



Российская Академия Наук

ISSN 0005-2310 (Print)

ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

10

октябрь

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И., Моржин О.В., Мунасыпов Р.А.,
Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я.,
Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю.,
Рапопорт Л.Б., Родионов И.В., Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А.,
Филимонюк Л.Ю., Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Чхатишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2026 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, д-р физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

**ОПИСАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ
И 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И СУММАРНЫМИ
ОГРАНИЧЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹**

Рассматривается линейная система с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление второго порядка. Исследуются свойства предельных множеств достижимости и 0-управляемости системы. Получены необходимые и достаточные условия ограниченности данных множеств, в том числе для не полностью управляемых систем. Доказано, что в случае ограниченности эти множества являются эллипсоидами, а их опорная функция построена явным образом. Проведено численное моделирование.

Ключевые слова: системы с дискретным временем, управляемость, достижимость, предельное множество достижимости, предельное множество управляемости, суммарные ограничения на управление.

DOI: 10.7868/S2413977726100015

1. Введение

Исследование множеств достижимости и 0-управляемости является одной из актуальных задач математической теории управления. С прикладной точки зрения эти множества могут быть использованы для конструирования регуляторов, проверки разрешимости краевых задач, анализа качества процессов. Например, такой подход применяется в следующих современных работах [1–5]. При изучении свойств управляемости и достижимости также оказываются важны предельные множества достижимости и 0-управляемости. Это связано с тем, что для систем с ограниченным управлением классических ранговых условий Калмана недостаточно, чтобы судить о достижимости тех или иных состояний за произвольное конечное время.

Следует отметить, что по применяемому математическому аппарату и методам решения задач анализа и синтеза динамические системы в теории управления разделяются на два фундаментальных класса: системы с дискретным временем и системы с непрерывным временем. Однако в настоящее время в связи с развитием цифровых технологий изучение непрерывных систем часто производится методом дискретизации и сведения их к дискретным

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 25-21-00487).

аналогам [6]. Это определяет актуальность разработки эффективных численных методов исследования именно систем с дискретным временем. По вышеописанным причинам интерес представляют методы построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости, которые для дискретного времени сводятся к вычислению предела последовательности компактов.

Для систем общего вида единственным доступным подходом к решению этой задачи является исследование отдельных состояний на достижимость и управляемость, что фактически является поточечным построением искомых множеств [7–9]. Для класса линейных систем доступны различные аналитические методы, основанные на применении аппарата выпуклого и функционального анализа. Хорошо себя зарекомендовал метод, заключающийся в рассмотрении предельных множеств достижимости и 0-управляемости в качестве неподвижных точек сжимающих отображений в пространстве Хаусдорфа [10, 11]. Такой подход позволяет, с одной стороны, использовать метод простой итерации для приближения к неподвижной точке, с другой стороны, строить внешние оценки предельных множеств с произвольным порядком точности.

Основная часть изложенных результатов касается систем с геометрическими ограничениями на управление. В случае суммарных ограничений ситуация сложнее: множества достижимости и 0-управляемости не являются многогранниками даже при скалярном управлении [12], а их описание в рекуррентной форме оказывается невозможным при помощи стандартных математических конструкций [13]. На данный момент в [14] предложено обобщение подхода, основанного на принципе сжимающих отображений [10, 11], для систем с суммарными ограничениями на скалярное управление. Отдельно в [14, лемма 3] для ограничений второго порядка и диагонализированной матрицы системы получено описание множеств достижимости и 0-управляемости в виде эллипсоидов.

Целью данной статьи является обобщение [14] на случай линейных систем с произвольной матрицей динамики и суммарными ограничениями второго порядка на векторное управление. В частности, требуется установить необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости и управляемости в терминах параметров системы, получить их явное описание при помощи опорной функции или функционала Минковского.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 вводятся понятия предельных множеств достижимости и 0-управляемости, производится постановка задачи. В разделе 3 формулируются необходимые и достаточные условия ограниченности этих множеств. Раздел 4 посвящен описанию структуры предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с суммарными ограничениями второго порядка. В разделе 5 демонстрируются полученные теоретические результаты при помощи численного моделирования.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная стационарная система с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление второго порядка (A, B, H, t) :

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} u(k)^T Hu(k) &\leq t^2, \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления, $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – положительно определенная симметрическая матрица, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрицы системы, $t > 0$ – параметр, определяющий суммарное ограничение.

Обозначим для системы (1) через $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ предельное множество достижимости – множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1) из начала координат за конечное число шагов:

$$(2) \quad \mathcal{Y}_{t,2,\infty} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathbb{R}^m, \right. \\ \left. \sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T Hu(k) \leq t^2, x(0) = 0, x(N) = x \right\}.$$

Аналогично обозначим для системы (1) через $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ предельное множество 0-управляемости – множество тех состояний, из которых можно перевести систему (1) в начало координат за конечное число шагов:

$$(3) \quad \mathcal{X}_{t,2,\infty} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathbb{R}^m, \right. \\ \left. \sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T Hu(k) \leq t^2, x(0) = x, x(N) = 0 \right\}.$$

Требуется получить точное описание множеств $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ в терминах их функционалов Минковского и опорных функций, а также определить необходимые и достаточные условия ограниченности.

Замечание 1. Обозначения для множеств (2) и (3) выбраны в соответствии с [12, 14]. В данных работах допускается произвольный порядок ограничений $r \in (1; +\infty)$, и аналогичные множества обозначаются через $\mathcal{Y}_{t,r,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,r,\infty}$. Эта статья сфокусирована на изучении важного частного случая квадратичных ограничений, задаваемых через положительно определенную квадратичную форму, что определяет наличие знака 2 в индексах $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$.

3. Необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств

Как продемонстрировано в [12, теоремы 2, 3] и [15, теорема 3], условия ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости определяются соотношением между матрицами A и B . Обозначим через $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ вещественный жорданов базис матрицы A [16, разд. 3.4, Гл. 3], состоящий из ее собственных и присоединенных векторов либо из их мнимых и вещественных частей. Рассмотрим следующие инвариантные подпространства:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{<1} &= \text{Lin}\{h: h \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| < 1\}, \\ \mathbb{L}_{>1} &= \text{Lin}\{h: h \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| > 1\}.\end{aligned}$$

Сгруппируем элементы вещественного жорданова базиса следующим образом:

$$(4) \quad h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{M,1}, \dots, h_{M,n_M},$$

где $h_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ – присоединенный вектор матрицы A ранга j , соответствующий собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{R}$, или $h_{i,j} = (h_{i,j}^{re} \ h_{i,j}^{im}) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ – действительная и мнимая части присоединенного вектора матрицы A ранга j , соответствующего собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда вещественная жорданова форма матрицы A состоит из M клеток, а n_i или $2n_i$ – размерность i -й клетки в зависимости от типа собственного значения. Причем в силу [16, теорема 3.4.5] верно представление

$$\begin{aligned}(5) \quad A &= S\Lambda S^{-1}, \\ S &= (h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{M,1}, \dots, h_{M,n_M}), \\ \Lambda &= \text{diag}(J_1, \dots, J_M).\end{aligned}$$

Для всех $i = \overline{1, M}$ жорданова клетка J_i имеет один из следующих двух видов:

$$(6) \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$(7) \quad J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & \cdots & O \\ O & r_i A_{\varphi_i} & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ O & O & \cdots & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}, \quad \lambda_i = r_i e^{i\varphi_i} \in \mathbb{C}.$$

Здесь и далее через A_{φ} и $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ обозначены матрица поворота и единичная матрица соответственно:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Справедлив следующий критерий ограниченности множеств $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$.

Теорема 1. Пусть в системе (1) множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ определяются соотношениями (2) и (3) соответственно, $B = (b_1, \dots, b_m)$. Тогда

- 1) $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$;
- 2) $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$.

Доказательство теоремы 1 и всех последующих утверждений вынесено в Приложение.

Пример 1. Рассмотрим для $n = 3$ и $m = 2$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 1 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вообще говоря, в классическом понимании для дискретной системы (1) матрица A не является устойчивой, так как обладает собственным значением $\lambda_1 = 2$, превосходящим 1 по модулю. В то же время верно представление

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_{<1}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_{<1}.$$

Отсюда следует, что условие п. 1 теоремы 1 выполнено и предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ системы (A, B, H, t) ограничено.

С другой стороны, если для $m = 1$ выбрать

$$B = (2, 2, 0)^T, \quad H = 1,$$

то окажутся верными представления

$$\mathbb{L}_{>1} = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad b_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_{>1}.$$

Тогда система (A, B, H, t) будет удовлетворять условиям п. 2 теоремы 1, и ограниченным окажется предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$.

4. Описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости в виде эллипсоидов

Теорема 1 определяет необходимые и достаточные условия ограниченности множеств (2) и (3), но не конкретизирует их структуру. В действительности в случае ограниченности множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ являются эллипсоидами. Аналогичный результат был получен в [14, лемма 3], но только в случае

скалярного управления и диагонализированной матрицы A . Для системы (1) задача построения матриц квадратичных форм эллипсоидов $\mathcal{U}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ сводится к суммированию матричных рядов. Приведем необходимые для этого теоретические сведения.

Лемма 1. Пусть в системе (1) $B = (b_1, \dots, b_m)$.

1) Если $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$, то следующий ряд сходится:

$$H_{\mathcal{U}} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T;$$

2) если $\det A \neq 0$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$, то следующий ряд сходится:

$$H_{\mathcal{X}} \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} B H^{-1} B^T (A^{-k})^T.$$

Для описания предельных множеств достижимости и 0-управляемости системы (1) обобщим понятие эллипсоида. Классическое определение предполагает, что для некоторой положительно определенной симметрической $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $t > 0$ эллипсоидом называется множество

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T H u \leq t^2\}.$$

В этом случае $\mathcal{U}$ определяется фактически через функционал Минковского [17, §15, гл. III].

Однако данное определение не подходит для описания эллипсоидальных множеств, размерность которых меньше размерности пространства. В этом случае оказывается удобнее определить множество $\mathcal{U}$ через опорную функцию [17, §4, гл. II]. Для неотрицательно определенной симметрической $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $t > 0$ эллипсоидом будем называть множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, опорная функция которого определяется равенством

$$(8) \quad \mathcal{S}(p, \mathcal{U}) \triangleq \sup_{u \in \mathcal{U}} p^T u = t \sqrt{p^T \tilde{H} p}.$$

Если матрица $\tilde{H}$ положительно определена и, как следствие, невырождена, то верно также и представление для функционала Минковского:

$$(9) \quad \mu(u, \mathcal{U}) \triangleq \inf\{\gamma > 0 : u \in \gamma \mathcal{U}\} = \frac{1}{t} \sqrt{u^T \tilde{H}^{-1} u}.$$

Пример 2. Рассмотрим двумерный круг в трехмерном пространстве:

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 \leq 1, u_3 = 0\}.$$

Множество $\mathcal{U}$ можно считать эллипсоидом в обобщенном смысле, хотя оно не описывается единственным неравенством для квадратичной формы. Тем не

менее для опорной функции $\mathcal{U}$ справедливо представление

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{U}) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{p^T \tilde{H} p}, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ является неотрицательно определенной и вырожденной, что не позволяет с ее помощью перейти к формуле (9) для функционала Минковского.

Теорема 2. Пусть $H_{\mathcal{U}}, H_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ взяты из леммы 1. Тогда

1) *если $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, то верно представление для опорной функции*

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{Y}_{t,2,\infty}) = t \sqrt{p^T H_{\mathcal{U}} p};$$

2) *если $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ ограничено, то верно представление для опорной функции*

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{X}_{t,2,\infty}) = t \sqrt{p^T H_{\mathcal{X}} p}.$$

Теорема 2 утверждает, что в случае ограниченности множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ являются эллипсоидами. Переход к описанию с помощью функционала Минковского возможен только в случае обратимости матриц $H_{\mathcal{U}}$ и $H_{\mathcal{X}}$. Гарантировать это свойство можно, например, для частного случая управляемых систем.

Лемма 2. Пусть для системы (1) выполнено условие управляемости

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n.$$

Тогда

- 1) *если $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$, то $\det H_{\mathcal{U}} \neq 0$;*
- 2) *если $\det A \neq 0$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$, то $\det H_{\mathcal{X}} \neq 0$.*

Согласно лемме 2, теореме 2 и выражениям (8)–(9) в случае управляемой системы (1) верно представление для функционала Минковского:

$$\mu(x, \mathcal{Y}_{t,2,\infty}) = \frac{1}{t} \sqrt{x^T H_{\mathcal{U}}^{-1} x}, \quad \mu(x, \mathcal{X}_{t,2,\infty}) = \frac{1}{t} \sqrt{x^T H_{\mathcal{X}}^{-1} x}.$$

Замечание 2. Матрицы $H_{\mathcal{U}}$ и $H_{\mathcal{X}}$ обычно называются грамианами линейной системы с дискретным временем. Если матрица A шуровская, т.е. все ее собственные значения по модулю меньше 1, то $H_{\mathcal{U}}$ является решением дискретного уравнения Ляпунова [18, Теорема К.2]:

$$P = APA^T + BH^{-1}B^T.$$

Известно большое количество численных методов решения данного уравнения [19, 20]. Также одним из распространенных аналитических подходов является использование канонического жорданова разложения матрицы A [21]. Далее в статье уточним этот подход для более общего случая, который определяется теоремой 1 и допускает не только шуровские матрицы A , и построим явный вид грамианов $H_{\mathcal{U}}$ и $H_{\mathcal{X}}$.

Хоть теорема 2 и определяет структуру множеств (2) и (3) системы (1), их построение сводится к вычислению матричных рядов из леммы 1 для H_Y и H_X . Для вычисления этих рядов используем каноническую жорданову форму матрицы A [16, теорема 3.1.11]:

$$\begin{aligned}
 A &= S \Lambda S^{-1}, \\
 S &\in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \det S \neq 0, \quad \Lambda = \text{diag}(J_1, \dots, J_M) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \\
 (10) \quad J_i &= \lambda_i I + P_{n_i} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, \quad P_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad i = \overline{1, M}, \\
 n_1 + \dots + n_M &= n.
 \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_i \in \mathbb{C}$ является собственным значением матрицы A кратности n_i .

В обозначениях (10) для всех $i, j = \overline{1, M}$ определим матрицы $D_{ij} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_j}$ из следующих соотношений:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{M1} & \cdots & D_{MM} \end{pmatrix} \triangleq S^{-1} B H^{-1} B^T (S^{-1})^T,$$

для $\lambda_i \lambda_j \neq 1$ введем матрицы

$$\Gamma_{ij} \triangleq \sum_{r=0}^{n_i-1} \sum_{q=0}^{n_j-1} \sum_{l=0}^{\min\{r,q\}} \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!(q-l)!l!} \frac{\lambda_i^{r-l} \lambda_j^{q-l}}{(1-\lambda_i \lambda_j)^{r+q-l+1}} P_{n_i}^r D_{ij} (P_{n_j}^q)^T.$$

Теорема 3. Пусть H_Y и H_X взяты из леммы 1. Тогда

1) *если $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$, то*

$$H_Y = S \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^Y & \cdots & \Gamma_{1M}^Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{M1}^Y & \cdots & \Gamma_{MM}^Y \end{pmatrix} S^T,$$

где для всех $i, j = \overline{1, M}$ в случае $|\lambda_i| \geq 1$ или $|\lambda_j| \geq 1$ верно, что $\Gamma_{ij}^Y = O$, либо в случае $|\lambda_i|, |\lambda_j| \in [0; 1)$ верно, что $\Gamma_{ij}^Y = \Gamma_{ij}$;

2) *если $\det A \neq 0$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$, то*

$$H_X = S \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^X & \cdots & \Gamma_{1M}^X \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{M1}^X & \cdots & \Gamma_{MM}^X \end{pmatrix} S^T,$$

где для всех $i, j = \overline{1, M}$ в случае $|\lambda_i| \leq 1$ или $|\lambda_j| \leq 1$ верно, что $\Gamma_{ij}^X = O$, либо в случае $|\lambda_i|, |\lambda_j| \in (1; +\infty)$ верно, что $\Gamma_{ij}^X = -\Gamma_{ij}$.

В общем случае матрицы в разложении (10) и, как следствие, матрицы Γ_{ij} могут быть комплексными. Однако в результате преобразований $H_{\mathcal{Y}}$ и $H_{\mathcal{X}}$ окажутся действительными.

Пример 3. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A обладает комплексно-сопряженными собственными значениями $\lambda_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ и следующим разложением вида (10):

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

В силу теоремы 1 предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ ограничено, и в обозначениях теоремы 3 верно, что $M = 2$, $n_1 = n_2 = 1$ и

$$S^{-1}BH^{-1}B(S^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Это приводит к следующим значениям:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{11}^{\mathcal{X}} &= \sum_{r=0}^{1-1} \sum_{q=0}^{1-1} \sum_{l=0}^{\min\{r,q\}} \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!(q-l)!l!} \frac{\lambda_1^{r-l} \lambda_1^{q-l}}{(1-\lambda_1 \lambda_1)^{r+q-l+1}} P_1^T D_{11} (P_1^q)^T = \\ &= \frac{1}{1 - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2} \frac{i}{2}, \\ -\Gamma_{22}^{\mathcal{X}} &= \frac{1}{1 - (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2} \left(-\frac{i}{2} \right), \quad -\Gamma_{12}^{\mathcal{X}} = -\Gamma_{21}^{\mathcal{X}} = \frac{1}{1 - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}, \\ H_{\mathcal{X}} &= \begin{pmatrix} \frac{22}{51} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{46}{51} \end{pmatrix}, \quad S(p, \mathcal{X}_{t,2,\infty}) = \sqrt{\frac{22}{51}p_1^2 - \frac{2}{17}p_1p_2 + \frac{46}{51}p_2^2}. \end{aligned}$$

5. Численные эксперименты

Продemonстрируем результаты теорем 1–3 при помощи численного моделирования. Рассмотрим различные дискретные системы вида (1), обладающие ограниченными множествами достижимости $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$. Сначала построим данные множества явно при помощи теоремы 3. Затем сгенерируем набор допустимых процессов и отметим их терминальные состояния как элементы предельного множества достижимости. Все численные значения для краткости будем округлять до четвертого знака после запятой.

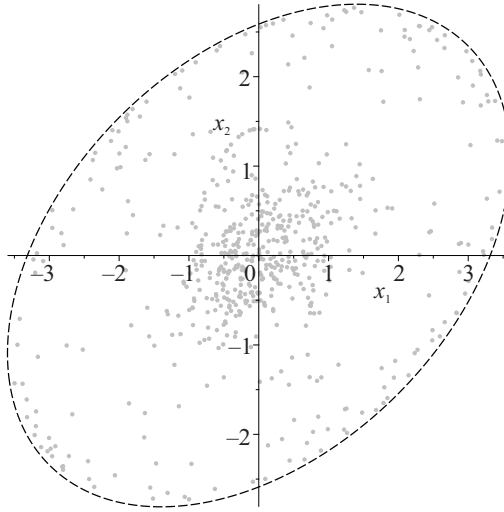


Рис. 1. Множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и различные терминальные состояния для системы (A, B, H, t) из примера 4.

Пример 4. Рассмотрим систему (1) для $n = m = 2$ и следующих значений параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 0,8791 & -1,1321 \\ 0,6429 & 0,0934 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0,4863 + 0,7573\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0,4863 - 0,7573\mathbf{i} \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0,7986 & 0,7986 \\ 0,2771 - 0,5342\mathbf{i} & 0,2771 + 0,5342\mathbf{i} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad t = 1.$$

Матрица A обладает парой комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = 0,4863 \pm 0,7573\mathbf{i}$, которые по модулю строго меньше 1. Следовательно, в силу теоремы 1 множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, а согласно теореме 2 является эллипсоидом. Матрица H_y может быть вычислена явно при помощи теоремы 3. Верны следующие значения параметров:

$$M = 2, \quad n_1 = n_2 = 1,$$

$$D_{11} = -1,5609 - 0,2711\mathbf{i}, \quad D_{12} = D_{21} = 2,0836, \quad D_{22} = -1,5609 + 0,2711\mathbf{i}.$$

Это приводит к равенству

$$H_y = S \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{1 - \lambda_1 \lambda_1} & \frac{D_{12}}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{D_{21}}{1 - \lambda_2 \lambda_1} & \frac{D_{22}}{1 - \lambda_2 \lambda_2} \end{pmatrix} S^T = \begin{pmatrix} 12,9553 & 3,9416 \\ 3,9416 & 7,8973 \end{pmatrix}.$$

Предельное множество достижимости (2) и терминальные состояния различных процессов изображены на рис. 1.

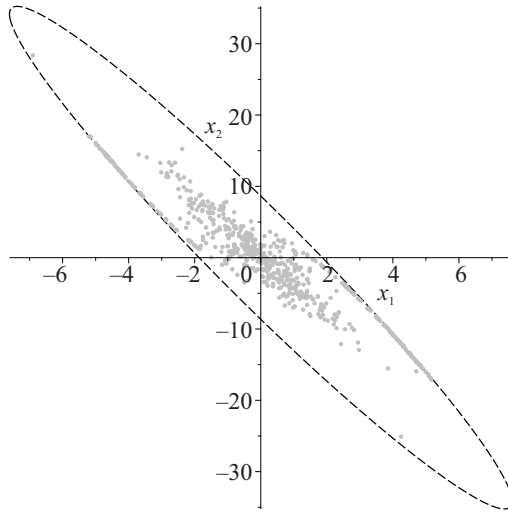


Рис. 2. Множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и различные терминальные состояния для системы (A, B, H, t) из примера 5.

Пример 5. Рассмотрим систему (1) для $n = m = 2$ и следующих значений параметров:

$$A = \begin{pmatrix} -1,3315 & -0,0769 \\ 2,7692 & -0,4085 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} -0,87 & 1 \\ 0 & -0,87 \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}, \quad t = 1.$$

Матрица A обладает одним вещественным собственным значением $\lambda_1 = -0,87$, которое по модулю строго меньше 1. Следовательно, в силу теоремы 1 множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, а согласно теореме 2 является эллипсоидом. Матрица H_y может быть вычислена явно при помощи теоремы 3. Верны следующие значения параметров:

$$M = 1, \quad n_1 = 2, \quad D_{11} = \begin{pmatrix} 0,2975 & -0,2739 \\ -0,2739 & 0,2975 \end{pmatrix}.$$

Это приводит к равенству

$$H_y = S \left(\frac{D_{11}}{1 - \lambda_1^2} + \frac{\lambda_1 D_{11} P_2^T}{(1 - \lambda_1^2)^2} + \frac{\lambda_1 P_2 D_{11}}{(1 - \lambda_1^2)^2} + \frac{P_2 D_{11} P_2^T}{(1 - \lambda_1^2)^2} + 2 \frac{\lambda_1^2 P_2 D_{11} P_2^T}{(1 - \lambda_1^2)^3} \right) S^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 57,9130 & -259,9758 \\ -259,9758 & 1241,6945 \end{pmatrix}.$$

Предельное множество достижимости (2) и терминальные состояния различных процессов изображены на рис. 2.

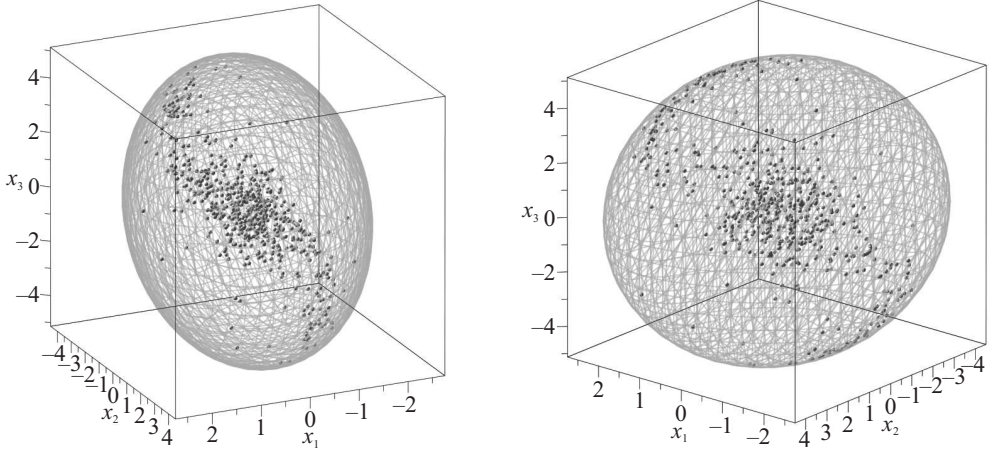


Рис. 3. Множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и различные терминальные состояния для системы (A, B, H, t) из примера 6.

Пример 6. Рассмотрим систему (1) для $n = 3$, $m = 2$ и следующих значений параметров:

$$A = \begin{pmatrix} -0,8421 & -0,0196 & 0,0976 \\ 0,3013 & -0,9058 & 0,1081 \\ -0,1239 & -0,0093 & -0,9540 \end{pmatrix} =$$

$$= S \begin{pmatrix} -0,8910 + 0,1270i & 0 & 0 \\ 0 & -0,8910 - 0,1270i & 0 \\ 0 & 0 & -0,92 \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0,1703 + 0,3405i & 0,1703 - 0,3405i & -0,1562 \\ 0,8513 & 0,8513 & 0,9370 \\ -0,3575 + 0,0511i & -0,3575 - 0,0511i & 0,3123 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Также примем $t = 1$. Матрица A обладает парой комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = -0,8910 \pm 0,1270i$ и одним вещественным собственным значением $\lambda_3 = -0,92$, которые по модулю строго меньше 1. Следовательно, в силу теоремы 1 множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, а согласно теореме 2 является эллипсоидом. Матрица H_y может быть вычислена явно при помощи теоремы 3 аналогично примеру 4:

$$M = 3, \quad n_1 = n_2 = n_3 = 1,$$

$$H_y = \begin{pmatrix} 7,5669 & 4,6171 & 1,4047 \\ 4,6171 & 20,2330 & -5,4371 \\ 1,4047 & -5,4371 & 26,3126 \end{pmatrix}.$$

Предельное множество достижимости (2) и терминальные состояния различных процессов изображены на рис. 3.

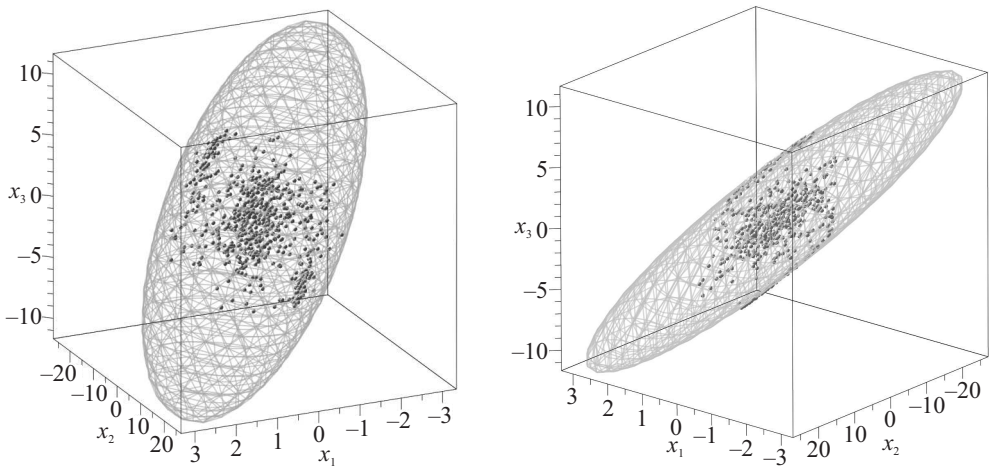


Рис. 4. Множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и различные терминальные состояния для системы (A, B, H, t) из примера 7.

Пример 7. Рассмотрим систему (1) для $n = 3$, $m = 2$ и следующих значений параметров:

$$A = \begin{pmatrix} -0,4838 & -0,1586 & -0,2412 \\ 1,9715 & 0,2153 & 3,1897 \\ -1,1023 & 0,3068 & -0,5215 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & -0,87 & 1 \\ 0 & 0 & -0,87 \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad t = 1.$$

Матрица A обладает вещественным некратным собственным значением $\lambda_1 = 0,95$ и вещественным кратным собственным значением $\lambda_2 = -0,87$, которые по модулю строго меньше 1. Следовательно, в силу теоремы 1 множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено, а согласно теореме 2 является эллипсоидом. Матрица H_Y может быть вычислена явно при помощи теоремы 3 аналогично примеру 5:

$$M = 2, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 2,$$

$$H_Y = \begin{pmatrix} 11,1345 & 52,5427 & -32,4125 \\ 52,5427 & 735,8157 & -266,4128 \\ -32,4125 & -266,4128 & 136,2212 \end{pmatrix}.$$

Предельное множество достижимости (2) и терминальные состояния различных процессов изображены на рис. 4.

В примерах 4–7 рассмотрено построение только предельных множеств достижимости (2), так как численное моделирование его элементов является более простым в сравнении с множеством 0-управляемости (3). В то же время согласно теоремам 1–3 построение множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ происходит аналогичным образом. Также следует отметить, что случай $m = 1$ подробно рассмотрен в [14], а потому здесь не приводится.

6. Заключение

В статье решена задача построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями второго порядка. Сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности данных множеств в виде теоремы 1, которые сводятся к соотношению матрицы B и собственных подпространств $\mathbb{L}_{<1}$ и $\mathbb{L}_{>1}$. В случае управляемых по Калману систем эти условия эквивалентны ограничению на спектральный радиус матрицы A для множеств достижимости и матрицы A^{-1} для множеств 0-управляемости соответственно. Также строго доказано, что в случае ограниченности множества $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ являются эллипсоидами. Их опорная функция построена явно при помощи жорданова разложения матрицы A , что сформулировано в виде теоремы 3. Для подтверждения полученных теоретических результатов проведены численные эксперименты для систем разной размерности с различными типами собственных значений у матрицы A .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Введем в $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение и векторную норму по формулам

$$\langle x, y \rangle \triangleq x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности будем считать, что элементы базиса (4) сгруппированы таким образом, что для некоторого $M_0 \leq M$ верно представление

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin} \{h_{i,j} : i = \overline{1, M_0}, j = \overline{1, n_i}\}.$$

Для каждого $u(k) \in \mathbb{R}^m$ определим разложение по базису (4):

$$Bu(k) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}(k),$$

где $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}$, если $\lambda_i \in \mathbb{R}$, и $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}^2$, если $\lambda_i \in \mathbb{C}$. С учетом представления (5) оказываются верными равенства

$$S^{-1}Bu(k) = \text{vect}(\alpha_{1,1}(k), \dots, \alpha_{1,n_1}(k), \dots, \alpha_{M,1}(k), \dots, \alpha_{M,n_M}(k)),$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_M \end{pmatrix} \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda^k S^{-1}Bu(N-k-1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} J_1^k \text{vect}(\alpha_{1,1}(N-k-1), \dots, \alpha_{1,n_1}(N-k-1)) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} J_M^k \text{vect}(\alpha_{M,1}(N-k-1), \dots, \alpha_{M,n_M}(N-k-1)) \end{pmatrix}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Пусть $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$. Тогда для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{M_0 + 1, M}$ при всех $j = \overline{1, n_i}$ верно, что $\alpha_{i,j}(k) = 0$, а, следовательно, $\beta_i = 0$.

Зафиксируем $i = \overline{1, M_0}$. Пусть для жордановой клетки J_i верно представление (6). Введем матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}.$$

Отметим следующее свойство матрицы P :

$$(P^l x)_j = \begin{cases} x_{j+l}, & j+l \leq n_i, \\ 0, & j+l > n_i, \end{cases} = \begin{cases} x_{j+l}, & l \leq n_i - j, \\ 0, & l > n_i - j. \end{cases}$$

Обозначим через C_k^l биномиальные коэффициенты. По биному Ньютона

$$\begin{aligned} J_i^k &= (\lambda_i I + P)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l \lambda_i^{k-l} P^l, \\ \begin{pmatrix} \beta_{i,1} \\ \vdots \\ \beta_{i,n_i} \end{pmatrix} &\triangleq \beta_i = \sum_{k=0}^{N-1} J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(N-k-1) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(N-k-1) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k C_k^l \lambda_i^{k-l} P^l \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(N-k-1) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(N-k-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом свойств матрицы P для всех $j = \overline{1, n_i}$ верно представление

$$(II.1) \quad \beta_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\min\{k, n_i-j\}} C_k^l \lambda_i^{k-l} \alpha_{i,j+l}(N-k-1).$$

Полагая $N-1 \geq n_i - j$, поменяем порядок суммирования:

$$\begin{aligned} (II.2) \quad \beta_{i,j} &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^{N-1} C_k^l \lambda_i^{k-l} \alpha_{i,j+l}(N-k-1) = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l \lambda_i^k \alpha_{i,j+l}(N-k-l-1). \end{aligned}$$

Учтем, что $u(k)$ в силу (1) принадлежит эллипсоидальному множеству $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T H u \leq t^2\}$, которое является компактом. Тогда по теореме Вейерштрасса [22, гл. VII, §2, разд. 2] и непрерывной зависимости чисел $\alpha_{i,j}(k)$

от $u(k)$ найдется число $\alpha_{\max} > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, n_i}$ верно ограничение $|\alpha_{i,j}(k)| \leq \alpha_{\max}$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\beta_{i,j}| &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l |\lambda_i|^k |\alpha_{i,j+l}(N-k-l-1)| \leq \\ &\leq \alpha_{\max} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l |\lambda_i|^k = \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(1-|\lambda_i|)^{l+1}} = \\ &= \frac{(n_i-j+1)\alpha_{\max}}{(1-|\lambda_i|)^{n_i-j+1}} \leq \frac{n_i\alpha_{\max}}{(1-|\lambda_i|)^{n_i}}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$(П.3) \quad \|\beta_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n_i} |\beta_{i,j}|^2 \leq \frac{n_i^3 \alpha_{\max}^2}{(1-|\lambda_i|)^{2n_i}}.$$

Пусть для жордановой клетки J_i верно представление (7). Полагая $P \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}$, получим по биному Ньютона

$$\begin{aligned} J_i^k &= (\text{diag } (r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i}) + P^2)^k = \\ &= \sum_{l=0}^k C_k^l \text{diag } (r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i}, \dots, r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i}) P^{2l}, \\ \begin{pmatrix} \beta_{i,1} \\ \vdots \\ \beta_{i,n_i} \end{pmatrix} &\triangleq \beta_i = \sum_{k=0}^{N-1} J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(N-k-1) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(N-k-1) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k \text{diag } (r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i}, \dots, r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i}) P^{2l} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(N-k-1) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(N-k-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом свойств матрицы P для всех $j = \overline{1, n_i}$ верно представление

$$(П.4) \quad \beta_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\min\{k, n_i-j\}} C_k^l r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(N-k-1).$$

Полагая $N-1 \geq n_i-j$, поменяем порядок суммирования:

$$\begin{aligned} (П.5) \quad \beta_{i,j} &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^{N-1} C_k^l r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(N-k-1) = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l r_i^{k-l} A_{(k-l)\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(N-k-l-1). \end{aligned}$$

Учтем, что $u(k)$ в силу (1) принадлежит эллипсоидальному множеству $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T H u \leq t^2\}$, которое является компактом. Тогда в силу теоремы Вейерштрасса [22, гл. VII, §2, разд. 2] и непрерывной зависимости двумерных векторов $\alpha_{i,j}(k)$ от $u(k)$ найдется число $\alpha_{\max} > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, n_i}$ верно ограничение $\|\alpha_{i,j}(k)\| \leq \alpha_{\max}$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\beta_{i,j}\| &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l r_i^k \|A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(N-k-l-1)\| = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l r_i^k \|\alpha_{i,j+l}(N-k-l-1)\| \leq \\ &\leq \alpha_{\max} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l r_i^k = \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(1-r_i)^{l+1}} = \\ &= \frac{(n_i-j+1)\alpha_{\max}}{(1-r_i)^{n_i-j+1}} \leq \frac{n_i \alpha_{\max}}{(1-r_i)^{n_i}}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$(II.6) \quad \|\beta_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \|\beta_{i,j}\|^2 \leq \frac{n_i^3 \alpha_{\max}^2}{(1-r_i)^{2n_i}}.$$

Учтем неравенства (II.3) и (II.6) и получим для всех $N \geq n$ и условия $x(0) = 0$ оценку

$$\begin{aligned} \|x(N)\| &\stackrel{(1)}{=} \left\| S \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda^k S^{-1} B u(k) \right\| \leq \\ &\leq \|S\| \left(\sum_{i=1}^{M_0} \|\beta_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|S\| (M_0 n^3 \alpha_{\max}^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \max_{i=\overline{1, M_0}} |\lambda_i|\right)^{\frac{1}{n}}}, \end{aligned}$$

т.е. по определению $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ ограничено.

Теперь предположим, что для некоторого $\tilde{m} = \overline{1, m}$ выполнено условие $b_{\tilde{m}} \notin \mathbb{L}_{<1}$. Т.е. существует $u \in \mathbb{R}^m$ такой, что в разложении по базису (4)

$$Bu = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}$$

для некоторого $i = \overline{M_0+1, M}$ и $j = \overline{1, n_i}$ верно, что $\alpha_{i,j} \neq 0$. Зафиксируем эти i, j и $N \geq n$. Без ограничения общности будем полагать, что или $j = n_i$, или

$\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$. Пусть J_i удовлетворяет представлению (6). Выберем

$$u(N-k-1) = \frac{\sqrt{6}t \operatorname{sign}(\lambda_i^k)}{(k+1)\pi} \frac{u}{\sqrt{u^T H u}}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T H u(k) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\sqrt{6}t \operatorname{sign}(\lambda_i^k)}{(k+1)\pi} \right)^2 \frac{u^T H u}{\sqrt{u^T H u} \sqrt{u^T H u}} < \\ &< \frac{6t^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = t^2, \end{aligned}$$

т.е. выбранные управляющие воздействия являются допустимыми для системы (1). С другой стороны, для этого управления согласно (П.2) $\beta_{i,j}$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-l-1} C_{k+l}^l \lambda_i^k \alpha_{i,j+l}(N-k-l-1) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_i^k \alpha_{i,j}(N-k-1) = \sum_{k=0}^{N-1} |\lambda_i|^k \frac{\sqrt{6}t}{(k+1)\pi} \frac{\alpha_{i,j}}{\sqrt{u^T H u}} \geq \\ &\leq \frac{\sqrt{6}t \alpha_{i,j}}{\pi \sqrt{u^T H u}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Пусть J_i удовлетворяет представлению (7). Выберем возрастающую последовательность $k_1, k_2, \dots \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, чтобы выполнялось условие $|\varphi_i k_p| \bmod 2\pi < \frac{\pi}{6}$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Такая последовательность существует. Для случая $\varphi_i = 2\pi \frac{K'}{K''}$ достаточно положить $k_p = pK''$. Для противоположного случая в силу теоремы Вейля множество $\{k\varphi_i \bmod 2\pi : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ плотно в $[0; 2\pi)$. Положим для всех $k = \overline{0, k_N}$

$$u(k_N - k) = \begin{cases} 0, & k \notin \{k_1, \dots, k_N\}, \\ \frac{\sqrt{6}t}{p\pi} \frac{u}{\sqrt{u^T H u}}, & k = k_p \in \{k_1, \dots, k_N\}. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{k_N} u(k)^T H u(k) = \sum_{p=1}^N \left(\frac{\sqrt{6}t}{p\pi} \right)^2 \frac{u^T H u}{\sqrt{u^T H u} \sqrt{u^T H u}} < \frac{6t^2}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = t^2,$$

т.е. выбранные управляющие воздействия являются допустимыми для системы (1). С другой стороны, для этого управления согласно (П.5) $\beta_{i,j}$ удовле-

творяет соотношению

$$\begin{aligned}
\|\beta_{i,j}\|^2 &= \left\langle \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{k_N-l} C_{k+l}^l r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k_N - k - l), \right. \\
&\quad \left. \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{k_N-l} C_{k+l}^l r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k_N - k - l) \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{k_N} r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k), \sum_{k=0}^{k_N} r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k) \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{p=1}^N r_i^{k_p} A_{k_p\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k_p), \sum_{q=1}^N r_i^{k_q} A_{k_q\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k_q) \right\rangle = \\
&= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N r_i^{k_p+k_q} \langle A_{(k_p-k_q)\varphi_i} \alpha_{i,j}(k_N - k_p), \alpha_{i,j}(k_N - k_q) \rangle = \\
&= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N r_i^{k_p+k_q} \frac{6t^2}{\pi^2 pq} \frac{\|\alpha_{i,j}\|^2}{u^T H u} \cos(\varphi_i(k_p - k_q)) \geq \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{6t^2}{\pi^2 pq} \frac{\|\alpha_{i,j}\|^2}{2u^T H u} = \\
&= \frac{\|\alpha_{i,j}\|^2}{u^T H u} \frac{3t^2}{\pi^2} \left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{q=1}^N \frac{1}{q} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, поскольку

$$\left\| \sum_{k=0}^{k_N} \Lambda^k S^{-1} B u(k_N - k) \right\| = \|S^{-1} x(k_N + 1)\| \leq \|S^{-1}\| \|x(k_N + 1)\|,$$

то

$$\begin{aligned}
\|x(k_N + 1)\| &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{k=0}^{k_N} \Lambda^k S^{-1} B u(k_N - k) \right\| = \\
&= \frac{\left(\sum_{l=1}^M \|\beta_l\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\|S^{-1}\|} \geq \frac{\|\beta_{i,j}\|}{\|S^{-1}\|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, по определению $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ неограничено.

Теперь докажем 2-й пункт. Если $\det A = 0$, то существует элемент вещественного жорданова базиса $h_{i,j} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, соответствующий собственному значению $\lambda_i = 0$. Тогда в силу (1) верно включение $\text{Lin}\{h_{i,j}\} \subset \mathcal{X}_{t,2,\infty}$, которое приводит к тому, что множество (3) неограничено. Если $\det A \neq 0$, то в силу определений (2) и (3) множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ для системы (A, B, H, t) и множество $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ для системы $(A^{-1}, A^{-1}B, H, t)$ совпадают. Отсюда следует пункт 2.

Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 1. Без ограничения общности будем считать, что элементы базиса (4) сгруппированы таким образом, что для некоторого $M_0 \leq M$ верно представление

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin} \{h_{i,j} : i = \overline{1, M_0}, j = \overline{1, n_i}\}.$$

Поскольку H^{-1} положительно определенная и симметрическая, то для нее справедливо разложение Холецкого [16, следствие 7.2.9], т.е. найдется нижнетреугольная невырожденная матрица $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ такая, что $H^{-1} = LL^T$. В терминах (5) введем обозначение

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,1}(k) & \dots & \gamma_{1,m}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M,1}(k) & \dots & \gamma_{M,m}(k) \end{pmatrix} \triangleq \Lambda^k S^{-1} BL,$$

где $\gamma_{i,1}(k), \dots, \gamma_{i,m}(k)$ являются векторами, размерность которых совпадает с размерностью жордановой клетки J_i . Тогда из включения $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$ следует, что $\gamma_{i,l}(k) = 0$, если $i = \overline{M_0 + 1, M}$, $l = \overline{1, m}$. В случае $i = \overline{1, M_0}$ векторы $\gamma_{i,l}(k)$ представляют собой произведение степеней жордановых клеток J_i^k на соответствующие блоки матрицы $S^{-1}BL$. Следовательно, порядок малости элементов векторов $\gamma_{i,l}(k)$ совпадает с порядком малости элементов J_i^k , которая согласно рассуждениям из [16, разд. 3.2.5] может быть оценена сверху величиной

$$k^{n_i} |\lambda_i|^k \leq k^n \lambda_{\max}^k, \text{ где } \lambda_{\max} \triangleq \max\{|\lambda| : \lambda - \text{собственное значение } A, |\lambda| < 1\}.$$

Отсюда по достаточному признаку сходимости [22, гл. III, §1, разд. 4, следствие 2] следует поэлементная сходимость матричного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{i,l}(k) \gamma_{j,l}(k)^T$ для всех $i, j = \overline{1, M}$.

Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} H_y &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T = S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k S^{-1} B H^{-1} B^T (S^{-1})^T (\Lambda^k)^T \right) S^T = \\ &= S \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m \begin{pmatrix} \gamma_{1,l}(k) \gamma_{1,l}(k)^T & \dots & \gamma_{1,l}(k) \gamma_{M,l}(k)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M,l}(k) \gamma_{1,l}(k)^T & \dots & \gamma_{M,l}(k) \gamma_{M,l}(k)^T \end{pmatrix} S^{-1} = \\ &= \sum_{l=1}^m S \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{1,l}(k) \gamma_{1,l}(k)^T & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{1,l}(k) \gamma_{M,l}(k)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{M,l}(k) \gamma_{1,l}(k)^T & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{M,l}(k) \gamma_{M,l}(k)^T \end{pmatrix} S^{-1}. \end{aligned}$$

Из сходимости матричных рядов в крайней правой части этих соотношений следует п. 1 леммы 1.

Второй пункт леммы следует из первого в силу того, что собственные значения A взаимно обратны собственным значениям A^{-1} .

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем п. 1. Для произвольных $N \in \mathbb{N}$, $u(0), \dots, u(N-1) \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ введем обозначения

$$p_0 = \begin{pmatrix} (A^{N-1}B)^T p \\ \vdots \\ B^T p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN},$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} H & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & H \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN \times mN}.$$

Тогда по определению (2) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(p, \mathcal{Y}_{t,2,\infty}) &= \sup_{x \in \mathcal{Y}_{t,2,\infty}} \langle p, x \rangle = \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{\sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T H u(k) \leq t^2} \left\langle p, \sum_{k=0}^{N-1} A^k B u(N-k-1) \right\rangle = \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{\sum_{k=0}^{N-1} u(k)^T H u(k) \leq t^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle (A^k B)^T p, u(N-k-1) \right\rangle = \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{u_0^T H_0 u_0 \leq t^2} \langle p_0, u_0 \rangle. \end{aligned}$$

С учетом обратимости матрицы H_0 и определений (8), (9) верно, что

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(p, \mathcal{Y}_{t,2,\infty}) &= \sup_{N \in \mathbb{N}} t \sqrt{p_0^T H_0^{-1} p_0} = t \sup_{N \in \mathbb{N}} \sqrt{p^T \sum_{k=0}^{N-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T p} = \\ &= t \sqrt{p^T \sum_{k=0}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T p} = t \sqrt{p^T H_{\mathcal{Y}} p}. \end{aligned}$$

Последний переход корректен, поскольку в силу леммы 1 соответствующий ряд сходится к $H_{\mathcal{Y}}$.

П. 2 теоремы следует из того, что если $\det A \neq 0$, то в силу определений (2) и (3) множество $\mathcal{Y}_{t,2,\infty}$ для системы (A, B, H, t) и множество $\mathcal{X}_{t,2,\infty}$ для системы $(A^{-1}, A^{-1}B, H, t)$ совпадают.

Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 2. Докажем п. 1. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T$ в силу леммы 1 сходится к неотрицательно определенной симметрической матрице H_y . Справедливо представление

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T = (B \ \dots \ A^{n-1} B) \begin{pmatrix} H^{-1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^T \\ \vdots \\ (A^{n-1} B)^T \end{pmatrix}.$$

При этом согласно условию управляемости каждый из сомножителей является матрицей полного ранга. Следовательно, их произведение также является матрицей полного ранга [16, разд. 0.4.6], значит, $\det \sum_{k=0}^{n-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T \neq 0$.

Поскольку $\sum_{k=0}^{n-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T$ также неотрицательно определена и симметрическая по построению, то данная матрица оказывается положительно определенной. Тогда H_y также положительно определена, так как представима в виде суммы положительно определенной и неотрицательно определенной матриц:

$$H_y = \sum_{k=n}^{\infty} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T + \sum_{k=0}^{n-1} A^k B H^{-1} B^T (A^k)^T.$$

П. 2 леммы следует из того, что собственные значения A взаимно обратны собственным значениям A^{-1} .

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, числа $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ такие, что $|\lambda| < 1$, $|\mu| < 1$. Тогда

$$\sum_{k=\max\{r,q\}}^{\infty} C_k^r C_k^q \lambda^{k-r} \mu^{k-q} = \sum_{l=0}^{\min\{r,q\}} \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!(q-l)!l!} \frac{\lambda^{q-l} \mu^{r-l}}{(1-\lambda\mu)^{r+q-l+1}}.$$

Доказательство леммы 3. Для доказательства леммы воспользуемся известной формулой для $|\alpha| < 1$:

$$(II.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^r \alpha^k = \frac{1}{(1-\alpha)^{r+1}}.$$

Выберем окрестности нуля на комплексной плоскости $\mathcal{O}_{\delta_1}(0), \mathcal{O}_{\delta_2}(0) \subset \mathbb{C}$ так, чтобы для любых $x \in \mathcal{O}_{\delta_1}(0)$ и $y \in \mathcal{O}_{\delta_2}(0)$ выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} |(x+\lambda)(y+\mu)| &< 1, \\ \left| \frac{x(y+\mu)}{1-\lambda(y+\mu)} \right| &< 1, \\ \left| \frac{y\lambda}{1-\lambda\mu} \right| &< 1. \end{aligned}$$

Такие окрестности существуют, поскольку $|\lambda| < 1$, $|\mu| < 1$. Рассмотрим функцию $G: \mathcal{O}_{\delta_1}(0) \times \mathcal{O}_{\delta_2}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ следующего вида:

$$G(x, y) = \frac{1}{1 - (x + \lambda)(y + \mu)}.$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned} G(x, y) &\stackrel{(\text{П.7})}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (x + \lambda)^k (y + \mu)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \sum_{q=0}^k C_k^q C_k^r \lambda^{k-r} \mu^{k-q} x^r y^q = \\ (\text{П.8}) \quad &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{k=\max\{r, q\}}^{\infty} C_k^q C_k^r \lambda^{k-r} \mu^{k-q} \right) x^r y^q. \end{aligned}$$

С другой стороны, из определений δ_1 и δ_2 получим

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{1 - \lambda(y + \mu) - x(y + \mu)} = \frac{1}{1 - \lambda(y + \mu)} \frac{1}{1 - \frac{x(y + \mu)}{1 - \lambda(y + \mu)}} \stackrel{(\text{П.7})}{=} \\ &\stackrel{(\text{П.7})}{=} \frac{1}{1 - \lambda(y + \mu)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x(y + \mu)}{1 - \lambda(y + \mu)} \right)^r = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} x^r (y + \mu)^r \frac{1}{(1 - \lambda(y + \mu))^{r+1}} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r x^r C_r^l y^l \mu^{r-l} \frac{1}{(1 - \lambda\mu)^{r+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{y\lambda}{1 - \lambda\mu}\right)^{r+1}} \stackrel{(\text{П.7})}{=} \\ (\text{П.9}) \quad &\stackrel{(\text{П.7})}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=0}^{\infty} x^r C_r^l y^l \mu^{r-l} \frac{1}{(1 - \lambda\mu)^{r+1}} C_{r+q}^r \left(\frac{y\lambda}{1 - \mu\lambda} \right)^q = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=l}^{\infty} x^r C_r^l y^l \mu^{r-l} \frac{1}{(1 - \lambda\mu)^{r+1}} C_{r+q-l}^r \left(\frac{y\lambda}{1 - \mu\lambda} \right)^{q-l} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=l}^{\infty} \frac{C_r^l C_{r+q-l}^r \mu^{r-l} \lambda^{q-l}}{(1 - \lambda\mu)^{q+r-l+1}} x^r y^q = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\min\{r, q\}} \frac{C_r^l C_{r+q-l}^r \mu^{r-l} \lambda^{q-l}}{(1 - \lambda\mu)^{q+r-l+1}} \right) x^r y^q. \end{aligned}$$

Поскольку $G(x, y)$ аналитическая на области определения по построению, то представима в виде степенного ряда единственным образом [23, разд. А, гл. I]. Поэтому из представлений (П.8) и (П.9) следует, что лемма 3 верна.

Лемма 4. Пусть $r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, числа $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ такие, что $|\lambda| > 1$, $|\mu| > 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{k+r-1}^r C_{k+q-1}^q \lambda^{-k-r} \mu^{-k-q} = \sum_{l=0}^{\min\{r,q\}} \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!(q-l)!} \frac{(-1)^l \lambda^{q-l} \mu^{r-l}}{(\lambda\mu - 1)^{r+q-l+1}}.$$

Доказательство леммы 4. Выберем окрестности нуля на комплексной плоскости $\mathcal{O}_{\delta_1}(0), \mathcal{O}_{\delta_2}(0) \subset \mathbb{C}$ так, чтобы для любых $x \in \mathcal{O}_{\delta_1}(0)$ и $y \in \mathcal{O}_{\delta_2}(0)$ выполнялись неравенства

$$|(\lambda - x)| > 1, \quad |(\mu - y)| > 1,$$

$$\left| \frac{x(\mu - y)}{\lambda(\mu - y) - 1} \right| < 1,$$

$$\left| \frac{y\lambda}{\lambda\mu - 1} \right| < 1.$$

Такие окрестности существуют, поскольку $|\lambda| > 1$, $|\mu| > 1$. Рассмотрим функцию $F: \mathcal{O}_{\delta_1}(0) \times \mathcal{O}_{\delta_2}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ следующего вида:

$$F(x, y) = \frac{1}{(\lambda - x)(\mu - y) - 1}.$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{(\lambda - x)(\mu - y)} \frac{1}{1 - (\lambda - x)^{-1}(\mu - y)^{-1}} \stackrel{(\Pi.7)}{=} \\ &\stackrel{(\Pi.7)}{=} \frac{1}{(\lambda - x)(\mu - y)} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - x)^{-k} (\mu - y)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - x)^{k+1}} \frac{1}{(\mu - y)^{k+1}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\mu)^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{\mu}\right)^{k+1}} \stackrel{(\Pi.7)}{=} \\ &\stackrel{(\Pi.7)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\mu)^{k+1}} \sum_{r=0}^{\infty} C_{k+r}^r \left(\frac{x}{\lambda}\right)^r \sum_{q=0}^{\infty} C_{k+q}^q \left(\frac{y}{\mu}\right)^q = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^r C_{k+q}^q \lambda^{-r-k-1} \mu^{-q-k-1} x^r y^q = \\ (\Pi.10) \quad &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{k+r-1}^r C_{k+q-1}^q \lambda^{-r-k} \mu^{-q-k} \right) x^r y^q. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \frac{1}{\lambda(\mu - y) - 1 - x(\mu - y)} = \frac{1}{\lambda(\mu - y) - 1} \frac{1}{1 - \frac{x(\mu - y)}{\lambda(\mu - y) - 1}} \stackrel{(\Pi.7)}{=} \\
&\stackrel{(\Pi.7)}{=} \frac{1}{\lambda(\mu - y) - 1} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x(\mu - y)}{\lambda(\mu - y) - 1} \right)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r (\mu - y)^r}{(\lambda\mu - 1 - \lambda y)^{r+1}} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r x^r C_r^l (-y)^l \mu^{r-l} \frac{1}{(\lambda\mu - 1)^{r+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{y\lambda}{\lambda\mu - 1}\right)^{r+1}} \stackrel{(\Pi.7)}{=} \\
&\stackrel{(\Pi.7)}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=0}^{\infty} x^r C_r^l (-y)^l \mu^{r-l} \frac{1}{(\lambda\mu - 1)^{r+1}} C_{r+q}^r \left(\frac{y\lambda}{\lambda\mu - 1} \right)^q = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=l}^{\infty} x^r C_r^l (-y)^l \mu^{r-l} \frac{1}{(\lambda\mu - 1)^{r+1}} C_{r+q-l}^r \left(\frac{y\lambda}{\lambda\mu - 1} \right)^{q-l} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{q=l}^{\infty} \frac{(-1)^l C_r^l C_{r+q-l}^r \mu^{r-l} \lambda^{q-l}}{(\lambda\mu - 1)^{q+r-l+1}} x^r y^q = \\
(\Pi.11) \quad &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\min\{r, q\}} \frac{(-1)^l C_r^l C_{r+q-l}^r \mu^{r-l} \lambda^{q-l}}{(1 - \lambda\mu)^{q+r-l+1}} \right) x^r y^q.
\end{aligned}$$

Поскольку $F(x, y)$ аналитическая на области определения по построению, то представима в виде степенного ряда единственным образом [23, разд. А, гл. I]. Значит, из представлений (П.10) и (П.11) следует, что лемма 4 верна.

Доказательство теоремы 3. Докажем п. 1. В силу (10) и определения H_y

$$\begin{aligned}
H_y &= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k S^{-1} B H^{-1} B^T (S^{-1})^T (\Lambda^k)^T \right) S^T = \\
&= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} J_1^k D_{11} (J_1^k)^T & \dots & J_1^k D_{1M} (J_M^k)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (J_M^k)^T D_{M1} (J_1^k)^T & \dots & J_M^k D_{MM} (J_M^k)^T \end{pmatrix} \right) S^T,
\end{aligned}$$

т.е. верно, что

$$H_{ij}^y = \sum_{k=0}^{\infty} J_i^k D_{ij} (J_j^k)^T.$$

Из включения $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{<1}$ и (10) вытекает, что $D_{ij} = O$, если $|\lambda_i| \geq 1$ или $|\lambda_j| \geq 1$, т.е. $H_{ij}^y = O$. В противоположном случае учтем, что для $k \geq n_0$

справедливо равенство $P_{n_0}^k = O$, и рассмотрим ряд

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} J_i^k D_{ij} (J_j^k)^T &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_i I + P_{n_i})^k D_{ij} (\lambda_j I + P_{n_j}^T)^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\min\{k, n_i-1\}} \sum_{q=0}^{\min\{k, n_j-1\}} C_k^r \lambda_i^{k-r} P_{n_i}^r D_{ij} C_k^q \lambda_j^{k-q} (P_{n_j}^q)^T = \\
&= \sum_{r=0}^{n_i-1} \sum_{q=0}^{n_j-1} \sum_{k=\max\{r, q\}}^{\infty} C_k^r C_k^q \lambda_i^{k-r} \lambda_j^{k-q} P_{n_i}^r D_{ij} (P_{n_j}^q)^T.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом леммы 3 п. 1 доказан.

Теперь докажем п. 2. В силу (10) и определения $H_{\mathcal{X}}$

$$\begin{aligned}
H_{\mathcal{X}} &= S \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^{-k} S^{-1} B H^{-1} B^T (S^{-1})^T (\Lambda^{-k})^T \right) S^T = \\
&= S \left(\sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} J_1^{-k} D_{11} (J_1^{-k})^T & \dots & J_1^{-k} D_{1M} (J_M^{-k})^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (J_M^{-k})^T D_{M1} (J_1^{-k})^T & \dots & J_M^{-k} D_{MM} (J_M^{-k})^T \end{pmatrix} \right) S^T,
\end{aligned}$$

т.е. верно, что

$$H_{ij}^{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^{\infty} J_i^{-k} D_{ij} (J_j^{-k})^T.$$

Согласно [16, разд. 3.2.5] для жордановой клетки верно представление

$$(P.12) \quad J_i^{-k} = \sum_{r=0}^{n_i-1} (-1)^r C_{k+r-1}^r \frac{1}{\lambda_i^{k+r}} P_{n_i}^r.$$

Из включения $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{L}_{>1}$ и (10) вытекает, что $D_{ij} = O$, если $|\lambda_i| \leq 1$ или $|\lambda_j| \leq 1$, т.е. $H_{ij}^{\mathcal{X}} = O$. В противоположном случае учтем, что для $k \geq n_0$ справедливо равенство $P_{n_0}^k = O$, и рассмотрим ряд

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} J_i^k D_{ij} (J_j^k)^T &= \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_i I + P_{n_i})^{-k} D_{ij} (\lambda_j I + P_{n_j}^T)^{-k} \stackrel{(P.12)}{=} \\
&\stackrel{(P.12)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n_i-1} \sum_{q=0}^{n_j-1} (-1)^{r+q} C_{k+r-1}^r C_{k+q-1}^q \frac{1}{\lambda_i^{k+r}} \frac{1}{\lambda_j^{k+q}} P_{n_i}^r D_{ij} (P_{n_j}^q)^T = \\
&= \sum_{r=0}^{n_i-1} \sum_{q=0}^{n_j-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+r-1}^r C_{k+q-1}^q (-\lambda_i)^{-k-r} (-\lambda_j)^{-k-q} P_{n_i}^r D_{ij} (P_{n_j}^q)^T.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом леммы 4 доказан п. 2.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foss E., Rosengren A.J., Biria A.D.* Reachability Analysis of Low-Thrust, Cislunar Spacecraft Using Set-Based Computing // J. Astronaut. Sci. 2026. V. 73. No. 2. <https://doi.org/10.1007/s40295-025-00552-0>
2. *Liu E.I., Althoff M.* Specification-Compliant Motion Planning of Cooperative Vehicles Using Reachable Sets / Cooperatively Interacting Vehicles. Springer: Cham, 2024. P. 321–345. https://doi.org/10.1007/978-3-031-60494-2_12
3. *Zhang Y., Zhang H., Xu X.* Backward Reachability Analysis of Neural Feedback Systems Using Hybrid Zonotopes // IEEE Control Systems Letters. 2023. V. 7. P. 2779–2784. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2023.3289572>
4. *Zhang Y., Zhang H., Xu X.* Reachability Analysis of Neural Network Control Systems With Tunable Accuracy and Efficiency // IEEE Control Systems Letters. 2024. V. 8. P. 1697–1702. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2024.3415471>
5. *Serry M., Yang L., Ozay N., Liu J.* Safe Tracking Control of Discrete-Time Nonlinear Systems Using Backward Reachable Sets // American Control Conference. Toronto, Canada, 2024. P. 1172–1179. <https://doi.org/10.23919/ACC60939.2024.10644670>
6. *Зыков И.В.* Приближенное вычисление множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление // Изв. ин-та матем. и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2022. Т. 60. С. 16–33. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-02>
7. *Natherson R.A., Scheeres D.J.* Reachable Set Computation with Terminal Velocity Constraints // J. Guidance, Control. Dynam. 2024. V. 47. No. 12. P. 2560–2572. <https://doi.org/10.2514/1.G008118>
8. *Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.* The Approximation of Reachable Sets of Control Systems with Integral Constraint on Controls // Nonlinear Differ. Equat. Appl. 2007. V. 14. P. 57–73. <https://doi.org/10.1007/s00030-006-4036-6>
9. *Polyak B.T.* Convexity of the Reachable Set of Nonlinear Systems under L2-Bounded Controls // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 2004. V. 11. P. 255–267.
10. *Simkina A.* On the External Estimation of the Limit Reachable Set for the Linear Discrete-Time System Based on Support Hyperplanes // Advances in Systems Science and Applications. 2024. V. 24. No. 4. P. 66–81. <https://doi.org/10.25728/assa.2024.2024.4.1970>
11. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // АИТ. 2023. № 2. С. 3–34. <https://doi.org/10.31857/S0005231023020010>
Berendakova A.V., Ibragimov D.N. About the Method for Constructing External Estimates of the Limit 0-Controllability Set for the Linear Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 2. P. 83–104. <https://doi.org/10.1134/S0005117923020030>
12. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 6. С. 3–32. <https://doi.org/10.31857/S0002338823050086>
Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On Some Properties of Sets of Bounded Controllability for Stationary Linear Discrete Systems with Total Control Constraints // J. Comput

13. *Ибрагимов Д.Н.* О методе построения множеств 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление // Мехатроника, автоматизация, управление. 2024. Т. 25. № 10. С. 503–512. <https://doi.org/10.17587/mau.25.503-512>
14. *Ибрагимов Д.Н.* О внешнем оценивании предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление // АиТ. 2024. № 4. С. 3–30. <https://doi.org/10.31857/S0005231024040018>
Ibragimov D.N. On the External Estimation of Reachable and Null-Controllable Limit Sets for Linear Discrete-Time Systems with a Summary Constraint on the Scalar Control // Autom. Remote Control. 2024. Vol. 85. No. 4. P. 321–340. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117924040027>
15. *Ибрагимов Д.Н., Самонов С.С.* Об условиях ограниченности множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями первого порядка на скалярное управление // Моделирование и анализ данных. 2025. Т. 15. № 1. С. 51–80. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150104>
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
17. *Рокаффеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
18. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
19. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
20. *Ядыкин И.Б., Галяев А.А.* О методах вычисления грамммианов и их использование в анализе линейных динамических систем // АиТ. 2013. № 2. С. 53–74.
Yadykin I.B., Galyaev A.A. On the Methods for Calculation of Grammians and Their Use in Analysis of Linear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 2. P. 207–224. <https://doi.org/10.1134/S0005117913020045>
21. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А. и др.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20. <https://doi.org/10.31857/S0002338823050086>
Zubov N.E., Zybin E.Yu., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. General Analytical Forms for the Solution of the Sylvester and Lyapunov Equations for Continuous and Discrete Dynamic Systems // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. Vol. 56. No. 1. P. 3–20. <https://doi.org/10.1134/S1064230717010130>
22. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. I. М.: Наука, 1981.
23. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 05.03.2026

После доработки 13.04.2026

Принята к публикации 15.04.2026

© 2026 г. А.И. КАЛИНИН, д-р физ.-мат. наук (kalininai@bsu.by),
Л.И. ЛАВРИНОВИЧ, канд. физ.-мат. наук (lavrinovich@bsu.by)
(Белорусский государственный университет, Минск)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ТРЕХТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

Рассматривается задача об управлении с минимальной энергией линейной сингулярно возмущенной системой, содержащей три группы переменных с существенно различными скоростями изменения. Строятся асимптотические приближения к решению этой задачи в виде программы и обратной связи. Основное достоинство предлагаемых вычислительных процедур состоит в том, что при их применении исходная задача распадается на три невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенная система, квадратичный функционал, оптимальное управление, обратная связь, асимптотические приближения.

DOI: 10.7868/S2413977726100023

1. Введение

В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных. Это вызвано эффективностью асимптотических методов решения таких задач, при применении которых исходная задача распадается на задачи оптимального управления меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими. При интегрировании таких систем возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В первых работах, посвященных задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями, рассматривались динамические системы, содержащие только две группы переменных с существенно различными скоростями изменения, которые были названы медленными и быстрыми переменными (см. обзоры [1–4]). В дальнейшем в связи с потребностями приложений появились работы по оптимизации систем с несколькими группами быстрых переменных, которые содержали при производных параметры различных порядков малости. Их обзор содержится в [5]. Настоящая статья посвящена построению асимптотических приближений в виде программы и

обратной связи к решению задачи об управлении с минимальными энергетическими затратами сингулярно возмущенной системой с двумя группами быстрых переменных. Впервые подход к построению этих приближений был представлен в [6]. Заметим, что подобная задача для двухтемповой сингулярно возмущенной системы рассматривалась в [7].

2. Постановка задачи

В классе r -мерных управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую стационарную задачу оптимального управления:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1u, & x(t_*) &= x_*, \\ \mu \dot{y} &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2u, & y(t_*) &= y_*, \\ \mu^2 \dot{z} &= A_3x + B_3y + C_3z + D_3u, & z(t_*) &= z_*, \end{aligned}$$

$$(2) \quad x(t^*) = 0, \quad y(t^*) = 0, \quad z(t^*) = 0,$$

$$(3) \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P u dt \rightarrow \min,$$

где μ – малый положительный параметр, t_* , t^* – заданные моменты времени ($t_* < t^*$), x – n_1 -вектор медленных переменных, y , z – векторы быстрых переменных размерности n_2 и n_3 соответственно. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. В критерии качества (3) P – положительно-определенная симметрическая матрица.

Предположение 1. Матрицы C_3 и $B = B_2 - C_2 C_3^{-1} B_3$ устойчивые, т.е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.

Введем понятия, которые позволят уточнить то, что будем понимать под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$), если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x, y, z, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N -го порядка, если для любого начального состояния (x_, y_*, z_*, t_*) , $t_* < t^*$, имеет место $u^{(N)}(x_*, y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в задаче (1)–(3).*

Настоящая статья посвящена построению асимптотически субоптимальных управлений в задаче (1)–(3). Кроме того, строится асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать следующие обозначения:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2/\mu & B_2/\mu & C_2/\mu \\ A_3/\mu^2 & B_3/\mu^2 & C_3/\mu^2 \end{pmatrix}, \quad D(\mu) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2/\mu \\ D_3/\mu^2 \end{pmatrix}.$$

3. Первая базовая задача

Суть предлагаемого подхода к построению асимптотически субоптимальных управлений состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений (в момент t^*) сопряженных переменных. Старшие коэффициенты этих разложений определяются начальными значениями сопряженных переменных в трех невозмущенных задачах оптимального управления меньшей размерности. Первой из них будет вырожденная задача

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x + D_0 u, \quad x(t_*) = x_*, \quad x(t^*) = 0, \\ J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P u dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где

$$(5) \quad \begin{aligned} A_0 &= A_1 - C_1 C_3^{-1} A_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} (A_2 - C_2 C_3^{-1} A_3), \\ D_0 &= D_1 - C_1 C_3^{-1} D_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} D_4, \quad D_4 = D_2 - C_2 C_3^{-1} D_3. \end{aligned}$$

В дальнейшем эту задачу будем называть *первой базовой*.

Предположение 2. Динамическая система в задаче (4) является вполне управляемой [8], т.е.

$$\text{rank} \left(D_0, A_0 D_0, A_0^2 D_0, \dots, A_0^{n_1-1} D_0 \right) = n_1.$$

При таком предположении в первой базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда эта задача имеет единственное решение [9], которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [10] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $\bar{u}(t)$, $x^0(t)$, $t \in T$, – оптимальные управление и траектория в задаче (4), тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы $\dot{\psi} = -A_0^T \psi$, что выполняется условие

$$\psi^{0T}(t) D_0 \bar{u}(t) - \frac{1}{2} \bar{u}^T(t) P \bar{u}(t) = \max_{u \in R^r} \left(\psi^{0T}(t) D_0 u - \frac{1}{2} u^T P u \right), \quad t \in T.$$

Из этого условия непосредственно следует

$$(6) \quad \bar{u}(t) = P^{-1} D_0^T \psi^0(t), \quad t \in T.$$

Положим $\lambda_0 = \psi^0(t^*)$, тогда

$$(7) \quad \psi^{0T}(t) = \lambda_0^T F_0(t), \quad \psi^{0T}(t) D_0 = \lambda_0^T \Phi_0(t), \quad t \in T,$$

где

$$(8) \quad \Phi_0(t) = F_0(t) D_0, \quad t \in T,$$

а $F_0(t)$, $t \in T$, $-(n_1 \times n_1)$ -матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$(9) \quad \dot{F}_0 = -F_0 A_0, \quad F_0(t^*) = E_{n_1}.$$

В силу (6), (7) и формулы Коши имеем

$$(10) \quad x^0(t^*) = F_0(t_*) x_* + S_1 \lambda_0,$$

где

$$(11) \quad S_1 = \int_{t_*}^{t^*} \Phi_0(t) P^{-1} \Phi_0^T(t) dt.$$

При выполнении предположения 2 эта матрица будет невырожденной, в чем можно легко убедиться, опираясь на неявный критерий управляемости [11]. Поскольку λ_0 определяется однозначно, то оптимальному управлению в первой базовой задаче соответствует в силу сформулированного принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных.

4. Вторая базовая задача

На втором этапе вычислений решается задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса:

$$(12) \quad \frac{dy}{ds} = By + D_4 u, \quad y(0) = B^{-1} D_4 \bar{u}(t^*),$$

$$y(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P u ds \rightarrow \min,$$

которую будем называть *второй базовой*.

Предположение 3. Выполнено условие управляемости

$$\text{rank} (D_4, BD_4, B^2D_4, \dots, B^{n_2-1}D_4) = n_2.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда в свою очередь следует, что задача (12) имеет единственное решение [9] и является нормальной. В этом случае принцип максимума [10] для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^*(s)$, $y^*(s)$, $s \leq 0$ – оптимальные управление и траектория в задаче (12), тогда существует такое решение $\Pi\psi(s)$, $s \leq 0$, сопряженной системы

$$\frac{d}{ds}\Pi\psi = -B^T\Pi\psi,$$

что выполняется условие

$$\Pi\psi^T(s)D_4u^*(s) - \frac{1}{2}u^{*T}(s)Pu^*(s) = \max_{u \in R^r} \left(\Pi\psi^T(s)D_4u - \frac{1}{2}u^TPu \right), \quad s \leq 0.$$

Отсюда непосредственно следует

$$(13) \quad u^*(s) = P^{-1}D_4^T\Pi\psi(s), \quad s \leq 0.$$

Пусть $\sigma_0 = \Pi\psi(0)$, тогда

$$(14) \quad \Pi\psi^T(s) = \sigma_0^TG(s), \quad \Pi\psi^T(s)D_4 = \sigma_0^T\Pi\Phi(s), \quad s \leq 0,$$

где

$$(15) \quad \Pi\Phi(s) = G(s)D_4, \quad s \leq 0,$$

а $G(s)$, $s \leq 0$, – $(n_2 \times n_2)$ -матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(16) \quad \frac{dG}{ds} = -GB, \quad G(0) = E_{n_2}.$$

В силу неявного критерия управляемости [11] при выполнении предположения 3 матрица

$$(17) \quad S_2 = \int_{-\infty}^0 \Pi\Phi(s)P^{-1}\Pi\Phi^T(s)ds$$

будет невырожденной, а поскольку, как следует из (13), (14) и формулы Коши,

$$(18) \quad y^*(0) = S_2\sigma_0,$$

то оптимальному управлению во второй базовой задаче соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных.

5. Третья базовая задача

Третья базовая задача имеет вид

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= C_3 z + D_3 u, \quad z(0) = C_3^{-1} D_3 ((\bar{u}(t^*) + u^*(0)), \\ z(-\infty) &= 0, \quad J_3(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P u d\tau \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Предположение 4. Выполнено условие управляемости

$$\text{rank} \left(D_3, C_3 D_3, C_3^2 D_3, \dots, C_3^{n_3-1} D_3 \right) = n_3.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений в третьей базовой задаче. Отсюда следует, что задача (19) имеет единственное решение [9] и является нормальной. В этом случае принцип максимума [10] для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть $u_*(\tau)$, $z_*(\tau)$, $\tau \leq 0$, – оптимальные управление и траектория в задаче (19), тогда существует такое решение $Q\psi(\tau)$, $\tau \leq 0$, сопряженной системы

$$\frac{d}{d\tau} Q\psi = -C_3^T Q\psi,$$

что выполняется условие

$$Q\psi^T(\tau) D_3 u_*(\tau) - \frac{1}{2} u_*^T(\tau) P u_*(\tau) = \max_{u \in R^r} \left(Q\psi^T(\tau) D_3 u - \frac{1}{2} u^T P u \right), \quad \tau \leq 0.$$

Отсюда непосредственно следует

$$(20) \quad u_*(\tau) = P^{-1} D_3^T Q\psi(\tau), \quad \tau \leq 0.$$

Пусть $\chi_0 = Q\psi(0)$, тогда

$$(21) \quad Q\psi^T(\tau) = \chi_0^T G_1(\tau), \quad Q\psi^T(\tau) D_3 = \chi_0^T Q\Phi(\tau), \quad \tau \leq 0,$$

где

$$(22) \quad Q\Phi(\tau) = G_1(\tau) D_3, \quad \tau \leq 0,$$

а $G_1(\tau)$, $\tau \leq 0$, – $(n_3 \times n_3)$ -матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(23) \quad \frac{dG_1}{d\tau} = -G_1 C_3, \quad G_1(0) = E_{n_3}.$$

В силу неявного критерия управляемости [11] при выполнении предположения 4 матрица

$$(24) \quad S_3 = \int_{-\infty}^0 Q\Phi(\tau)P^{-1}Q\Phi^T(\tau)d\tau$$

будет невырожденной, а поскольку, как следует из (20), (21) и формулы Коши,

$$(25) \quad z_*(0) = S_3\chi_0,$$

то оптимальному управлению в третьей базовой задаче соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных.

Подчеркнем, что единственная информация о решениях второй и третьей базовых задач, которая используется в дальнейшем при построении асимптотически субоптимальных управлений, – это начальные значения σ_0 , χ_0 векторов сопряженных переменных. Нет необходимости строить оптимальные управления $u^*(s)$, $s \leq 0$, и $u_*(\tau)$, $\tau \leq 0$, что, впрочем, и невозможно, если задача решается численно. Во второй и третьей базовых задачах гамильтониан вдоль оптимального управления равен нулю. Воспользовавшись этим свойством при $s = 0$ и $\tau = 0$, получаем условия, которым удовлетворяют векторы σ_0 и χ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_0^T D_4 P^{-1} D_4^T \sigma_0 + \sigma_0 D_4 \bar{u}(t^*) &= 0, \\ \frac{1}{2}\chi_0^T D_3 P^{-1} D_3^T \chi_0 + \chi_0 D_3 (\bar{u}(t^*) + P^{-1} D_4^T \sigma_0) &= 0. \end{aligned}$$

После решения базовых задач найдем векторы

$$(26) \quad \begin{aligned} \nu_0 &= \sigma_0 - ((B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1})^T \lambda_0, \\ \eta_0 &= \chi_0 - (C_1 C_3^{-1})^T \lambda_0 + (C_2 C_3^{-1})^T \nu_0 \end{aligned}$$

и сформируем матрицу

$$(27) \quad I_0 = \begin{pmatrix} S_1 & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times n_3} \\ I_{21} & S_2 & 0_{n_2 \times n_3} \\ I_{31} & I_{32} & S_3 \end{pmatrix}$$

размеров $(n_1 + n_2 + n_3) \times (n_1 + n_2 + n_3)$. Блоки S_1 , S_2 , S_3 определены ранее формулами (11), (17), (24), а

$$\begin{aligned} I_{21} &= -B^{-1} (A_2 - C_2 C_3^{-1} A_3) S_1 + (D_2 - C_2 C_3^{-1} D_3) + S_2 (B^{-1} D_4)^T, \\ I_{31} &= -C_3^{-1} (A_3 S_1 + B_2 I_{21} + D_3 P^{-1} D_0) + S_3 (C_3^{-1} D_3)^T, \\ I_{32} &= -C_3^{-1} (B_2 S_2 + D_3 P^{-1} D_0) + S_3 (C_3^{-1} D_3)^T. \end{aligned}$$

Как было отмечено выше, S_1 , S_2 , S_3 – невырожденные матрицы, а тогда $\det I_0 \neq 0$.

6. Асимптотический анализ решения исходной задачи

Говорить об асимптотически субоптимальных управлениях можно лишь в том случае, когда задача (1)–(3) имеет решение. Покажем, что при выполнении предположений 1–4 в задаче (1)–(3) с достаточно малым μ существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [10] допускает следующую формулировку: пусть $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, – оптимальное управление в задаче (1)–(3), тогда существует такое решение $\psi_1^0(t, \mu)$, $\psi_2^0(t, \mu)$, $\psi_3^0(t, \mu)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -A_1^T \psi_1 - A_2^T \psi_2 - A_3^T \psi_3, \\ \mu \dot{\psi}_2 &= -B_1^T \psi_1 - B_2^T \psi_2 - B_3^T \psi_3, \\ \mu^2 \dot{\psi}_3 &= -C_1^T \psi_1 - C_2^T \psi_2 - C_3^T \psi_3, \end{aligned}$$

что

$$(29) \quad u^0(t, \mu) = P^{-1} (D_1^T \psi_1(t, \mu) + D_2^T \psi_2(t, \mu) + D_3^T \psi_3(t, \mu)), \quad t \in T.$$

Теорема 1. При выполнении предположений 1–4 задача (1)–(3) имеет единственное решение $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, которое является нормальной экстремалью и представимо в виде (29), где $(\psi_1^0(t, \mu), \psi_2^0(t, \mu), \psi_3^0(t, \mu))$, $t \in T$, – вектор сопряженных переменных, соответствующий в силу принципа максимума оптимальному управлению. Величины $\lambda(\mu) = \psi_1^0(t^, \mu)$, $\nu(\mu) = \psi_2^0(t^*, \mu)$, $\eta(\mu) = \psi_3^0(t^*, \mu)$ допускают асимптотические разложения*

$$(30) \quad \lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k, \quad \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \nu_k, \quad \eta(\mu) \sim \eta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \eta_k,$$

в которых ν_0 , η_0 задаются формулами (26), а λ_0 , σ_0 , χ_0 – начальные значения сопряженных переменных в базовых задачах.

Доказательство. Введем в рассмотрение векторы $\theta = (\lambda, \nu, \eta)$, $\theta_0 = (\lambda_0, \nu_0, \eta_0)$ и обозначим через $\psi_1(t, \theta, \mu)$, $\psi_2(t, \theta, \mu)$, $\psi_3(t, \theta, \mu)$, $t \in T$, $\theta \in R^{n_1+n_2+n_3}$, решение сопряженной системы (28) с начальными условиями

$$(31) \quad \psi_1(t^*) = \lambda, \quad \psi_2(t^*) = \nu, \quad \psi_3(t^*) = \eta.$$

Пусть далее $x(t, \theta, \mu)$, $y(t, \theta, \mu)$, $z(t, \theta, \mu)$, $t \in T$, $\theta \in R^{n_1+n_2+n_3}$, – траектория системы (1), порожденная управлением

$$(32) \quad u(t, \theta, \mu) = P^{-1} (D_1^T \psi_1(t, \theta, \mu) + D_2^T \psi_2(t, \theta, \mu) + D_3^T \psi_3(t, \theta, \mu)), \quad t \in T.$$

Покажем, что левые части уравнений

$$(33) \quad x(t^*, \theta, \mu) = 0, \quad y(t^*, \theta, \mu) = 0, \quad z(t^*, \theta, \mu) = 0$$

допускают асимптотические разложения по целым степеням малого параметра, и получим формулы для коэффициентов разложений.

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $F(t, \mu)$, $t \in T$, размеров $(n_1 + n_2 + n_3) \times (n_1 + n_2 + n_3)$ как решение начальной задачи

$$(34) \quad \dot{F} = -FA(\mu), \quad F(t^*) = E_{n_1+n_2+n_3}.$$

Решение этого сингулярно возмущенного уравнения удобно представлять в блочном виде

$$F(t, \mu) = \begin{pmatrix} F_1(t, \mu) & F_2(t, \mu) & F_3(t, \mu) \\ F_4(t, \mu) & F_5(t, \mu) & F_6(t, \mu) \\ F_7(t, \mu) & F_8(t, \mu) & F_9(t, \mu) \end{pmatrix},$$

где F_i , $i = \overline{1, 9}$, – матрицы размеров $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_1 \times n_3$, $n_2 \times n_1$, $n_2 \times n_2$, $n_2 \times n_3$, $n_3 \times n_1$, $n_3 \times n_2$, $n_3 \times n_3$ соответственно. С помощью метода пограничных функций [12] они могут быть разложены в асимптотические ряды:

$$(35) \quad F_i(t, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (F_{ik}(t) + \Pi_k F_i(s) + Q_k F_i(\tau)),$$

$$s = (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t^*)/\mu^2, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, 9}.$$

Подчеркнем, что это равномерные по $t \in T$ асимптотические разложения. Отметим как существенный факт также то, что для матричных функций $\Pi_k F_i(s)$, $s \leq 0$, $Q_k F_i(\tau)$, $\tau \leq 0$, называемых пограничными членами, имеют место оценки

$$(36) \quad \|\Pi_k F_i(s)\| \leq \beta_{1k} \exp(\gamma_{1k}s), \quad \|Q_k F_i(s)\| \leq \beta_{2k} \exp(\gamma_{2k}s)$$

для всех $i = \overline{1, 9}$, $k = 0, 1, \dots$, где β_{1k} , β_{2k} , γ_{1k} , γ_{2k} – положительные постоянные. Приведем несколько старших коэффициентов разложений (35), которые понадобятся при доказательстве теоремы:

$$(37) \quad \begin{aligned} F_{10} &= F_0, \quad F_{40} = KF_0, \quad F_{70} = MF_0, \quad F_{i0} = 0, \quad i = 2, 3, 5, 6, 8, 9, \\ F_{21} &= F_0 L, \quad F_{51} = KF_0 L, \quad F_{81} = MF_0 L, \quad F_{i1} = 0, \quad i = 3, 6, 9, \\ F_{32} &= -F_0(C_1 + LC_2)C_3^{-1}, \quad F_{62} = -KF_0(C_1 + LC_2)C_3^{-1}, \\ F_{92} &= -MF_0(C_1 + LC_2)C_3^{-1}, \\ \Pi_0 F_4 &= -GK, \quad \Pi_0 F_5 = G, \quad \Pi_0 F_7 = C_3^{-1} B_3 GK, \\ \Pi_0 F_8 &= -C_3^{-1} B_3 G, \quad \Pi_0 F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 6, 9, \\ \Pi_1 F_2 &= -LG, \quad \Pi_1 F_3 = 0, \quad \Pi_1 F_6 = -GC_2 C_3^{-1}, \\ \Pi_1 F_9 &= C_3^{-1} B_3 GC_2 C_3^{-1}, \quad \Pi_2 F_3 = LGC_2 C_3^{-1}, \\ Q_0 F_i &= 0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad Q_0 F_7 = G_1 C_3^{-1} A_3, \\ Q_0 F_8 &= G_1 C_3^{-1} B_3, \quad Q_9 F_0 = G_1, \\ Q_1 F_2 &= 0, Q_1 F_3 = 0, \quad Q_1 F_5 = C_2 C_3^{-1} G_1 C_3^{-1} B_3, \\ Q_1 F_6 &= C_2 C_3^{-1} G_1, \quad Q_2 F_3 = C_1 C_3^{-1} G_1. \end{aligned}$$

Здесь

$K = -B^{-1}(A_2 - C_2 C_3^{-1} A_3)$, $M = -C_3^{-1}(A_3 - B_3 K)$, $L = -(B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1}$,
а F_0 , G , G_1 – соответственно решения уравнений (9), (16), (23).

Заметим, что

$$\begin{aligned}\psi_1^T(t, \theta, \mu) &= \lambda^T F_1(t, \mu) + \mu \nu^T F_4(t, \mu) + \mu^2 \eta^T F_7(t, \mu), \\ \mu \psi_2^T(t, \theta, \mu) &= \lambda^T F_2(t, \mu) + \mu \nu^T F_5(t, \mu) + \mu^2 \eta^T F_8(t, \mu), \\ \mu^2 \psi_3^T(t, \theta, \mu) &= \lambda^T F_3(t, \mu) + \mu \nu^T F_6(t, \mu) + \mu^2 \eta^T F_9(t, \mu).\end{aligned}$$

Отсюда из (35), (37) следует, что имеют место асимптотические разложения

$$(38) \quad \begin{aligned}\psi_i(t, \theta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\psi_{ik}(t, \theta) + \Pi_k \psi_i(s, \theta) + Q_k \psi_i(\tau, \theta)), \\ s &= (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t^*)/\mu^2, \quad t \in T, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

в которых

$$(39) \quad \begin{aligned}\psi_{10}^T(t, \theta) &= \lambda^T F_0(t), \quad \psi_{20}^T(t, \theta) = \lambda^T F_0(t) L, \\ \psi_{30}^T(t, \theta) &= -\lambda^T F_0(t) (C_1 - L C_2) C_3^{-1}, \\ \Pi_0^T \psi_1(s, \theta) &= 0, \quad \Pi_0^T \psi_2(s, \theta) = -(\lambda^T L - \nu^T) G(s), \\ \Pi_0^T \psi_3(s, \theta) &= (\lambda^T L - \nu^T) G(s) C_2 C_3^{-1}, \\ Q_0^T \psi_1(\tau, \theta) &= 0, \quad Q_0^T \psi_2(\tau, \theta) = 0, \\ Q_0^T \psi_3(\tau, \theta) &= (\lambda^T C_1 C_3^{-1} + \nu^T C_2 C_3^{-1} + \eta^T) G_1(\tau), \\ \psi_{1k}^T(t, \theta) &= \lambda^T F_{1k}(t) + \nu^T F_{4,k-1}(t) + \eta^T F_{7,k-2}(t), \\ \psi_{2k}^T(t, \theta) &= \lambda^T F_{2,k+1}(t) + \nu^T F_{5,k}(t) + \eta^T F_{8,k-1}(t), \\ \psi_{3k}^T(t, \theta) &= \lambda^T F_{3,k+2}(t) + \nu^T F_{6,k+1}(t) + \eta^T F_{9,k}(t), \\ \Pi_k^T \psi_1(s, \theta) &= \lambda^T \Pi_k F_1(s) + \nu \Pi_{k-1} F_4(s) + \eta^T \Pi_{k-2} F_7(s), \\ \Pi_k^T \psi_2(s, \theta) &= \lambda^T \Pi_{k+1} F_2(s) + \nu \Pi_k F_5(s) + \eta^T \Pi_{k-1} F_8(s), \\ \Pi_k^T \psi_3(s, \theta) &= \lambda^T \Pi_{k+2} F_3(s) + \nu \Pi_{k+1} F_6(s) + \eta^T \Pi_k F_9(s), \\ Q_k^T \psi_1(\tau, \theta) &= \lambda^T Q_k F_1(\tau) + \nu^T Q_{k-1} F_4(\tau) + \eta^T Q_{k-2} F_7(\tau), \\ Q_k^T \psi_2(\tau, \theta) &= \lambda^T Q_{k+1} F_2(\tau) + \nu^T Q_k F_5(\tau) + \eta^T Q_{k-1} F_8(\tau), \\ Q_k^T \psi_3(\tau, \theta) &= \lambda^T Q_{k+2} F_3(\tau) + \nu^T Q_{k+1} F_6(\tau) + \eta^T Q_k F_9(\tau), \\ F_{7,-1}(t) &= 0, \quad \Pi_{-1} F_7(s) = 0, \quad Q_{-1} F_7(\tau) = 0, \\ k &\geq 1, \quad t \in T, \quad s \leq 0, \quad \tau \leq 0.\end{aligned}$$

Эти разложения будут равномерными в области $\|\theta - \theta_0\| \leq \epsilon_0$, $t \in T$, где ϵ_0 – некоторое положительное число. Отметим, что из (7), (14), (21), (26),

(39) следует

$$\begin{aligned}
 \psi_{10}(t, \theta_0) &= \psi^0(t), \quad \psi_{20}(t, \theta_0) = L^T \psi^0(t), \\
 \psi_{30}(t, \theta_0) &= -((C_1 - LC_2)C_3^{-1})^T \psi^0(t), \quad t \in T, \\
 \Pi_0 \psi_2(s, \theta_0) &= \Pi \psi(s), \quad \Pi_0 \psi_3(s, \theta_0) = -(C_2 C_3^{-1})^T \Pi \psi(s), \quad s \leq 0, \\
 Q_0 \psi_3(\tau, \theta_0) &= Q \psi(\tau), \quad \tau \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

В силу (38) управление (29) также допускает асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
 u(t, \theta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (u_k(t, \theta) + \Pi_k u(s, \theta) + Q_k u(\tau, \theta)), \\
 s &= (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t^*)/\mu^2, \quad t \in T,
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_k(t, \theta) &= P^{-1}(D_1^T \psi_{1k}(t, \theta) + D_2^T \psi_{2k}(t, \theta) + D_3^T \psi_{3k}(t, \theta)), \\
 \Pi_k u(s, \theta) &= P^{-1}(D_1^T \Pi_k \psi_1(s, \theta) + D_2^T \Pi_k \psi_2(s, \theta) + D_3^T \Pi_k \psi_3(s, \theta)), \\
 Q_k u(\tau, \theta) &= P^{-1}(D_1^T Q_k \psi_1(\tau, \theta) + D_2^T Q_k \psi_2(\tau, \theta) + D_3^T Q_k \psi_3(\tau, \theta)), \\
 t &\in T, \quad s \leq 0, \quad \tau \leq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Поскольку наряду с формулами (5), (6), (13), (20), (40) выполняются условия $\Pi_0 \psi_1(s, \theta) = 0$, $Q_0 \psi_1(\tau, \theta) = 0$, $Q_0 \psi_2(\tau, \theta) = 0$, то

$$\begin{aligned}
 u_0(t, \theta_0) &= \bar{u}(t), \quad t \in T, \quad \Pi_0 u(s, \theta_0) = u^*(s), \quad s \leq 0, \\
 Q_0 u(\tau, \theta_0) &= u_*(\tau), \quad \tau \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

В силу формулы Коши имеем

$$\begin{pmatrix} x(t^*, \theta, \mu) \\ y(t^*, \theta, \mu) \\ z(t^*, \theta, \mu) \end{pmatrix} = F(t_*, \mu) \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} + \int_{t_*}^{t^*} F(t, \mu) D(\mu) u(t, \theta, \mu) dt.$$

Из (5), (35)–(39), (41), (42) следует, что эта вектор-функция допускает асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
 x(t^*, \theta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(\theta), \quad y(t^*, \theta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(\theta), \\
 z(t^*, \theta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(\theta),
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

в котором

$$\begin{aligned}
(45) \quad & x_0(\theta) = F_0(t_*)x_* + \int_{t_*}^{t^*} F_0(t)D_0u_0(t, \theta)dt, \\
& y_0(\theta) = Kx_0(\theta) + \int_{-\infty}^0 (G(s)D_4(u_0(t^*, \theta) + \Pi_0u(s, \theta)))ds, \\
& z_0(\theta) = Mx_0(\theta) + \int_{-\infty}^0 -C_3^{-1}B_3G(s)D_4(u_0(t^*, \theta) + \Pi_0u(s, \theta))ds + \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 G_1(\tau)D_3(u_0(t^*, \theta) + \Pi_0u(0, \theta) + Q_0u(\tau, \theta))d\tau, \\
& x_k(\theta) = F_{1k}(t^*)x_* + F_{2k}(t^*)y_* + F_{3k}(t^*)z_* + \int_{t_*}^{t^*} \sum_{p=0}^k (F_{1,k-p}(t)D_1u_p(t, \theta))dt + \\
& \quad + \int_{t_*}^{t^*} \sum_{p=0}^k (F_{2,k-p}(t)D_2u_p(t, \theta))dt + \int_{t_*}^{t^*} \sum_{p=2}^{k+2} (F_{3,k+2-p}(t)D_3u_p(t, \theta))dt + \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k-1} ((F_{1,k-1-p}(t^*) + \Pi_{k-1-p}F_1(s))D_1(u_p(t^*, \theta) + \Pi_pu(s, \theta)))ds + \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^k ((F_{2,k-p}(t^*) + \Pi_{k-p}F_2(s))D_2(u_p(t^*, \theta) + \Pi_pu(s, \theta)))ds + \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k+1} ((F_{3,k-p+1}(t^*) + \Pi_{k+1-p}F_3(s))D_3(u_p(t^*, \theta) + \Pi_pu(s, \theta)))ds + \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k-2} ((F_{1,k-2-p}(t^*) + \Pi_{k-2-p}F_1(0) + Q_{k-2-p}F_1(\tau))D_1(u_p(t^*, \theta) + \\
& \quad \quad + \Pi_pu(0, \theta)) + Q_pu(\tau, \theta))d\tau + \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k-1} ((F_{2,k-1-p}(t^*) + \Pi_{k-1-p}F_2(0) + Q_{k-1-p}F_2(\tau))D_2u_p(t^*, \theta) + \\
& \quad \quad + \Pi_pu(0, \theta)) + Q_pu(\tau, \theta))d\tau + \\
& \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^k ((F_{3,k-p}(t^*) + \Pi_{k-p}F_3(0) + Q_{k-p}F_3(\tau))D_3(u_p(t^*, \theta) + \\
& \quad \quad + \Pi_pu(0, \theta)) + Q_pu(\tau, \theta))d\tau, \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

Для $y_k(\theta)$, $z_k(\theta)$, $k \geq 1$, имеют место аналогичные формулы с той лишь разницей, что матрицы F_{1i} , F_{2i} , F_{3i} , $\Pi_i F_1$, $\Pi_i F_2$, $\Pi_i F_3$, $Q_i F_1$, $Q_i F_2$, $Q_i F_3$ заменяются в первом случае на F_{4i} , F_{5i} , F_{6i} , $\Pi_i F_4$, $\Pi_i F_5$, $\Pi_i F_6$, $Q_i F_4$, $Q_i F_5$, $Q_i F_6$, а во втором – на F_{7i} , F_{8i} , F_{9i} , $\Pi_i F_7$, $\Pi_i F_8$, $\Pi_i F_9$, $Q_i F_7$, $Q_i F_8$, $Q_i F_9$.

С помощью теоремы о неявной функции убедимся, что система (33) однозначно разрешима относительно θ при достаточно малых μ . Запишем ее в виде

$$(46) \quad R(\theta, \mu) = 0.$$

Согласно (44) имеет место равномерное в области $\|\theta - \theta_0\| \leq \epsilon_0$ асимптотическое разложение

$$(47) \quad R(\theta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k R_k(\theta),$$

в котором $R_k(\theta) = (x_k(\theta), y_k(\theta), z_k(\theta))$.

Положим $R(\theta, 0) = R_0(\theta)$, тогда вектор-функция $R(\theta, \mu)$ будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора θ в области $\|\theta - \theta_0\| < \epsilon_0$, $0 \leq \mu < \mu_0$, где μ_0 – достаточно малое положительное число.

В силу (43), (45) и формулы Коши имеем $x_0(\theta_0) = x^0(t^*) = 0$. Матричная функция $G(s)$, $s \leq 0$, является решением начальной задачи (16), и поскольку $G(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow -\infty$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 G(s) D_4 u_0(t^*, \theta_0) ds &= \int_{-\infty}^0 \left(-\frac{dG(s)}{ds} B^{-1} D_4(u_0(t^*, \theta_0)) \right) ds = \\ &= -B^{-1} D_4(u_0(t^*, \theta_0)). \end{aligned}$$

Вместе с тем из (43) и формулы Коши следует

$$\int_{-\infty}^0 G(s) D_4 \Pi_0 u(s, \theta_0) ds = -y^*(0) = B^{-1} D_4 u_0(t^*, \theta_0).$$

Отсюда и из второй формулы (45) получаем $y_0(\theta_0) = 0$.

Аналогично, поскольку матричная функция $G_1(\tau)$, $\tau \leq 0$, является решением начальной задачи (23) и $G_1(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$, то

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 G_1(\tau) D_3 (u_0(t^*, \theta_0) + \Pi_0 u(0, \theta_0)) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(-\frac{dG_1(\tau)}{d\tau} C_3^{-1} D_3(u_0(t^*, \theta_0) + \Pi_0 u(0, \theta_0)) \right) d\tau = \\ &= -C_3^{-1} D_3(u_0(t^*, \theta_0) + \Pi_0 u(0, \theta_0)). \end{aligned}$$

Вместе с тем из (43) и формулы Коши следует

$$\int_{-\infty}^0 G_1(\tau) D_3 Q_0 u(\tau, \theta_0) d\tau = -z^*(0) = C_3^{-1} D_3 (u_0(t^*, \theta_0) + \Pi_0 u(0, \theta_0)).$$

Отсюда и из третьей формулы (45) с учетом того, что

$$\int_{-\infty}^0 -C_3^{-1} B_3 G(s) D_4 (u_0(t^*, \theta) + \Pi_0(s, \theta)) ds = C_3^{-1} B_3 (Kx_0(\theta_0) - y_0(\theta_0)) = 0,$$

получаем $z_0(\theta_0) = 0$. Таким образом, $R(\theta_0, 0) = R_0(\theta_0) = 0$.

Непосредственным дифференцированием вектор-функции (45) с учетом (8), (15), (22), (37), (39), (42) убеждаемся, что $\partial R(\theta_0, 0)/\partial \theta = \partial R_0(\theta_0)/\partial \theta = I_0$ (см. (27)). Поскольку эта матрица Якоби является невырожденной, то для системы (46) или, что то же самое, (33) выполнены условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме в некоторой правосторонней окрестности нуля $0 \leq \mu < \mu_1$ однозначно определена вектор-функция $\theta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu), \eta(\mu))$, удовлетворяющая уравнениям (33). Она непрерывна, и $\theta(0) = \theta_0 = (\lambda_0, \nu_0, \eta_0)$. Это предполагает, что управление $u^0(t, \mu) = u(t, \theta, \mu)$, $t \in T$, является допустимым в задаче (1)–(3) с достаточно малым μ . Оно удовлетворяет принципу максимума с вектором сопряженных переменных $\psi_1^0(t, \mu) = \psi_1(t, \theta(\mu), \mu)$, $\psi_2^0(t, \mu) = \psi_2(t, \theta(\mu), \mu)$, $\psi_3^0(t, \mu) = \psi_3(t, \theta(\mu), \mu)$, $t \in T$, причем это нормальная экстремаль. Отсюда следует, что $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, – единственное оптимальное управление в задаче (1)–(3).

Как уже отмечалось, разложение (47) является равномерным в области $\|\theta - \theta_0\| < \epsilon_0$, а его коэффициенты – линейные функции. Тогда для решения $\theta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu), \eta(\mu))$ системы (33) будут иметь место асимптотические разложения (30). Теорема доказана.

7. Построение асимптотически субоптимальных управлений

Продолжим изложение алгоритма построения асимптотических приближений к решению задачи (1)–(3), опираясь на утверждения теоремы и формулы, полученные при ее доказательстве.

Вектор-функция

$$u^{(0)}(t, \mu) = P^{-1}(D_1^T \psi_1(t, \theta_0, \mu) + D_2^T \psi_2(t, \theta_0, \mu) + D_3^T \psi_3(t, \theta_0, \mu)), \quad t \in T,$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Заметим, что ее можно сформировать непосредственно после решения базовых задач. Асимптотически субоптимальное управление N -го порядка ($N \geq 1$) имеет вид

$$(48) \quad u^{(N)}(t, \mu) = P^{-1}(D_1^T \psi_1(t, \theta^{(N)}(\mu), \mu) + D_2^T \psi_2(t, \theta^{(N)}(\mu), \mu) + D_3^T \psi_3(t, \theta^{(N)}(\mu, \mu)), \quad t \in T,$$

где

$$(49) \quad \theta^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^N \mu^k \theta_k, \quad \theta_k = (\lambda_k, \nu_k, \eta_k).$$

Для построения управления (48) нужно найти коэффициенты асимптотических рядов (30). Это можно сделать методом неопределенных коэффициентов, опираясь на разложение (47). Конкретнее, разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию

$$\sum_{k=0}^N \mu^k R_k(\theta^{(N)}(\mu))$$

по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения к нулю (начиная с коэффициента при μ). В результате получим невырожденные системы линейных алгебраических уравнений для последовательного нахождения векторов θ_k , $k = \overline{1, N}$:

$$(50) \quad I_0 \theta_1 = -R_1(\theta_0), \quad I_0 \theta_k = -R_k(\theta_0) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial R_j(\theta_0)}{\partial \theta} \theta_{k-j}, \quad k \geq 2.$$

Здесь учтено, что коэффициенты разложений (47) есть линейные вектор-функции. Заметим, что в силу структуры (27) матрицы Якоби I_0 системы (50) расщепляются. Последовательно решая эти системы, находим векторы θ_k , $k = \overline{1, N}$, и составляем полиномы (49). Управление (48), как отмечено выше, будет асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка в исходной задаче. Чтобы построить это управление, нужно найти решение задачи Коши для сопряженной системы (28) с начальными условиями

$$\psi_1(t^*) = \sum_{k=0}^N \mu^k \lambda_k, \quad \psi_2(t^*) = \sum_{k=0}^N \mu^k \nu_k, \quad \psi_3(t^*) = \sum_{k=0}^N \mu^k \eta_k.$$

Сопряженная система является сингулярно возмущенной и, следовательно, жесткой. Интегрирования жестких систем можно избежать, заменив в (48) вектор-функции $\psi_i(t, \theta, \mu)$, $i = \overline{1, 3}$, их асимптотическими приближениями

$$\begin{aligned} \psi_i^{(N)}(t, \theta, \mu) &= \sum_{k=0}^N \mu^k (\psi_{ik}(t, \theta) + \Pi_k \psi_i(s, \theta) + Q_k \psi_i(\tau, \theta)), \\ s &= (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t^*)/\mu^2, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Вектор-функция

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(N)}(t, \mu) &= P^{-1}(D_1^T \psi_1^{(N)}(t, \theta^{(N)}(\mu), \mu) + D_2^T \psi_2^{(N)}(t, \theta^{(N)}(\mu), \mu) + \\ &\quad + D_3^T \psi_3^{(N)}(t, \theta^{(N)}(\mu, \mu))), \quad t \in T, \end{aligned}$$

наряду с (48) будет асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка в задаче (1)–(3). В частности, как следует из (5), (6), (13), (20), (39), (40),

$$(51) \quad \begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(t, \mu) &= P^{-1} \left(D_0^T \psi^{(0)}(t) + D_4^T \Pi \psi((t - t^*)/\mu) + D_3^T Q \psi((t - t)/\mu^2) \right) = \\ &= \bar{u}(t) + u^*((t - t^*)/\mu) + u_*((t - t)/\mu^2), \quad t \in T. \end{aligned}$$

То, что это есть асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка, видно также из формул (41), (43). Заметим, что управление (51) не зависит от начальных состояний y_* , z_* векторов быстрых переменных и при малых μ будет существенно отличаться от решения $\bar{u}(t)$, $t \in T$, первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т.е. в некоторой левосторонней окрестности точки t^* .

Построенную асимптотику можно использовать для нахождения оптимального управления $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, и в задаче (1)–(3) с заданным значением μ . Для этого нужно применить процедуру доводки [13], т.е. найти методом Ньютона корни системы (46), взяв в качестве начального приближения $\theta^{(N)}(\mu)$. Чтобы избежать интегрирования жестких систем, вместо матрицы $\partial R(\theta, \mu)/\partial \theta$ можно воспользоваться ее приближением I_0 .

8. Асимптотически субоптимальный синтез

Программные асимптотически субоптимальные управления, разумеется, зависят от начального состояния (x_*, y_*, z_*, t_*) динамической системы. Ранее такая зависимость не учитывалась, поскольку начальное состояние считалось заданным. В настоящем разделе, который посвящен построению асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка, будем интересоваться именно этой зависимостью. В дальнейшем будем рассматривать матрицу C как функцию t_* , $t_* < t^*$. Момент t^* по-прежнему считается заданным.

Из равенства (10) следует

$$(52) \quad \psi^0(t^*) = \lambda_0 = -S_1^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*,$$

что вместе с (7) влечет за собой

$$(53) \quad \psi^0(t_*) = -F_0^T(t_*)S_1^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*.$$

В силу (6) и (18) имеет место

$$(54) \quad \Pi \psi(0) = \sigma_0 = S_2^{-1}y^*(0) = -S_2^{-1}B^{-1}D_4\bar{u}(t^*) = -S_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^T\psi^0(t^*).$$

Отсюда с учетом (14) и (52) получаем

$$(55) \quad \Pi \psi(s) = G^T(s)S_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^TF_0^T(t_*)S_1^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*, \quad s \leq 0.$$

В силу (6), (13), (25) имеем

$$\begin{aligned} Q\psi(0) &= \chi_0 = S_3^{-1}z^*(0) = -S_3^{-1}C_3^{-1}D_3(\bar{u}(t^*) + u^*(0)) = \\ &= -S_3^{-1}C_3^{-1}D_3P^{-1}(D_0^T\psi(t^*) + D_4^T\Pi\psi(0)). \end{aligned}$$

Из полученного выражения с учетом (21), (52), (54) следует

$$Q\psi(\tau) = G_1^T(\tau)S_3^{-1}C_3^{-1}D_3P^{-1}(D_0^T + D_4^TS_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^T)C^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*.$$

Тогда, как видно из формул (51), (53), (55), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в начальный момент времени представимо в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(t_*, \mu) &= P^{-1}(D_0^T - D_4^TG^T((t_* - t^*)/\mu)S_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^TF_0^T(t_*) - \\ &\quad - D_3^TG_1((t_* - t^*)/\mu^2)S_3^{-1}C_3^{-1}D_3P^{-1} \times \\ &\quad \times (D_0^T + D_4^TS_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^T))S_1^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*. \end{aligned}$$

Поскольку (x_*, y_*, z_*, t_*) – произвольное начальное состояние динамической системы, то по определению 2 вектор-функция

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(x, y, z, t, \mu) &= \\ (56) \quad &= P^{-1}\left(D_0^T - D_4^TG^T((t - t^*)/\mu)S_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^TF_0^T(t) - \right. \\ &\quad \left. - D_3^TG_1((t - t^*)/\mu^2)S_3^{-1}C_3^{-1}D_3P^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times (D_0^T + D_4^TC_0^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^T)\right)S_1^{-1}(t)F_0(t)x \end{aligned}$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в исходной задаче. Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции быстрых переменных.

9. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу, которая является моделью процесса управления горизонтальным прямолинейным движением двух тел с существенно различными малыми массами и упругой связью:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y, \quad \dot{x}_2 = z, \\ \mu\dot{y} &= -kx_1 + kx_2 - c_1y + d_1u_1, \quad \mu^2\dot{z} = kx_1 - kx_2 - c_2z + d_2u_2, \\ x_1(t_*) &= x_{*1}, \quad x_2(t_*) = x_{*2}, \quad y(t_*) = y_*, \quad z(t_*) = z_*, \\ (57) \quad x_1(t^*) &= x_2(t^*) = y(t^*) = z(t^*) = 0, \\ J(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Все постоянные в этой задаче положительны, при этом $\mu \ll 1$. Предположение 1 в данном случае выполнено.

Первая базовая задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\frac{k}{c_1}x_1 + \frac{k}{c_1}x_2 + \frac{d_1}{c_1}u_1, & \dot{x}_2 &= \frac{k}{c_2}x_1 - \frac{k}{c_2}x_2 + \frac{d_2}{c_2}u_2, \\
 x_1(t_*) &= x_{*1}, & x_2(t_*) &= x_{*2}, \\
 x_1(t^*) &= x_2(t^*) = 0, & J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min.
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Легко убедиться, что динамическая система в первой базовой задаче является вполне управляемой. В силу принципа максимума оптимальное управление в задаче (58) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1(t) &= \frac{d_1}{c_1} \left(\frac{c_1(\lambda_{01} + \lambda_{02}) - (c_1\lambda_{02} - c_2\lambda_{01}) \exp((k(c_1 + c_2)(t - t_*))/c_1c_2)}{c_1 + c_2} \right), \\
 \bar{u}_2(t) &= \frac{d_2}{c_2} \left(\frac{c_2(\lambda_{01} + \lambda_{02}) + (c_1\lambda_{02} - c_2\lambda_{01}) \exp((k(c_1 + c_2)(t - t_*))/c_1c_2)}{c_1 + c_2} \right), \\
 t &\in [t_*, t^*].
 \end{aligned}
 \tag{59}$$

Вектор $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \lambda_{02})$ вычисляется по формуле

$$\lambda_0 = S_1^{-1} F_0(t^*) x_*,
 \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_0(t) &= \begin{pmatrix} \frac{c_2 \exp((k(c_1 + c_2)(t^* - t))/c_1c_2) - c_1}{c_2 - c_1} & \frac{c_2 \exp((k(c_1 + c_2)(t^* - t))/c_1c_2) - c_2}{c_1 - c_2} \\ \frac{c_1 \exp((k(c_1 + c_2)(t^* - t))/c_1c_2) - c_1}{c_2 - c_1} & \frac{c_1 \exp((k(c_1 + c_2)(t^* - t))/c_1c_2) - c_2}{c_1 - c_2} \end{pmatrix}, \\
 t &\in [t_*, t^*], \\
 S_1 &= \int_{t_*}^{t^*} F_0(t) \begin{pmatrix} d_1^2/c_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2/c_2^2 \end{pmatrix} F_0^T(t) dt, & x_* = \begin{pmatrix} x_{*1} \\ x_{*2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

После решения задачи (58) формируется вторая базовая задача

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{ds} &= -c_1 y + d_1 u_1, & y(0) &= -\frac{d_1}{c_1} \bar{u}(t^*), \\
 y(-\infty) &= 0, & J_2(u) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u_1^2 + u_2^2) ds \rightarrow \min.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Здесь $\bar{u}(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, – решение задачи (58). Динамическая система во второй базовой задаче вполне управляема. В силу принципа максимума решение задачи (61) будет следующим:

$$u_1^*(s) = -2\bar{u}_1(t^*) \exp(c_1 s), \quad u_2^*(s) = 0, \quad s \leq 0.$$

Третья базовая задача имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= -c_2 z + d_2 u_2, \quad z(0) = -\frac{d_2}{c_2} \bar{u}_2(t^*), \\ z(-\infty) &= 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u_1^2 + u_2^2) d\tau \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Динамическая система в ней также является вполне управляемой. Из принципа максимума следует, что оптимальное управление в третьей базовой задаче представимо в виде

$$u_{*1}(\tau) = 0, \quad u_{*2}(\tau) = -2\bar{u}_2(t^*) \exp(c_2 \tau), \quad \tau \leq 0.$$

Согласно (51) управление

$$(62) \quad \begin{aligned}\bar{u}_1^0(t, \mu) &= \bar{u}_1(t) - 2\bar{u}_1(t^*) \exp(c_1(t - t^*)/\mu), \\ \bar{u}_2^0(t, \mu) &= \bar{u}_2(t) - 2\bar{u}_2(t^*) \exp(c_2(t - t^*)/\mu^2), \quad t \in [t_*, t^*],\end{aligned}$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (57).

При построении асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка будем рассматривать матрицу C в (60) как функцию t_* : $C = C(t_*)$. В рассмотренном примере

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_1/c_1 & 0 \\ 0 & d_2/c_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно (56) вектор-функция

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(0)}(x, t, \mu) &= \\ &= D_0(E_2(1 - 2 \exp((t - t^*)/\mu^2)) + 2 \exp((t - t^*)/\mu) F_0^T(t)) C^{-1}(t) F_0(t) x\end{aligned}$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в задаче (57).

Для оценки качества построенных асимптотических приближений к решению задачи (57) были найдены состояния $x_1(t^*, \mu)$, $x_2(t^*, \mu)$, $y(t^*, \mu)$, $z(t^*, \mu)$, в которые управление (62) переводит динамическую систему при конкретных значениях малого параметра в случае, когда $k = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $t_* = 0$, $t^* = 5$, $x_{*1} = 5$, $x_{*2} = -3,0$, $y_* = 2,0$, $z_* = 1$. В частности, оказалось, что

$$\begin{aligned}x_1(5, 0,1) &= 0,068161 & x_2(5, 0,1) &= 0,033727 \\ y(5, 0,1) &= -0,023323 & z(5, 0,1) &= -0,011998 \\ x_1(5, 0,025) &= 0,016755 & x_2(5, 0,025) &= 0,014029 \\ y(5, 0,025) &= -0,004879 & z(5, 0,025) &= -0,000235.\end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены с точностью до 10^{-6} .

10. Заключение

В статье предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи, которые не требуют интегрирования сингулярно возмущенных систем. При реализации предложенных алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на три невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. В статье также показывается, как можно использовать построенные асимптотические приближения для решения рассмотренной задачи при заданных значениях малого параметра.

Поскольку при доказательстве теоремы установлено, что при выполнении предположений 2–4 в исходной задаче с любым начальным состоянием динамической системы существует допустимое управление, эти предположения гарантируют полную управляемость системы (1) для достаточно малых значений μ . Этот результат впервые получен в [14].

Применяемая методика позволяет исследовать задачи, в которых имеется несколько групп быстрых переменных с иерархией скоростей по целым степеням малого параметра. При этом число задач, на которые распадается исходная задача, равно количеству групп разнотемповых переменных. Такое обобщение вносит в алгоритм не принципиальные изменения, которые легко прослеживаются на примере рассмотренной задачи. В то же время это приводит к громоздким формулам. Следует также отметить, что развитие полученных результатов на нестационарные системы с достаточно гладкими коэффициентами не вызывает принципиальных трудностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // *АиТ.* 2006. № 1. С. 3–51.
2. *Калинин А.И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // *Изв. РАН. Техн. кибернетика.* 1994. № 3. С. 104–114.
3. *Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.* Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002 – 2012 // *Int. J. Information and Systems Sciences.* 2014. V. 9. No.1. P. 1–36.
4. *Kokotovic P.V., Khalil H.K.* Singular perturbations in systems and control. New York: IEEE Press, 1986.
5. *Курина Г.А., Калашникова М.А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // *АиТ.* 2022. № 11. С. 3–61.
6. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Асимптотика решения задачи оптимизации переходного процесса в трехтемповой сингулярно возмущенной системе // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси: материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 . В трех частях. Часть 1. Минск : Беларуская навука, 2024. С. 116–117.

7. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Применение метода малого параметра к сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче оптимального управления // *АиТ.* 2016. № 5. С. 3–18.
8. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
9. *Мордухович Б.Ш.* Существование оптимальных управлений / *Совр. пробл. матем. (Итоги науки и техники)* М.: ВИНТИ, 1976. Т. 6. С. 207–271.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
11. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1973.
12. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 1963. Т. 3. № 4. С. 611–642.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Минск: Университетское, 1984.
14. *Курина Г.А.* О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем // *Матем. заметки.* 1992. 52:4. С. 56–61.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 15.09.2025

После доработки 20.04.2026

Принята к публикации 28.04.2026

Нелинейные системы

© 2026 г. К.А. ЛАСТОЧКИН, канд. физ.-мат. наук (lastconst@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ЗАДАНЫМ КАЧЕСТВОМ ПРИ ЗАДАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ. СИСТЕМЫ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ОДИН

Работа посвящена задаче управления с заданными инженерными показателями качества переходных процессов при заданных ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления динамическими системами с равной одному относительной степенью при наличии параметрической неопределенности и внешних возмущений. На основе идей использования в обратной связи дифференцируемой аппроксимации sat-функции и динамической оценки обобщенного возмущения предложен новый нелинейный робастный закон управления, который при специальном выборе параметров гарантирует решение рассматриваемой задачи. При этом процедура выбора параметров сведена к решению линейных неравенств, для которых аналитически доказано существование решений. Теоретические результаты сопровождаются иллюстративным примером.

Ключевые слова: робастное управление, переходные процессы, инженерные показатели качества, ограничения на управление, функция насыщения.

DOI: 10.7868/S2413977726100031

1. Введение

Задача управления с заданными инженерными показателями качества переходных процессов при ограничениях на сигнал управления для систем с неизвестными параметрами и внешними возмущениями является нерешенной в современной теории автоматического управления. Среди существующих попыток решения следует отметить подходы, основанные на использовании в законе управления *i)* барьерных функций [1–8], препятствующих попаданию регулируемой переменной в запретную область, и *ii)* дифференцируемых аппроксимаций sat-функции [9–13], позволяющих обеспечить заданное разработчиком значение динамической ошибки слежения за заданием с помощью ограниченного по амплитуде управления.

В упомянутых работах в рамках формальной постановки задачи учитываются ограничения только на амплитуду управления и не учитываются ограничения на его первую производную (скорость изменения). Однако исполнительные механизмы реальных объектов управления обычно имеют ограничения на скорость воспроизведения управления. Например, в летательных

аппаратах максимальная мгновенная скорость отклонения управляющих органов (элероны, рули высоты, рули направления и т.д.) всегда ограничена. Если подобные ограничения не учитывать при проектировании закона управления, то только часть из алгоритмически сформированного управления в действительности подействует на объект управления. Это может привести к нарушению заданных показателей качества переходных процессов или даже потере устойчивости замкнутой системы. Поэтому в этой работе при решении задачи управления с заданными инженерными показателями качества предлагается на этапе синтеза учитывать ограничения и на амплитуду, и на скорость изменения управления.

Цель данной статьи – обеспечение заданных инженерных показателей качества переходных процессов при заданных ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления для динамических систем с относительной степенью один при наличии параметрической неопределенности и внешних возмущений. Класс систем с относительной степенью один рассматривается для простоты изложения, а полученные результаты в будущем могут быть использованы при решении задач управления более сложными системами.

Для достижения этой цели предлагается новый закон управления, в котором пропорциональная обратная связь так же, как и в [9–13], строится с использованием специальной дифференцируемой аппроксимации sat-функции, но дополнительно подвергается фильтрации через нелинейный фильтр типа [14]. Этот прием позволяет априорно ограничить заданными значениями как амплитуду, так и скорость изменения управления, не требуя при этом ограниченности амплитуды и производной выхода системы. Кроме того, в отличие от [9–13] вместе с классической пропорциональной обратной связью в управлении предлагается использовать динамическую оценку обобщенного возмущения, выстраиваемую с помощью метода вспомогательного контура А.М. Цыкунова [15, с. 201], дополненного нелинейным фильтром [14] для ограничения на заданном уровне скорости изменения оценки обобщенного возмущения. В работе показано, что такая комбинированная нелинейная робастная обратная связь позволяет априорно ограничить амплитуду и скорость изменения управления заданными значениями и свести задачу управления с заданными показателями качества и ограничениями на амплитуду/скорость управления к задаче расчета параметров управления путем решения линейных неравенств.

Отличия предлагаемого закона управления от [1–13] состоят в следующем:

- 1) одновременно с обеспечением заданных инженерных показателей качества удастся ограничить заданными значениями амплитуду и скорость изменения управления,
- 2) процедура выбора параметров закона управления сведена к задаче решения линейных неравенств и может осуществляться численно,
- 3) совместность полученных линейных неравенств для выбора параметров закона управления показана аналитически, а не численно,

- 4) в отличие от [1–8] в обратной связи не используются барьерные функции, что исключает разрывы в обратной связи, вызванные делением на ноль и/или взятием натурального логарифма от нуля (см. рис. 4 и комментарии к нему из раздела 6),
- 5) в отличие от [9–13] предложенный закон управления *i*) содержит не только компоненту, пропорциональную ошибке слежения, но и формируемую по методу вспомогательного контура [15, с. 201] динамическую оценку обобщенного возмущения, *ii*) дополнен нелинейными фильтрами, предназначенными для ограничения скорости изменения управления.

Структура работы следующая. В разделе 2 даются основные обозначения и определения. В разделе 3 дается постановка задачи и приводятся сопроводительные комментарии. В разделе 4 излагается основной результат работы и выводится закон управления, гарантирующий заданные показатели качества при ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления. В разделе 5 проводится аналитическое сравнение разработанного закона управления с предложенным в [10]. В разделе 6 приведены результаты математического моделирования. В разделе 7 формулируются выводы и обозначаются направления дальнейших исследований.

2. Предварительные сведения

В работе приняты следующие обозначения: $t \geq t_0 \geq 0$ – переменная времени, $f : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ – функция времени, $f(t)$ – значение функции f в момент времени t , запись $F := \left\{ f(t) \in \mathbb{R}^n : |f(t)| \leq f^U, |\dot{f}(t)| \leq v^U \right\}$ обозначает пространство функций времени, у которых в момент времени t амплитуда и первая производная ограничены числами $f^U > 0, v^U > 0$, $\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – любая дифференцируемая аппроксимация функции насыщения, удовлетворяющая условиям¹:

- а) $|\sigma'(s)| = \left| \frac{\partial \sigma(s)}{\partial s} \right| \leq \kappa \in (1, 2)$ для всех $s \in \mathbb{R}$,
- б) $s\sigma(s) > 0$ для всех $s \neq 0$, $\sigma(0) = 0$,
- в) $\sigma(s) = \text{sign}\{s\}$ для всех $|s| \geq 1$,
- г) $|s| < |\sigma(s)| < 1$ для $|s| < 1$,
- д) существует $\delta \in (0, 1)$ такая, что $|s - \sigma(s)| \leq \delta$ для всех $|s| \leq 1$,
- е) существует $L > \kappa$ такая, что $|\sigma(a) - \sigma(b)| \leq L|a - b|$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$.

Например, при $\kappa \simeq 1,26$, $\delta \simeq 0,088$, $L \simeq 1,3$ условиям а)–е) удовлетворяет

$$\sigma(s) = \text{sign}\{s\} \left(1 - (1 - \min\{|s|, 1\})^{1,26} \right).$$

¹ Здесь и далее $\text{sat}\{s\} = \text{sign}\{s\} \min\{|s|, 1\}$, $\text{sign}\{s\} \in \begin{cases} 1, & s > 0 \\ [-1, 1], & s = 0 \\ -1, & s < 0. \end{cases}$

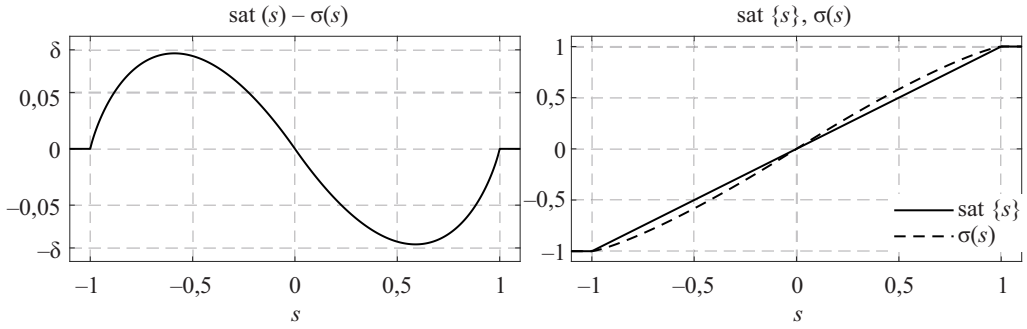


Рис. 1. Ошибка аппроксимации sat-функции.

На рис. 1 приведено сравнение sat-функции с данной функцией.

3. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему

$$(3.1) \quad \dot{y}(t) = bu(t) + f(t, y, u), \quad y(t_0) = y_0,$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый выход, $u(t) \in \mathbb{R}$ – управление, $f(t, y, u) \in \mathbb{R}$ – неизмеряемое обобщенное возмущение («сумма» параметрических и внешних возмущений), $b > 0$ – известная оценка на коэффициент усиления системы, которая для простоты и без потери общности принимается положительной.

Для системы (3.1) требуется сформировать управление $u(t)$ так, чтобы для всех $t \geq t_0$ были выполнены условия:

$$(3.2) \quad y(t) \in \mathcal{Y} := \{y(t) \in \mathbb{R}: \underline{g}(t) \leq y(t) \leq \bar{g}(t)\},$$

$$(3.3) \quad u(t) \in \mathcal{U} := \{u(t) \in \mathbb{R}: |u(t)| \leq u^U, |\dot{u}(t)| \leq v^U\},$$

где $u^U > 0$, $v^U > 0$ – известные числа, а $\underline{g}(t)$, $\bar{g}(t)$ измеряемы для всех $t \geq t_0$.

Таким образом, рассматривается задача обеспечения заданных показателей качества переходных процессов по выходу с помощью управлений из класса сигналов с ограниченной в каждый момент времени амплитудой и скоростью. Данную задачу будем решать, требуя выполнение следующих допущений.

Допущение 1. Центр множества $\mathcal{Y}$ для всех $t \geq t_0$ удовлетворяет условию:

$$g(t) \in \mathcal{G} := \{g(t) \in \mathbb{R}: |\dot{g}(t)| \leq g_1^\Delta, |\ddot{g}(t)| \leq g_2^\Delta\},$$

где $g(t) = \frac{\bar{g}(t) + \underline{g}(t)}{2}$ – измеряемый сигнал (центр множества $\mathcal{Y}$), $g_1^\Delta > 0$, $g_2^\Delta > 0$ – известные числа.

Допущение 2. Существуют и известны числа $\gamma_u \in (0, 1)$, $\gamma_v \in (0, 1)$ такие, что для всех $g(t) \in \mathcal{G}$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $y(t) \in Y$, $\mathcal{Y} \subset Y$ и всех $t \geq t_0$ верно

$$F(t) \in \mathcal{F} := \left\{ F(t) \in \mathbb{R}: |F(t)| \leq \gamma_u, \left| \dot{F}(t) \right| \leq \gamma_v \rho \right\},$$

где $F(t) := \frac{f(t, y, u) - \dot{g}(t)}{bu^U}$, $\rho = \frac{v^U}{u^U}$.

Допущение 3. $y(t_0) \in \mathcal{Y}$, где $y(t)$ – решение (3.1).

Обсуждая поставленную задачу, в первую очередь заметим, что знание коэффициента b не является ограничительным требованием. Действительно, с помощью декомпозиции

$$\beta(t, y, u)u(t) = bu(t) + \Delta_b(t, y, u)u(t)$$

при выполнении условий

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & |\Delta_b(t, y, u)| < b, \\ & \frac{1}{b} \left| \frac{d\Delta_b(t, y, u)}{dt} u(t) + \Delta_b(t, y, u) \dot{u}(t) \right| < v^U \end{aligned}$$

для всех $t \geq t_0$ и $u(t) \in \mathcal{U}$, $g(t) \in \mathcal{G}$ во внешнее возмущение $f(t, y, u)$ может быть включена компонента $\Delta_b(t, y, u)u(t)$, вызванная неопределенностью истинного коэффициента усиления $\beta(t, y, u)$. Невыполнение неравенств (3.4) может означать смену знака коэффициента усиления системы (потерю управляемости) и точно означает невыполнение допущения 2. В целом допущение 2 означает, что обобщенное возмущение («сумма» внешних и параметрических возмущений), приведенное к ресурсу управления, в множестве $\mathcal{Y}$ принадлежит такому же классу сигналов, что и имеющиеся в распоряжении управление.

Допущения 1 и 2 связаны между собой, а поэтому числа $g_1^\Delta > 0$ и $g_2^\Delta > 0$ из первого допущения не могут быть произвольными и должны удовлетворять ограничениям

$$(3.5) \quad \frac{g_1^\Delta}{bu^U} < \gamma_u, \quad \frac{g_2^\Delta}{bv^U} < \gamma_v,$$

т.е. ресурс управляющего воздействия по амплитуде (bu^U) и скорости (bv^U) должен превышать скорость и ускорение центра целевого множества. Неравенства (3.5) и допущение 3 для заданных $y(t_0)$, b , u^U , v^U всегда могут быть выполнены путем специального выбора множества $\mathcal{Y}$.

3.1. Комментарии

На первый взгляд, поставленная задача управления системой первого порядка (3.1) является несодержательной – на практике очень редко встречаются системы, описываемые дифференциальными уравнениями первого порядка. Однако следует учитывать, что с помощью специальных преобразований

и замен переменных содержательные задачи управления различными сложными системами высокого порядка могут быть сведены до рассматриваемой задачи управления системой первого порядка. Далее рассмотрим некоторые примеры таких параметризаций.

Пример 1. Рассмотрим линейную систему

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + d(t)), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы, $y(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый выход, $u(t) \in \mathbb{R}$ – управление, $d(t) \in \mathbb{R}$ – неизмеряемое возмущение, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица состояний, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – вектор коэффициентов усиления, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ – вектор, формирующий выход, пары (A, B) и (A, C) соответственно полностью наблюдаемы и управляемы. Матрицы A, B, C неизвестны, но известна относительная степень системы, которая может быть произвольной, но постоянной, т.е. $1 \leq r \leq n$, где число r определяется из соотношений $CB = 0, CAB = 0, \dots, CA^{r-1}B \neq 0$.

Согласно анализу [16, с. 21]; [17] в принятых условиях существует неизвестная, но невырожденная замена переменных

$$\begin{bmatrix} \eta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} T_0 \\ C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} x(t),$$

приводящая (3.6) к следующему виду:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_{00}\eta(t) + A_{01}\xi(t), \\ \dot{\xi}_1(t) &= \xi_2(t), \\ \dot{\xi}_j(t) &= \xi_{j+1}(t), \quad j = 2, \dots, r-1, \\ \dot{\xi}_r(t) &= \beta[u(t) + d(t) + w(t, \xi)], \\ y(t) &= \xi_1(t), \end{aligned}$$

где $\begin{bmatrix} M_0 & M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} = I$, $T_0B = 0$ и

$$\begin{aligned} A_{00} &= T_0AM_0, \quad A_{01} = T_0AM_1, \\ A_{10} &= CA^rM_0, \quad A_{11} = CA^rM_1, \quad \beta = CA^{r-1}B, \\ w(t, \xi) &= \beta^{-1}(A_{10}\eta(t) + A_{11}\xi(t)). \end{aligned}$$

Если нули передаточной функции от $u(t) + d(t)$ к $y(t)$ лежат в левой полуплоскости, то матрица A_{00} гурвицева [16, 17] и, следовательно, на всех

траекториях $\xi(t)$ сигнал $\beta^{-1}A_{10}\eta(t)$ допустимо трактовать как ограниченное внешнее возмущение.

Если дополнительно $r = 1$, то $\xi(t) := y(t)$ и из (3.7) мгновенно получаем:

$$\dot{y}(t) = bu(t) + f(t, y, u),$$

где

$$f(t, y, u) := \beta d(t) + A_{10}\eta(t) + A_{11}y(t) + (\beta - b)u(t),$$

а сигнал $\beta d(t) + A_{10}\eta(t)$ отождествлен с компонентой $f(t, \cdot, \cdot)$.

Поэтому при $r = 1$ задача расположения выхода системы (3.6) в заданном множестве (3.2) при выполнении ограничений (3.3) эквивалентна поставленной одномерной задаче.

Если $n \geq r > 1$, то будем считать, что с помощью хорошо изученных в теории автоматического управления дифференциаторов (наблюдателей производных) [14, 18, 19] для всех $t \geq t_0$ для измерения доступны оценки $\hat{\xi}(t)$ состояний $\xi(t)$. При этом предположим, что для ошибки оценивания $\tilde{\xi}(t) = \hat{\xi}(t) - \xi(t)$ и ее производной выполнены соотношения:

$$\left| \tilde{\xi}_i(t) \right| \leq \delta_1, \quad \left| \dot{\tilde{\xi}}_i(t) \right| \leq \delta_2, \quad i = 1, \dots, r,$$

где $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$.

Эти требования не являются ограничительными, поскольку существующие наблюдатели производных обеспечивают их выполнение [14].

Применим к $\hat{\xi}_1(t)$ линейный оператор:

$$\lambda^{r-1}s(t) = (p + \lambda)^{r-1} \left[\hat{\xi}_1(t) \right] = (p + \lambda)^{r-1} \left[y(t) \right] + (p + \lambda)^{r-1} \left[\tilde{\xi}_1(t) \right],$$

где $p := \frac{d}{dt}[\cdot]$, а величина $s(t)$ измеряема, поскольку может быть рассчитана по оценкам r производных выхода системы.

Дифференцируя переменную $s(t)$ по времени, можем получить:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \lambda^{1-r} \left[\dot{\xi}_r(t) + \epsilon(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) + (p + \lambda)^{r-1} \left[\dot{\tilde{\xi}}_1(t) \right] \right] = \\ (3.8) \quad &= \lambda^{1-r} \left[\beta[u(t) + d(t) + w(t, \xi)] + \epsilon(t) + (p + \lambda)^{r-1} \left[\dot{\tilde{\xi}}_1(t) \right] \right] = \\ &= bu(t) + f(t, s, u), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(t, s, u) &:= (\lambda^{1-r}\beta - b)u(t) + \\ &+ \lambda^{1-r} \left(\beta d(t) + A_{10}\eta(t) + A_{11}\xi(t) + \epsilon(t) + (p + \lambda)^{r-1}p \left[\tilde{\xi}_1(t) \right] \right) \end{aligned}$$

и в слагаемом $\epsilon(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) := \epsilon(t)$ сосредоточены все остальные производные.

Поскольку

$$y(t) = \frac{\lambda^{r-1}}{(p + \lambda)^{r-1}} [s(t)] - \tilde{\xi}_1(t),$$

то при достаточно большом значении параметра $\lambda > 0$ и достаточно малой оценке сверху δ_1 в силу монотонной зависимости $y(t)$ от $s(t)$ получаем, что задача расположения выхода системы (3.6) в заданном множестве (3.2) при выполнении ограничений (3.3) для ситуации $n \geq r > 1$ сводится к поставленной одномерной задаче.

По полной аналогии к задаче управления системой первого порядка может быть сведена задача управления классом нелинейных минимально-фазовых систем с произвольной относительной степенью [16, с. 167].

Пример 2. Рассмотрим каскадную систему

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= b_1 x_2(t) + f_1(t, x, u), \\ \dot{x}_j(t) &= b_j x_{j+1}(t) + f_j(t, x, u), \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n(t) &= b_n u(t) + f_n(t, x, u), \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – измеряемые состояния, $f_i(t, x, u)$ – неизвестные возмущения, $b_i > 0$ – известные оценки на коэффициенты усиления.

Требуется расположить выход системы (3.9) в заданном множестве (3.2) при выполнении ограничений (3.3) и дополнительно обеспечить для всех $t \geq t_0$ ограниченность всех координат состояний:

$$y(t) \in \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_1, \quad x_i(t) \in \mathcal{X}_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

где $\mathcal{X}_i := \{x_i(t) \in \mathbb{R} : |x_i(t)| \leq x_i^U\}$.

Замена переменных

$$\begin{aligned} s_1(t) &= x_1(t) - g(t), \\ s_i(t) &= x_i(t) - u_{i-1}(t), \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

позволяет переписать (3.9) в следующем виде:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \dot{s}_1(t) &= b_1 \left(u_1(t) + s_2(t) \right) + f_1(t, x, u_n) - \dot{g}(t), \\ \dot{s}_j(t) &= b_j \left(u_j(t) + s_{j+1}(t) \right) - \dot{u}_{j-1}(t) + f_j(t, x, u_n), \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \dot{s}_n(t) &= b_n u_n(t) - \dot{u}_{n-1}(t) + f_n(t, x, u_n), \end{aligned}$$

где $u_i(t)$ – фиктивные управления, и для общности принято $u_n(t) := u(t)$.

Таким образом, задача расположения выхода системы (3.9) в заданном множестве (3.2) сводится к решению n одномерных и однотипных задач расположения состояний $s_i(t)$ в заданных множествах:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &:= \{s_1(t) \in \mathbb{R} : |s_1(t)| \leq \varepsilon\}, \\ \mathcal{S}_i &:= \{s_i(t) \in \mathbb{R} : |s_i(t)| \leq x_i^U - u_{i-1}^U\}, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

для всех $t \geq t_0$ при выполнении ограничений на амплитуду и скорость изменения истинного управления (3.3) и амплитуду фиктивных управлений

$$U_i := \{u_i(t) \in \mathbb{R} : |u_i(t)| \leq u_i^U\}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где $u_i^U < x_{i+1}^U$ – это известное число.

При этом, если ограничение на амплитуду фиктивных управлений дополнить ограничениями на скорость (где $v_i^U > 0$, $i = 1, \dots, n-1$ – это известное число)

$$\mathcal{U}_i := \{u_i(t) \in \mathbb{R} : |u_i(t)| \leq u_i^U, \quad |\dot{u}_i(t)| \leq v_i^U\},$$

то для всех $k = 2, \dots, n$ в каждом k -м уравнении системы (3.10) слагаемое $\dot{u}_{k-1}(t)$ трактуется как ограниченное на заданном уровне v_{k-1}^U внешнее возмущение. Следовательно, решая задачи стабилизации итеративно и снизу вверх (в направлении от $s_n(t)$ к $s_1(t)$) с помощью управлений $u_i(t) \in \mathcal{U}_i$ для всех $i = 1, \dots, n-1$, в каждом i -м уравнении можно рассматривать величину $s_{i+1}(t)$ уже ограниченной $\mathcal{S}_{i+1}$, а значит, на каждом шаге процедуры приходим в точности к поставленной в данной работе одномерной задаче расположения выхода системы (3.1) в заданном множестве (3.2) при выполнении ограничений на амплитуду и скорость управления.

Оба рассмотренных примера демонстрируют, что достаточно общие и содержательные задачи управления, часто встречающиеся на практике, сводятся к решению рассматриваемой в работе одномерной задачи. В завершение подраздела необходимо заметить, что задачи из примеров 1 и 2 в этой работе не решаются, а только приводятся для иллюстрации возможности использования при их решении основного результата этой работы. Другими словами, результаты этой работы являются установочными на пути к решению задач, например, рассмотренных в примерах 1 и 2. Стоит заметить, что фактически решение задачи (3.2), (3.3) для системы (3.1) означает решение той же задачи для класса нелинейных систем с неизвестными параметрами, относительной степенью, равной единице, и устойчивой внутренней динамикой (такие системы, согласно [16, с. 167] и примеру 1, приводятся к виду (3.1), и для них при определенных условиях будет выполнено допущение 2). Определение условий на правую часть уравнений системы, при которых выполняется допущение 2, также выносится за рамки настоящей работы.

4. Основной результат

В разделе 4.1 выводится структура закона управления, а задача выбора его параметров и обеспечение цели (3.2) при ограничениях (3.3) сводится к нахождению решения системы линейных неравенств. В разделе 4.2 обсуждается инженерная интерпретация полученного закона управления, а также приводится MatLab код, решающий неравенства, полученные в разделе 4.1.

*4.1. Робастное управление с заданным качеством
при заданных ограничениях*

Задача расположения выхода $y(t)$ в заданном множестве $\mathcal{Y}$ слабее задачи слежения за его центром $g(t)$ с динамической ошибкой, не превосходящей по модулю минимальной ширины множества, т.е.

(4.1) ЕСЛИ $|y(t_0) - g(t_0)| \leq \varepsilon \Rightarrow \forall t \geq t_0, |y(t) - g(t)| \leq \varepsilon$, ТО $y(t) \in \mathcal{Y}, \forall t \geq t_0$,

где $\varepsilon = \min \left\{ \inf_t |\overline{g}(t) - g(t)|, \inf_t |\underline{g}(t) - g(t)| \right\}$ – минимальная ширина $\mathcal{Y}$.

Другими словами, выполнение условия $|y(t) - g(t)| \leq \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$ будет мгновенно означать выполнение заданных показателей качества (3.2), но не наоборот. Поэтому предлагается рассматривать задачу управления с заданными показателями качества как задачу слежения за центром множества $\mathcal{Y}$ с заданным значением динамической ошибки.

Для решения такой задачи при ограничениях (3.3) декомпозируем управление следующим образом:

$$(4.2) \quad u(t) = (1 - \gamma_u) u^U u_s(t) + \gamma_u u^U u_c(t),$$

где $u_s(t)$, $u_c(t)$ – соответственно стабилизирующая и компенсирующая компоненты управления.

Тогда в силу соотношений

$$\begin{aligned} |u(t)| &= |(1 - \gamma_u) u^U u_s(t) + \gamma_u u^U u_c(t)| \leq u^U, \\ |\dot{u}(t)| &= |(1 - \gamma_u) u^U \dot{u}_s(t) + \gamma_u u^U \dot{u}_c(t)| \leq \dot{u}^U \end{aligned}$$

ограничения (3.3) слабее ограничений

$$(4.3a) \quad (1 - \gamma_u) |u_s(t)| + \gamma_u |u_c(t)| \leq 1,$$

$$(4.3б) \quad (1 - \gamma_u) |\dot{u}_s(t)| + \gamma_u |\dot{u}_c(t)| \leq \rho.$$

Благодаря выполненной декомпозиции (4.2), задача обеспечения ограничений на управление (3.3) свелась к выполнению неравенств (4.3a) и (4.3б) для всех $t \geq t_0$.

Для решения задачи слежения (4.1) при ограничениях (4.3a) и (4.3б) компоненты управления зададим следующим образом:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \dot{u}_s(t) &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(u_s(t) + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right) \right), \quad |u_s(t_0)| \leq 1, \\ \dot{u}_c(t) &= -\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u} \sigma \left(\frac{1}{\lambda_2} \left(u_c(t) + \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) \right) \right), \quad |u_c(t_0)| \leq 1, \end{aligned}$$

где $1 < \mu < \frac{1}{\kappa\gamma_v}$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $K > 0$ и $z(t) = \frac{y(t) - g(t)}{bu^U}$, а величина $\Phi(t)$ будет определена в ходе дальнейших построений.

Если $\Phi(t) := F(t)$, то $-\gamma_u u_c(t)$ – это компонента возмущения с ограниченными на требуемом уровне амплитудой и скоростью изменения. Посколь-

ку обобщенное возмущение $F(t)$ неизмеряемо, то предлагается сформировать $\Phi(t)$ с помощью вспомогательного контура А.М. Цыкунова [15, с. 201]:

$$(4.5) \quad \Phi(t) := \chi(t) - u_f(t),$$

где $l > 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(t) &= l \left(z(t) - z_f(t) \right), \\ \dot{z}_f(t) &= \chi(t), \quad z_f(t_0) = z(t_0), \\ \dot{u}_f(t) &= l \left(\frac{1}{u} u(t) - u_f(t) \right), \quad u_f(t_0) = u_{0f}, \end{aligned}$$

а тогда $-\gamma_u u_c(t)$ – это оценка возмущения с ограниченной на требуемом уровне амплитудой и скоростью изменения.

Заметим, что в силу (4.4) скорости изменения компонент $u_s(t)$, $u_c(t)$ для всех $t \geq t_0$ по модулю ограничены заданными положительными числами $\frac{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}{1-\gamma_u}$ и $\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u}$, а значит, неравенство (4.3б) является тождеством:

$$(4.6a) \quad (1 - \mu\kappa\gamma_v) \rho + \gamma_u \frac{1}{\gamma_u} \kappa \mu \gamma_v \rho \leq \rho.$$

С другой стороны, если для всех $t \geq t_0$ выполнены условия $|u_s(t)| \leq 1$, $|u_c(t)| \leq 1$, то неравенство (4.3а) тоже является тождеством:

$$(4.6б) \quad 1 - \gamma_u + \gamma_u \leq 1.$$

Таким образом, выполнение ограничений (3.3) на амплитуду и скорость изменения управления сводится к выполнению условий $|u_s(t)| \leq 1$, $|u_c(t)| \leq 1$ для всех $t \geq t_0$. В следующей теореме получены условия, при которых справедливы такие оценки, а ограничения (3.3) выполнены.

Теорема 1. Пусть

$$\gamma_u \in (0, 1), \quad \gamma_v \in (0, 1), \quad \kappa \in (1, 2), \quad \rho > 0, \quad 1 < \mu < \frac{1}{\kappa\gamma_v},$$

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad K > 0, \quad l > 0,$$

тогда закон управления (4.4), (4.5) с начальными условиями

$$(4.7) \quad |u_s(t_0)| \leq 1, \quad |u_c(t_0)| \leq 1$$

для всех $t \geq t_0$ обеспечивает $u(t) \in \mathcal{U}$.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Поскольку переменные $u_s(t)$, $u_c(t)$ являются внутренними состояниями обратной связи, то всегда возможно установить $u_s(t_0)$, $u_c(t_0)$ так, что ограничение $u(t) \in \mathcal{U}$ выполнено для всех $t \geq t_0$. Несмотря на использование в законе управления параметров γ_u , γ_v , существование оценок на возмущение из допущения 2 для доказательства теоремы 1 не требуется, а поэтому ограниченность амплитуды и скорости изменения управления обеспечивается независимо от выполнения допущения 2 и, более того, приводит к выполнению

всех его предпосылок. Этот результат позволяет получить условия, при выполнении которых сделанный выбор управления доставляет решение задачи управления с заданным качеством (3.2) при заданных ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления (3.3).

Теорема 2. Пусть выполнены допущения 1–3, при заданных параметрах

$$(4.8a) \quad \begin{aligned} \gamma_u \in (0, 1), \quad \gamma_v \in (0, 1), \quad bu^U > 0, \quad \delta \in (0, 1), \\ \kappa \in (1, 2), \quad L > \kappa, \quad \rho > 0, \quad \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

и некотором коэффициенте

$$(4.8б) \quad 1 < \mu^* < \frac{1}{\kappa\gamma_v}$$

относительно $\Psi \in \mathbb{R}^5$ разрешимы линейные неравенства:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} e_i^\top \Gamma \Psi &< e_i^\top \Theta, \quad i = 1, \dots, 4, \\ e_j^\top \Psi &> 0, \quad j = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

где $e_i \in \mathbb{R}^4$, $e_j \in \mathbb{R}^5$ – координатные векторы соответствующих пространств,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 - \mu^* & 1 \\ 0 & 1 - \gamma_u & \gamma_u & L\gamma_v\rho & L\gamma_v\rho \\ -\frac{(1 - \mu^*\kappa\gamma_v)\rho}{(1 - \gamma_u)\kappa} & 1 - \gamma_u & \gamma_u & L\gamma_v\rho & L\gamma_v\rho \\ (1 - \gamma_u)bu^U & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - (1 + \delta)\gamma_u \\ -1 + (1 - \delta)\gamma_u \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Тогда закон управления (4.4), (4.5) с коэффициентами

$$(4.10) \quad K = \hat{\Psi}_1^{-1}, \quad \lambda_1 = \hat{\Psi}_2, \quad \lambda_2 = \hat{\Psi}_3, \quad l = \hat{\Psi}_4^{-1}, \quad \tau = \hat{\Psi}_5, \quad \mu = \mu^*,$$

начальными условиями (4.7) и

$$(4.11a) \quad |z(t_0)| \leq \frac{1 - \gamma_u}{K}, \quad \left| u_s(t_0) + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z(t_0) \right) \right| \leq \lambda_1,$$

$$(4.11б) \quad |-u_f(t_0) - F(t_0)| \leq \tau\gamma_v\rho, \quad \left| u_c(t_0) - \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} u_f(t_0) \right) \right| \leq \lambda_2$$

для всех $t \geq t_0$ обеспечивает $u(t) \in \mathcal{U}$ и $y(t) \in \mathcal{Y}$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

В теореме 2 показано, что расчет параметров закона управления по формулам (4.10) при выполнении условий (4.8а), (4.8б) и (4.9) гарантирует выполнение поставленной цели (3.2) при заданных ограничениях (3.3) на амплитуду и скорость изменения управления. Однако в теореме 2 ничего не сказано про разрешимость линейных неравенств (4.9) для всех значений параметров (4.8а) и коэффициента (4.8б). В следующей лемме определим условия, при выполнении которых неравенства (4.9) совместны.

Лемма 1. Пусть

$$\gamma_u \in \left(0, \frac{1}{1 + (1 + \alpha)\delta}\right), \quad \alpha \in (0, 1), \quad \gamma_v \in (0, 1), \\ bu^U > 0, \quad \delta \in (0, 1), \quad \kappa \in (1, 2), \quad L > \kappa, \quad \rho > 0$$

и

$$1 < \mu^* < \frac{1}{\kappa\gamma_v}.$$

Тогда при любом $\varepsilon > \underline{\varepsilon} > 0$ относительно $\Psi \in \mathbb{R}^5$ разрешимы неравенства (4.10).

Доказательство леммы 1 и формула для $\underline{\varepsilon}$ приведены в Приложении.

Таким образом, в соответствии с леммой 1 существуют числа ε , для которых неравенства (4.9) совместны. Однако согласно лемме 1 для существования решений у неравенств (4.9) требуется $\gamma_u \in \left(0, \frac{1}{1 + (1 + \alpha)\delta}\right)$, $\alpha \in (0, 1)$. Этот уменьшенный диапазон допустимых значений коэффициента γ_u не совпадает с диапазоном, заданным в допущении 2. Но это обстоятельство не является серьезным препятствием для достижения цели (3.2) при ограничениях (3.3), поскольку параметр δ является параметром функции $\sigma(\cdot)$ из условия d). Для следующей дифференцируемой функции, отвечающей условиям $a)-e$),

$$(4.12) \quad \sigma(s) = \text{sign}\{s\} \left(1 - (1 - \min\{|s|, 1\})^{1,0178}\right)$$

верно $\delta = 6,5 \cdot 10^{-3}$, следовательно, $\frac{1}{1 + (1 + \alpha)\delta} \leq 0,9872$, и интервал из допущения 2 с достаточной точностью совпадает с интервалом, в котором неравенства (4.9) совместны.

Условия из леммы 1 являются только достаточными, и их невыполнение не значит отсутствие решений у неравенств (4.9), т.е. из невыполнения условий леммы 1 не следует неспособность предлагаемого закона управления обеспечить выполнение цели (3.2) при заданных ограничениях (3.3) и требуемой $\varepsilon < \underline{\varepsilon}$. Однако результат леммы 2 важен с теоретической точки зрения, поскольку позволяет сделать вывод о принципиальной возможности разрешения (4.9) для множества заданной ширины.

Непосредственно решение неравенств (4.9) может осуществляться различными алгоритмами с использованием различных пакетов прикладных программ. Например, можно использовать алгоритмы, предназначенные для решения задач линейного (функция `linprog` в среде `MatLab`) или полуопределенного программирования (`cvx`, `SEDUMI`, `YALMIP` в среде `MatLab`).

Согласно теореме 2 любые решения неравенств позволяют получить закон управления, обеспечивающий заданные инженерные показатели качества управления по выходу (3.2) при заданных ограничениях на управление (3.3). Поэтому вопрос поиска наиболее подходящего решателя или оптимального решения рассматриваемых неравенств выходит за рамки сделанной в этой работе теоретической постановки задачи и требует ее уточнения или расширения каким-либо критерием оптимальности. С практической точки зрения ре-

шения, получаемые при использовании разных численных алгоритмов, идентичны с точки зрения показателей качества (3.2) и ограничений (3.3), но могут отличаться, например, по критерию колебательности выхода внутри целевого множества или ограниченности ускорения управления. По мнению автора, наиболее удачные по упомянутым критериям решения неравенств (4.9) удастся получить путем использования метода внутренней точки (функция `feasp` в MatLab).

Приведенный ниже программный код, написанный на языке MatLab с помощью функции `feasp`, реализует решение неравенств (4.9) для заданных параметров (4.8а) и выбранного коэффициента (4.8б). Результатом выполнения кода являются параметры управления.

```

1  % SYSTEM PARAMETERS
2  rho=1.5; g_u=0.98; g_v=0.45; bU=0.8*(1.4522e+04)*1/3;
3  kappa=1.04; delta=6.5*10^-3; L=1.1; mu=1.01; eps=5;
4  % INEQUALITIES INITIALIZATION AND SOLUTION
5  Gamma=[0 0 0 1-mu 1; 0 1-g_u g_u L*g_v*rho L*g_v*rho;
6  -(1-mu*kappa*g_v)*rho/kappa 1-g_u g_u L*g_v*rho L*g_v*rho;
7  (1-g_u)*bU 0 0 0 0];
8  Theta=[0; 1-(1+delta)*g_u;-1+(1-delta)*g_u; eps];
9  e1=[1 0 0 0]; e2=[0 1 0 0]; e3=[0 0 1 0]; e4=[0 0 0 1];
10 setlmis([]); Psi=lmivar(2,[5 1]);
11 lmiterm([-1 1 1 Psi],.5*[1,0,0,0,0],1,'s');
12 lmiterm([-2 1 1 Psi],.5*[0,1,0,0,0],1,'s');
13 lmiterm([-3 1 1 Psi],.5*[0,0,1,0,0],1,'s');
14 lmiterm([-4 1 1 Psi],.5*[0,0,0,1,0],1,'s');
15 lmiterm([-5 1 1 Psi],.5*[0,0,0,0,1],1,'s');
16 lmiterm([6 1 1 Psi],.5*e1*Gamma,1,'s');
17 lmiterm([7 1 1 Psi],.5*e2*Gamma,1,'s');
18 lmiterm([8 1 1 Psi],.5*e3*Gamma,1,'s');
19 lmiterm([9 1 1 Psi],.5*e4*Gamma,1,'s');
20 lmiterm([-6 1 1 0],e1*Theta); lmiterm([-7 1 1 0],e2*Theta);
21 lmiterm([-8 1 1 0],e3*Theta); lmiterm([-9 1 1 0],e4*Theta);
22 LM1=getlmis;[tmin,xffeas] = feasp(LM1, [0 1000 1e22 0 0]);
23 % if tmin < 0, then the inequalities (4.9) is feasible
24 PS1 = [1 0 0 0 0]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
25 PS2 = [0 1 0 0 0]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
26 PS3 = [0 0 1 0 0]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
27 PS4 = [0 0 0 1 0]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
28 PS5 = [0 0 0 0 1]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
29 K=PS1^-1; lambda1=PS2; lambda2=PS3; l=PS4^-1; mu=mu; tau=PS5;

```

Замечание 1. С помощью охвата начального условия $y(t_0)$ некоторой малой окрестностью центра множества $\mathcal{Y}$ можно выполнить неравенство $|z(t_0)| \leq \frac{1-\gamma u}{K}$. Условия (4.11б) не являются ограничительными для практических задач, поскольку обычно в начальный момент времени t_0 выполняется $y(t_0) = 0$, $u(t_0) = 0$, $\dot{g}(t_0) = 0$, а возмущение $f(t, y, u)$ удовлетворяет условию $f(t_0, 0, 0) = 0$. Поэтому для выполнения условий (4.11б) обычно достаточно

установить $u_f(t_0) = u_c(t_0) = 0$. Если это не так, то предлагается использовать следующий простой прием. Поскольку $\Phi(t)$ – это оценка $F(t)$, то на $t < t_0$ можно сформировать оценку $\Phi(t)$ и в момент времени запуска системы управления t_0 установить $u_f(t_0) = -\Phi(t_0)$. Если при $t < t_0$ в (4.5) использовать достаточно большой параметр $l > 0$, то равенство $u_f(t_0) = -\Phi(t_0)$ будет выполнено с любой наперед заданной точностью [15]. Другими словами, если априорно ничего неизвестно о выполнении условий (4.11б), то имеет смысл сначала запустить наблюдатель возмущения (4.5), а только после этого инициализировать систему управления (4.4) с учетом уже сформированной к моменту времени t_0 оценки возмущения.

Замечание 2. В соответствии с доказательством теоремы 2 при невыполнении ограничений на начальные условия (4.11а), (4.11б), но выполнении неравенств (4.7), (4.9) верно $u(t) \in \mathcal{U}$ для всех $t \geq t_0$ и для всех $y(t_0) \in Y$ существует момент времени $T > t_0$ такой, что $y(t) \in \mathcal{Y}$ для всех $t \geq T$.

Замечание 3. Для уменьшения значений коэффициентов закона управления (4.4) неравенства (4.9) можно дополнять ограничениями вида $\Psi_i \geq \underline{\Psi}_i > 0$, где $\underline{\Psi}_i > 0$ – заданные числа.

4.1.1. Идентификация начальных условий обобщенного возмущения

В соответствии с результатами теоремы 2 достижение цели (3.2) существенно зависит от выполнения неравенств (4.11а) и (4.11б). Согласно рассуждениям, представленным в замечании 1, неравенства (4.11а) всегда можно выполнить путем выбора $\bar{g}(t_0)$, $\underline{g}(t_0)$, $u_s(t_0)$ при известном $y(t_0)$. В этом подразделе разовьем предложенную в том же замечании идею выполнения неравенств (4.11б) путем идентификации начального условия $F(t_0)$ обобщенного возмущения. С этой целью будем считать, что $t_0 > 0$ – это момент инициализации закона управления (4.4), (4.5) для системы (3.1), а $t = 0$ – это момент начала наблюдения за состояниями системы (3.1). Тогда для выполнения неравенств (4.11б) предлагается следующая инициализация начальных условий закона управления:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} u_f(t_0) &= -\hat{F}(t_0), \\ u_c(t_0) &= \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} u_f(t_0) \right), \end{aligned}$$

где $\hat{F}(t)$ – формируемая на отрезке $[0, t_0]$ оценка начальных условий $F(t_0)$.

Значит, выполнение неравенств (4.11б) сводится к построению на отрезке $[0, t_0]$ оценки возмущения такой, что выполнено неравенство

$$(4.14) \quad \left| \hat{F}(t_0) - F(t_0) \right| \leq \tau \gamma_v \rho, \quad \tau > 0.$$

Для достижения этой цели введем в рассмотрение наблюдатель возмущений, структурно повторяющий (4.5), но начинающий функционирование при $t = 0$:

$$(4.15) \quad \hat{F}(t) = \hat{\chi}(t) - \hat{u}(t) - \frac{\dot{g}(t)}{bu},$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(t) &= k(z(t) - \hat{z}(t)), \\ \dot{\hat{z}}(t) &= \hat{\chi}(t), \quad \hat{z}(0) = z(0), \\ \dot{\hat{u}}(t) &= k\left(\frac{1}{u^U}u(t) - \hat{u}(t) - \frac{\dot{g}(t)}{bu^U}\right), \quad \hat{u}(0) = 0\end{aligned}$$

и $k > 0$, $g(t) = 0$ и $\dot{g}(t) = 0$ для всех $t_0 > t \geq 0$.

Тогда ошибка $\tilde{F}(t) = \hat{F}(t) - F(t)$ для всех $t_0 \geq t \geq 0$ подчиняется следующему выражению:

$$(4.16) \quad \dot{\tilde{F}}(t) = k(z(t) - \hat{z}(t)) - \dot{\hat{u}}(t) - \frac{\ddot{g}(t)}{bu^U} - \dot{F}(t) = -k\tilde{F}(t) - \frac{\dot{f}(t, x, u)}{bu^U},$$

где $\tilde{F}(0) = -F(0)$.

На основании уравнения (4.16) нетрудно доказать следующее

Утверждение 1. Пусть $\left|\frac{f(t, x, u)}{bu^U}\right| \leq \gamma_v \rho$ для всех $0 \leq t \leq t_0$ и начальные условия компенсационной компоненты управления (4.4), (4.5) заданы выражениями (4.13), (4.15). Тогда для любых $F(0)$ и $t_0 > 0$ существует $k^ > 0$ такое, что выбор*

$$(4.17) \quad k > k^*$$

гарантирует выполнение неравенства (4.116).

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Таким образом, используя предложенный алгоритм инициализации начальных условий компенсационной части управления, всегда возможно удовлетворить неравенства (4.116). Это позволяет сделать вывод о том, что все требования на начальные условия (4.7), (4.11a), (4.11б) из теоремы 2 не являются ограничительными и могут быть выполнены путем: а) выбора $\bar{g}(t_0)$, $\underline{g}(t_0)$, $u_s(t_0)$ при известном $y(t_0)$, б) инициализации начальных условий компенсационной компоненты управления (4.4), (4.5) с использованием алгоритма (4.13), (4.15), (4.17). Также необходимо отметить, что неравенство $\left|\frac{f(t, x, u)}{bu^U}\right| \leq \gamma_v \rho$ может быть выполнено и для неустойчивых систем, а значит, в утверждении 1 не требуется, чтобы система была устойчивой и/или находилась в состоянии равновесия на $[0, t_0]$.

4.2. Инженерная интерпретация

Закон управления (4.4), (4.5) состоит из пропорциональной обратной связи, амплитуда и скорость которой для всех моментов времени ограничена числами $(1 - \gamma_u)u^U$ и $(1 - \mu\kappa\gamma_v)v^U$ соответственно, а также взятой с обратным знаком оценки обобщенного возмущения, амплитуда и скорость которой для всех моментов времени ограничена соответственно числами $\gamma_u u^U$ и $\mu\kappa\gamma_v v^U$.

Расчет параметров такого закона управления в соответствии с теоремой 2 требует решения линейных неравенств (4.9) и знания значений следующих параметров:

- максимального обобщенного ресурса управления bu^U , где b – известная оценка неизвестного коэффициента усиления системы (см. раздел 3.1.2),
- ограничений u^U и v^U на амплитуду и скорость изменения управления,
- коэффициентов γ_u и γ_v , которые показывают, во сколько раз амплитуда и скорость изменения возмущения, приведенного к максимальному ресурсу управления, меньше единицы,
- минимальной ширины целевого множества ε .

В практических задачах наличие информации о значениях этих параметров не является ограничением, поскольку часть параметров закладывается на этапе проектирования исполнительного механизма системы (u^U, v^U, b) или на этапе формирования технического задания на разработку системы управления (ε). Другая же часть, а именно числа $\gamma_u \in (0, 1)$, $\gamma_v \in (0, 1)$, с теоретической точки зрения могут быть выбраны произвольно близкими к правым границам интервалов их допустимых значений. Однако с практической точки зрения и в силу консервативности, заложенной при выводе неравенств (4.9), в такой асимптотике нет необходимости, а выбор значений γ_u, γ_v должен быть ориентирован на удовлетворение неравенств (3.5).

Для решения неравенств (4.9) также необходимо знать параметры κ, L, δ из свойств а)–е) используемой аппроксимации функции насыщения. Это требование не является ограничительным, поскольку для каждой конкретной аппроксимации эти параметры всегда могут быть вычислены численно или найдены аналитически. Более того, в этой работе для двух функций (см. раздел 2 и формулу (4.12)) уже приведены значения этих параметров.

При совместности неравенств (4.9), согласно теореме 2, закон управления (4.4), (4.5) с параметрами (4.10) и начальными условиями (4.7), (4.11а), (4.11б) гарантированно обладает следующим свойством:

Если выполнены допущения 1–3, то для любых обобщенных возмущений $F(t)$ с амплитудой, не превосходящей $100\gamma_u\%$ от u^U , и скоростью изменения, не превосходящей $100\gamma_v\%$ от v^U , гарантируется $y(t) \in \mathcal{Y}$, $u(t) \in \mathcal{U}$ для всех $t \geq t_0$.

5. Аналитическое сравнение

По структуре и свойствам закон управления (4.2) наиболее близок к закону управления из [10]. В соответствии с результатами [10] для обеспечения заданного значения динамической ошибки слежения за центром множества $\mathcal{Y}$ вводится следующее управление:

$$(5.1) \quad u(t) = -u^U m\sigma(kz(t)),$$

где $m > 0$, $k > 0$ и

$$\sigma(s) := \frac{2}{1 + \exp(-s)} - 1$$

является сигмоидальной функцией (в отличие от используемой в работе аппроксимации sat-функции для сигмоиды не выполнено условие ϵ) из раздела 2).

Согласно лемме и замечанию 1 из [10] при существовании $\gamma_u \in (0, 1)$ такой, что для всех $t \geq t_0$ верно $|F(t)| \leq \gamma_u$, и выполнении неравенств

$$(5.2a) \quad \frac{\gamma_u}{\sigma(2, 2)} < m \leq 1,$$

$$(5.2б) \quad \frac{2, 2}{\Delta} \leq k < \frac{\rho}{m^2}, \quad \Delta > 0,$$

$$(5.2в) \quad bu^U \Delta \leq \varepsilon$$

закон управления (5.1) гарантирует $y(t) \in \mathcal{Y}$ и $u(t) \in \mathcal{U}$ для всех $t \geq t_0$.

Во-первых, следует отметить, что неравенства (5.2a) и (5.2б) будут совместны только при выполнении условий

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v^U &> \frac{2, 2}{\Delta} m^2 u^U, \\ \varepsilon &> 2, 2 bu^U \frac{\gamma_u^2}{\sigma^2(2, 2) \rho} = \underline{\varepsilon}, \end{aligned}$$

что является ограничительными требованиями: *i*) не при всех $v^U > 0$ и $u^U > 0$ возможно ограничить скорость изменения управления, *ii*) сравнение минорант (5.3) и (П.14) позволяет сделать вывод о том, что предлагаемый закон управления при тех же $u^U > 0, v^U > 0$ и $\gamma_u \rightarrow 1$ позволяет обеспечить $y(t) \in \mathcal{Y}$ для всех $t \geq t_0$ для множеств существенно меньшей ширины ε .

Во-вторых, для получения (5.2б) в [10] использовалась следующая оценка сверху:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} |\dot{u}(t)| &= \left| -\frac{u^U m k}{2} [1 - \sigma^2(kz(t))] \dot{z}(t) \right| \leq \\ &\leq \left| -\frac{u^U m k}{2} [1 - \sigma^2(kz(t))] \right| \left| -m \sigma^2(kz(t)) + F \right| < \\ &< \left| -u^U m^2 k [1 - \sigma^2(kz(t))] \right| < u^U m^2 k. \end{aligned}$$

Получение такой оценки возможно только при отсутствии шумов в измерении выхода $y(t)$, т.е. при выполнении неравенств (5.2a), (5.2б), (5.2в), но при наличии помехи в измерениях закон управления (5.1) не гарантирует ограниченности скорости управления заданным значением. Как следует из выражения (4.4), предложенный в этой работе закон управления, благодаря использованию нелинейных фильтров, подобных [14], гарантирует ограниченность скорости управления независимо от наличия помехи измерений, что является существенным преимуществом при решении практических задач.

Таким образом, основные отличия закона управления (4.4), (4.5) по сравнению с законом управления (5.1) заключаются в следующем:

1) вместе с заданным значением динамической ошибки слежения удастся гарантировать заданные ограничения на амплитуду и скорость изменения управления,

2) предложенный закон управления содержит не только компоненту, пропорциональную ошибке слежения, но и формируемую по методу вспомогательного контура [15, с. 201] динамическую оценку внешнего обобщенного возмущения,

3) процедура выбора параметров закона управления сведена к задаче решения линейных неравенств и может решаться численно с помощью пакетов прикладных программ (неравенства из [10] предполагают ручной счет).

6. Моделирование

Моделирование будет выполняться в MatLab Simulink с помощью интегрирования прямым методом Эйлера с шагом дискретизации 10^{-4} секунд.

Для иллюстрации теоретических результатов рассмотрим линеаризованную модель вертикального движения летательного аппарата на высоте 1200 метров с воздушной скоростью в 2 Маха [20, с. 565]:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dd(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1,364 & -92,82 & -128,46 \\ 1 & -4,68 & -0,087 \\ 0 & 0 & -190 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 190 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= [1,36 \quad -184,26 \quad 76,43], \quad x(t_0) = [0 \quad 0 \quad 0], \quad d(t) = 0 \end{aligned}$$

$u(t)$ – это управление рулем высоты, рад., $y(t)$ – это вертикальное ускорение, м/с², $x_1(t)$ – это скорость тангажа, рад/с, $x_2(t)$ – это угол атаки, рад., $x_3(t)$ – это угол руля высоты, рад., $d(t)$ – внешнее возмущение. Максимальный угол руля высоты составляет $\frac{1}{3}$ радиана, а скорость его изменения не превосходит $\frac{1}{2}$ радиана в секунду, т.е. ограничения на управление заданы числами $u^U = \frac{1}{3}$, $v^U = \frac{1}{2}$. Матрицы A , B , C и D считаются неизвестными, но известной принимается оценка $b = 1,16 \cdot 10^4$ коэффициента усиления $CB = 1,45 \cdot 10^4$. Относительная степень системы (6.1) равна единице, а поэтому согласно примеру 1 она приводится к виду (3.1).

Инженерные показатели качества управления системой (6.1) описываются множеством $\mathcal{Y}$ со следующими границами:

$$(6.2) \quad \bar{g}(t) = 75\sin(0,1\pi t) + 5, \quad \underline{g}(t) = 75\sin(0,1\pi t) - 5,$$

а тогда $\varepsilon = 5$ – это минимальная ширина целевого множества $\mathcal{Y}$.

Предположим, что на траекториях замкнутой системы амплитуда обобщенного возмущения $F(t)$ не превосходит 98% от u^U , а скорость его изменения не превосходит 45% от v^U , т.е.

$$(6.3) \quad \gamma_u = 0,98, \quad \gamma_v = 0,45.$$

Эта гипотеза соответствует допущению 2 и для системы (6.1) с неизвестными параметрами при действии внешних возмущений априорно не может быть проверена. Проверка выполнения этой гипотезы может быть осуществлена только апостериорно – путем применения закона управления (4.4), (4.5) и регистрации поведения выхода системы. С теоретической точки зрения, можно выбирать $\gamma_u \rightarrow 1$ и $\gamma_v \rightarrow 1$, тогда класс допустимых обобщенных возмущений максимально расширяется. С практической точки зрения, в такой асимптотике отсутствует необходимость, поскольку во многих практических задачах обобщенное возмущение редко составляет более 50–60% от доступной амплитуды и скорости изменения управления. Кроме того, при $\gamma_u \rightarrow 1$ и $\gamma_v \rightarrow 1$ решение неравенств (4.9) может давать сравнительно большие значения параметров управления.

Фактически выбор значений чисел γ_u и γ_v задает класс систем с неизвестными параметрами и внешними возмущениями, для которых предложенный закон управления обеспечивает достижение цели (3.2) при ограничениях (3.3). Принадлежность к такому классу конкретной системы с неизвестными параметрами и внешними возмущениями, к сожалению, может быть проверена только апостериорно после испытаний закона управления. Например, для системы (6.1) числа (6.3) были выбраны в процессе итераций, состоящих из *i*) решения неравенств (4.9) для различных значений γ_u и γ_v , *ii*) применении закона управления (4.4), (4.5) с рассчитанными параметрами. Такие итерации завершились тогда, когда после очередной итерации расчета были получены такие значения параметров (4.10), что применение закона управления обеспечило выполнение поставленной цели. Заметим, что обсуждаемая апостериорная проверка работоспособности характерна для многих робастных законов управления. Разница состоит лишь в том, что обычно выдвигаются гипотезы на интервалы существования параметров системы и амплитуду внешнего возмущения, а в данной работе выставляется гипотеза на максимальные значения амплитуды и скорости изменения обобщенного возмущения, являющегося неизвестной функцией от выхода системы, ее параметров и возмущений (см. пример 1).

Таким образом, заданные множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}$ вместе с выбранными параметрами (6.3) соответствуют следующему заданию на разработку системы автоматического управления: *необходимо обеспечить отслеживание задающего воздействия по вертикальному ускорению с динамической ошибкой, не превосходящей 5 м/с^2 , при действии обобщенных возмущений, согласованных с сигналом управления и не превосходящих 98% от максимальной амплитуды и 45% от максимальной скорости управления.*

Для решения такой задачи с помощью закона управления (4.4), (4.5) в соответствии с теоремой 2 необходимо получить решение неравенств (4.9). Для этого зададимся функцией (4.12) и установим $\mu^* = 1,01$.

В результате решения (4.9) получены следующие значения:

$$(6.4) \quad K = 17,7436, \quad \lambda_1 = 0,1434, \quad \lambda_2 = 0,0029, \quad l = 194,912, \quad \tau = 3,5 \cdot 10^{-5}.$$

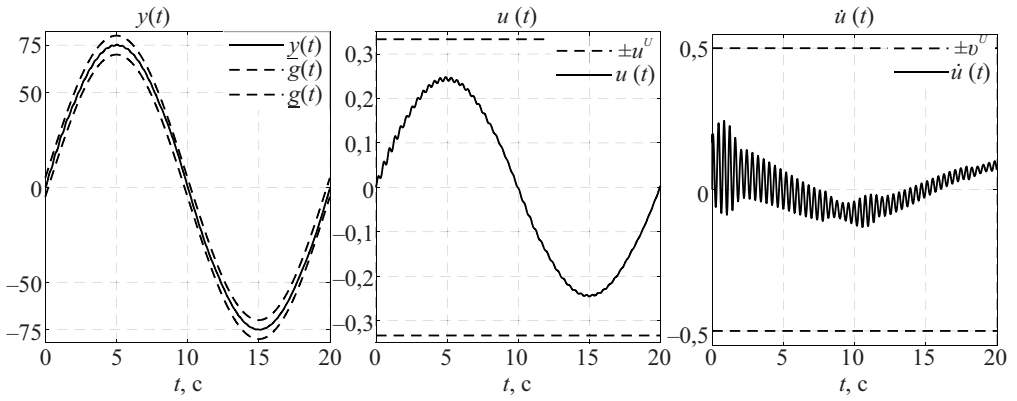


Рис. 2. Переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$.

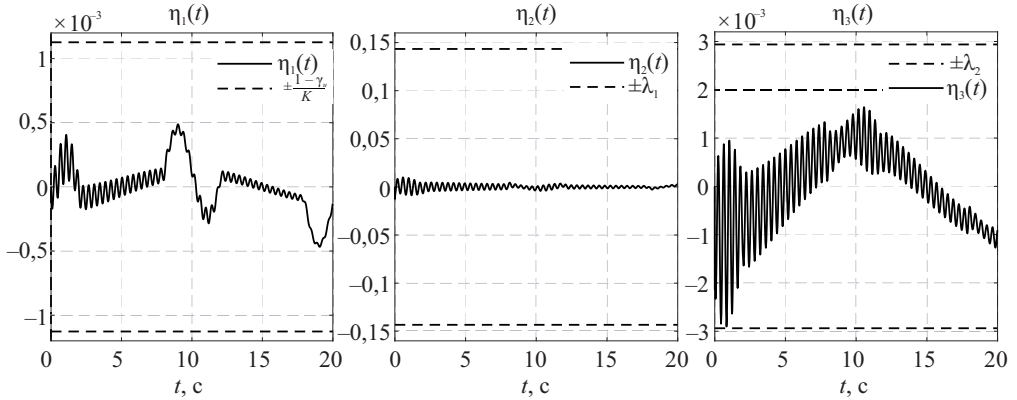


Рис. 3. Переходные процессы по $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$.

Решение неравенств выполнено с помощью кода MatLab, приведенного в разделе 4.2. Для выполнения цели (3.2) при ограничениях (3.3) в соответствии с теоремами 1 и 2 начальные условия закона управления установлены следующим образом:

$$(6.5) \quad z_f(t_0) = z(t_0) = 0, \quad u_s(t_0) = 0, \quad u_f(t_0) = -F(t_0) = 0, \quad u_c(t_0) = 0,$$

что обеспечило выполнение условий (4.7) и (4.11а), (4.11б).

На рис. 2 и 3 приведены переходные процессы по управлению $u(t)$ и его скорости $\dot{u}(t)$, регулируемому выходу $y(t)$, а также внутренним переменным закона управления $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$ (см. доказательство теоремы 2).

Временные диаграммы, представленные на рис. 2 и 3, иллюстрируют теоретические результаты, полученные в теореме 2. Выполнение неравенств (4.9) и других предпосылок теоремы 2 ведет к достижению поставленной цели (3.2) при ограничениях (3.3). При этом внутренние переменные закона управления также не покидают заданного неравенствами (4.9) диапазона (см. доказательство теоремы 2).

Выполним проверку работоспособности предлагаемого закона управления при наличии шумов в измерениях и действии на систему разрывных внешних

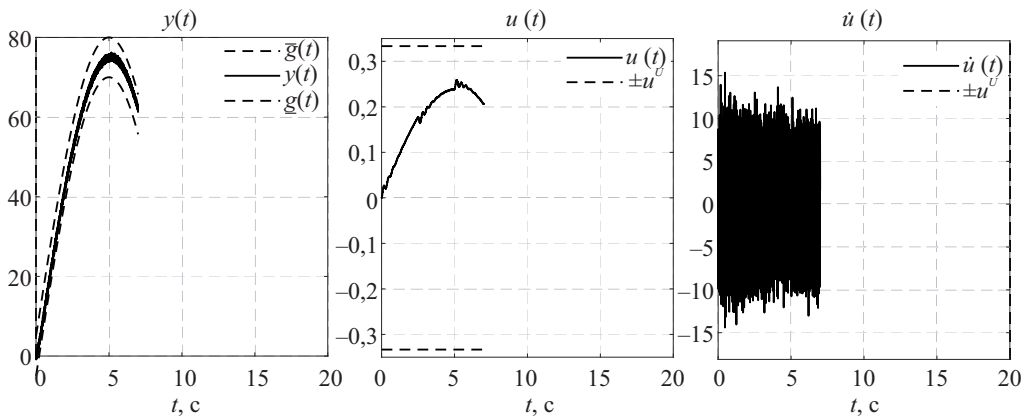


Рис. 4. Переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для (6.6) при $K = 2,5$.

возмущений. Для этого будем считать, что выход системы (6.1) и внешнее возмущение заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + w_0(t) + w_1(t), \\ d(t) &= 0,1 + \text{sign}\{\sin(0,4\pi t)\}, \\ w_1(t) &= \begin{cases} -Cx(t) - w_0(t) + \bar{g}(t), & \text{если } t \in [7, 7,1), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

где сигнал $w_0(t)$ смоделирован в MatLab Simulink с помощью блока “Random Number” с нулевым средним, дисперсией 10^{-1} и временем выборки 10^{-4} . Все остальные параметры системы и управления остаются прежними.

Для сравнения реализуем закон управления (5.1) с параметрами $m = 1$, $k = 1692$ (расчет выполнен по формулам (5.2) для $\varepsilon = 5$ при $b = 1,16 \cdot 10^4$ и $u^U = \frac{1}{3}$) и закон управления из раздела 4 работы [1]:

$$(6.6) \quad u(t) = -(CB)^{-1} [CAx(t) + K\varepsilon(t)], \quad \varepsilon(t) := \ln \left(\frac{g(t) - y(t)}{y(t) - \bar{g}(t)} \right),$$

где $K > 0$.

Закон управления (6.6) требует знания параметров системы (6.1) и не учитывает наличие ограничений (3.3) на управление и скорость его изменения. Однако, несмотря на эти обстоятельства, его сравнение с предлагаемым законом допустимо и корректно, поскольку цель сравнения заключается, прежде всего, в проверке чувствительности к шумам измерений и разрывным возмущениям. Сделанные выводы при этом останутся справедливы как для адаптивных/робастных версий закона управления (6.6), так и для версий, учитывающих ограничение на управление [1, 2].

Временные диаграммы, представленные на рис. 4, показывают, что для закона (6.6) регулируемый выход остается в целевом множестве при наличии помех измерений для всех $t < 7$. Однако приближение $y(t)$ к границам целевого множества ведет к увеличению скорости изменения управления. В результате может быть сформирован нереализуемый исполнительным механизмом

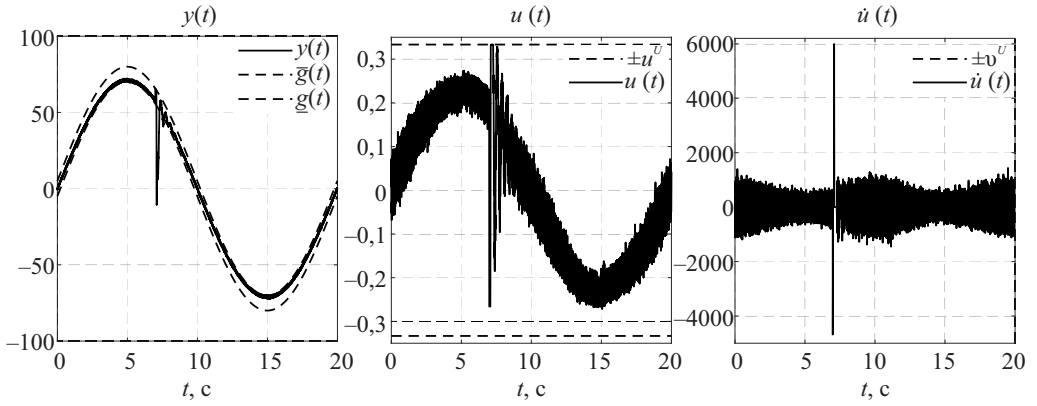


Рис. 5. Переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для (5.1) при $m = 1$, $k = 1692$.

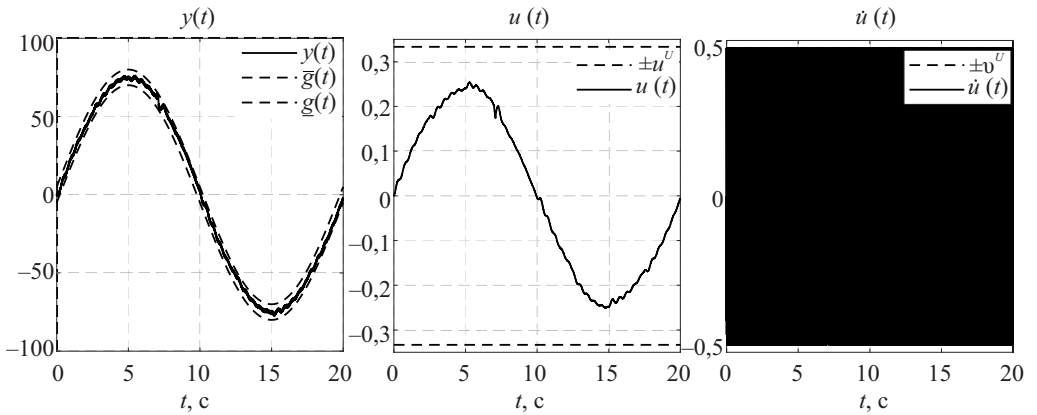


Рис. 6. Переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для (4.4), (4.5).

сигнал управления. Кроме того, в момент времени $t = 7$ из-за влияния составляющей $w_1(t)$ помехи происходит разрыв в обратной связи (см. (6.6)), и поэтому моделирование не может быть продолжено для всех $t > 7$. В практических задачах теории управления даже потенциальная возможность возникновения подобных разрывов недопустима, поскольку возникновение разрыва в обратной связи может приводить к в равной степени непредсказуемым и катастрофическим последствиям. Разработанный в этой работе закон управления свободен от данного недостатка.

На рис. 5 представлены переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для (5.1).

Закон управления (5.1) решает задачу слежения с заданной точностью, что приводит к ограничению выхода системы в заданном множестве $\mathcal{U}$. Однако скорость изменения управления не ограничена заданным значением, а сигнал управления существенно зашумлен, что иллюстрирует выводы анализа из раздела 5.

На рис. 6 представлены переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для предложенного закона управления при действии разрывных возмущений и наличии помех.

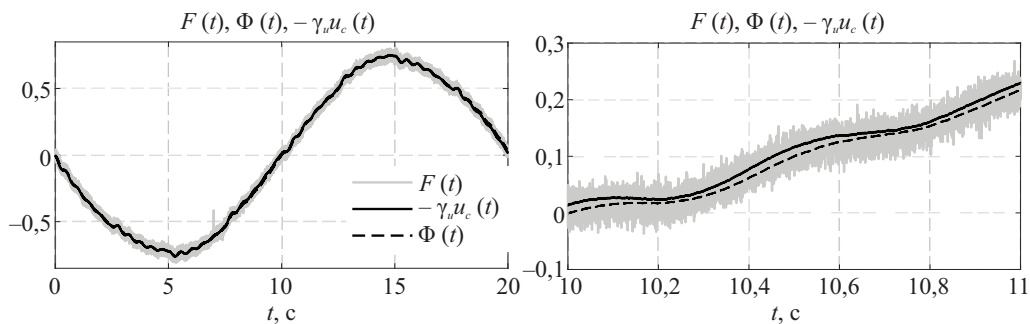


Рис. 7. Переходные процессы по $F(t)$ и $\Phi(t)$, $-\gamma_u u_c(t)$.

Согласно допущению 2 предлагаемый закон управления требует действия на систему исключительно дифференцируемых внешних возмущений. В проведенном моделировании это требование нарушено, но заданное качество (3.2) при заданных ограничениях (3.3) все равно обеспечено. Это позволяет сделать вывод о консервативности условий, принятых для доказательства теоремы 2, и стимулирует дальнейшие теоретические исследования, направленные на их релаксацию. Кроме того, в сравнении с законом управления (6.6) предложенный закон управления свободен от проблемы разрывов в обратной связи и обеспечивает заданные ограничения на амплитуду и скорость изменения управления даже при наличии помехи измерений. По сравнению с управлением (5.1) предложенный закон даже при наличии помех в выходном сигнале обеспечивает ограниченность скорости управления заданным значением. Необходимо отметить, что свойства предложенного закона управления (4.4), (4.5) строго обоснованы только для ситуации, когда в системе отсутствуют разрывные внешние возмущения и помехи измерений. Поэтому сделанные по рис. 3–5 выводы справедливы только для рассматриваемой системы (6.1) при заданных конкретных начальных условиях и используемом алгоритме интегрирования.

На рис. 7 представлены переходные процессы по $F(t)$ и оценкам $\Phi(t)$, $-\gamma_u u_c(t)$.

Из временных диаграмм, представленных на рис. 7, следует, что оценка возмущения $\Phi(t)$, полученная по методу вспомогательного контура [15, с. 201], зашумлена из-за наличия помехи в измеряемом выходе. На практике использование в целях компенсации подобных оценок возмущения может приводить к неустойчивой/неработоспособной системе из-за *i)* наличия ограничений на скорость изменения управления и *ii)* возбуждения управлением немоделируемой высокочастотной динамики. Для уменьшения влияния помехи на оценку $\Phi(t)$ в рамках метода вспомогательного контура требуется уменьшение параметра l . Однако в разработанном законе управления используется нелинейный фильтр [14], позволяющий пропускать на свой выход компоненту оценки $\Phi(t)$ со скоростью, не превосходящей ограничений на скорость изменения управления. Это позволяет независимо от значений пара-

метра l ослаблять влияние шумов в выходном сигнале на оценку возмущения и в результате выполнить ограничение на скорость изменения управления, не допуская возбуждение немоделируемой высокочастотной динамики. Аналитическое исследование фильтрующих свойств нелинейного фильтра, применяемого в предложенном законе управления, является одним из актуальных направлений дальнейших исследований.

7. Заключение

В работе предложен метод решения задачи робастного управления с заданным качеством при заданных ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления классом нелинейных минимально-фазовых систем с неизвестными параметрами и относительной степенью, равной единице (такие системы согласно [16, с. 167] приводятся к виду (3.1), и для них можно потребовать выполнение допущения 2). Из примера 1 следует, что одним из представителей такого класса систем являются линейные системы с неизвестными параметрами и относительной степенью, равной единице.

Целью дальнейших теоретических исследований является, во-первых, распространение полученных результатов на класс нелинейных систем с устойчивой внутренней динамикой и относительной степенью больше единицы (см. пример 1), а во-вторых, использование результатов работы в задаче управления каскадными системами с заданными инженерными показателями качества при заданных ограничениях на состояния и амплитуду/скорость управления (см. пример 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функцию:

$$(П.1) \quad V = \frac{1}{2}u_s^2.$$

Производная (П.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u}u_s\sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right)\right) = \\ &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u}u_s\text{sign}\left\{u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right\}\left|\sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right)\right)\right|. \end{aligned}$$

Для всех $u_s \notin \Lambda = \{u_s \in \mathbb{R}: |u_s| \leq 1\}$ оказывается верно

$$\text{sign}\left\{u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right\} = \text{sign}\{u_s\},$$

значит,

$$\dot{V} = -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u}\left|u_s\sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right)\right)\right| \leq 0$$

для всех $u_s \notin \Lambda = \{u_s \in \mathbb{R}: |u_s| \leq 1\}$.

С другой стороны, для всех $u_s \in \Lambda$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} u_s \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right) \right) = \\ &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} u_s \operatorname{sign} \left\{ u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right\} \left| \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} \left| u_s \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right) \right) \right|, \end{aligned}$$

следовательно, при $|u_s(t_0)| \leq 1$ верно $|u_s(t)| \leq 1$ для всех $t \geq t_0$.

Рассмотрев функцию $V = \frac{1}{2}u_c^2$ и повторив приведенные выше рассуждения, можно показать, что при $|u_c(t_0)| \leq 1$ верно $|u_c(t)| \leq 1$ для всех $t \geq t_0$, а значит, в соответствии с рассуждениями (4.6а) и (4.6б) имеем $u(t) \in \mathcal{U}$ для всех $t \geq t_0$.

Доказательство теоремы 2. Введем в рассмотрение замены переменных

$$\begin{aligned} \eta_1 &= z, \\ \eta_2 &= u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right), \\ \eta_3 &= u_c + \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) \end{aligned}$$

и получим дифференциальные уравнения относительно η_1, η_2, η_3 :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= (1 - \gamma_u) u_s + \gamma_u u_c + F(t) = \\ &= (1 - \gamma_u) \left(u_s \pm \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) \right) + \gamma_u u_c + F(t) = \\ (II.2) \quad &= (1 - \gamma_u) \left(-\sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) + \eta_2 \right) + \gamma_u u_c + F(t), \\ \dot{\eta}_2 &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \eta_2 \right) + \frac{K}{1 - \gamma_u} \sigma' \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) \dot{\eta}_1, \\ \dot{\eta}_3 &= -\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u} \sigma \left(\frac{1}{\lambda_2} \eta_3 \right) + \sigma' \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) \frac{1}{\gamma_u} \dot{\Phi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множества $(\eta = [\eta_1 \ \eta_2]^\top)$:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ \eta \in \mathbb{R}^2: |\eta_1| \leq \frac{1 - \gamma_u}{K}, \quad |\eta_2| \leq \lambda_1 \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ \eta \in \mathbb{R}^2: |\eta_2| \leq \lambda_1 \right\}, \end{aligned}$$

где при выполнении неравенства

$$(III.3) \quad bu^U (1 - \gamma_u) < K\varepsilon$$

из $\eta \in \Omega_1$ следует $y \in \mathcal{Y}$.

Сначала исследуем ограниченность η_3 при $\eta \in \Omega_1$, а для этого получим оценку на $\dot{\Phi}(t)$. Дифференцируя $\Phi(t)$, имеем:

$$(П.4) \quad \dot{\Phi}(t) = l(\dot{z}(t) - \dot{z}_f(t)) - \dot{u}_f(t) = -l(\Phi(t) - F(t)) = -l\tilde{\Phi}(t),$$

где $\Phi(t_0) = -u_f(t_0)$ и $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t) - F(t)$.

Тогда $\dot{\Phi}(t)$ будет ограничена, если ошибка $\tilde{\Phi}(t)$ ограничена. Дифференциальное уравнение для $\tilde{\Phi}(t)$ имеет вид

$$(П.5) \quad \dot{\tilde{\Phi}}(t) = -l\tilde{\Phi}(t) - \dot{F}(t), \quad \tilde{\Phi}(t_0) = -u_f(t_0) - F(t_0).$$

На решение уравнения (П.5) при $g(t) \in \mathcal{G}$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $(\eta(t) \in \Omega_1 \Rightarrow y(t) \in \mathcal{Y})$ для всех $t \geq t_0$, выполнении допущений 1, 2 и условия $|-u_f(t_0) - F(t_0)| \leq \tau\gamma_v\rho$, $\tau > 0$ существует оценка сверху:

$$(П.6) \quad \begin{aligned} |\tilde{\Phi}(t)| &= \left| e^{-l(t-t_0)}\tilde{\Phi}(t_0) - \int_{t_0}^t e^{-l(t-\tau)}\dot{F}(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \tau\gamma_v\rho + \gamma_v\rho \int_{t_0}^t e^{-l(t-\tau)} d\tau \leq (\tau + l^{-1})\gamma_v\rho \end{aligned}$$

для всех $t \geq t_0$.

Тогда производная квадратичной формы $V = \frac{1}{2}\eta_3^2$ для всех $\eta \in \Omega_1$ имеет вид

$$(П.7) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \eta_3 \left[-\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u}\sigma\left(\frac{1}{\lambda_2}\eta_3\right) - \sigma'\left(\frac{1}{\gamma_u}\Phi(t)\right)\frac{1}{\gamma_u}l\tilde{\Phi}(t) \right] \leq \\ &\leq |\eta_3| \left[-\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u}\left|\sigma\left(\frac{1}{\lambda_2}\eta_3\right)\right| + \kappa\frac{1}{\gamma_u}l|\tilde{\Phi}| \right] \leq \\ &\leq |\eta_3| \left[-\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u}\left|\sigma\left(\frac{1}{\lambda_2}\eta_3\right)\right| + \frac{\kappa(l\tau + 1)\gamma_v\rho}{\gamma_u} \right]. \end{aligned}$$

С одной стороны, для всех $\eta_3 \notin \{\eta_3 \in \mathbb{R}: |\eta_3| < \lambda_2\}$ в силу свойства в) функции $\sigma(\cdot)$ и условий $\mu > 1$, $\tau > 0$, $\tau + \frac{1-\mu}{l} < 0$ верно:

$$\dot{V} \leq - \underbrace{(\mu - (l\tau + 1))}_{>0} \frac{\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u} |\eta_3|.$$

Таким образом, при $|\eta_3(t_0)| \leq \lambda_2$ имеем $|\eta_3(t)| \leq \lambda_2$ для $\eta \in \Omega_1$ и всех $t \geq t_0$ независимо от знака $\dot{V}$ в множестве $\{\eta_3 \in \mathbb{R}: |\eta_3| < \lambda_2\}$.

Теперь докажем, что из $\eta(t_0) \in \Omega_1$ следует $\eta(t) \in \Omega_1$ для всех $t \geq t_0$.

Производная квадратичной формы $V_1 = \frac{1}{2}\eta_1^2$ для всех $\eta \in \Omega_1$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= \eta_1 \left[(1 - \gamma_u) \left(-\sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) + \eta_2 \right) + F + \gamma_u u_c \pm \gamma_u \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) \right] = \\
 (\text{П.8}) \quad &= \eta_1 (1 - \gamma_u) \left(-\sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) + \eta_2 \right) + \\
 &+ \eta_1 \left[F - \gamma_u \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) + \gamma_u \left(u_c \pm \sigma \left(\frac{\Phi}{\gamma_u} \right) + \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) \right) \right].
 \end{aligned}$$

С одной стороны, при выполнении неравенств (4.7), допущений 1 и 2 для некоторой

$$\delta := \sup_{|F| \leq \gamma_u} \left| \frac{F}{\gamma_u} - \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) \right|$$

и всех $\eta \in \Omega_1$ справедливо неравенство:

$$\left| F - \gamma_u \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} F \right) \right| = \left| \frac{F}{\gamma_u} - \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) \right| \gamma_u \leq \delta \gamma_u.$$

С другой стороны, в силу липшицевости функции $\sigma(\cdot)$ для некоторой $L > \kappa$ при выполнении неравенств (4.7), допущений 1 и 2 для всех $\eta \in \Omega_1$ по доказанному справедливо неравенство:

$$\left| \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) - \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} F \right) \right| \leq \frac{L}{\gamma_u} |\Phi - F| = \frac{L}{\gamma_u} |\tilde{\Phi}| \leq \frac{L(\tau + l^{-1}) \gamma_v \rho}{\gamma_u}.$$

С третьей стороны, по доказанному при $|\eta_3(t_0)| \leq \lambda_2$ и выполнении неравенств (4.7), допущений 1 и 2 для всех $\eta \in \Omega_1$ верно:

$$\left| u_c + \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) \right| = |\eta_3| \leq \lambda_2.$$

Тогда оценка сверху на производную (П.8) для всех $\eta \in \Omega_1$ принимает вид

$$\dot{V}_1 \leq |\eta_1| \left[(1 - \gamma_u) \left(-\sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) + |\eta_2| \right) + \gamma_u \delta + L(\tau + l^{-1}) \gamma_v \rho + \gamma_u \lambda_2 \right].$$

Если $|\eta_1| = \frac{1 - \gamma_u}{K}$ и $|\eta_2| \leq \lambda_1$, то условие $\dot{V}_1 < 0$ выполнено при

$$(\text{П.9}) \quad (1 - \gamma_u)(-1 + \lambda_1) + \delta \gamma_u + L(\tau + l^{-1}) \gamma_v \rho + \gamma_u \lambda_2 < 0.$$

Более того, на $|\dot{\eta}_1|$ для всех $\eta \in \Omega_1$ верна оценка сверху:

$$|\dot{\eta}_1| \leq (1 - \gamma_u)(1 + \lambda_1) + \delta \gamma_u + L(\tau + l^{-1}) \gamma_v \rho + \gamma_u \lambda_2.$$

Производная квадратичной формы $V_2 = \frac{1}{2}\eta_2^2$ для всех $\eta \in \Omega_2$ имеет вид

$$(П.10) \quad \begin{aligned} \dot{V}_2 &= \eta_2 \left[-\frac{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}{1-\gamma_u} \sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\eta_2\right) + \frac{K}{1-\gamma_u} \sigma'\left(\frac{K}{1-\gamma_u}\eta_1\right) \dot{\eta}_1 \right] \leq \\ &\leq |\eta_2| \left[-\frac{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}{1-\gamma_u} \left| \sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\eta_2\right) \right| + \left| \frac{K}{1-\gamma_u} \sigma'\left(\frac{K}{1-\gamma_u}\eta_1\right) \dot{\eta}_1 \right| \right]. \end{aligned}$$

Если $|\eta_1| > \frac{1-\gamma_u}{K}$, то по свойству а) функции $\sigma(\cdot)$ верно $\sigma'\left(\frac{K}{1-\gamma_u}\eta_1\right) = 0$ и при $|\eta_2| = \lambda_1$ верно $\dot{V}_2 < 0$. Если $|\eta_1| \leq \frac{1-\gamma_u}{K}$, то в силу $\eta \in \Omega_2$ верно $\eta \in \Omega_1$ и неравенство

$$\begin{aligned} &\left| \frac{K}{1-\gamma_u} \sigma'\left(\frac{K}{1-\gamma_u}\eta_1\right) \dot{\eta}_1 \right| \leq \\ &\leq \frac{\kappa K}{1-\gamma_u} \left[(1-\gamma_u)(1+\lambda_1) + \delta\gamma_u + L(\tau+l^{-1})\gamma_v\rho + \gamma_u\lambda_2 \right], \end{aligned}$$

значит, при $|\eta_2| = \lambda_1$ условие $\dot{V}_2 < 0$ будет выполнено, если:

$$(П.11) \quad \begin{aligned} &-\frac{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}{1-\gamma_u} + \frac{\kappa K}{1-\gamma_u} \left[(1-\gamma_u)(1+\lambda_1) + \delta\gamma_u + \right. \\ &\quad \left. + L(\tau+l^{-1})\gamma_v\rho + \gamma_u\lambda_2 \right] < 0. \end{aligned}$$

Если $\eta \in \partial\Omega_i$, $i = 1, 2$, то $|\eta_1| = \frac{1-\gamma_u}{K}$, $|\eta_2| = \lambda_1$ для $i = 1$ или $|\eta_2| = \lambda_1$ для $i = 2$. Поскольку $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то по доказанному $\dot{V}_2 < 0$, значит, если $\eta(t_0) \in \Omega_1$, то $\eta(t) \in \Omega_1$ для всех $t \geq t_0$, что при выполнении (П.3) означает $y(t) \in \mathcal{Y}$ для всех $t \geq t_0$. Таким образом, объединив (П.3), (П.9) и (П.11), получаем, что, если выполнены допущения 1–3, при заданных параметрах

$$\gamma_u \in (0, 1), \quad \gamma_v \in (0, 1), \quad bu^U > 0, \quad \delta \in (0, 1), \quad \kappa \in (1, 2), \quad L > \kappa, \quad \rho > 0, \quad \varepsilon > 0$$

и некотором коэффициенте $1 < \mu^* < \frac{1}{\kappa\gamma_v}$ относительно переменных

$$\Psi_1 = \frac{1}{K}, \quad \Psi_2 = \lambda_1, \quad \Psi_3 = \lambda_2, \quad \Psi_4 = l^{-1}, \quad \Psi_5 = \tau$$

разрешимы неравенства (4.9), то закон (4.4), (4.5) с коэффициентами (4.10), начальными условиями (4.7) и (4.11) для всех $t \geq t_0$ обеспечивает $u(t) \in \mathcal{U}$ и $y(t) \in \mathcal{Y}$.

Доказательство леммы 1. Перепишем (4.9) в следующем виде:

$$(П.12) \quad \begin{aligned} &(1-\mu^*)\Psi_4 + \Psi_5 < 0, \\ &(1-\gamma_u)\Psi_2 + \gamma_u\Psi_3 + L\gamma_v\rho(\Psi_4 + \Psi_5) + (1+\delta)\gamma_u - 1 < 0, \\ &-\frac{(1-\mu^*\kappa\gamma_v)\rho}{\kappa}\Psi_1 + (1-\gamma_u)\Psi_2 + \gamma_u\Psi_3 + L\gamma_v\rho(\Psi_4 + \Psi_5) + 1 - (1-\delta)\gamma_u < 0, \\ &(1-\gamma_u)bu^U\Psi_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

При достаточно малых $\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5$ неравенства (П.12) будут выполнены, если выполнены неравенства:

$$(П.13) \quad \begin{aligned} \Psi_4 &> \frac{\alpha\delta\gamma_u}{\mu-1}, \quad \gamma_u < \frac{1}{1+(1+\alpha)\delta}, \\ \frac{1-(1-(1+\alpha)\delta)\gamma_u}{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}\kappa &< \Psi_1 < \frac{\varepsilon}{(1-\gamma_u)bu^U} \end{aligned}$$

при $1 > \alpha > 0$.

Третье неравенство из (П.13) может быть выполнено, если для $\varepsilon > 0$ верно

$$(П.14) \quad \varepsilon > \frac{1-(1-(1+\alpha)\delta)\gamma_u}{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}(1-\gamma_u)bu^U\kappa = \underline{\varepsilon},$$

что завершает доказательство леммы.

Доказательство утверждения 1. Для доказательства утверждения запишем оценку сверху на решение уравнения (4.16)

$$(П.15) \quad \left| \tilde{F}(t) \right| = \left| -e^{-kt}F(0) - \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \frac{\dot{f}(t, x, u)}{bu^U} d\tau \right| \leq e^{-kt}F(0) + \frac{\gamma_v\rho}{k}.$$

Тогда при использовании алгоритма инициализации (4.13), (4.15) выполнение неравенства (4.11б) будет следовать из выполнения неравенства

$$(П.16) \quad e^{-kt_0}F(0) + \frac{\gamma_v\rho}{k} \leq \tau\gamma_v\rho.$$

Проводя несложные рассуждения, получаем, что неравенство (П.16) выполняется при всех

$$k > k^* = \max \left\{ -t_0^{-1} \ln \left(\frac{\vartheta\tau\gamma_v\rho}{F(0)} \right), \quad \frac{1}{(1-\vartheta)\tau} \right\}, \quad \vartheta \in (0, 1),$$

что завершает доказательство утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // *АиТ.* 2021. № 4. С. 121–139.
Furtat I.B., Gushchin P.A. Control of dynamical plants with a guarantee for the controlled signal to stay in a given set // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 654–669.
2. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А., Нгуен Б.Х.* Управление динамическими системами при ограничениях на входные и выходные сигналы // *АиТ.* 2023. № 4. С. 45–63.
Furtat I.B., Gushchin P.A., Nguyen B.H. Control of dynamic systems under input and output constraints // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 4. P. 355–368.

3. *Фуртат И.Б.* Плотностные системы. Анализ и управление // *АиТ.* 2023. № 11. С. 55–76.
Furtat I.B. Density Systems: Analysis and Control // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 11. P. 1175–1190.
4. *Bechlioulis C.P., Rovithakis G.A.* Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems // *Automatica.* 2009. V. 45. No. 2. P. 532–538.
5. *Bechlioulis C.P., Rovithakis G.A.* Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance // *IEEE Transact. Autom. Control.* 2008. V. 53. No. 9. P. 2090–2099.
6. *Tee K.P., Ge S.S., Tay E.H.* Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems // *Automatica.* 2009. V. 45. No. 4. P. 918–927.
7. *Tee K.P., Ren B., Ge S.S.* Control of nonlinear systems with time-varying output constraints // *Automatica.* 2011. V. 47. No. 11. P. 2511–2516.
8. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А.* Расположение в заданных множествах управления и выхода одного класса систем // *Управление большими системами.* 2025. Т. 113. С. 95–119.
9. *Marconi L., Isidori A.* Robust global stabilization of a class of uncertain feedforward nonlinear systems // *Systems & Control Letters.* 2000. V. 41. No. 4. P. 281–290.
10. *Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А.* Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // *АиТ.* 2022. № 1. С. 40–66.
Antipov A.S., Krasnova S.A., Utkin V.A. Synthesis of invariant nonlinear single-channel sigmoid feedback tracking systems ensuring given tracking accuracy // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 1. P. 32–53.
11. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Синтез инвариантных систем с учетом проектных ограничений // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019. М.: ИПУ РАН. 2019. С. 68–72.
12. *Антипов А.С., Краснова С.А., Пивнева С.В.* Управление электромеханическим объектом в условиях неопределенности с учетом проектных ограничений // *Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021).* 2021. С. 567–579.
13. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Стабилизация интегратора третьего порядка с фазовым ограничением // *АиТ.* 2024. № 7. С. 32–41.
Pesterev A.V., Morozov Y.V. Stabilization of a chain of three integrators subject to a phase constraint // *Autom. Remote Control.* 2024. V. 85. No. 7. P. 597–603.
14. *Кокунько Ю.Г., Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями // *АиТ.* 2021. № 7. С. 38–68.
Kokunko Y.G., Krasnova S.A., Utkin V.A. Cascade synthesis of differentiators with piecewise linear correction signals // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 7. P. 1144–1168.
15. *Цыкунов А.М.* Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу. М.: Физматлит, 2009. 268 с.
16. *Isidori A.* Lectures in feedback design for multivariable systems. Basel, Switzerland: Springer International Publishing, 2017.

17. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // *АиТ.* 2014. № 9. С. 45–64.
Utkin V.A., Utkin A.V. Problem of tracking in linear systems with parametric uncertainties under unstable zero dynamics // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. P. 1577–1592.
18. *Khalil H.K.* Cascade high-gain observers in output feedback control // *Automatica.* 2017. V. 80. P. 110–118.
19. *Astolfi D., Marconi L.* A high-gain nonlinear observer with limited gain power // *IEEE Transact. Autom. Control.* 2015. V. 60. No. 11. P. 3059–3064.
20. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 25.08.2025

После доработки 05.02.2026

Принята к публикации 10.02.2026

© 2026 г. А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (alexeyshumsky@yandex.ru),
А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий, Владивосток)

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ АККОМОДАЦИИ К ДЕФЕКТАМ В НЕЧЕТКИХ ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНЫХ СИСТЕМАХ¹

Рассматривается задача аккомодации к дефектам в сложных дискретно-событийных системах ответственного назначения, описываемых моделью нечеткого конечного автомата. Решение задачи предполагает формирование управления, обеспечивающего полную развязку от вызываемых дефектами воздействий. Схема отказоустойчивого управления содержит ряд каналов, активизируемых в зависимости от диагностированного дефекта. Каждый канал включает два основных блока: 1) вспомогательный детерминированный конечный автомат – наблюдатель, формирующий оценку нечеткого вектора возможностей перехода системы в различные состояния, 2) преобразователь, формирующий вход управляемой системы на основе нового внешнего входа и состояния наблюдателя. Для разработки методов нахождения описания этих блоков и нового входа предлагается комплексный подход (парная алгебра нечетких покрытий), отличительной особенностью которого является совместное использование математических конструкций парной алгебры покрытий и нечеткой логики.

Ключевые слова: отказоустойчивое управление, аккомодация к дефектам, дискретно-событийные системы, нечеткие конечные автоматы, наблюдатели, парная алгебра нечетких покрытий, оптимизационный подход.

DOI: 10.7868/S2413977726100049

1. Введение

Требование отказоустойчивости, предъявляемое к управляемым системам ответственного назначения, предполагает способность таких систем адаптировать свое поведение к дефектам, возникающим в процессе функционирования. В соответствии с делением адаптивных систем на самонастраивающиеся и самоорганизующиеся принято выделять два принципиально различных подхода к обеспечению отказоустойчивости. Первый подход (самонастройка или аккомодация к дефектам) связан с формированием закона отказоустойчивого управления, при котором система с дефектами функционирует, сохраняя свои важнейшие показатели в допустимых пределах. Второй подход

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 25-19-00590, <https://rscf.ru/project/25-19-00590/>).

(самоорганизация) подразумевает внесение структурных изменений в саму систему, ее реконфигурацию с целью удаления отказавших элементов и использования резервных.

В настоящей статье рассматривается задача аккомодации к дефектам. В монографии [1] для решения этой задачи предложен подход, предусматривающий выполнение следующих этапов: 1) обнаружение дефектов, 2) локализацию (определение места возникновения дефекта), 3) идентификацию (определение величины дефекта), 4) построение модели неисправной системы и, наконец, 5) формирование на основе построенной модели закона отказоустойчивого управления. В цитируемой выше монографии предложенный подход к аккомодации был ориентирован на использование математических моделей управляемых систем в виде линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для реализации этапов 1–3 предполагалось использовать хорошо разработанные для линейных динамических систем методы решения диагностических задач, а нахождение закона управления (этап 5) осуществлять методами оптимального управления.

Эффективность аккомодации к дефектам в первую очередь определяется оперативностью формирования закона отказоустойчивого управления. Поэтому возможность сокращения временных затрат на реализацию каждого из этапов аккомодации, или даже исключение отдельных этапов, играет важную роль для повышения эффективности аккомодации. Вторым фактором, оказывающим влияние на эффективность аккомодации, – это точность модели управляемой системы, используемой для формирования закона отказоустойчивого управления. Последнее ведет к необходимости применения нелинейных динамических моделей, наиболее точно описывающих поведение реальных систем, а также робастных методов решения диагностических задач и задач отказоустойчивого управления, позволяющих снижать эффект от воздействия неконтролируемых факторов (внешние воздействия, ошибки моделей).

Отличительной особенностью ряда работ (см., например, [2, 3]) являлось применение адаптивных наблюдателей (оценивающих одновременно состояние и параметры системы) и методов формирования закона отказоустойчивого управления, использующих скользящие режимы. Тем самым обеспечивались приемлемые временные затраты на реализацию этапов аккомодации.

В [4] для управляемых систем, описываемых моделями в виде нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, был предложен подход, не требующий выполнения третьего и четвертого этапов. Особенностью этого подхода являлось использование закона управления, обеспечивающего полную развязку от вызываемых дефектами эффектов. В [5] этот подход был распространен на управляемые системы, описываемые моделями с дискретным временем в виде нелинейных разностных уравнений.

Помимо упомянутых выше классов управляемых систем с непрерывным или дискретным временем, описываемых линейными или нелинейными диф-

ференциальными или разностными уравнениями, существует важный класс так называемых дискретно-событийных систем (ДСС) [6, 7]. К ДСС относятся не только системы, естественным образом попадающие в этот класс (например, цифровые системы обработки информации и управления). Многие сложные системы, традиционно относящиеся к непрерывным, как то: физические, технические (в том числе человеко-машинные) и социально-экономические, могут рассматриваться как ДСС на верхнем уровне своей иерархии.

Отличительные особенности ДСС состоят в следующем:

1. ДСС являются дискретными по времени и значениям переменных состояния.

2. Пространство состояний ДСС конечно; состояния могут иметь различное смысловое содержание, например: ДСС простаивает, ДСС работает в определенном режиме (возможно обусловленном дефектом в системе), работа ДСС завершена и т.п.

3. Функционирование ДСС определяется событиями, которые могут быть следствиями некоторых внешних воздействий (входов или команд), а также дефектов, например: команда “приступить к работе”, команда “изменить режим работы исправной ДСС”, команда “осуществить коррекцию закона управления при обнаружении в ДСС некоторого дефекта”, команда “завершить работу ДСС” и т.п.

4. ДСС, как правило, ведет себя случайным образом, что связано с возможностью реализации различных переходов из одного состояния в другое, инициируемых одним и тем же событием.

Для описания ДСС с целью последующего решения диагностических задач или задач отказоустойчивого управления наиболее часто привлекаются следующие математические модели [8]:

- 1) детерминированные конечные автоматы,
- 2) вероятностные конечные автоматы и марковские цепи,
- 3) сети Петри.

Настоящая статья фокусируется на использовании моделей конечного автомата (КА). При этом предполагается, что входы и выходы КА формируются как наблюдаемые события (внешние и внутренние соответственно), в то время как возникновение дефекта в ДСС рассматривается как непосредственно ненаблюдаемое внутреннее событие. Решение задачи аккомодации к дефектам в ДСС на основе модели детерминированного КА (ДКА) и принципа полной развязки было получено в [9]. В основе этого решения лежит использование математического аппарата парной алгебры разбиений [10].

В тех случаях, когда ДКА-модель ДСС отсутствует, помимо модели в виде вероятностного КА также могут использоваться модели недетерминированного и нечеткого КА (НДКА и НЧКА соответственно). Использование недетерминированных и нечетких моделей (по сравнению с вероятностными) позволяет сократить объем необходимых вычислений, что приводит к снижению временных затрат на аккомодацию. Модели НДКА и НЧКА учитывают

ситуацию, когда для некоторого состояния и некоторого входа автомата могут быть реализованы переходы в различные последующие состояния. При этом если в случае НДКА нельзя отдать приоритет возможности реализации того или иного перехода, то в случае НЧКА, пользуясь дополнительной (например, статистической) информацией, экспертными оценками, результатами обучения и т.п., можно говорить о степени уверенности в осуществлении каждого из возможных переходов.

Целью настоящей статьи является развитие результатов работы [9] на случай НЧКА–моделей ДСС. Решаемая задача состоит в разработке методов формирования закона отказоустойчивого управления, ориентированных на использование НЧКА–моделей ДСС. Для ее решения привлекаются математические конструкции парной алгебры покрытий [10], нечеткой логики [11], а также понятия нечеткого автомата [12] и его детерминизатора [13].

2. Постановка задачи

Пусть при исправной работе ДСС описывается НЧКА–моделью вида

$$(1) \quad A = (U, X, Y, \delta, \lambda, x(0)),$$

где $U = \{u_1, \dots, u_m\}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$ – конечные множества входов, состояний и выходов соответственно, $x(0) \in X$ – известное начальное состояние, $\delta : X \times U \rightarrow \mu(X)$ и $\lambda : X \rightarrow \mu(Y)$ – соответственно нечеткие функции переходов и выходов; $\mu(X) \in \{\mu(x_i) \in [0, 1], 1 \leq i \leq n\}$ и $\mu(Y) \in \{\mu(y_j) \in [0, 1], 1 \leq j \leq l\}$ – нечеткие множества. Для нечеткой функции переходов δ будем использовать матричное задание, при котором переходы, осуществляемые под воздействием входа $u_k \in U$, описываются матрицей M^k размера $n \times n$, элемент которой $M_{i,j}^k \in [0, 1]$ характеризует степень уверенности в том, что автомат A из состояния $x_i \in X$ под воздействием входа u_k перейдет в состояние $x_j \in X$. Обозначим через $S(U)$ множество всех матриц M^k , $1 \leq k \leq m$. Для задания нечеткой функции выхода λ будем использовать матрицу L размера $n \times l$, элемент которой $L_{i,j}$ определяет степень уверенности в том, что выход $y_i \in Y$ формируется автоматом A в состоянии $x_j \in X$ (один и тот же выход может быть сформирован при различных состояниях ДСС). Обозначим через $S(Y)$ множество всех строк L_i , $1 \leq i \leq l$ матрицы L .

Модель (1) соответствует частному случаю НЧКА с детерминированными входами, и нечеткими функциями переходов и выходов [15]. Если обоснованное задание степени уверенности в возможности осуществления переходов затруднено, можно поступить следующим образом: элемент матрицы $M_{i,j}^k$, соответствующий допустимому переходу, задается равным единице, в то время как элемент этой матрицы, соответствующий недопустимому переходу, принимается равным нулю. Тем самым будет осуществлен переход от НЧКА–модели ДСС к ее НДКА–модели.

Пусть $X_{i,k}, X_{i,k} \subseteq X$, – множество всех состояний, достижимых из состояния $x_i \in X$ под воздействием входа $u_k \in U$. Предположим, что дефект f_s , $1 \leq s \leq N$, в ДСС на модели (1) может быть представлен искажением функции перехода δ таким, что вместо допустимого перехода из состояния x_i в состояние $x_j \in X_{i,k}$ под воздействием входа $u_k \in U$ реализуется недопустимый переход в состояние $x_t \notin X_{i,k}$. Этот факт будем отражать следующим образом: $f_s : (x_j \rightarrow x_t)_{i,k}$. При этом матрицу M_s^k ДСС с дефектом f_s получим изменением значения элемента $M_{i,t}^k$ матрицы M^k исправной ДСС с нуля на единицу. В дальнейшем будем придерживаться гипотезы об однократных дефектах из заданного списка $F = \{f_1, \dots, f_N\}$.

Рассмотрим последовательность и содержание действий, необходимых для формирования закона управления, обеспечивающего полную развязку от эффектов, вызываемых дефектом f_s . Введем НЧКА модель ДСС с дефектом f_s

$$(2) \quad A_s = (U, X, Y, \delta_s, \lambda, x(0)).$$

Функция переходов δ_s модели (2) может быть получена путем дополнения множества переходов, определяемых функцией δ модели (1), переходом, иницируемым дефектом $f_s \in F$, посредством изменения матрицы M^k описанным выше способом. Модель (2) в силу особенностей построения матрицы M^k учитывает возможность допустимого перехода при исправной работе ДСС, но также предусматривает и возможность недопустимого перехода в состояние, обусловленное дефектом в ДСС. Как следствие, можно говорить об определенном соответствии между поведением модели (2) и поведением как исправной ДСС, так и ДСС с дефектом.

Следуя [9], предположим, что вход u , обеспечивающий аккомодацию к дефекту f_s , формируется в соответствии с законом

$$(3) \quad u = g(x_0, y, u_*),$$

где g – подлежащее определению отображение, u_* – новый вход, x_0 – состояние детерминированного КА

$$(4) \quad A_0 = (X_0, U \times Y, \delta_0, x_0(0)),$$

функция переходов δ_0 которого определяется отображением $X_0 \times U \times Y \rightarrow X_0$ и находится по результатам детерминизации автомата A_s , $x_0(0) \in X_0$ – начальное состояние автомата A_0 , функция выхода автомата A_0 как самостоятельный объект не рассматривается. Заметим, что описание детерминированного КА A_0 , называемого ниже наблюдателем, не зависит от того, присутствует ли в ДСС дефект f_s или нет.

Нахождение закона управления, обеспечивающего аккомодацию ДСС, описываемой моделью (1), к дефекту $f_s \in F$ предполагает последовательное решение следующих задач:

- 1) построение модели (2) ДСС с дефектом f_s ,
- 2) нахождение наблюдателя (4) путем детерминизации автомата (2),
- 3) нахождение отображения g и формирование закона управления (3).

Необходимость решения этих задач определяет структуру статьи. В разделе 3 рассматривается подход к детерминизации НЧКА методами нечеткой логики и выявляется его недостаток. Для формирования теоретической базы с целью создания подхода, позволяющего устранить этот недостаток, в разделе 4 осуществляется разработка алгебры нечетких покрытий, а в разделе 5 предлагается алгоритм синтеза наблюдателя. Вопросы формирования закона отказоустойчивого управления обсуждаются в разделе 6. Иллюстративный пример приведен в разделе 7. Раздел 8 завершает статью.

3. Детерминизация НЧКА A_s

Напомним ряд операций нечеткой логики, играющих важную роль для дальнейшего изложения. Нечеткая матрица $B = \{B_{ij}\}$ – это матрица с элементами $B_{ij} \in [0, 1]$. Следовательно, введенные выше матрицы из множества $S(U)$ суть нечеткие матрицы. Пусть теперь B и C – нечеткие матрицы размера $a \times b$ и $b \times c$ соответственно. Произведение нечетких матриц определяется формулой [13]

$$(BC)_{ij} = \max_{ih} \min(B_{ih}C_{hj}) = \max(\min(B_{i1}C_{1j}), \dots, \min(B_{ib}C_{bj}),$$

где $1 \leq i \leq a$, $1 \leq h \leq b$, $1 \leq j \leq c$. Эта формула является обобщением известной формулы умножения матриц [16, с. 24]; она получается заменой произведения элементов матриц операцией нахождения минимума, а суммы элементов – операцией нахождения максимума. Рассмотрим простой пример.

Пример 1. Пусть матрицы B и C имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

После проведенных вычислений получим:

$$\begin{aligned} (BC)_{11} &= \max(\min(0,1 \ 0,6), \min(0,9 \ 0,4)) = 0,4, \\ (BC)_{12} &= \max(\min(0,1 \ 0,3), \min(0,9 \ 0,8)) = 0,8, \\ (BC)_{21} &= \max(\min(0,7 \ 0,6), \min(0,2 \ 0,4)) = 0,6, \\ (BC)_{22} &= \max(\min(0,7 \ 0,3), \min(0,2 \ 0,8)) = 0,3. \end{aligned}$$

В результате произведение нечетких матриц и принимает вид

$$BC = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через E множество нечетких векторов размера $1 \times n$, компоненты которых могут принимать значения на интервале $[0, 1]$. Пусть $A' = (U, X, \delta)$ – нечеткий полуавтомат (т.е. автомат A без функции выхода), $S(U)$ – множество нечетких матриц перехода автомата и сигнатура (множество допустимых операций) Σ включает все операции, предполагающие

умножение нечеткого $1 \times n$ вектора справа на матрицу из множества $S(U)$. Пусть также $E^0 \subseteq E$ – множество всех единичных векторов размера $1 \times n$, называемых порождающими состояниями детерминизатора. Замыкание $[E]_\Sigma$ множества E относительно сигнатуры Σ есть множество всех векторов (включающее сами векторы множества E), которые можно получить, применяя операции из сигнатуры Σ к векторам из E . Для построения замыкания предлагается использовать следующий

Алгоритм 1 (построение замыкания).

1. Положить $i = 0$.
2. Найти множество векторов $E^{i+1} = E^i \cup [E^i]_\Sigma$.
3. Если $E^{i+1} = E^i$ положить $[E]_\Sigma = E^i$. Конец.
4. Положить $i = i + 1$ и перейти к п.2.

Согласно [13] детерминизатором $D(A')$ НЧКА A' называется ДКА, описываемый тройкой

$$(5) \quad D(A') = (S(X), U, \delta_D),$$

где $S(X) = [E]_{S(U)}$, $\delta_D : S(X) \times S(U) \rightarrow S(X)$ – функция перехода детерминизатора, определяемая соотношением

$$(6) \quad \delta_D(\mu_i, u_k) = \mu_i M^k, \quad \mu_i \in S(X), \quad M^k \in S(U).$$

Таким образом, каждое состояние μ_i детерминизатора ассоциируются с некоторым нечетким вектором степеней принадлежности, характеризующим возможность достижения определенных состояний управляемой ДСС в процессе ее работы.

В [14] приведено соотношение, определяющее верхнюю граничную оценку максимального числа состояний детерминизатора

$$(7) \quad \#S(X) \leq q^n - 1,$$

где символ $\#$ обозначает мощность множества; q – число различных значений элементов нечетких матриц из множества $S(U)$; n , как и ранее, – число состояний НЧКА.

Непосредственно из соотношения (7) следует, что число состояний детерминизатора может существенно превосходить число состояний исходного автомата и экспоненциально растет с ростом числа состояний последнего. Если этот факт минимально влияет на решение диагностических задач, поскольку их решение осуществляется в реальном времени и не требует предварительного нахождения полного описания детерминизатора [14], то в случае решения задачи аккомодации потребуются проведение дополнительных вычислений для нахождения отображения g и выбора управления u_* на базе описания детерминизатора. Объем и реализуемость вычислений будут прямо связаны с размерностью детерминизатора. Следствием может быть ограничение на размерность модели исходной системы. С целью преодоления этого

ограничения предлагается при синтезе наблюдателя A_0 в качестве множества его состояний вместо замыкания E использовать некоторое множество, размерность которого не превышает размерности исходной модели (1), сохраняя требование замкнутости относительно операции из сигнатуры Σ . Для нахождения такого множества ниже вводится парная алгебра нечетких покрытий.

Другим отличием наблюдателя от детерминизатора является то, что функция переходов наблюдателя также зависит от выхода ДСС, что позволит уточнять значения степеней принадлежности – компонент нечетких векторов, ассоциируемых с x_0 , с учетом дополнительной информации, содержащейся в выходах ДСС. Последнее оправдывает использование термина “наблюдатель” для автомата A_0 .

4. Парная алгебра нечетких покрытий

В [17] для решения задачи детерминизации НДКА были введены конструкции парной алгебры покрытий. Ниже эти конструкции распространяются на нечеткие множества, что позволит предложить подход к детерминизации НЧКА, учитывающий информацию, содержащуюся в нечеткой модели ДСС.

Напомним, что покрытием π множества X называется множество его подмножеств (блоков покрытия) $\pi = \{B_{\pi,1}, \dots, B_{\pi,\nu}\}$ таких, что

$$B_{\pi,k} \subseteq X, \quad \bigcup_{k=1}^{\nu} B_{\pi,k} = X, \quad B_{\pi,k} \subseteq B_{\pi,j} \Rightarrow B_{\pi,k} = B_{\pi,j}.$$

Заметим, что в случае выполнения дополнительного условия

$$B_{\pi,k} \cap B_{\pi,j} = \emptyset, \quad k \neq j,$$

приведенные выше конструкции определяют разбиение множества X . Множество всех покрытий множества X обозначим Π_X .

Далее будем предполагать, что блоки рассматриваемых ниже покрытий суть нечеткие множества. Задание таких блоков удобно осуществлять вектор-строкой функций принадлежности. При этом запись $\mu_{B_{\pi,j}} = (0, 0,1, 0,7, 0, 0, 0,5)$ будет означать, что мощность множества X равна шести, j -й блок покрытия π содержит состояния x_2, x_3, x_6 , ненулевые значения степеней принадлежности этих состояний j -му блоку покрытия равны $\mu_{B_{\pi,j}}(x_2) = 0,1$, $\mu_{B_{\pi,j}}(x_3) = 0,7$, $\mu_{B_{\pi,j}}(x_6) = 0,5$.

Для осуществления операций над покрытиями потребуется находить пересечение и объединение их блоков. Пусть π и σ – некоторые покрытия множества X . В соответствии с правилами осуществления операций над нечеткими множествами [14] запишем

$$\begin{aligned} \mu_{B_{\pi,j} \cap B_{\sigma,k}}(x_i) &= \min(\mu_{B_{\pi,j}}(x_i), \mu_{B_{\sigma,k}}(x_i)), \\ \mu_{B_{\pi,j} \cup B_{\sigma,k}}(x_i) &= \max(\mu_{B_{\pi,j}}(x_i), \mu_{B_{\sigma,k}}(x_i)). \end{aligned}$$

Будем говорить, что покрытие π меньше или равно покрытию σ и обозначать $\pi \leq \sigma$, если для каждого блока $B_{\pi,j}$ покрытия π всегда найдется блок $B_{\sigma,k}$ покрытия σ такой, что $B_{\pi,j} \subseteq B_{\sigma,k}$. Так как при этом $B_{\pi,j} \cup B_{\sigma,k} = B_{\sigma,k}$, выполнение включения $B_{\pi,j} \subseteq B_{\sigma,k}$ требует доминирования нечетким множеством $B_{\sigma,k}$ нечеткого множества $B_{\pi,j}$, т.е. выполнения условия

$$(8) \quad \mu_{B_{\pi,j}}(x_i) \leq \mu_{B_{\sigma,k}}(x_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Существуют два специальных покрытия, обозначаемые как **0** и **1**, которые являются разбиениями такими, что каждый блок разбиения **0** содержит только один элемент множества X , в то время как разбиение **1** включает только один блок, содержащий все элементы множества X . Для произвольного покрытия π множества X выполняется

$$\mathbf{0} \leq \pi \leq \mathbf{1}.$$

Известно [10], что множество всех покрытий множества X с отношением частичного порядка образует решетку. Следовательно, для каждой пары покрытий π и σ можно найти два покрытия $\inf(\pi, \sigma)$ и $\sup(\pi, \sigma)$. Принято обозначать эти покрытия как $\pi \times \sigma$ и $\pi + \sigma$ – соответственно произведение и сумма покрытий. Для вычисления произведения и суммы покрытий используем правила, сформулированные в [17].

1. Каждый блок покрытия $\pi \times \sigma$ представляет собой пересечение некоторых блоков покрытий π и σ .
2. Каждый блок покрытия $\pi + \sigma$ представляет собой объединение пересекающихся блоков покрытий π и σ .

Обратим внимание на одну особенность, которая может возникать при нахождении результата операции $\times$. Пусть при осуществлении этой операции по правилам традиционной алгебры покрытий [10] результатом является нулевое разбиение. Однако при формальном применении описанного выше способа с учетом функций принадлежности возможно появление таких блоков нулевого разбиения, для которых значения функций принадлежности состояний этим блокам будет строго меньше единицы. Это будет свидетельствовать о возникновении сингулярности в процессе преобразования НЧКА-модели системы (например, при ее детерминизации). При необходимости возможным способом преодоления данной проблемы является переход (полный или частичный) к НДКА-модели системы путем замены ненулевых значений соответствующих функций принадлежности на единичные.

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и покрытия $\pi = \{(x_1); (x_3); (x_2, x_4); (x_2, x_5, x_6)\}$, $\sigma = \{(x_1); (x_2, x_5); (x_3, x_4); (x_4, x_6)\}$ с функциями принадлежности состояний соответствующим блокам $\mu_{B_{\pi,4}}(x_2) = 0,5$; $\mu_{B_{\sigma,3}}(x_4) = 0,3$; остальные функции принадлежности равны единице. Применяя правило нахождения пересечения нечетких множеств к блокам покрытий π и σ , получим функции принадлежности $\mu_{B_{\pi,1} \cap B_{\sigma,1}}(x_1) = \mu_{B_{\pi,2} \cap B_{\sigma,3}}(x_3) = \mu_{B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,2}}(x_2) = \mu_{B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,4}}(x_4) = \mu_{B_{\pi,4} \cap B_{\sigma,4}}(x_6) = 1$, $\mu_{B_{\pi,4} \cap B_{\sigma,2}}(x_5) = 0,5$, $\mu_{B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,3}}(x_4) = 0,3$. Функции принадлежности состояний пустым множе-

ствам, получаемым в результате пересечения блоков разбиений π и σ , равны нулю. Заметим, что $B_{\pi,3\cap\sigma,2} \subseteq B_{\pi,4\cap\sigma,2}$. Следуя определению покрытия, необходимо заменить оба этих блока одним доминирующим их блоком $B_{\pi,3\cap\sigma,2} \cup B_{\pi,4\cap\sigma,2}$. Кроме того, нечеткое множество $B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,4}$ доминирует нечеткое множество $B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,3}$. В результате будет получено разбиение $\pi \times \sigma = \{(x_1); (x_3); (x_2, x_5); (x_4); (x_6)\}$.

Найдем теперь сумму покрытий $\pi + \sigma$. Осуществляя объединение пересекающихся блоков покрытий, получим:

$$\begin{aligned} \mu_{B_{\pi,1} \cup B_{\sigma,1}}(x_1) &= \mu_{B_{\pi,2} \cup B_{\sigma,3}}(x_3) = \mu_{B_{\pi,2} \cup B_{\sigma,3}}(x_4) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2}}(x_2) = \\ &= \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,2}}(x_4) = \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,2}}(x_5) = \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}}(x_3) = \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}}(x_4) = \\ &= \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2}}(x_2) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2}}(x_5) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2}}(x_6) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_2) = \\ &= \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_3) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_4) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_5) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_6) = \\ &= \mu_{B_{\pi,2} \cup B_{\sigma,4}}(x_2) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}}(x_5) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}}(x_6) = 1, \\ \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}}(x_2) &= 0,5, \quad \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}}(x_3) = 0,3. \end{aligned}$$

При построении результирующего покрытия будем учитывать, что $B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}$ доминирует $B_{\pi,2} \cup B_{\sigma,3}$, а также что $B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,2} \subseteq B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}$, $B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,4} \subseteq B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}$ и $B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2} \subseteq B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}$. Как следствие, в качестве самостоятельных блоков покрытия $\pi + \sigma$ выбираются доминирующие нечеткие множества $B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}$ и $B_{\pi,3} \cup B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2} \cup B_{\sigma,4}$. Окончательно получаем покрытие $\pi + \sigma = (x_1); (x_2, x_3, x_4); (x_2, x_4, x_5, x_6)$, второй блок которого является нечетким множеством, так как $\mu_{B_{\pi+ \sigma,2}}(x_2) = 0,5$.

Пусть π и σ – некоторые покрытия множества X . Для удобства дальнейшего изложения приведем концентрированное описание только основных (используемых в настоящей статье) конструкций парной алгебры покрытий – бинарного отношения Δ , понятия парности покрытий и оператора $\mathbf{m}$. Более полную информацию по этому вопросу можно найти, например, в [10].

Говорят, что покрытия π и σ удовлетворяют отношению Δ , $(\pi, \sigma) \in \Delta$, и образуют пару, если

$$(9) \quad x \equiv x'(\pi) \Rightarrow \delta(x, u_k) \equiv \delta(x', u_k)(\sigma) \quad \forall u_k \in U.$$

Пусть $x, x' \in B_{\pi,j}$. Тогда согласно [17] для каждого $u_k \in U$ можно записать $\delta(x, u_k), \delta(x', u_k) \in B_{\sigma,j}^k$, где вектор функций принадлежности $\mu_{B_{\sigma,j}^k}$ определяется соотношением.

$$(10) \quad \mu_{B_{\sigma,j}^k} = \mu_{B(\pi,j)} M^k, \quad M^k \in M(U).$$

Для заданного покрытия π могут существовать несколько покрытий, удовлетворяющих отношению $(\pi, \sigma) \in \Delta$. В частности, $\pi, \mathbf{1} \in \Delta$ справедливо для любого покрытия π . Введем оператор $\mathbf{m}$, ставящий в однозначное соответствие покрытию π покрытие $\mathbf{m}(\pi)$ следующим образом:

$$(\pi, \mathbf{m}(\pi)) \in \Delta, \quad (\pi, \sigma) \in \Delta \Rightarrow \mathbf{m}(\pi) \leq \sigma.$$

Способ вычисления оператора $\mathbf{m}(\pi)$ определяется следующим алгоритмом.

Алгоритм 2 (вычисление оператора $\mathbf{m}(\pi)$).

1. Для каждого $u_k \in U$ и каждого j , $1 \leq j \leq \nu$, где ν – число блоков покрытия π , воспользовавшись (10), найти подмножество $B_{\sigma,j}^k$.

2. Записать множество непустых подмножеств $Q = \{B_{\sigma,j}^k, 1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq \nu\}$.

3. Сформировать покрытие $\mathbf{m}(\pi)$ из Q путем объединения тех подмножеств, для которых выполняется вхождение одного из них в другое. Конец.

Пример 3. Рассмотрим НЧКА, описываемый матрицами

$$M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и положим $\pi = \mathbf{0}$. Найдем $\sigma = \mathbf{m}(\pi)$. При выполнении первого пункта алгоритма 2, взяв за основу первый блок покрытия π , $\mu_{B_{\pi,1}} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, получим вектор-функцию принадлежности $\mu_{B_{\sigma,1}^1} = \mu_{B_{\pi,1}} M^1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, соответствующую подмножеству $B_{\sigma,1}^1 = \{x_2\}$. Далее находятся вектор-функции получим вектор-функцию принадлежности $\mu_{B_{\sigma,1}^1} = \mu_{B_{\pi,1}} M^1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, соответствующую подмножеству $B_{\sigma,1}^1 = \{x_2\}$. Далее находятся вектор-функции принадлежности $\mu_{B_{\sigma,1}^2} = \mu_{B_{\pi,1}} M^2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ и $\mu_{B_{\sigma,1}^3} = \mu_{B_{\pi,1}} M^3 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, соответствующие пустым подмножествам $B_{\sigma,1}^2$ и $B_{\sigma,1}^3$. Для остальных блоков покрытия π , проводя аналогичные вычисления, найдем непустые нечеткие подмножества с функциями принадлежности $\mu_{B_{\sigma,1}^3} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_{\sigma,2}^2} = (0 \ 0 \ 0,7 \ 0,3 \ 0)$, $\mu_{B_{\sigma,2}^3} = (1 \ 0,7 \ 0 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_{\sigma,3}^2} = (0 \ 0,4 \ 0,6 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_{\sigma,3}^3} = (0 \ 0 \ 0,9 \ 0 \ 0,1)$ и $\mu_{B_{\sigma,4}^3} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$, $\mu_{B_{\sigma,5}^3} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$. В соответствии со вторым пунктом алгоритма 2 запишем $Q = \{B_{\sigma,5}^3; B_{\sigma,1}^1; B_{\sigma,3}^2; B_{\sigma,2}^2; B_{\sigma,3}^3; B_{\sigma,4}^3\} = \{(x_1); (x_2); (x_2, x_3); (x_3, x_4); (x_5)\}$. Выполняя третий пункт алгоритма, отметим, что $B_{\sigma,1}^1 \subseteq B_{\sigma,3}^2$ и $B_{\sigma,4}^3 \subseteq B_{\sigma,3}^3$. Заменим вышеуказанные нечеткие множества доминирующими нечеткими множествами $B^* = B_{\sigma,1}^1 \cup B_{\sigma,3}^2$ и $B^{**} = B_{\sigma,4}^3 \cup B_{\sigma,3}^3$ с функциями принадлежности соответственно $\mu_{B^*} = (0 \ 1 \ 0,6 \ 0 \ 0)$ и $\mu_{B^{**}} = (0 \ 0 \ 0,9 \ 0 \ 0,1)$. Окончательно получим нечеткое покрытие $\sigma = \{B_{\sigma,5}^3; B^*; B_{\sigma,3}^2; B^{**}\} = \{(x_1); (x_2, x_3); (x_3, x_4); (x_3, x_5)\}$ с соответствующими функциями принадлежности.

Заметим, что в отличие от случая ДКА, для случаев НДКА или НЧКА всегда выполняется $\mathbf{m}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.

5. Синтез наблюдателя A_0

Для произвольного покрытия φ , проводя аналогию с конструкциями алгебры функций в приложении к непрерывным динамическим системам [4],

введем понятия δ -инвариантности

$$(\varphi, \varphi) \in \Delta$$

и (λ, δ) -инвариантности

$$(11) \quad (\pi_\lambda \times \varphi, \varphi) \in \Delta,$$

где блоки нечеткого покрытия π_λ задаются строками матрицы L . Несложно видеть, что понятие δ -инвариантности является частным случаем (при $\pi_\lambda = \mathbf{1}$) понятия (λ, δ) -инвариантности. Именно последнее понятие будет использоваться при синтезе наблюдателя A_0 . Информационный смысл этого понятия состоит в следующем [10]: пусть в некоторый дискретный момент времени имеется полная информация о выходе ДСС или, что то же самое, информация о текущем состоянии ДСС с точностью до некоторого блока покрытия π_λ , а также дополнительная информация о текущем состоянии с точностью до некоторого блока покрытия φ , тогда гарантируется возможность вычисления состояния ДСС в следующий дискретный момент времени с точностью до некоторого блока покрытия φ .

Для нахождения (λ, δ) -инвариантного покрытия такого, что

$$(12) \quad \varphi^0 \leq \varphi,$$

где φ^0 – некоторое заданное покрытие, может быть использован алгоритм, аналогичный алгоритму работы [15]; при этом подразумевается, что вычисление операций и операторов алгебры покрытий осуществляется с использованием введенных выше правил нечеткой логики.

Алгоритм 3 (нахождение (λ, δ) -инвариантного покрытия φ).

1. Принять $i = 0$ задать φ^0 .
2. Вычислить покрытие

$$(13) \quad \varphi^{i+1} = \varphi^i + \mathbf{m}(\pi_\lambda \times \varphi),$$

если $\varphi^{i+1} = \varphi^i$, то перейти к пункту 3, в противном случае положить $i := i + 1$ и повторить выполнение пункта 2.

3. Принять $\varphi^{i+1} := \varphi^i$. Конец.

Сходимость алгоритма 3 и свойство получаемого покрытия определяются следующей теоремой.

Теорема 1 (теорема сходимости). *Существует конечное $i = i_{\max}$, такое что покрытие $\varphi = \varphi^i = \varphi^{i+1} = \varphi^{i_{\max}}$, определяемое согласно (13), является наименьшим, удовлетворяющим условиям (11) и (12).*

Доказательство. Приведено в [9] для случая разбиений. В случае использования алгебры покрытий доказательство остается прежним [17].

Введем операцию

$$(14) \quad < L_i, \mu_{B(\varphi, j)} > = (\min(L_{i,1}, \mu_{B_{\varphi,j}}(x_1)), \dots, \min(L_{i,n}, \mu_{B_{\varphi,j}}(x_n))).$$

Результат операции определяет вектор-строку функций принадлежности состояний ДСС блоку покрытия $\pi_\lambda \times \varphi$, получаемому в результате пересечения i -го блока покрытия π_λ и j -го блока покрытия φ . Тогда, имея в виду (10), можно записать

$$(15) \quad \mu_{B_{\pi_\lambda \times \varphi^i}^k} = \langle L_i, \mu_{B_{\varphi_j^i}} \rangle > M_s^k,$$

где $B_{\pi_\lambda \times \varphi^i}^k$ – подмножество из п. 2 алгоритма 2, записанное для случая вычисления оператора $\mathbf{m}(\pi_\lambda \times \varphi^i)$. Соотношение (15) удобно использовать при вычислении нечеткого покрытия φ^{i+1} в соответствии с формулой (13).

Положим $\varphi^0 = \mathbf{0}$ и, воспользовавшись алгоритмом 2, найдем покрытие φ . Поставим в соответствие каждому состоянию $x_{0,j}$ наблюдателя блок покрытия φ , используя для этого запись в виде единичного вектора размера $1 \times n_0$, j -й элемент которого равен единице. Здесь n_0 , $n_0 \leq n$, – число блоков покрытия φ и множество X_0 , представляющее множество единичных векторов, имеет размерность, не превышающую размерность множества состояний исходного автомата A .

Равенство

$$(16) \quad \langle L_i, \mu_{B_{\varphi,j}} \rangle = 0$$

будет говорить о несовместимости i -го выхода ДСС и j -го состояния ДКА A_0 .

Функцию переходов наблюдателя δ_0 будем задавать совокупностью матриц $M_0^{k,i}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq l$, каждая из которых соответствует определенному сочетанию значений входов и выходов ДСС. Найдем

$$(17) \quad \mu_{B_{\varphi,j}^+} = \langle L_i, \mu_{B_{\varphi,j}} \rangle > M_s^k.$$

В случае выполнения включения

$$(18) \quad B_{\varphi,j}^+ \subseteq B_{\varphi,t}$$

можно утверждать, что состояния ДСС из блока $B_{\varphi,j}$ покрытия φ при выходе y_i под воздействием входа u_k переводятся в состояния, принадлежащие блоку $B_{\varphi,t}$. Это позволяет свести нахождение матриц $M_0^{k,i}$ к вычислению (17) и проверке выполнения включения (18) для различных сочетаний входов и выходов ДСС: $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq l$. Такая проверка может быть осуществлена с помощью следующего алгоритма, в котором индексы j и t соответствуют состояниям наблюдателя A_0 до и после перехода.

Алгоритм 4 (вычисление матриц $M_0^{k,i}$).

1. Положить $k = 1$.
2. Положить $i = 1$.
3. Принять $M_0^{k,i} = 0_{n_0 \times n_0}$.
4. Положить $j = 1$, $t = 1$.
5. Если выполняется (16), положить $j = j + 1$, $t = 1$ и перейти к выполнению п. 5.

6. Найти множество $B_{\varphi,j}^+$ по вектор-строке функций принадлежности, вычисляемой согласно (17).

7. Проверить выполнение включения (18). Если включение не выполняется, перейти к выполнению п. 9.

8. Записать “1” на место элемента матрицы $M_0^{k,i}(i, t)$, стоящего на пересечении j -й строки и t -го столбца. Перейти к п. 10.

9. Если $t = n_0$, положить $t = t + 1$ и вернуться к выполнению п. 7.

10. Если $j = n_0$, положить $j = j + 1$, $t = 1$ и перейти к п. 5.

11. Если $i = l$, положить $i = i + 1$ и перейти к п. 3.

12. Если $k = m$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 2.

13. Конец.

Алгоритм предполагает выполнение ряда вложенных циклов (внутри которых осуществляются элементарные действия над матрицами); общее число циклов не превышает lmn_0^2 , что характеризует его вычислительную сложность. Пункты 1–4 задают начальные значения индексов t, j, i и k , которые управляют последовательностью выполнения циклов в процессе реализации алгоритма. При выполнении пунктов 9–12 осуществляется корректировка и контроль предельных значений этих индексов, что гарантирует сходимость алгоритма. Поскольку все вычисления осуществляются off-line, реализация алгоритма для реальных систем не потребует значительных вычислительных ресурсов и может быть осуществлена с использованием обычного персонального компьютера. Работа основной части (пункты 5–8) алгоритма поясняется в следующем примере.

Пример 4. Пусть динамика ДСС при исправной работе описывается НЧКА–моделью из примера 3. Пусть также функция выхода ДСС задается нечеткой матрицей L . Предположим, что в ДСС возможен дефект $f_1 : (x_5 \rightarrow x_1)_{4,3}$. Как следствие, матрица M^3 примет вид матрицы M_1^3 . Приведем вид вновь введенных матриц для ДСС с дефектом (матрицы M^1 и M^2 сохраняют свой прежний вид):

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0,1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемой НЧКА–модели, воспользовавшись алгоритмом 3, найдем (λ, δ) -инвариантное покрытие при $\varphi^0 = 0$. Вычисление оператора $\mathbf{m}$ при этом осуществим с использованием алгоритма 2. Положив $i = 0$ и воспользовавшись (13), получим

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \mathbf{0} + \mathbf{m}(\lambda \times \mathbf{0}) = \mathbf{m}(\mathbf{0}) = \{B^{***}; B^*; B_{\sigma,2}^2; B^{**}\} = \\ &= \{(x_1, x_5); (x_2, x_3); (x_3, x_4); (x_3, x_5)\}, \end{aligned}$$

где $m_{B^{***}} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$. Продолжая вычисления согласно (13), можно показать, что $\varphi^2 = \varphi^1 + \mathbf{m}(\pi_\lambda \times \varphi^1) = \varphi^1$. В соответствии с п. 3 алгоритма 3 примем $\varphi = \varphi^1$.

Для удобства дальнейшего изложения иллюстрацию работы алгоритма 4 начнем с приведения ряда промежуточных результатов (см. табл. ниже). Таблица демонстрирует результаты проверки выполнения включения (18) (пп. 5–8 алгоритма 4).

Результаты работы алгоритма 4 (пункты 1–7)

$B_{\varphi 1} \cap B_{\pi_{\lambda 1}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 1} \cap B_{\pi_{\lambda 2}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 1} \cap B_{\pi_{\lambda 3}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$
$B_{\varphi 1}^+ \subseteq \quad B_{\varphi 2} \quad \emptyset \quad \emptyset$	$B_{\varphi 1}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad B_{\varphi 1}$	$B_{\varphi 1}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset$
$B_{\varphi 2} \cap B_{\pi_{\lambda 1}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 2} \cap B_{\pi_{\lambda 2}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 2} \cap B_{\pi_{\lambda 3}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$
$B_{\varphi 2}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 3} \quad \emptyset$	$B_{\varphi 2}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 3} \quad \emptyset$	$B_{\varphi 2}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 2} \quad B_{\varphi 4}$
$B_{\varphi 3} \cap B_{\pi_{\lambda 1}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 3} \cap B_{\pi_{\lambda 2}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 3} \cap B_{\pi_{\lambda 3}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$
$B_{\varphi 3}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad B_{\varphi 1}$	$B_{\varphi 3}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset$	$B_{\varphi 3}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 2} \quad B_{\varphi 4}$
$B_{\varphi 4} \cap B_{\pi_{\lambda 1}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 4} \cap B_{\pi_{\lambda 2}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 4} \cap B_{\pi_{\lambda 3}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$
$B_{\varphi 4}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset$	$B_{\varphi 4}^+ \subseteq B_{\varphi 2} \quad \emptyset \quad B_{\varphi 2} \quad B_{\varphi 1}$	$B_{\varphi 4}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 2} \quad B_{\varphi 4}$

По горизонтали эта таблица разбита на четыре части, каждая из которых соответствует определенному блоку покрытия $B_{\varphi,j}$ (состоянию наблюдателя $x_{0,j}$), $1 \leq j \leq 4$, имеющему место до перехода. Каждая часть таблицы содержит две строки. При этом нечетные строки содержат описание аргументов: сочетания исходного блока покрытия $B_{\varphi,j}$ с блоками покрытия π_{λ} (соответствуют выходам ДСС) и используемыми при вычислении матрицами M_s^k (соответствуют входам ДСС). В четных строках приводятся блоки покрытия φ , соответствующие следующим состояниям наблюдателя, получаемым после реализации перехода. Основываясь на этой таблице, рассмотрим процесс нахождения строк матриц, описывающих динамику наблюдателя A_0 . Отметим, что после выполнения первых четырех пунктов алгоритма получим: $k = 1$, $i = 1$, $M_0^{1,1} = 0_{4 \times 4}$, $j = 1$, $t = 1$. Проверка равенства (16) в соответствии с п. 5 алгоритма в силу невыполнения этого равенства потребует перехода к п. 6. Вычисления согласно п. 6 и проверка включения (18) согласно п. 7 приводят к переходу к п. 9. Последующий возврат к п. 7 и проверка включения (18) подтвердят его выполнение для $j = 1$, $t = 2$. После выполнения п. 8 первая строка матрицы $M_0^{1,1}$ будет содержать единицу на второй позиции. Продолжая выполнение алгоритма 4 для других значений индекса j , $2 \leq j \leq 4$, несложно убедиться, что все остальные строки этой матрицы будут нулевыми. Таким образом, вид строк матрицы $M_0^{k,i}$ для некоторой пары входов и выходов полностью определяется таблицей. Так, элементы третьей строки матрицы $M_0^{k,2}$ равны нулю для всех значений индекса $k \in \{1, 2, 3\}$, в то время, как элементы четвертой строки матриц $M_0^{2,3}$, $M_0^{3,3}$ содержат единицу соответственно на второй и четвертой позициях.

6. Формирование закона управления

Предположим, что решается задача терминального управления ДСС, состоящая в переводе системы из начального состояния $x(0) \in X$ в некоторое конечное состояние x^r , $x^r \in X$. Отметим, что гарантировать решение этой

задачи, опираясь на единственную эталонную траекторию движения, невозможно в силу неопределенности реакции ДСС на одни и те же входные воздействия: можно говорить об управлении состояниями системы только с точностью до блоков некоторого покрытия множества X . В результате на практике может потребоваться существование нескольких допустимых траекторий с возможностью перехода от одной траектории к другой в зависимости от реакции ДСС. Задача формирования допустимых альтернативных траекторий тесно связана с исследованием специфики конкретной системы и подробно не рассматривается.

Если в ДСС диагностирован дефект f_s , упомянутым покрытием является покрытие φ [9]. Как следствие, первоначальная задача терминального управления замещается задачей перевода состояния системы из блока покрытия B_φ^0 , $x(0) \in B_\varphi^0$, в блок покрытия B_φ^r , $x^r \in B_\varphi^r$. Далее формируется требуемая траектория движения в терминах блоков покрытия φ , представляющая собой последовательность переходов: $B_\varphi^0 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow \dots \rightarrow B_\varphi^r$, где хотя бы одно состояние последующего блока достижимо из хотя бы одного состояния предыдущего блока. Отметим, что на реализацию заданной последовательности не будут влиять ошибки выполнения переходов ДСС, обуславливаемые дефектом f_s , поскольку возникающие искажения ее состояния будут находиться в пределах одного и того же блока покрытия φ . Отметим также, что этой последовательности однозначно соответствует определенная последовательность переходов наблюдателя $A_0 : x_0^0 \rightarrow x_0^1 \rightarrow \dots \rightarrow x_0^r$.

Следуя [9], будем связывать значение генерируемого нового входа u_* с текущим значением функции перехода наблюдателя δ_0 или, что то же самое, с блоком покрытия $B_{\varphi,t}$, состояния которого достижимы из состояний блока покрытия $B_{\varphi,j}$ (см. (17) и (18)). Например, если в приведенной выше цепочке переходов имеет место переход $B_\varphi^i \rightarrow B_\varphi^{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$, то блок B_φ^i здесь может рассматриваться в качестве блока $B_{\varphi,j}$, а блок B_φ^{i+1} – в качестве блока $B_{\varphi,t}$. Следовательно, новый вход u_* полностью определяется желаемым следующим блоком покрытия φ в цепочке переходов.

Рассмотрим теперь правило формирования отображения g . Это правило базируется на анализе функции переходов наблюдателя δ_0 . Проблема здесь заключается в том, что для одной и той же пары сочетаний выхода y ДСС и состояния наблюдателя x_0^i , которому соответствует блок B_φ^i покрытия φ , могут существовать несколько входов, обеспечивающих требуемый переход ДСС в состояние $x_* \in X$. Для устранения возникающей неоднозначности предлагается осуществлять выбор такого входа, который обеспечивает наибольшую степень уверенности в переходе системы в заданное состояние x_* в соответствии с критерием

$$(19) \quad J = \max_u \mu_{B_\varphi^{i+1}}(x_*).$$

Пример 5. Вернемся к ДСС с дефектом f_1 из примеров 3 и 4. Пусть задача терминального управления состоит в последовательном переводе этой системы из начального состояния $x(0) = x_1 \in B_{\varphi,1}$ в конечное состояние $x^r = x_3$

так, чтобы была реализована цепочка переходов $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$. Поставим в соответствие этой цепочке последовательность блоков покрытия φ . Так как $x_2 \in B_{\varphi,2}$, используя таблицу как основу для формирования отображения g , можно убедиться, что единственный вариант допустимого перехода обеспечивается входом ДСС u_1 . Однако если при этом формируется выход u_3 , то переход осуществлен в состояние x_3 , а не в состояние x_2 . Это значит, что первоначально заданная траектория (цепочка переходов ДСС) нарушается и требуется переход к другой допустимой траектории.

Если сформирован другой выход ДСС (не u_3), то можно гарантировать, что переход действительно осуществлен в состояние x_2 . При этом, как следует из таблицы, вход u_2 обеспечит следующий переход в блок $B_{\varphi,3}$, содержащий состояние x_3 . Формирование выхода u_3 в этом случае подтвердит успешность перехода.

Проиллюстрируем работу оптимизационного подхода на основе критерия (19). Пусть теперь $x_3 \in B_{\varphi,2}$, выход ДСС u_3 и при реализации альтернативной траектории $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_3$ с наибольшей уверенностью требуется сохранить это же состояние ($x_* = x_3$). Пусть теперь $x_3 \in B_{\varphi,2}$, выход ДСС u_3 и при реализации альтернативной траектории $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_3$ с наибольшей уверенностью требуется сохранить это же состояние ($x_* = x_3$). Из таблицы следует, что сохранение состояния возможно при входах u_2 или u_3 . После успешного перехода будет иметь место соответственно $x_3 \in B_{\varphi,2}$ или $x_3 \in B_{\varphi,4}$. Однако в последнем случае значение критерия $J = \mu_{B_{\varphi,4}}(x_3) = 0,9$ больше, чем в первом $J = \mu_{B_{\varphi,2}}(x_3) = 0,6$. Поэтому выбор u_3 является предпочтительным.

7. Иллюстративный пример

Рассмотрим процесс управления изменениями ИТ-системы ([17], табл. 1). Этот процесс является одним из важнейших для ИТ-систем: он отвечает за управление жизненным циклом всех изменений и способствует реализации полезных изменений с минимальным прерыванием предоставления ИТ-услуг. Субъектами процесса являются:

- 1) инициатор – представитель департамента ИТ, осуществляющий первичную обработку, назначение и контроль над ходом выполнения изменений;
- 2) исполнитель – инженер, производящий изменения в элементах конфигурации или координирующий работу подрядчика по этим изменениям;
- 3) консультативный комитет по изменениям (КИ) – консультативный орган, регулярно собирающийся для оценки и планирования изменений;
- 4) менеджер процесса – представитель департамента ИТ, осуществляющий контроль процесса управления изменениями и формирующий предложения по его улучшению.

В [14] введена модель процесса в виде нечеткого конечного автомата и предложено решение задачи диагностирования (мониторинга) этого процесса. Опуская подробное описание самой модели, приведем перечень ис-

пользуемых переменных. В качестве входов модели рассматриваются следующие внешние события: u_1 – завершение формирования плана работ; u_2 – утверждение плана КИ; u_3 – передача неутвержденного плана КИ на доработку; u_4 – выполнение работ исполнителем; u_5 – проверка менеджером процесса выполнения работ; u_6 – закрытие работ и занесение внесенных изменений в библиотеку состояний ИТ-системы. Состояния модели соответствуют следующим этапам регламента: x_1 – формирование задания и плана его реализации; x_2 – согласование задания и плана работ КИ; x_3 – согласование задания и плана работ менеджером процесса; x_4 – выполнение работ исполнителем; x_5 – проверка менеджером процесса выполненных работ; x_6 – работы завершены. В качестве выходов используется доступная информация об этапах выполнения регламента. Модель допускает не критичные отклонения действия субъектов процесса от исходного (эталонного) регламента. Рассматривается ошибка инициатора $f_1 : (x_2 \rightarrow x_3)_{x_1, u_1}$. Нечеткое покрытие φ задается функциями принадлежности $\mu_{B_\varphi^0} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_\varphi^1} = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_\varphi^2} = (0,1 \ 0,1 \ 0 \ 0,8 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_\varphi^3} = (0,2 \ 0,1 \ 0 \ 0 \ 0,7 \ 0)$, $\mu_{B_\varphi^4} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$. Напомним, что блокам покрытия соответствуют состояния наблюдателя $x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4$.

Эталонная траектория движения имеет вид $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6$. Этой траектории соответствует последовательность переходов между блоками покрытия φ : $B_\varphi^0 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^2 \rightarrow B_\varphi^3 \rightarrow B_\varphi^4$, инициируемая последовательностью входов u_1, u_2, u_4, u_5, u_6 и приводящая к формированию последовательности выходов $y_1, y_2, y_3, y_4, y_2, y_5$ (см. [14], табл. 4).

Допустимой также является траектория $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6$, обусловливаемая передачей менеджером задания и плана работ для повторного согласования в КИ. Ей соответствует последовательность переходов между блоками покрытия B_φ : $B_\varphi^0 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^2 \rightarrow B_\varphi^3 \rightarrow B_\varphi^4$, инициируемая последовательностью входов $u_1, u_2, u_4, u_2, u_4, u_5, u_6$ и приводящая к формированию последовательности выходов $y_1, y_2, y_3, y_2, y_3, y_4, y_2, y_5$ (см. [14], табл. 5).

Недопустимой является траектория $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6$, являющаяся следствием ошибки инициатора процесса. Ей соответствует последовательность переходов между блоками покрытия φ : $B_\varphi^0 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^2 \rightarrow B_\varphi^3 \rightarrow B_\varphi^4$, инициируемая последовательностью входов u_1, u_2, u_4, u_5 и приводящая к формированию последовательности выходов y_1, y_3, y_4, y_2, y_5 (см. [14], табл. 6). В случае обнаружения этой ошибки предлагается осуществить переход к эталонной траектории, начиная с состояния $x_2, x_2 \in B_\varphi^1$, используя вход u_4 .

Алгоритм формирования в реальном времени нового входа u_* и отображения g , обеспечивающих аккомодацию к ошибке инициатора процесса, можно получить, основываясь на положениях настоящей статьи. Он не приводится в силу его простоты и ограниченного объема статьи.

8. Заключение

В настоящей статье в рамках решения общей задачи аккомодации ДСС к дефектам, получены следующие результаты.

1. Ранее предложенный авторами математический аппарат парной алгебры покрытий [17] распространен на случай задания блоков покрытий нечеткими множествами. Разработана парная алгебра нечетких покрытий. Необходимые вычисления операций и оператора алгебры могут быть поддержаны существующими пакетами прикладных программ, например системой MatLab.

2. Введено понятие наблюдателя в приложении к НЧКА. Новые математические конструкции парной алгебры нечетких покрытий использованы для разработки алгоритма синтеза наблюдателя НЧКА (алгоритм 4).

3. Предложен оптимизационный подход для нахождения нового входа u_* , отображения g и входа u ДСС, позволяющий обеспечить высокую степень реализуемости формируемого закона отказоустойчивого управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.* Diagnosis and Fault Tolerant Control. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
2. *Edwards C., Spurgeon S.K., Patton R.J.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 541–553.
3. *Feng W., Li M., Zhang W., et al.* Sliding Mode Fault-tolerant Control Based on Fast Convergence Law for Faults of PMSM // *Chinese Journal of Electrical Engineering* 2024. V. 10. No. 3. P. 147–157.
4. *Шумский А.Е., Журабок А.Н.* Аккомодация нелинейных динамических систем к дефектам: метод полной развязки // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2009. № 2. С. 1–9.
5. *Журабок А.Н., Котта Ю., Шумский А.Е.* Аккомодация к дефектам в дискретных динамических системах // *АиТ*. 2014. № 6. С. 14–29.
6. *Wonham W.M., Kai Cai, Rudle K.* Supervisory control of discrete-event systems: a brief history 1980-2015 // *Proc. of 20th IFAC Congress, Elsevier Publ.* 2017. P. 1827–1833.
7. *Cassandras Ch., Lafortune S.* Introduction to discrete event systems. Second edition. N.Y.: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 770 p.
8. *Zaytoon J., Lafortune S.* Overview of fault diagnosis methods for discrete event systems // *Annual Reviews in Control*. 2013. V. 37. P. 308–320.
9. *Шумский А.Е., Журабок А.Н.* Метод аккомодации к дефектам в конечных автоматах // *АиТ*. 2010. № 5. С. 122–132.
10. *Hartmanis J., Stearns R.* The algebraic structure theory of sequential machines. N.Y.: Prentice-Hall Inc., 1966. 211 p.
11. *Zadeh L.A., Fu K.S., Tanaka K., Shimura M.* Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, N.Y.: Academic Press, 1975.
12. *Wee W.G., Fu K.S.* A formulation of fuzzy automata and its applications as a model of learning systems // *IEEE Trans. Syst. Science and Cybernetics*. 1969. P. 215–223.

13. *Ульзутуев И.Е., Максимов А.А.* О свойствах решеток подавтоматов нечетких полуавтоматов и их детерминизаторов // Вестник СГТУ. 2015. № 2. С. 117–126.
14. *Шумский А.Е., Жиравок А.Н.* Метод функционального диагностирования дискретно-событийных систем на основе модели нечеткого конечного автомата // Проблемы управления. 2025. № 2. С. 62–72.
15. *Борисов В.В., Круглов В.В., Федюлов А.С.* Нечеткие модели и сети. 2-е издание. М.: Горячая линия – Телеком, 2012. 283 с.
16. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 320 с.
17. *Жиравок А.Н., Калинина Н.А., Шумский А.Е.* Метод функционального диагностирования недетерминированных конечных автоматов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 4. С. 62–72.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.И. Сельвесюком.

Поступила в редакцию 17.07.2025

После доработки 12.01.2026

Принята к публикации 23.01.2026

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2026 г. Е.А. РЯБУШЕВ (forteamofdota@mail.ru),
А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНА ЗАЩИТЫ ПОДВИЖНОЙ ЦЕЛИ С ПОМОЩЬЮ ЗАЩИТНИКА-ПЕРЕХВАТЧИКА ОТ АТАКИ МНОЖЕСТВА АТАКУЮЩИХ МЕТОДОМ ПОИСКА ПО ДЕРЕВУ МОНТЕ-КАРЛО

Рассматривается задача защиты подвижной цели от атаки множества атакующих преследователей с помощью защитника-перехватчика. Приводится строгая математическая постановка задачи, вводятся критерии качества планов защиты, и формулируются математические свойства задачи, на основе которых предлагаются эвристические правила и алгоритмы их применения для построения субоптимальных решений.

Ключевые слова: математическая оптимизация, исследование операций, поиск по дереву Монте-Карло (MCTS), локальные правила.

DOI: 10.7868/S2413977726100056

1. Введение

Мир проходит через большие перемены. Дроны доминируют на суше и в воздухе, а безэкипажные суда и подводные аппараты представляют опасность в море. Автономные комплексы способны решать все больше задач как военных, так и гражданских, без какого-либо участия человека. Это наиболее заметно на поле боя, где беспилотные средства уже изменили характер войны и определяют новые правила. Массированные атаки дронов по объектам инфраструктуры и логистики представляют существенную и актуальную проблему. Становится очевидно, что экономически целесообразная защита от данной угрозы требует перехватчиков, способных последовательно, один за другим, уничтожать атакующие дроны. Значительную роль здесь играет выбор наилучшего порядка перехвата, что является задачей, близкой по смыслу к «динамической задаче коммивояжера» (ДЗК) [1, 2] или Moving Targets TSP (MTTSP) [3, 4]. На данный момент не существует эффективных методов точного решения ДЗК, а сама задача находится на начальных этапах исследования [5]. Современные постановки ДЗК концентрируются на условиях неопределенности в информации о положении целей и ограниченности временных окон для их наблюдения [6, 7].

Задача коммивояжера и, как следствие, многие ее динамические обобщения являются NP-полными [8], а значит, для них нет эффективных алгоритмов точного решения. Построение обороны требует принятия решений в условиях ограниченного времени, для чего требуется разработка методов быстрого субоптимального планирования. Алгоритмы такого планирования уже рассматривались авторами для случая защиты неподвижной точки в [9], цель настоящей работы – их обобщение на задачу защиты подвижной точки. Для этого предлагается обобщенная постановка задачи, которая включает в себя как планирование порядка обхода целей, так и построение маневра уклонения от атакующих защищаемой подвижной точки. Качество планов предлагается оценивать на основе векторных критериев, обобщающих таковые из [10] для защиты статичной точки на динамический случай. Планирование движения подвижного объекта защиты ведется на основе локальных правил, подобных тем, которые применялись в [11], а порядок перехвата атакующих выбирается посредством поиска по дереву Монте-Карло (MCTS) [12, 13].

MCTS – метод комбинаторной оптимизации, получивший известность после успешного применения в проекте AlphaGo [12]. Классические приложения MCTS подразумевали игровые постановки задач в конечных играх, но алгоритм хорошо зарекомендовал себя и для комбинаторной оптимизации в неигровых задачах [14]. Поиск по дереву Монте-Карло с PUCT-оценками (Predictor + Upper Confidence bounds for Treas) обычно применяется в паре с нейросетью и используется для ее обучения. Однако MCTS также способен работать на основе локальных правил, которые могут оценивать действия вместо нейросети [9]. Такая реализация алгоритма не только позволяет применять его без предварительного обучения, но и использовать его для вычисления q -оценок для обучения с подкреплением. Таким образом, адаптация поиска по дереву Монте-Карло не только предоставляет готовый алгоритм решения проблемы планирования, но и открывает путь для эффективного обучения нейросетевых моделей, способных решать данную задачу.

2. Математическая модель, постановка задачи и метод решения

В этом разделе обсуждается постановка задачи защиты подвижной цели защитником-перехватчиком от нападения множества атакующих, которая обобщает постановки задач из [9, 10] на случай подвижного объекта защиты.

2.1. Модель движения защищаемой точки, атакующих целей и защитника-перехватчика

Пусть необходимо защищать подвижную цель T , способную перемещаться со скоростью V_T , от нападения n атакующих, которые гонятся за T со скоростью $V_A > V_T$. Полагаем, что оборонять T требуется защитником-перехватчиком D , который может преследовать атакующих со скоростью $V_D > V_A$. Движение происходит в плоскости, цель T и защитник D в ну-

левой момент времени располагаются в начале координат, а атакующие – на границе круга радиуса R в слое толщиной $2\Delta R$.

Начальные положения атакующих задаются радиус-векторами $\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0$, а их скорости $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ постоянно направлены на T :

$$(1) \quad \mathbf{V}_i = V_A \frac{\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_i|},$$

где $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_T$ – текущие положения i -атакующего и цели T . Атакующий считается пропущенным, если в некоторый момент времени его координаты совпадут с положением T .

Динамика защищаемой цели T описывается моделью простых движений

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_T &= V_T \cos(u), \\ \dot{y}_T &= V_T \sin(u), \end{aligned}$$

где x_T и y_T – координаты T , а $u \in [0, 2\pi]$ – управление направлением движения.

Вектор скорости защитника D определяется атакующим, которого D перехватывает в данный момент времени:

$$(3) \quad \mathbf{V}_D = V_D \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_D}{|\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_i|},$$

где $\mathbf{r}_D$ и $\mathbf{r}_i$ – положение D и атакующего, на перехват которого выдвигается D . Атакующий считается уничтоженным, если его координаты в некоторый момент времени совпадают с положением D .

2.2. Понятие плана защиты, его критерии качества и постановка задачи

План перехвата $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n]$ – последовательность целей, где π_i – номер цели, которую D посещает в i -очередь. Пусть $\tau^*(\pi)$ – время выполнения π , тогда на $[0, \tau^*(\pi)]$ требуется построить управление $u(t)$ движением T согласно (2). Для упрощения задачи предлагается задавать движение точки T в дискретном времени с шагом Δt . Введем следующее

Определение 1. Планом защиты Π называется пара (π, ρ) , где π – последовательность перехвата целей защитником D , а $\rho = \{\mathbf{r}_T(t_k)\}_{k=0}^K$ – набор точек, которые T занимает в моменты времени $t_k = k\Delta T$. При этом на ρ накладываются ограничения

$$|\mathbf{r}_T(t_{k+1}) - \mathbf{r}_T(t_k)| = V_T \Delta t,$$

которые выражают условия достижимости точек ρ , при этом без потери общности всегда полагаем, что $\mathbf{r}_T(0) = \mathbf{r}_D(0) = (0, 0)$.

Введем вектор потерь $L(\Pi) = (m_0, \dots, m_5)$, где m_0 – число пропущенных целей, а m_i – число перехваченных на расстоянии не менее чем R_i от T , где $R_1 < R_2 < \dots < R_5$. Тогда сформулируем задачу.

Задача 1. По начальным положениям $\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_n^0$ атакующих целей построить план защиты Π согласно определению 1 с минимально возможным вектором потерь $L(\Pi)$, где сравнение ведется в словарном порядке, т.е.

$$(m_0, \dots, m_5) < (m'_0, \dots, m'_5) \rightarrow \exists k : \forall i < k : m_i = m'_i \wedge m_k < m'_k.$$

На практике найти оптимальный план Π практически невозможно, и требуется найти субоптимальный Π с приемлемым $L(\Pi)$. В [10] доказана

Теорема 1. Для любого начального расположения атакующих при наличии динамического преимущества ($V_D > V_A$) защитника над атакующими для статичной защищаемой цели существует план перехвата π , который обеспечивает перехват всех атакующих без пропусков.

Следствие 1. Для любого начального расположения атакующих при наличии динамического преимущества ($V_D > V_A$) защитника над атакующими для подвижной защищаемой цели существует план перехвата π , который обеспечивает перехват всех атакующих без пропусков.

Доказательство. Действительно, поскольку динамическая цель способна оставаться на месте неподвижно, то ее способность к перемещению не может ухудшить результат теоремы 1, а значит, всегда существует план защиты без пропусков атакующих.

Таким образом, разумным требованием к субоптимальности плана защиты следует считать $m_0 = 0$, т.е. отсутствие пропусков целей.

2.3. Позиционные свойства атакующих и локальные правила принятия решений

Пусть в момент времени t защитник D и защищаемая цель T занимают позиции $\mathbf{r}_I(t)$ и $\mathbf{r}_T(t)$, и $\mathbf{V}_T(t)$ – скорость T , а $\mathbf{r}_i(t)$ – радиус-векторы атакующих. Для дальнейшего обсуждения потребуются величины

$$\tau_i(t) = \frac{V_A |\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_i(t)| + \mathbf{V}_T(t) [\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_i(t)]}{V_A^2 - V_T^2},$$

где $\tau_i(t)$ – время, необходимое i -атакующему на поражение T при условии, что T продолжит движение по прямой со скоростью $\mathbf{V}_T$, и

$$(4) \quad \theta_i(t) = \frac{V_I |\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_i(t)| + \mathbf{V}_i(t) [\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_i(t)]}{V_I^2 - V_A^2},$$

где $\theta_i(t)$ – время, необходимое защитнику D на перехват i -атакующего, при условии что тот будет двигаться по прямой со скоростью $\mathbf{V}_i$, определенной согласно (1) по текущим значениям $\mathbf{r}_i(t)$ и $\mathbf{r}_T(t)$.

На основе $\tau_i(t)$ и $\theta_i(t)$ введем следующие определения.

Определение 2. Под опасностью i -атакующего будем понимать величину

$$K_i(t) = \frac{1}{\tau_i(t)},$$

ко времени поражения $\tau_i(t)$.

Опасность показывает, насколько атакующий угрожает T – чем меньшее время ему необходимо для поражения T – тем выше его опасность.

Определение 3. Под удобством i -атакующего будем понимать величину

$$U_i(t) = \frac{1}{\theta_i(t)},$$

обратную времени перехвата $\theta_i(t)$.

Удобство показывает, насколько легко для защитника перехватить атакующего – чем меньшее на это необходимо время, тем выше его удобство.

Определение 4. Под преимуществом над i -атакующим будем понимать величину

$$A_i(t) = \tau_i(t) - \theta_i(t)$$

разности времен поражения $\tau_i(t)$ и перехвата $\theta_i(t)$.

Преимущество показывает запас времени на перехват – чем выше преимущество, тем дольше можно откладывать решение о назначении данной цели.

При планировании движения T разумно приоритетно уклоняться от атакующих, представляющих наибольшую угрозу, чтобы выиграть время на их перехват для D . Степень угрозы со стороны i -атакующего оценивается его опасностью $K_i(t)$, поэтому для нахождения вектора скорости цели логично использовать правило

$$(5) \quad \mathbf{V}_T(t) \sim \sum_{i=1}^n \frac{K_i(t)}{\sum_{j=1}^n K_j(t)} \frac{\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_i(t)}{|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_T(t)|},$$

где знак пропорциональности означает, что величина справа задает направление скорости $\mathbf{V}_T(t)$, в то время как ее величина совпадает с V_T . Данное правило соответствует приоритетному убеганию от атакующих с наибольшей опасностью $K_i(t)$. Здесь следует сделать важную оговорку: использование данного правила лишает следствие 1 силы, так как теперь защищаемая цель не может прекратить движение, а значит, могут быть начальные условия, при которых не существует плана перехвата без пропусков, но такие конфигурации крайне редки.

Дополнительно мгновенные характеристики атакующих позволяют сформулировать локальные правила для защитника D :

$$(6) \quad P_Q(i) = \frac{Q_i(t)}{\sum_{j=1}^n Q_j(t)},$$

где вместо $Q_i(t)$ подставляют опасность $K_i(t)$ или удобство $U_i(t)$ i -цели. Величины $P_Q(i)$ могут использоваться как для детерминированного назначения атакующих защитнику по $\arg\max P_Q(i)$, так и для построения стохастической политики, когда $P_Q(i)$ трактуется как распределение вероятности назначений.

2.4. Понятие частичного плана и свойства задачи планирования

При использовании правила (5) для движения цели T – ее траектория полностью определяется начальными положениями и планом перехвата π . Введем для $\pi = [\pi_1 \dots \pi_n]$ последовательность времен $\mathbf{t} = [t_1 \dots t_n]$, необходимых D , чтобы обслужить первые k атакующих из π . Здесь под обслуживанием атакующего понимается либо его успешный перехват, либо поражение им T прежде его поимки. Тогда движение T вплоть до момента t_k зависит только от первых k элементов плана π , что мотивирует следующие определения.

Определение 5. Под *частичным планом* $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_k]$ будем понимать упорядоченный набор из $k \leq n$ различных целей, задающий очередность их перехвата, которому соответствует промежуточное состояние $S(\pi)$. Под $S(\pi)$ будем понимать координаты $\mathbf{r}_T(t_k)$, $\mathbf{r}_D(t_k)$ и $\mathbf{r}_j(t_k)$, где t_k – время выполнения частичного плана π , $\mathbf{r}_j(t_k)$ – положения тех атакующих, которые не были перехвачены D и еще не поразили T к моменту завершения π , совместно с текущим вектором потерь $L(\pi) = (m_0(t_k), \dots, m_5(t_k))$, где $m_0(t_k)$ – число пропущенных целей, а $m_i(t_k)$ – числа перехваченных атакующих в соответствующей зоне к моменту t_k .

Введем для частичного плана оценку $l(\pi) = L(\pi) + Z(S)$, где $L(\pi)$ – вектор текущих потерь плана π , а $Z(S) = (0, z_1, \dots, z_5)$, где z_i – число целей, находящихся в соответствующей зоне потерь в промежуточном состоянии $S(\pi)$. Тогда верна теорема об оценке снизу.

Теорема 2. Итоговый вектор потерь $L(\pi^*)$ для любого продолжения плана π всегда не меньше, чем $l(\pi)$, т.е. $L(\pi^*) \geq l(\pi)$, если π^* есть продолжение π .

Доказательство. Действительно, так как скорость $V_A > V_T$, то расстояние $d = |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_T(t)|$ между i -атакующим и целью T монотонно убывает с ростом времени t . Поэтому вектор потерь $L(\pi^*)$ любого продолжения частичного плана π будет включать как вектор потерь $L(\pi)$, так и потери по еще не перехваченным атакующим, которые не могут быть остановлены на расстоянии большем, чем текущая дистанция между ними и T .

Следствие 2. Если для некоторого частичного плана π оценка потерь $l(\pi) \geq L(\pi^*)$ превосходит потери для некоторого полного плана π^* , то тогда ни одно из продолжений π не может быть оптимальным.

Следствие 3. Если для некоторого частичного плана π верно, что оценки потерь $l(\pi')$ всех его продолжений фиксированной длины $\text{len}(\pi') = k$ превосходят оценку некоторого полного плана π^* (т.е. $\forall \pi' : \text{len}(\pi') = k \rightarrow l(\pi') \geq L(\pi^*)$), то ни одно продолжение π не может быть оптимальным.

Данные следствия позволяют отвергать заведомо неоптимальные направления перебора при поиске оптимального или субоптимального решения. При этом пользуясь тем, что заведомо известно существование плана, не пропускающего ни одного атакующего, в качестве базового значения недопустимой оценки $l(\pi)$ можно использовать вектор $l^* = [0, n, 0, 0, 0]$, соответствующий наихудшей оценке без пропусков.

Дополнительно, план перехвата π можно характеризовать набором локальных свойств его промежуточных состояний. Введем определения.

Определение 6. Под сложностью плана π будем понимать максимальное время

$$\theta(\pi) = \max_{k=1\dots n} \theta(t_k)$$

перехвата отдельной цели в рамках этого плана. Здесь величины $\theta(t_k)$ понимаются в смысле (4) относительно атакующего, который перехватывался в момент времени t_k из вектора $\mathbf{t}(\pi)$.

Определение 7. Под надежностью плана π будем понимать минимальное преимущество

$$A(\pi) = \min_{k=1\dots n} A(t_k)$$

над целью из плана π . Здесь $A(t_k)$ понимается в смысле определения 4 относительно атакующего, который перехватывался в момент времени t_k из вектора $\mathbf{t}(\pi)$.

Надежность и сложность плана – его глобальные свойства, которые могут использоваться для исследования зависимости функции потерь $L(\pi)$ от характеристик π .

3. Построение плана перехвата методом поиска по дереву Монте-Карло

В этом разделе обсуждается алгоритм построения субоптимальных планов по методу MCTS.

3.1. Дерево поиска по дереву Монте-Карло

Введем понятие дерева поиска.

Определение 8. Под деревом поиска Ξ будем понимать множество частичных планов Π^ , снабженное отношением инцидентности: $\pi \rightarrow \pi'$, если π' отличается от π добавлением ровно одной цели в конец плана. Для частичного плана π множество $C(\pi) = \{\pi' \in \Pi^* : \pi \rightarrow \pi'\}$ всех инцидентных ему продолжений будем называть его потомками. Корнем дерева Ξ будем называть пустой план $\pi_0 = []$.*

Алгоритм MCTS выполняет интеллектуальный поиск по дереву Ξ , который направляется политикой (6) и q -оценками его узлов. Каждый план π помечается числом r_π продолжений, построенных для этого плана, и средней оценкой q_π , достигнутой на них. Здесь под средней q -оценкой понимается средняя

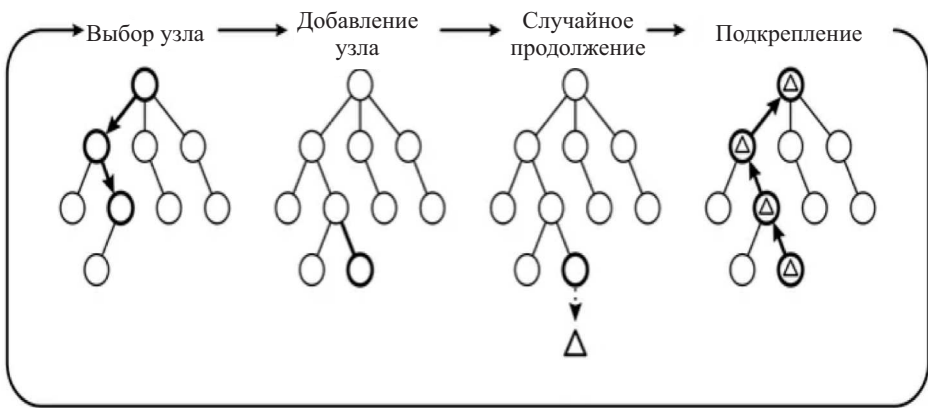


Рис. 1. Принципиальная схема алгоритма поиска по дереву Монте-Карло. Алгоритм состоит из чередования двух фаз: спуска по дереву к новому узлу и обратного распространения оценки этого узла обратно к корню.

скалярная оценка планов, построенных из этого узла (вектор потерь $L(\pi)$ преобразуется в скалярную оценку с помощью линейной функции, которая присваивает максимально возможным потерям оценку $-1,0$, а минимальным $+1,0$). Базовый цикл алгоритма состоит из двух процедур.

Алгоритм 1. Спуск по дереву

1. $\pi \leftarrow \pi_0$.
2. Пока $p_\pi > 0$: $\pi \leftarrow \arg \max_{\pi': \pi \rightarrow \pi'} q_{\pi'} + \frac{P_Q(\pi')\sqrt{n_\pi}}{1+n_{\pi'}}$.
3. Вернуть π .

Для найденного узла π строится случайное продолжение π^* по локальному правилу (6) и вычисляется вектор потерь $L(\pi^*)$, на основе которого формулируется q -оценка плана π , которая затем поднимается к корню.

Алгоритм 2. Обратное распространение оценки.

1. $r \leftarrow L_q(L(\pi^*))$, где $L_q(L(\pi^*))$ – q -оценка вектора потерь $L(\pi^*)$.
2. Пока $\pi = [\pi_1 \dots \pi_k]$ не π_0 : обновить p_π и q_π на основе r (число посещений увеличивается на единицу, а средняя q -оценка пересчитывается с учетом добавления r), $\pi \leftarrow \pi' = [\pi_1 \dots \pi_{k-1}]$.

Таким образом, данный алгоритм обновляет статистику, накопленную по узлам дерева, с учетом нового решения π^* , которое было построено из узла дерева, выбранного согласно алгоритму 1 спуска по дереву. Общая схема алгоритма изображается на рис. 1, более подробно об этом можно прочитать в [9].

3.2. Построение случайных продолжений

В предыдущем подразделе обсуждалось, что алгоритм MCTS полагается на случайные продолжения частичных планов для получения оценок узлов дерева. В этом подразделе подробно описывается методика построения таких продолжений и способ вычисления q -оценок.

Пусть требуется оценить узел дерева с частичным планом π , которому соответствует промежуточное состояние $S(\pi)$. Случайное продолжение строится как решение задачи планирования из состояния $S(\pi)$ на основе локальных правил (5) и (6), причем правило (6) используется как стохастическая политика назначения защитника на перехват атакующих.

Алгоритм 3. Построение случайного продолжения.

1. $\pi^* \leftarrow \pi$.

2. Пока есть свободные цели (т.е. неперехваченные и непропущенные): $\pi^* \leftarrow i$, которая выбирается по распределению вероятности $P_Q(i|S)$ для текущего промежуточного состояния $S(\pi^*)$.

Как только по данному алгоритму построен полный план π^* , то для него вычисляется вектор потерь $L(\pi^*)$. Затем $L(\pi^*)$ преобразуется в скалярную q -оценку в диапазоне $[-1, 1]$ с помощью линейной функции $L_q(L(\pi^*))$, которая действует по правилу

$$\begin{aligned} L_q([n, 0, 0, 0, 0, 0]) &= -1, \\ L_q([0, 0, 0, 0, 0, n]) &= 1, \end{aligned}$$

т.е. присваивает максимальным потерям оценку -1 , а минимальным $+1$. Данная оценка затем используется в алгоритме 2 обратного распространения оценки.

3.3. Отсечение неоптимальных узлов и построение итогового плана

Дополнительно результаты работы алгоритма поиска MCTS могут быть существенно улучшены на основе теоремы 2 и ее следствий. Для этого алгоритм на каждом шаге хранит память о наилучшем полном плане $\pi_{\max}$, который был построен при оценке одного из узлов дерева за все время работы, а также его вектор потерь $L(\pi_{\max})$. Узел дерева с частичным планом π считается неоптимальным, если его частичное состояние неоптимально относительно $L(\pi_{\max})$ согласно следствию 2 или если все его дочерние узлы были признаны неоптимальными.

В процессе спуска по дереву в алгоритме 1 выбор производится исключительно из узлов, которые не являются неоптимальными. Если же был достигнут узел, который необходимо признать неоптимальным, то алгоритм возвращается к его родительскому узлу и повторяет процесс поиска с учетом этой дополнительной информации. По исчерпанию вычислительного лимита алгоритм возвращает наилучший план $\pi_{\max}$, который был построен за все время его работы.

4. Экспериментальные результаты

Алгоритм поиска по дереву Монте-Карло совместно с эвристиками движения T и назначения целей D по опасности целей применялся для построения планов защиты от атаки от 10 до 30 целей. При этом построение эффек-

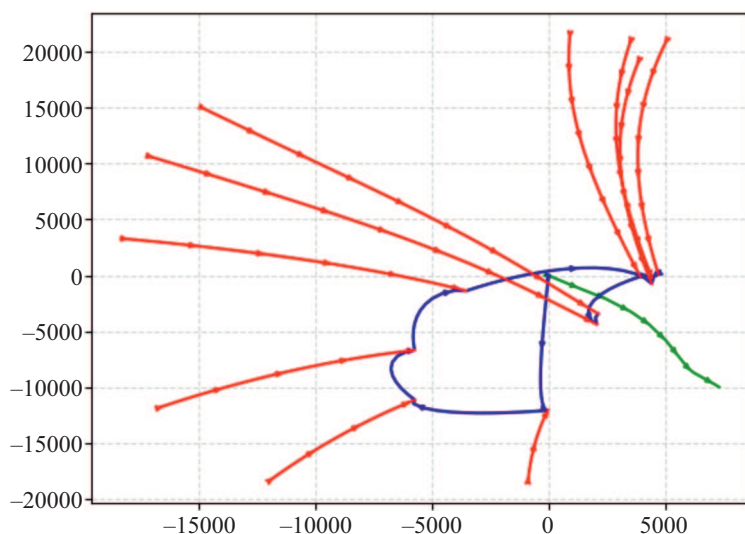


Рис. 2. План защиты от атаки 10 атакующих. Зеленой линией показана траектория защищаемой цели, синей – защитника-перехватчика, красными – атакующих. Стрелки указывают направление движения и взаимное расположение объектов на срезах равного времени.

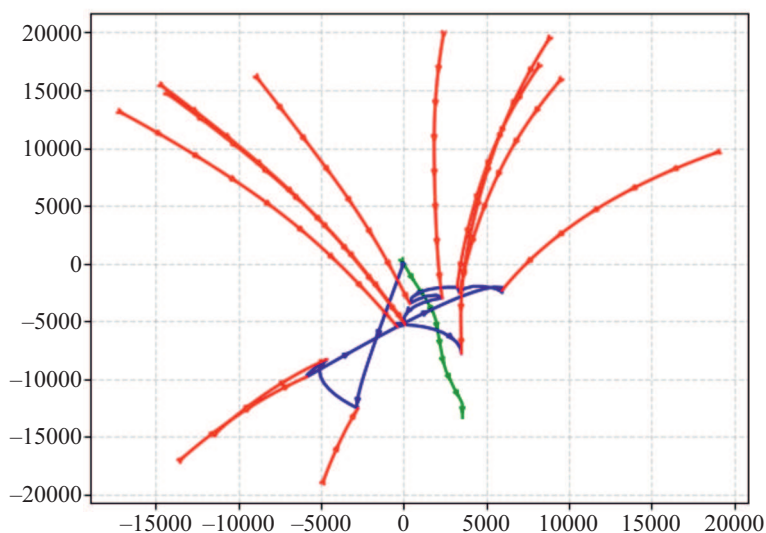


Рис. 3. План защиты от атаки 12 атакующих. Зеленой линией показана траектория защищаемой цели, синей – защитника-перехватчика, красными – атакующих. Стрелки указывают направление движения и взаимное расположение объектов на срезах равного времени.

тивных планов защиты в среднем требует от 1 до 10 с работы алгоритма в зависимости от размера задачи. Примеры характерных планов защиты приведены на рис. 2 и 3. Зависимость качества плана перехвата от времени ра-

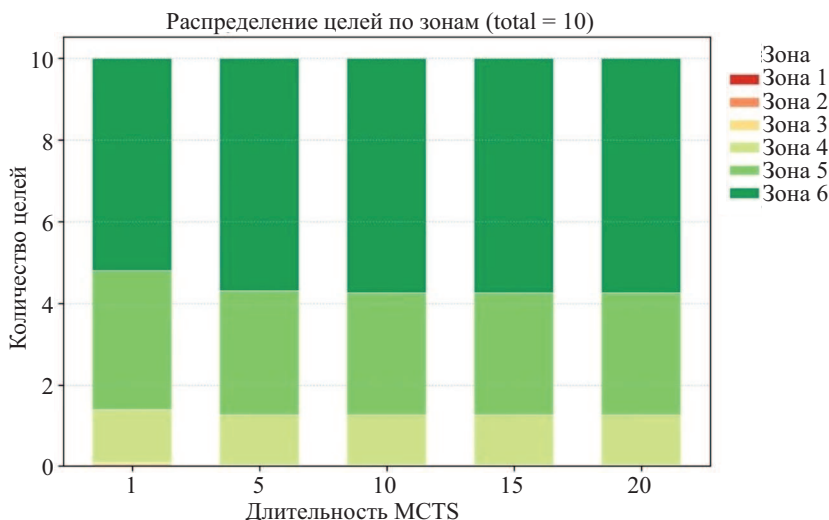


Рис. 4. Распределение точек перехвата по зонам близости в зависимости от времени работы MCTS для задач с $n = 10$ атакующих.

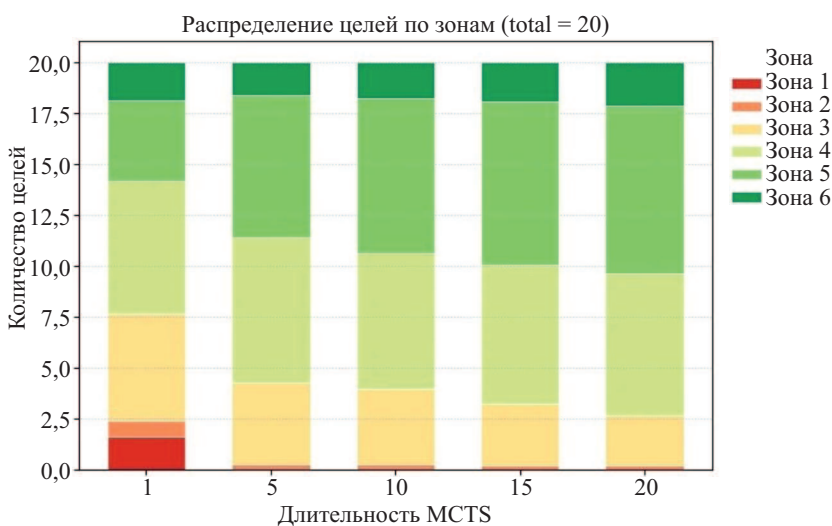


Рис. 5. Распределение точек перехвата по зонами близости в зависимости от времени работы MCTS для задач с $n = 20$ атакующих.

боты алгоритма для разного количества атакующих приведена на рис. 4–6, данные для построения которых набирались на выборке из 30 случайных начальных позиций с заданным числом атакующих. Таким образом можно видеть характерные времена построения субоптимальных планов для задач соответствующего размера.

Дополнительно, проводились исследования качества локальных правил (3) в сравнении с оптимальным планом, результаты которого приведены на

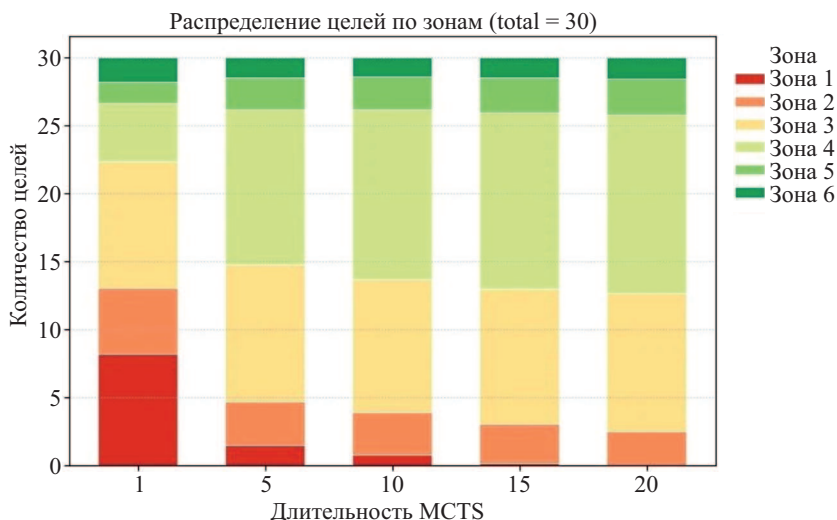


Рис. 6. Распределение точек перехвата по зонам близости в зависимости от времени работы MCTS для задач с $n = 30$ атакующих.

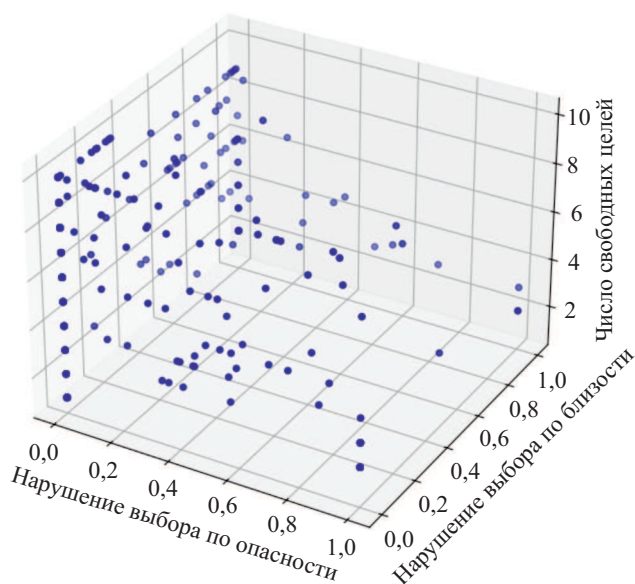


Рис. 7. Нарушение локальных правил опасности близости в оптимальном плане в зависимости от количества свободных целей в промежуточном состоянии.

рис. 7. Здесь под величиной нарушения правила полагается оценка, которая линейно изменяется от 0 до 1, где оценка 0 означает, что выбор цели в оптимальном правиле полностью согласован с эвристикой, а 1 – полностью несогласован (т.е. оптимальный выбор соответствует атакующему, который наименее привлекателен с точки зрения эвристики).

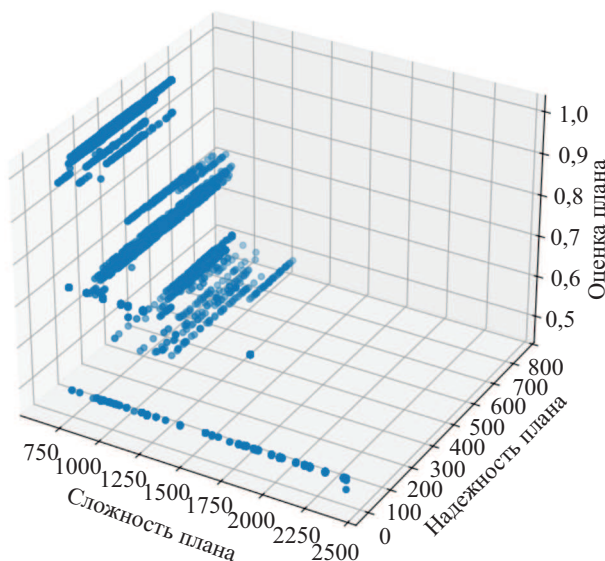


Рис. 8. Зависимость качества планов от их надежности и сложности.

Также для полноты картины приводим распределение планов по качеству в зависимости от их глобальных свойств сложности и надежности, построенное для множества всех допустимых планов для позиции с $n = 8$ атакующими.

5. Заключение

Данная работа была посвящена задаче защиты динамической цели от атаки множества атакующих с помощью защитника-перехватчика. Основные результаты работы можно кратко представить в следующих пунктах.

1) Задача защиты динамической цели – NP -сложная задача, для которой, однако, можно предложить эффективные алгоритмы построения субоптимальных решений.

2) Алгоритм поиска по дереву Монте-Карло показывает хорошие результаты на входных примерах с числом целей вплоть до $n = 30$ за разумное вычислительное время.

3) В качестве опорных локальных правил для MCTS логично использовать эвристики на основе опасности и близости, определенные согласно распределению вероятности 6.

Алгоритм MCTS строит эвристику повышенного качества на основе исходных эвристик за счет интеллектуального дополнительного перебора вариантов. Распределения чисел посещений дочерних узлов в корне дерева можно трактовать как улучшенную локальную политику, которая затем может использоваться для первичного обучения нейросетевых моделей, что открывает перспективы применения полученных в данной работе результатов для по-

строения больших нейросетевых моделей данной задачи. С другой стороны, возможность эффективно решать задачу защиты без привлечения нейросетевого обучения ценна сама по себе, так как нейросетевые подходы не всегда оказываются эффективнее простых эвристических решателей [15, 16] в ДЗК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сихарулидзе Г.Г.* Об одном обобщении задачи коммивояжера. I // *АиТ.* 1971. № 8. С. 116–123.
2. *Сихарулидзе Г.Г.* Об одном обобщении задачи коммивояжера. II // *АиТ.* 1971. № 10. С. 142–147.
3. *Picard J.C., Queyranne M.* The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling // *Oper. Res.* 1978. V. 26. No. 1. P. 86–110. <https://doi.org/10.1287/opre.26.1.86>
4. *Helvig C.S., Robins G., Zelikovsky A.* The moving-target traveling salesman problem // *J. Algorithm. Comput. Technol.* 2003. V. 49. No. 1. P. 153–174. [https://doi.org/10.1016/S0196-6774\(03\)00075-0](https://doi.org/10.1016/S0196-6774(03)00075-0)
5. *Li C., Yang M., Kang L.* A New Approach to Solving Dynamic Traveling Salesman Problems. In: Wang, TD., et al. *Simulated Evolution and Learning* // *Lecture Notes Comput. Sci.* 2006. V. 4247. Springer, Berlin, Heidelberg.
6. *Stieber A.* Dealing with time in the multiple traveling salesmen problem with moving targets // *Cottbus Mathematical Preprints* 2019. COMP. 4.
7. *Maskooki A., Kallio M.* A bi-criteria moving-target travelling salesman problem under uncertainty // *European Journal of Operational Research* 2023. Vol. 309. No. 1. С. 271–285. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.01.009>
8. *Garey M.R., Johnson D.S.* Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco, Calif.: W. H. Freeman & Co., 1979.
9. *Рябушев Е.А., Галляев А.А.* Поиск субоптимального решения динамической задачи коммивояжера методом Монте-Карло // *АиТ.* 2024. № 2. С. 103–119.
10. *Галляев А.А., Яхно В.П., Берлин Л.М. и др.* Оптимизация плана перехвата прямолинейно движущихся целей // *АиТ.* 2023. № 10. С.18–36.
11. *Галляев А.А., Рябушев Е.А.* Локальное динамическое планирование для защиты подвижной цели от атаки скоростного перехватчика с ограниченным обзором // *Труды института математики и механики УрО РАН* 2026. Том 32. № 3.
12. *Silver D., Huang A., Maddison C., et al* Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search // *Nature.* 28 January 2016. 529 (7587): P. 484–489. <https://doi.org/10.1038/nature16961>
13. *Schadd M.P.D., Winands M.H.M., van den Herik H.J., et al.* Single-Player Monte-Carlo Tree Search // *Computers and Games. CG* 2008. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5131. Springer, Berlin, Heidelberg.
14. *Marco K.* Beyond Games: A Systematic Review of Neural Monte Carlo Tree Search Applications // *arXiv:2303.08060*, <https://doi.org/10.48550>
15. *Xuanhao P., Chenguang W., Chaolong Y., et al.* Rethinking the Heatmap + Monte Carlo Tree Search Paradigm for Solving Large Scale TSP // 2025. <https://openreview.net/forum?id=TMHOHRR0FA>

16. Xia Y., Xianliang Y., Zichuan L., et al. Position: Rethinking Post-Hoc Search-Based Neural Approaches for Solving Large-Scale Traveling Salesman Problems // Proceedings of the 41st International Conference on Machine Learning, 2024. Vol. 235 C. 54178–54190. <https://proceedings.mlr.press/v235/xia24f.html>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 24.06.2026

После доработки 06.07.2026

Принята к публикации 08.07.2026

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Ибрагимов Д.Н.** Описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями второго порядка 3
- Калинин А.И., Лавринович Л.И.** Оптимизация переходного процесса в трех-темповой сингулярно возмущенной системе 31

Нелинейные системы

- Ласточкин К.А.** Робастное управление с заданным качеством при заданных ограничениях. Системы с относительной степенью один 52
- Шумский А.Е., Жирабок А.Н.** Комплексный подход к решению задачи аккомодации к дефектам в нечетких дискретно-событийных системах 84

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Рябушев Е.А., Галяев А.А.** Построение плана защиты подвижной цели с помощью защитника-перехватчика от атаки множества атакующих методом поиска по дереву Монте-Карло 104

C O N T E N T S

Linear Systems

Ibragimov D.N. Description of Limit Reachable and Null-Controllable Sets for Linear Discrete-Time Systems and Integral Second-Order Constraints	3
Kalinin A.I., Lavrinovich L.I. Optimization of the Transient Process in a Three-Tempo Singularly Perturbed System	31

Nonlinear Systems

Lastochkin K.A. Robust Prescribed Performance Control under Given Constraints for Systems with Relative Degree One	52
Shumsky A.E., Zhirabok A.N. A Comprehensive Approach to the Fault Accommodation Problem Solution in Fuzzy Discrete-Event Systems	84

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Ryabushev E.A., Galyaev A.A. Defense Planning for a Moving Target Against Multiple Attackers Using a Defender via the Monte Carlo Tree Search	104
--	-----