmatrix} (A^{N-1}B)^T p \\ \vdots \\ B^T p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN},$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} H & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & H \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN \times mN}.$$

Тогда по определению (2) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(p, \mathcal{Y}_{t,2,\infty}) &= \sup_{x \in \mathcal{Y}_{t,2,\infty}} \langle p, x \rangle = \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{\sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T H u(k) \leq t^2} \left\langle p, \sum_{k=0}^{N-1} A^k B u(N-k-1) \right\rangle = \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{\sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T H u(k) \leq t^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle (A^k B)^T p, u(N-k-1) \right\rangle = \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{u_0^T H_0 u_0 \leq t^2} \langle p_0, u_0 \rangle. \end{aligned}$$

С учетом обратимости матрицы H_0 и определений (8), (9) верно, что

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(p, \mathcal{Y}_{t,2,\infty}) &= \sup_{N \in \mathbb{N}} t \sqrt{p_0^T H_0^{-1} p_0} = t \sup_{N \in \mathbb{N}} \sqrt{p^T \sum_{k=0}^{N-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T p} = \\ &= t \sqrt{p^T \sum_{k=0}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T p} = t \sqrt{p^T H_{\mathcal{Y}} p}. \end{aligned}$$

Последний переход корректен, поскольку в силу леммы 1 соответствующий ряд сходится к $H_{\mathcal{Y}}$.

П. 2 теоремы следует из того, что если $\det A \neq 0$, то в силу определений (2) и (3) множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ для системы (A, B, H, t) и множество $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ для системы $(A^{-1}, A^{-1}B, H, t)$ совпадают.

Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 2. Докажем п. 1. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T$ в силу леммы 1 сходится к неотрицательно определенной симметрической матрице H_y . Справедливо представление

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T = (B \ \dots \ A^{n-1} B) \begin{pmatrix} H^{-1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^T \\ \vdots \\ (A^{n-1} B)^T \end{pmatrix}.$$

При этом согласно условию управляемости каждый из сомножителей является матрицей полного ранга. Следовательно, их произведение также является матрицей полного ранга [16, разд. 0.4.6], значит, $\det \sum_{k=0}^{n-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T \neq 0$.

Поскольку $\sum_{k=0}^{n-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T$ также неотрицательно определена и симметрическая по построению, то данная матрица оказывается положительно определенной. Тогда H_y также положительно определена, так как представима в виде суммы положительно определенной и неотрицательно определенной матриц:

$$H_y = \sum_{k=n}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T + \sum_{k=0}^{n-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T.$$

П. 2 леммы следует из того, что собственные значения A взаимно обратны собственным значениям A^{-1} .

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, числа $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ такие, что $|\lambda| < 1$, $|\mu| < 1$. Тогда

$$\sum_{k=\max\{r,q\}}^{\infty} C_k^r C_k^q \lambda^{k-r} \mu^{k-q} = \sum_{l=0}^{\min\{r,q\}} \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!(q-l)!l!} \frac{\lambda^{q-l} \mu^{r-l}}{(1-\lambda\mu)^{r+q-l+1}}.$$

Доказательство леммы 3. Для доказательства леммы воспользуемся известной формулой для $|\alpha| < 1$:

$$(II.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^r \alpha^k = \frac{1}{(1-\alpha)^{r+1}}.$$

Выберем окрестности нуля на комплексной плоскости $\mathcal{O}_{\delta_1}(0), \mathcal{O}_{\delta_2}(0) \subset \mathbb{C}$ так, чтобы для любых $x \in \mathcal{O}_{\delta_1}(0)$ и $y \in \mathcal{O}_{\delta_2}(0)$ выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} |(x+\lambda)(y+\mu)| &< 1, \\ \left| \frac{x(y+\mu)}{1-\lambda(y+\mu)} \right| &< 1, \\ \left| \frac{y\lambda}{1-\lambda\mu} \right| &< 1. \end{aligned}$$

Такие окрестности существуют, поскольку $|\lambda| < 1$, $|\mu| < 1$. Рассмотрим функцию $G: \mathcal{O}_{\delta_1}(0) \times \mathcal{O}_{\delta_2}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ следующего вида:

$$G(x, y) = \frac{1}{1 - (x + \lambda)(y + \mu)}.$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned} G(x, y) &\stackrel{(\text{П.7})}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (x + \lambda)^k (y + \mu)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \sum_{q=0}^k C_k^q C_k^r \lambda^{k-r} \mu^{k-q} x^r y^q = \\ (\text{П.8}) \quad &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{k=\max\{r, q\}}^{\infty} C_k^q C_k^r \lambda^{k-r} \mu^{k-q} \right) x^r y^q. \end{aligned}$$

С другой стороны, из определений δ_1 и δ_2 получим

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{1 - \lambda(y + \mu) - x(y + \mu)} = \frac{1}{1 - \lambda(y + \mu)} \frac{1}{1 - \frac{x(y + \mu)}{1 - \lambda(y + \mu)}} \stackrel{(\text{П.7})}{=} \\ &\stackrel{(\text{П.7})}{=} \frac{1}{1 - \lambda(y + \mu)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x(y + \mu)}{1 - \lambda(y + \mu)} \right)^r = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} x^r (y + \mu)^r \frac{1}{(1 - \lambda(y + \mu))^{r+1}} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r x^r C_r^l y^l \mu^{r-l} \frac{1}{(1 - \lambda\mu)^{r+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{y\lambda}{1 - \lambda\mu}\right)^{r+1}} \stackrel{(\text{П.7})}{=} \\ (\text{П.9}) \quad &\stackrel{(\text{П.7})}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=0}^{\infty} x^r C_r^l y^l \mu^{r-l} \frac{1}{(1 - \lambda\mu)^{r+1}} C_{r+q}^r \left(\frac{y\lambda}{1 - \mu\lambda} \right)^q = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=l}^{\infty} x^r C_r^l y^l \mu^{r-l} \frac{1}{(1 - \lambda\mu)^{r+1}} C_{r+q-l}^r \left(\frac{y\lambda}{1 - \mu\lambda} \right)^{q-l} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=l}^{\infty} \frac{C_r^l C_{r+q-l}^r \mu^{r-l} \lambda^{q-l}}{(1 - \lambda\mu)^{q+r-l+1}} x^r y^q = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\min\{r, q\}} \frac{C_r^l C_{r+q-l}^r \mu^{r-l} \lambda^{q-l}}{(1 - \lambda\mu)^{q+r-l+1}} \right) x^r y^q. \end{aligned}$$

Поскольку $G(x, y)$ аналитическая на области определения по построению, то представима в виде степенного ряда единственным образом [23, разд. А, гл. I]. Поэтому из представлений (П.8) и (П.9) следует, что лемма 3 верна.

Лемма 4. Пусть $r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, числа $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ такие, что $|\lambda| > 1$, $|\mu| > 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{k+r-1}^r C_{k+q-1}^q \lambda^{-k-r} \mu^{-k-q} = \sum_{l=0}^{\min\{r,q\}} \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!(q-l)!l!} \frac{(-1)^l \lambda^{q-l} \mu^{r-l}}{(\lambda\mu - 1)^{r+q-l+1}}.$$

Доказательство леммы 4. Выберем окрестности нуля на комплексной плоскости $\mathcal{O}_{\delta_1}(0), \mathcal{O}_{\delta_2}(0) \subset \mathbb{C}$ так, чтобы для любых $x \in \mathcal{O}_{\delta_1}(0)$ и $y \in \mathcal{O}_{\delta_2}(0)$ выполнялись неравенства

$$|(\lambda - x)| > 1, \quad |(\mu - y)| > 1,$$

$$\left| \frac{x(\mu - y)}{\lambda(\mu - y) - 1} \right| < 1,$$

$$\left| \frac{y\lambda}{\lambda\mu - 1} \right| < 1.$$

Такие окрестности существуют, поскольку $|\lambda| > 1$, $|\mu| > 1$. Рассмотрим функцию $F: \mathcal{O}_{\delta_1}(0) \times \mathcal{O}_{\delta_2}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ следующего вида:

$$F(x, y) = \frac{1}{(\lambda - x)(\mu - y) - 1}.$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{(\lambda - x)(\mu - y)} \frac{1}{1 - (\lambda - x)^{-1}(\mu - y)^{-1}} \stackrel{(\Pi.7)}{=} \\ &\stackrel{(\Pi.7)}{=} \frac{1}{(\lambda - x)(\mu - y)} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - x)^{-k} (\mu - y)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - x)^{k+1}} \frac{1}{(\mu - y)^{k+1}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\mu)^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{\mu}\right)^{k+1}} \stackrel{(\Pi.7)}{=} \\ &\stackrel{(\Pi.7)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\mu)^{k+1}} \sum_{r=0}^{\infty} C_{k+r}^r \left(\frac{x}{\lambda}\right)^r \sum_{q=0}^{\infty} C_{k+q}^q \left(\frac{y}{\mu}\right)^q = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^r C_{k+q}^q \lambda^{-r-k-1} \mu^{-q-k-1} x^r y^q = \\ (\Pi.10) \quad &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{k+r-1}^r C_{k+q-1}^q \lambda^{-r-k} \mu^{-q-k} \right) x^r y^q. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \frac{1}{\lambda(\mu - y) - 1 - x(\mu - y)} = \frac{1}{\lambda(\mu - y) - 1} \frac{1}{1 - \frac{x(\mu - y)}{\lambda(\mu - y) - 1}} \stackrel{(\Pi.7)}{=} \\
&\stackrel{(\Pi.7)}{=} \frac{1}{\lambda(\mu - y) - 1} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x(\mu - y)}{\lambda(\mu - y) - 1} \right)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r (\mu - y)^r}{(\lambda\mu - 1 - \lambda y)^{r+1}} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r x^r C_r^l (-y)^l \mu^{r-l} \frac{1}{(\lambda\mu - 1)^{r+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{y\lambda}{\lambda\mu - 1}\right)^{r+1}} \stackrel{(\Pi.7)}{=} \\
&\stackrel{(\Pi.7)}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=0}^{\infty} x^r C_r^l (-y)^l \mu^{r-l} \frac{1}{(\lambda\mu - 1)^{r+1}} C_{r+q}^r \left(\frac{y\lambda}{\lambda\mu - 1} \right)^q = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=l}^{\infty} x^r C_r^l (-y)^l \mu^{r-l} \frac{1}{(\lambda\mu - 1)^{r+1}} C_{r+q-l}^r \left(\frac{y\lambda}{\lambda\mu - 1} \right)^{q-l} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=l}^{\infty} \frac{(-1)^l C_r^l C_{r+q-l}^r \mu^{r-l} \lambda^{q-l}}{(\lambda\mu - 1)^{q+r-l+1}} x^r y^q = \\
(\Pi.11) \quad &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\min\{r, q\}} \frac{(-1)^l C_r^l C_{r+q-l}^r \mu^{r-l} \lambda^{q-l}}{(1 - \lambda\mu)^{q+r-l+1}} \right) x^r y^q.
\end{aligned}$$

Поскольку $F(x, y)$ аналитическая на области определения по построению, то представима в виде степенного ряда единственным образом [23, разд. А, гл. I]. Значит, из представлений (П.10) и (П.11) следует, что лемма 4 верна.

Доказательство теоремы 3. Докажем п. 1. В силу (10) и определения H_y

$$\begin{aligned}
H_y &= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k S^{-1} B H^{-1} B^T (S^{-1})^T (\Lambda^k)^T \right) S^T = \\
&= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} J_1^k D_{11} (J_1^k)^T & \dots & J_1^k D_{1M} (J_M^k)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (J_M^k)^T D_{M1} (J_1^k)^T & \dots & J_M^k D_{MM} (J_M^k)^T \end{pmatrix} \right) S^T,
\end{aligned}$$

т.е. верно, что

$$H_{ij}^y = \sum_{k=0}^{\infty} J_i^k D_{ij} (J_j^k)^T.$$

Из включения $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$ и (10) вытекает, что $D_{ij} = O$, если $|\lambda_i| \geq 1$ или $|\lambda_j| \geq 1$, т.е. $H_{ij}^y = O$. В противоположном случае учтем, что для $k \geq n_0$

справедливо равенство $P_{n_0}^k = O$, и рассмотрим ряд

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} J_i^k D_{ij} (J_j^k)^T &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_i I + P_{n_i})^k D_{ij} (\lambda_j I + P_{n_j}^T)^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\min\{k, n_i-1\}} \sum_{q=0}^{\min\{k, n_j-1\}} C_k^r \lambda_i^{k-r} P_{n_i}^r D_{ij} C_k^q \lambda_j^{k-q} (P_{n_j}^q)^T = \\
&= \sum_{r=0}^{n_i-1} \sum_{q=0}^{n_j-1} \sum_{k=\max\{r, q\}}^{\infty} C_k^r C_k^q \lambda_i^{k-r} \lambda_j^{k-q} P_{n_i}^r D_{ij} (P_{n_j}^q)^T.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом леммы 3 п. 1 доказан.

Теперь докажем п. 2. В силу (10) и определения $H_{\mathcal{X}}$

$$\begin{aligned}
H_{\mathcal{X}} &= S \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^{-k} S^{-1} B H^{-1} B^T (S^{-1})^T (\Lambda^{-k})^T \right) S^T = \\
&= S \left(\sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} J_1^{-k} D_{11} (J_1^{-k})^T & \dots & J_1^{-k} D_{1M} (J_M^{-k})^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (J_M^{-k})^T D_{M1} (J_1^{-k})^T & \dots & J_M^{-k} D_{MM} (J_M^{-k})^T \end{pmatrix} \right) S^T,
\end{aligned}$$

т.е. верно, что

$$H_{ij}^{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^{\infty} J_i^{-k} D_{ij} (J_j^{-k})^T.$$

Согласно [16, разд. 3.2.5] для жордановой клетки верно представление

$$(P.12) \quad J_i^{-k} = \sum_{r=0}^{n_i-1} (-1)^r C_{k+r-1}^r \frac{1}{\lambda_i^{k+r}} P_{n_i}^r.$$

Из включения $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$ и (10) вытекает, что $D_{ij} = O$, если $|\lambda_i| \leq 1$ или $|\lambda_j| \leq 1$, т.е. $H_{ij}^{\mathcal{X}} = O$. В противоположном случае учтем, что для $k \geq n_0$ справедливо равенство $P_{n_0}^k = O$, и рассмотрим ряд

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} J_i^k D_{ij} (J_j^k)^T &= \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_i I + P_{n_i})^{-k} D_{ij} (\lambda_j I + P_{n_j}^T)^{-k} \stackrel{(P.12)}{=} \\
&\stackrel{(P.12)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n_i-1} \sum_{q=0}^{n_j-1} (-1)^{r+q} C_{k+r-1}^r C_{k+q-1}^q \frac{1}{\lambda_i^{k+r}} \frac{1}{\lambda_j^{k+q}} P_{n_i}^r D_{ij} (P_{n_j}^q)^T = \\
&= \sum_{r=0}^{n_i-1} \sum_{q=0}^{n_j-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+r-1}^r C_{k+q-1}^q (-\lambda_i)^{-k-r} (-\lambda_j)^{-k-q} P_{n_i}^r D_{ij} (P_{n_j}^q)^T.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом леммы 4 доказан п. 2.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foss E., Rosengren A.J., Biria A.D.* Reachability Analysis of Low-Thrust, Cislunar Spacecraft Using Set-Based Computing // J. Astronaut. Sci. 2026. V. 73. No. 2. <https://doi.org/10.1007/s40295-025-00552-0>
2. *Liu E.I., Althoff M.* Specification-Compliant Motion Planning of Cooperative Vehicles Using Reachable Sets / Cooperatively Interacting Vehicles. Springer: Cham, 2024. P. 321–345. https://doi.org/10.1007/978-3-031-60494-2_12
3. *Zhang Y., Zhang H., Xu X.* Backward Reachability Analysis of Neural Feedback Systems Using Hybrid Zonotopes // IEEE Control Systems Letters. 2023. V. 7. P. 2779–2784. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2023.3289572>
4. *Zhang Y., Zhang H., Xu X.* Reachability Analysis of Neural Network Control Systems With Tunable Accuracy and Efficiency // IEEE Control Systems Letters. 2024. V. 8. P. 1697–1702. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3415471>
5. *Serry M., Yang L., Ozay N., Liu J.* Safe Tracking Control of Discrete-Time Nonlinear Systems Using Backward Reachable Sets // American Control Conference. Toronto, Canada, 2024. P. 1172–1179. <https://doi.org/10.23919/ACC60939.2024.10644670>
6. *Зыков И.В.* Приближенное вычисление множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление // Изв. ин-та матем. и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2022. Т. 60. С. 16–33. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-02>
7. *Natherson R.A., Scheeres D.J.* Reachable Set Computation with Terminal Velocity Constraints // J. Guidance, Control. Dynam. 2024. V. 47. No. 12. P. 2560–2572. <https://doi.org/10.2514/1.G008118>
8. *Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.* The Approximation of Reachable Sets of Control Systems with Integral Constraint on Controls // Nonlinear Differ. Equat. Appl. 2007. V. 14. P. 57–73. <https://doi.org/10.1007/s00030-006-4036-6>
9. *Polyak B.T.* Convexity of the Reachable Set of Nonlinear Systems under L2-Bounded Controls // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 2004. V. 11. P. 255–267.
10. *Simkina A.* On the External Estimation of the Limit Reachable Set for the Linear Discrete-Time System Based on Support Hyperplanes // Advances in Systems Science and Applications. 2024. V. 24. No. 4. P. 66–81. <https://doi.org/10.25728/assa.2024.2024.4.1970>
11. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // АИТ. 2023. № 2. С. 3–34. <https://doi.org/10.31857/S0005231023020010>
Berendakova A.V., Ibragimov D.N. About the Method for Constructing External Estimates of the Limit 0-Controllability Set for the Linear Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 2. P. 83–104. <https://doi.org/10.1134/S0005117923020030>
12. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 6. С. 3–32. <https://doi.org/10.31857/S0002338823050086>
Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On Some Properties of Sets of Bounded Controllability for Stationary Linear Discrete Systems with Total Control Constraints // J. Comput

13. *Ибрагимов Д.Н.* О методе построения множеств 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление // Мехатроника, автоматизация, управление. 2024. Т. 25. № 10. С. 503–512. <https://doi.org/10.17587/mau.25.503-512>
14. *Ибрагимов Д.Н.* О внешнем оценивании предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление // АиТ. 2024. № 4. С. 3–30. <https://doi.org/10.31857/S0005231024040018>
Ibragimov D.N. On the External Estimation of Reachable and Null-Controllable Limit Sets for Linear Discrete-Time Systems with a Summary Constraint on the Scalar Control // Autom. Remote Control. 2024. Vol. 85. No. 4. P. 321–340. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117924040027>
15. *Ибрагимов Д.Н., Самонов С.С.* Об условиях ограниченности множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями первого порядка на скалярное управление // Моделирование и анализ данных. 2025. Т. 15. № 1. С. 51–80. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150104>
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
17. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
18. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
19. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
20. *Ядыкин И.Б., Галяев А.А.* О методах вычисления грамммианов и их использование в анализе линейных динамических систем // АиТ. 2013. № 2. С. 53–74.
Yadykin I.B., Galyaev A.A. On the Methods for Calculation of Grammians and Their Use in Analysis of Linear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 2. P. 207–224. <https://doi.org/10.1134/S0005117913020045>
21. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А. и др.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20. <https://doi.org/10.31857/S0002338823050086>
Zubov N.E., Zybin E.Yu., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. General Analytical Forms for the Solution of the Sylvester and Lyapunov Equations for Continuous and Discrete Dynamic Systems // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. Vol. 56. No. 1. P. 3–20. <https://doi.org/10.1134/S1064230717010130>
22. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. I. М.: Наука, 1981.
23. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 05.03.2026

После доработки 13.04.2026

Принята к публикации 15.04.2026