

© 2026 г. А.И. КАЛИНИН, д-р физ.-мат. наук (kalininai@bsu.by),
Л.И. ЛАВРИНОВИЧ, канд. физ.-мат. наук (lavrinovich@bsu.by)
(Белорусский государственный университет, Минск)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ТРЕХТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

Рассматривается задача об управлении с минимальной энергией линейной сингулярно возмущенной системой, содержащей три группы переменных с существенно различными скоростями изменения. Строятся асимптотические приближения к решению этой задачи в виде программы и обратной связи. Основное достоинство предлагаемых вычислительных процедур состоит в том, что при их применении исходная задача распадается на три невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенная система, квадратичный функционал, оптимальное управление, обратная связь, асимптотические приближения.

DOI: 10.7868/S2413977726100023

1. Введение

В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных. Это вызвано эффективностью асимптотических методов решения таких задач, при применении которых исходная задача распадается на задачи оптимального управления меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими. При интегрировании таких систем возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В первых работах, посвященных задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями, рассматривались динамические системы, содержащие только две группы переменных с существенно различными скоростями изменения, которые были названы медленными и быстрыми переменными (см. обзоры [1–4]). В дальнейшем в связи с потребностями приложений появились работы по оптимизации систем с несколькими группами быстрых переменных, которые содержали при производных параметры различных порядков малости. Их обзор содержится в [5]. Настоящая статья посвящена построению асимптотических приближений в виде программы и

обратной связи к решению задачи об управлении с минимальными энергетическими затратами сингулярно возмущенной системой с двумя группами быстрых переменных. Впервые подход к построению этих приближений был представлен в [6]. Заметим, что подобная задача для двухтемповой сингулярно возмущенной системы рассматривалась в [7].

2. Постановка задачи

В классе r -мерных управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую стационарную задачу оптимального управления:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 u, & x(t_*) &= x_*, \\ \mu \dot{y} &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 u, & y(t_*) &= y_*, \\ \mu^2 \dot{z} &= A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 u, & z(t_*) &= z_*, \end{aligned}$$

$$(2) \quad x(t^*) = 0, \quad y(t^*) = 0, \quad z(t^*) = 0,$$

$$(3) \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P u dt \rightarrow \min,$$

где μ – малый положительный параметр, t_* , t^* – заданные моменты времени ($t_* < t^*$), x – n_1 -вектор медленных переменных, y , z – векторы быстрых переменных размерности n_2 и n_3 соответственно. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. В критерии качества (3) P – положительно-определенная симметрическая матрица.

Предположение 1. Матрицы C_3 и $B = B_2 - C_2 C_3^{-1} B_3$ устойчивые, т.е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.

Введем понятия, которые позволят уточнить то, что будем понимать под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$), если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x, y, z, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N -го порядка, если для любого начального состояния (x_, y_*, z_*, t_*) , $t_* < t^*$, имеет место $u^{(N)}(x_*, y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в задаче (1)–(3).*

Настоящая статья посвящена построению асимптотически субоптимальных управлений в задаче (1)–(3). Кроме того, строится асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать следующие обозначения:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2/\mu & B_2/\mu & C_2/\mu \\ A_3/\mu^2 & B_3/\mu^2 & C_3/\mu^2 \end{pmatrix}, \quad D(\mu) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2/\mu \\ D_3/\mu^2 \end{pmatrix}.$$

3. Первая базовая задача

Суть предлагаемого подхода к построению асимптотически субоптимальных управлений состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений (в момент t^*) сопряженных переменных. Старшие коэффициенты этих разложений определяются начальными значениями сопряженных переменных в трех невозмущенных задачах оптимального управления меньшей размерности. Первой из них будет вырожденная задача

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x + D_0 u, \quad x(t_*) = x_*, \quad x(t^*) = 0, \\ J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P u dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где

$$(5) \quad \begin{aligned} A_0 &= A_1 - C_1 C_3^{-1} A_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} (A_2 - C_2 C_3^{-1} A_3), \\ D_0 &= D_1 - C_1 C_3^{-1} D_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} D_4, \quad D_4 = D_2 - C_2 C_3^{-1} D_3. \end{aligned}$$

В дальнейшем эту задачу будем называть *первой базовой*.

Предположение 2. Динамическая система в задаче (4) является вполне управляемой [8], т.е.

$$\text{rank} \left(D_0, A_0 D_0, A_0^2 D_0, \dots, A_0^{n_1-1} D_0 \right) = n_1.$$

При таком предположении в первой базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда эта задача имеет единственное решение [9], которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [10] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $\bar{u}(t)$, $x^0(t)$, $t \in T$, – оптимальные управление и траектория в задаче (4), тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы $\dot{\psi} = -A_0^T \psi$, что выполняется условие

$$\psi^{0T}(t) D_0 \bar{u}(t) - \frac{1}{2} \bar{u}^T(t) P \bar{u}(t) = \max_{u \in R^r} \left(\psi^{0T}(t) D_0 u - \frac{1}{2} u^T P u \right), \quad t \in T.$$

Из этого условия непосредственно следует

$$(6) \quad \bar{u}(t) = P^{-1} D_0^T \psi^0(t), \quad t \in T.$$

Положим $\lambda_0 = \psi^0(t^*)$, тогда

$$(7) \quad \psi^{0T}(t) = \lambda_0^T F_0(t), \quad \psi^{0T}(t) D_0 = \lambda_0^T \Phi_0(t), \quad t \in T,$$

где

$$(8) \quad \Phi_0(t) = F_0(t) D_0, \quad t \in T,$$

а $F_0(t)$, $t \in T$, $-(n_1 \times n_1)$ -матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$(9) \quad \dot{F}_0 = -F_0 A_0, \quad F_0(t^*) = E_{n_1}.$$

В силу (6), (7) и формулы Коши имеем

$$(10) \quad x^0(t^*) = F_0(t_*) x_* + S_1 \lambda_0,$$

где

$$(11) \quad S_1 = \int_{t_*}^{t^*} \Phi_0(t) P^{-1} \Phi_0^T(t) dt.$$

При выполнении предположения 2 эта матрица будет невырожденной, в чем можно легко убедиться, опираясь на неявный критерий управляемости [11]. Поскольку λ_0 определяется однозначно, то оптимальному управлению в первой базовой задаче соответствует в силу сформулированного принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных.

4. Вторая базовая задача

На втором этапе вычислений решается задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса:

$$(12) \quad \frac{dy}{ds} = By + D_4 u, \quad y(0) = B^{-1} D_4 \bar{u}(t^*),$$

$$y(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P u ds \rightarrow \min,$$

которую будем называть *второй базовой*.

Предположение 3. Выполнено условие управляемости

$$\text{rank} (D_4, BD_4, B^2D_4, \dots, B^{n_2-1}D_4) = n_2.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда в свою очередь следует, что задача (12) имеет единственное решение [9] и является нормальной. В этом случае принцип максимума [10] для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^*(s)$, $y^*(s)$, $s \leq 0$ – оптимальные управление и траектория в задаче (12), тогда существует такое решение $\Pi\psi(s)$, $s \leq 0$, сопряженной системы

$$\frac{d}{ds}\Pi\psi = -B^T\Pi\psi,$$

что выполняется условие

$$\Pi\psi^T(s)D_4u^*(s) - \frac{1}{2}u^{*\top}(s)Pu^*(s) = \max_{u \in R^r} \left(\Pi\psi^T(s)D_4u - \frac{1}{2}u^TPu \right), \quad s \leq 0.$$

Отсюда непосредственно следует

$$(13) \quad u^*(s) = P^{-1}D_4^T\Pi\psi(s), \quad s \leq 0.$$

Пусть $\sigma_0 = \Pi\psi(0)$, тогда

$$(14) \quad \Pi\psi^T(s) = \sigma_0^TG(s), \quad \Pi\psi^T(s)D_4 = \sigma_0^T\Pi\Phi(s), \quad s \leq 0,$$

где

$$(15) \quad \Pi\Phi(s) = G(s)D_4, \quad s \leq 0,$$

а $G(s)$, $s \leq 0$, – $(n_2 \times n_2)$ -матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(16) \quad \frac{dG}{ds} = -GB, \quad G(0) = E_{n_2}.$$

В силу неявного критерия управляемости [11] при выполнении предположения 3 матрица

$$(17) \quad S_2 = \int_{-\infty}^0 \Pi\Phi(s)P^{-1}\Pi\Phi^T(s)ds$$

будет невырожденной, а поскольку, как следует из (13), (14) и формулы Коши,

$$(18) \quad y^*(0) = S_2\sigma_0,$$

то оптимальному управлению во второй базовой задаче соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных.

5. Третья базовая задача

Третья базовая задача имеет вид

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= C_3 z + D_3 u, \quad z(0) = C_3^{-1} D_3 ((\bar{u}(t^*) + u^*(0)), \\ z(-\infty) &= 0, \quad J_3(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P u d\tau \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Предположение 4. Выполнено условие управляемости

$$\text{rank} \left(D_3, C_3 D_3, C_3^2 D_3, \dots, C_3^{n_3-1} D_3 \right) = n_3.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений в третьей базовой задаче. Отсюда следует, что задача (19) имеет единственное решение [9] и является нормальной. В этом случае принцип максимума [10] для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть $u_*(\tau)$, $z_*(\tau)$, $\tau \leq 0$, – оптимальные управление и траектория в задаче (19), тогда существует такое решение $Q\psi(\tau)$, $\tau \leq 0$, сопряженной системы

$$\frac{d}{d\tau} Q\psi = -C_3^T Q\psi,$$

что выполняется условие

$$Q\psi^T(\tau) D_3 u_*(\tau) - \frac{1}{2} u_*^T(\tau) P u_*(\tau) = \max_{u \in R^r} \left(Q\psi^T(\tau) D_3 u - \frac{1}{2} u^T P u \right), \quad \tau \leq 0.$$

Отсюда непосредственно следует

$$(20) \quad u_*(\tau) = P^{-1} D_3^T Q\psi(\tau), \quad \tau \leq 0.$$

Пусть $\chi_0 = Q\psi(0)$, тогда

$$(21) \quad Q\psi^T(\tau) = \chi_0^T G_1(\tau), \quad Q\psi^T(\tau) D_3 = \chi_0^T Q\Phi(\tau), \quad \tau \leq 0,$$

где

$$(22) \quad Q\Phi(\tau) = G_1(\tau) D_3, \quad \tau \leq 0,$$

а $G_1(\tau)$, $\tau \leq 0$, – $(n_3 \times n_3)$ -матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(23) \quad \frac{dG_1}{d\tau} = -G_1 C_3, \quad G_1(0) = E_{n_3}.$$

В силу неявного критерия управляемости [11] при выполнении предположения 4 матрица

$$(24) \quad S_3 = \int_{-\infty}^0 Q\Phi(\tau)P^{-1}Q\Phi^T(\tau)d\tau$$

будет невырожденной, а поскольку, как следует из (20), (21) и формулы Коши,

$$(25) \quad z_*(0) = S_3\chi_0,$$

то оптимальному управлению в третьей базовой задаче соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных.

Подчеркнем, что единственная информация о решениях второй и третьей базовых задач, которая используется в дальнейшем при построении асимптотически субоптимальных управлений, – это начальные значения σ_0 , χ_0 векторов сопряженных переменных. Нет необходимости строить оптимальные управления $u^*(s)$, $s \leq 0$, и $u_*(\tau)$, $\tau \leq 0$, что, впрочем, и невозможно, если задача решается численно. Во второй и третьей базовых задачах гамильтониан вдоль оптимального управления равен нулю. Воспользовавшись этим свойством при $s = 0$ и $\tau = 0$, получаем условия, которым удовлетворяют векторы σ_0 и χ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_0^T D_4 P^{-1} D_4^T \sigma_0 + \sigma_0 D_4 \bar{u}(t^*) &= 0, \\ \frac{1}{2}\chi_0^T D_3 P^{-1} D_3^T \chi_0 + \chi_0 D_3 (\bar{u}(t^*) + P^{-1} D_4^T \sigma_0) &= 0. \end{aligned}$$

После решения базовых задач найдем векторы

$$(26) \quad \begin{aligned} \nu_0 &= \sigma_0 - ((B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1})^T \lambda_0, \\ \eta_0 &= \chi_0 - (C_1 C_3^{-1})^T \lambda_0 + (C_2 C_3^{-1})^T \nu_0 \end{aligned}$$

и сформируем матрицу

$$(27) \quad I_0 = \begin{pmatrix} S_1 & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times n_3} \\ I_{21} & S_2 & 0_{n_2 \times n_3} \\ I_{31} & I_{32} & S_3 \end{pmatrix}$$

размеров $(n_1 + n_2 + n_3) \times (n_1 + n_2 + n_3)$. Блоки S_1 , S_2 , S_3 определены ранее формулами (11), (17), (24), а

$$\begin{aligned} I_{21} &= -B^{-1} (A_2 - C_2 C_3^{-1} A_3) S_1 + (D_2 - C_2 C_3^{-1} D_3) + S_2 (B^{-1} D_4)^T, \\ I_{31} &= -C_3^{-1} (A_3 S_1 + B_2 I_{21} + D_3 P^{-1} D_0) + S_3 (C_3^{-1} D_3)^T, \\ I_{32} &= -C_3^{-1} (B_2 S_2 + D_3 P^{-1} D_0) + S_3 (C_3^{-1} D_3)^T. \end{aligned}$$

Как было отмечено выше, S_1 , S_2 , S_3 – невырожденные матрицы, а тогда $\det I_0 \neq 0$.

6. Асимптотический анализ решения исходной задачи

Говорить об асимптотически субоптимальных управлениях можно лишь в том случае, когда задача (1)–(3) имеет решение. Покажем, что при выполнении предположений 1–4 в задаче (1)–(3) с достаточно малым μ существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [10] допускает следующую формулировку: пусть $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, – оптимальное управление в задаче (1)–(3), тогда существует такое решение $\psi_1^0(t, \mu)$, $\psi_2^0(t, \mu)$, $\psi_3^0(t, \mu)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -A_1^T \psi_1 - A_2^T \psi_2 - A_3^T \psi_3, \\ \mu \dot{\psi}_2 &= -B_1^T \psi_1 - B_2^T \psi_2 - B_3^T \psi_3, \\ \mu^2 \dot{\psi}_3 &= -C_1^T \psi_1 - C_2^T \psi_2 - C_3^T \psi_3, \end{aligned}$$

что

$$(29) \quad u^0(t, \mu) = P^{-1} (D_1^T \psi_1(t, \mu) + D_2^T \psi_2(t, \mu) + D_3^T \psi_3(t, \mu)), \quad t \in T.$$

Теорема 1. При выполнении предположений 1–4 задача (1)–(3) имеет единственное решение $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, которое является нормальной экстремалью и представимо в виде (29), где $(\psi_1^0(t, \mu), \psi_2^0(t, \mu), \psi_3^0(t, \mu))$, $t \in T$, – вектор сопряженных переменных, соответствующий в силу принципа максимума оптимальному управлению. Величины $\lambda(\mu) = \psi_1^0(t^, \mu)$, $\nu(\mu) = \psi_2^0(t^*, \mu)$, $\eta(\mu) = \psi_3^0(t^*, \mu)$ допускают асимптотические разложения*

$$(30) \quad \lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k, \quad \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \nu_k, \quad \eta(\mu) \sim \eta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \eta_k,$$

в которых ν_0 , η_0 задаются формулами (26), а λ_0 , σ_0 , χ_0 – начальные значения сопряженных переменных в базовых задачах.

Доказательство. Введем в рассмотрение векторы $\theta = (\lambda, \nu, \eta)$, $\theta_0 = (\lambda_0, \nu_0, \eta_0)$ и обозначим через $\psi_1(t, \theta, \mu)$, $\psi_2(t, \theta, \mu)$, $\psi_3(t, \theta, \mu)$, $t \in T$, $\theta \in R^{n_1+n_2+n_3}$, решение сопряженной системы (28) с начальными условиями

$$(31) \quad \psi_1(t^*) = \lambda, \quad \psi_2(t^*) = \nu, \quad \psi_3(t^*) = \eta.$$

Пусть далее $x(t, \theta, \mu)$, $y(t, \theta, \mu)$, $z(t, \theta, \mu)$, $t \in T$, $\theta \in R^{n_1+n_2+n_3}$, – траектория системы (1), порожденная управлением

$$(32) \quad u(t, \theta, \mu) = P^{-1} (D_1^T \psi_1(t, \theta, \mu) + D_2^T \psi_2(t, \theta, \mu) + D_3^T \psi_3(t, \theta, \mu)), \quad t \in T.$$

Покажем, что левые части уравнений

$$(33) \quad x(t^*, \theta, \mu) = 0, \quad y(t^*, \theta, \mu) = 0, \quad z(t^*, \theta, \mu) = 0$$

допускают асимптотические разложения по целым степеням малого параметра, и получим формулы для коэффициентов разложений.

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $F(t, \mu)$, $t \in T$, размеров $(n_1 + n_2 + n_3) \times (n_1 + n_2 + n_3)$ как решение начальной задачи

$$(34) \quad \dot{F} = -FA(\mu), \quad F(t^*) = E_{n_1+n_2+n_3}.$$

Решение этого сингулярно возмущенного уравнения удобно представлять в блочном виде

$$F(t, \mu) = \begin{pmatrix} F_1(t, \mu) & F_2(t, \mu) & F_3(t, \mu) \\ F_4(t, \mu) & F_5(t, \mu) & F_6(t, \mu) \\ F_7(t, \mu) & F_8(t, \mu) & F_9(t, \mu) \end{pmatrix},$$

где F_i , $i = \overline{1, 9}$, – матрицы размеров $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_1 \times n_3$, $n_2 \times n_1$, $n_2 \times n_2$, $n_2 \times n_3$, $n_3 \times n_1$, $n_3 \times n_2$, $n_3 \times n_3$ соответственно. С помощью метода пограничных функций [12] они могут быть разложены в асимптотические ряды:

$$(35) \quad F_i(t, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (F_{ik}(t) + \Pi_k F_i(s) + Q_k F_i(\tau)),$$

$$s = (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t^*)/\mu^2, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, 9}.$$

Подчеркнем, что это равномерные по $t \in T$ асимптотические разложения. Отметим как существенный факт также то, что для матричных функций $\Pi_k F_i(s)$, $s \leq 0$, $Q_k F_i(\tau)$, $\tau \leq 0$, называемых пограничными членами, имеют место оценки

$$(36) \quad \|\Pi_k F_i(s)\| \leq \beta_{1k} \exp(\gamma_{1k}s), \quad \|Q_k F_i(s)\| \leq \beta_{2k} \exp(\gamma_{2k}s)$$

для всех $i = \overline{1, 9}$, $k = 0, 1, \dots$, где β_{1k} , β_{2k} , γ_{1k} , γ_{2k} – положительные постоянные. Приведем несколько старших коэффициентов разложений (35), которые понадобятся при доказательстве теоремы:

$$(37) \quad \begin{aligned} F_{10} &= F_0, \quad F_{40} = KF_0, \quad F_{70} = MF_0, \quad F_{i0} = 0, \quad i = 2, 3, 5, 6, 8, 9, \\ F_{21} &= F_0L, \quad F_{51} = KF_0L, \quad F_{81} = MF_0L, \quad F_{i1} = 0, \quad i = 3, 6, 9, \\ F_{32} &= -F_0(C_1 + LC_2)C_3^{-1}, \quad F_{62} = -KF_0(C_1 + LC_2)C_3^{-1}, \\ F_{92} &= -MF_0(C_1 + LC_2)C_3^{-1}, \\ \Pi_0 F_4 &= -GK, \quad \Pi_0 F_5 = G, \quad \Pi_0 F_7 = C_3^{-1}B_3GK, \\ \Pi_0 F_8 &= -C_3^{-1}B_3G, \quad \Pi_0 F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 6, 9, \\ \Pi_1 F_2 &= -LG, \quad \Pi_1 F_3 = 0, \quad \Pi_1 F_6 = -GC_2C_3^{-1}, \\ \Pi_1 F_9 &= C_3^{-1}B_3GC_2C_3^{-1}, \quad \Pi_2 F_3 = LGC_2C_3^{-1}, \\ Q_0 F_i &= 0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad Q_0 F_7 = G_1C_3^{-1}A_3, \\ Q_0 F_8 &= G_1C_3^{-1}B_3, \quad Q_9 F_0 = G_1, \\ Q_1 F_2 &= 0, Q_1 F_3 = 0, \quad Q_1 F_5 = C_2C_3^{-1}G_1C_3^{-1}B_3, \\ Q_1 F_6 &= C_2C_3^{-1}G_1, \quad Q_2 F_3 = C_1C_3^{-1}G_1. \end{aligned}$$

Здесь

$K = -B^{-1}(A_2 - C_2 C_3^{-1} A_3)$, $M = -C_3^{-1}(A_3 - B_3 K)$, $L = -(B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3)B^{-1}$,
а F_0 , G , G_1 – соответственно решения уравнений (9), (16), (23).

Заметим, что

$$\begin{aligned}\psi_1^T(t, \theta, \mu) &= \lambda^T F_1(t, \mu) + \mu \nu^T F_4(t, \mu) + \mu^2 \eta^T F_7(t, \mu), \\ \mu \psi_2^T(t, \theta, \mu) &= \lambda^T F_2(t, \mu) + \mu \nu^T F_5(t, \mu) + \mu^2 \eta^T F_8(t, \mu), \\ \mu^2 \psi_3^T(t, \theta, \mu) &= \lambda^T F_3(t, \mu) + \mu \nu^T F_6(t, \mu) + \mu^2 \eta^T F_9(t, \mu).\end{aligned}$$

Отсюда из (35), (37) следует, что имеют место асимптотические разложения

$$(38) \quad \begin{aligned}\psi_i(t, \theta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\psi_{ik}(t, \theta) + \Pi_k \psi_i(s, \theta) + Q_k \psi_i(\tau, \theta)), \\ s &= (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t^*)/\mu^2, \quad t \in T, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

в которых

$$(39) \quad \begin{aligned}\psi_{10}^T(t, \theta) &= \lambda^T F_0(t), \quad \psi_{20}^T(t, \theta) = \lambda^T F_0(t) L, \\ \psi_{30}^T(t, \theta) &= -\lambda^T F_0(t) (C_1 - L C_2) C_3^{-1}, \\ \Pi_0^T \psi_1(s, \theta) &= 0, \quad \Pi_0^T \psi_2(s, \theta) = -(\lambda^T L - \nu^T) G(s), \\ \Pi_0^T \psi_3(s, \theta) &= (\lambda^T L - \nu^T) G(s) C_2 C_3^{-1}, \\ Q_0^T \psi_1(\tau, \theta) &= 0, \quad Q_0^T \psi_2(\tau, \theta) = 0, \\ Q_0^T \psi_3(\tau, \theta) &= (\lambda^T C_1 C_3^{-1} + \nu^T C_2 C_3^{-1} + \eta^T) G_1(\tau), \\ \psi_{1k}^T(t, \theta) &= \lambda^T F_{1k}(t) + \nu^T F_{4,k-1}(t) + \eta^T F_{7,k-2}(t), \\ \psi_{2k}^T(t, \theta) &= \lambda^T F_{2,k+1}(t) + \nu^T F_{5,k}(t) + \eta^T F_{8,k-1}(t), \\ \psi_{3k}^T(t, \theta) &= \lambda^T F_{3,k+2}(t) + \nu^T F_{6,k+1}(t) + \eta^T F_{9,k}(t), \\ \Pi_k^T \psi_1(s, \theta) &= \lambda^T \Pi_k F_1(s) + \nu \Pi_{k-1} F_4(s) + \eta^T \Pi_{k-2} F_7(s), \\ \Pi_k^T \psi_2(s, \theta) &= \lambda^T \Pi_{k+1} F_2(s) + \nu \Pi_k F_5(s) + \eta^T \Pi_{k-1} F_8(s), \\ \Pi_k^T \psi_3(s, \theta) &= \lambda^T \Pi_{k+2} F_3(s) + \nu \Pi_{k+1} F_6(s) + \eta^T \Pi_k F_9(s), \\ Q_k^T \psi_1(\tau, \theta) &= \lambda^T Q_k F_1(\tau) + \nu^T Q_{k-1} F_4(\tau) + \eta^T Q_{k-2} F_7(\tau), \\ Q_k^T \psi_2(\tau, \theta) &= \lambda^T Q_{k+1} F_2(\tau) + \nu^T Q_k F_5(\tau) + \eta^T Q_{k-1} F_8(\tau), \\ Q_k^T \psi_3(\tau, \theta) &= \lambda^T Q_{k+2} F_3(\tau) + \nu^T Q_{k+1} F_6(\tau) + \eta^T Q_k F_9(\tau), \\ F_{7,-1}(t) &= 0, \quad \Pi_{-1} F_7(s) = 0, \quad Q_{-1} F_7(\tau) = 0, \\ k &\geq 1, \quad t \in T, \quad s \leq 0, \quad \tau \leq 0.\end{aligned}$$

Эти разложения будут равномерными в области $\|\theta - \theta_0\| \leq \epsilon_0$, $t \in T$, где ϵ_0 – некоторое положительное число. Отметим, что из (7), (14), (21), (26),

(39) следует

$$\begin{aligned}
 \psi_{10}(t, \theta_0) &= \psi^0(t), \quad \psi_{20}(t, \theta_0) = L^T \psi^0(t), \\
 \psi_{30}(t, \theta_0) &= -((C_1 - LC_2)C_3^{-1})^T \psi^0(t), \quad t \in T, \\
 \Pi_0 \psi_2(s, \theta_0) &= \Pi \psi(s), \quad \Pi_0 \psi_3(s, \theta_0) = -(C_2 C_3^{-1})^T \Pi \psi(s), \quad s \leq 0, \\
 Q_0 \psi_3(\tau, \theta_0) &= Q \psi(\tau), \quad \tau \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

В силу (38) управление (29) также допускает асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
 u(t, \theta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (u_k(t, \theta) + \Pi_k u(s, \theta) + Q_k u(\tau, \theta)), \\
 s &= (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t^*)/\mu^2, \quad t \in T,
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_k(t, \theta) &= P^{-1}(D_1^T \psi_{1k}(t, \theta) + D_2^T \psi_{2k}(t, \theta) + D_3^T \psi_{3k}(t, \theta)), \\
 \Pi_k u(s, \theta) &= P^{-1}(D_1^T \Pi_k \psi_1(s, \theta) + D_2^T \Pi_k \psi_2(s, \theta) + D_3^T \Pi_k \psi_3(s, \theta)), \\
 Q_k u(\tau, \theta) &= P^{-1}(D_1^T Q_k \psi_1(\tau, \theta) + D_2^T Q_k \psi_2(\tau, \theta) + D_3^T Q_k \psi_3(\tau, \theta)), \\
 t &\in T, \quad s \leq 0, \quad \tau \leq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Поскольку наряду с формулами (5), (6), (13), (20), (40) выполняются условия $\Pi_0 \psi_1(s, \theta) = 0$, $Q_0 \psi_1(\tau, \theta) = 0$, $Q_0 \psi_2(\tau, \theta) = 0$, то

$$\begin{aligned}
 u_0(t, \theta_0) &= \bar{u}(t), \quad t \in T, \quad \Pi_0 u(s, \theta_0) = u^*(s), \quad s \leq 0, \\
 Q_0 u(\tau, \theta_0) &= u_*(\tau), \quad \tau \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

В силу формулы Коши имеем

$$\begin{pmatrix} x(t^*, \theta, \mu) \\ y(t^*, \theta, \mu) \\ z(t^*, \theta, \mu) \end{pmatrix} = F(t_*, \mu) \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} + \int_{t_*}^{t^*} F(t, \mu) D(\mu) u(t, \theta, \mu) dt.$$

Из (5), (35)–(39), (41), (42) следует, что эта вектор-функция допускает асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
 x(t^*, \theta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(\theta), \quad y(t^*, \theta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(\theta), \\
 z(t^*, \theta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(\theta),
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

в котором

$$\begin{aligned}
 (45) \quad & x_0(\theta) = F_0(t_*)x_* + \int_{t_*}^{t^*} F_0(t)D_0u_0(t, \theta)dt, \\
 & y_0(\theta) = Kx_0(\theta) + \int_{-\infty}^0 (G(s)D_4(u_0(t^*, \theta) + \Pi_0u(s, \theta)))ds, \\
 & z_0(\theta) = Mx_0(\theta) + \int_{-\infty}^0 -C_3^{-1}B_3G(s)D_4(u_0(t^*, \theta) + \Pi_0u(s, \theta))ds + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^0 G_1(\tau)D_3(u_0(t^*, \theta) + \Pi_0u(0, \theta) + Q_0u(\tau, \theta))d\tau, \\
 & x_k(\theta) = F_{1k}(t^*)x_* + F_{2k}(t^*)y_* + F_{3k}(t^*)z_* + \int_{t_*}^{t^*} \sum_{p=0}^k (F_{1,k-p}(t)D_1u_p(t, \theta))dt + \\
 & \quad + \int_{t_*}^{t^*} \sum_{p=0}^k (F_{2,k-p}(t)D_2u_p(t, \theta))dt + \int_{t_*}^{t^*} \sum_{p=2}^{k+2} (F_{3,k+2-p}(t)D_3u_p(t, \theta))dt + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k-1} ((F_{1,k-1-p}(t^*) + \Pi_{k-1-p}F_1(s))D_1(u_p(t^*, \theta) + \Pi_pu(s, \theta)))ds + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^k ((F_{2,k-p}(t^*) + \Pi_{k-p}F_2(s))D_2(u_p(t^*, \theta) + \Pi_pu(s, \theta)))ds + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k+1} ((F_{3,k-p+1}(t^*) + \Pi_{k+1-p}F_3(s))D_3(u_p(t^*, \theta) + \Pi_pu(s, \theta)))ds + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k-2} ((F_{1,k-2-p}(t^*) + \Pi_{k-2-p}F_1(0) + Q_{k-2-p}F_1(\tau))D_1(u_p(t^*, \theta) + \\
 & \quad + \Pi_pu(0, \theta)) + Q_pu(\tau, \theta))d\tau + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k-1} ((F_{2,k-1-p}(t^*) + \Pi_{k-1-p}F_2(0) + Q_{k-1-p}F_2(\tau))D_2u_p(t^*, \theta) + \\
 & \quad + \Pi_pu(0, \theta)) + Q_pu(\tau, \theta))d\tau + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^k ((F_{3,k-p}(t^*) + \Pi_{k-p}F_3(0) + Q_{k-p}F_3(\tau))D_3(u_p(t^*, \theta) + \\
 & \quad + \Pi_pu(0, \theta)) + Q_pu(\tau, \theta))d\tau, \quad k \geq 1.
 \end{aligned}$$

Для $y_k(\theta)$, $z_k(\theta)$, $k \geq 1$, имеют место аналогичные формулы с той лишь разницей, что матрицы F_{1i} , F_{2i} , F_{3i} , $\Pi_i F_1$, $\Pi_i F_2$, $\Pi_i F_3$, $Q_i F_1$, $Q_i F_2$, $Q_i F_3$ заменяются в первом случае на F_{4i} , F_{5i} , F_{6i} , $\Pi_i F_4$, $\Pi_i F_5$, $\Pi_i F_6$, $Q_i F_4$, $Q_i F_5$, $Q_i F_6$, а во втором – на F_{7i} , F_{8i} , F_{9i} , $\Pi_i F_7$, $\Pi_i F_8$, $\Pi_i F_9$, $Q_i F_7$, $Q_i F_8$, $Q_i F_9$.

С помощью теоремы о неявной функции убедимся, что система (33) однозначно разрешима относительно θ при достаточно малых μ . Запишем ее в виде

$$(46) \quad R(\theta, \mu) = 0.$$

Согласно (44) имеет место равномерное в области $\|\theta - \theta_0\| \leq \epsilon_0$ асимптотическое разложение

$$(47) \quad R(\theta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k R_k(\theta),$$

в котором $R_k(\theta) = (x_k(\theta), y_k(\theta), z_k(\theta))$.

Положим $R(\theta, 0) = R_0(\theta)$, тогда вектор-функция $R(\theta, \mu)$ будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора θ в области $\|\theta - \theta_0\| < \epsilon_0$, $0 \leq \mu < \mu_0$, где μ_0 – достаточно малое положительное число.

В силу (43), (45) и формулы Коши имеем $x_0(\theta_0) = x^0(t^*) = 0$. Матричная функция $G(s)$, $s \leq 0$, является решением начальной задачи (16), и поскольку $G(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow -\infty$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 G(s) D_4 u_0(t^*, \theta_0) ds &= \int_{-\infty}^0 \left(-\frac{dG(s)}{ds} B^{-1} D_4(u_0(t^*, \theta_0)) \right) ds = \\ &= -B^{-1} D_4(u_0(t^*, \theta_0)). \end{aligned}$$

Вместе с тем из (43) и формулы Коши следует

$$\int_{-\infty}^0 G(s) D_4 \Pi_0 u(s, \theta_0) ds = -y^*(0) = B^{-1} D_4 u_0(t^*, \theta_0).$$

Отсюда и из второй формулы (45) получаем $y_0(\theta_0) = 0$.

Аналогично, поскольку матричная функция $G_1(\tau)$, $\tau \leq 0$, является решением начальной задачи (23) и $G_1(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$, то

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 G_1(\tau) D_3 (u_0(t^*, \theta_0) + \Pi_0 u(0, \theta_0)) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(-\frac{dG_1(\tau)}{d\tau} C_3^{-1} D_3 (u_0(t^*, \theta_0) + \Pi_0 u(0, \theta_0)) \right) d\tau = \\ &= -C_3^{-1} D_3 (u_0(t^*, \theta_0) + \Pi_0 u(0, \theta_0)). \end{aligned}$$

Вместе с тем из (43) и формулы Коши следует

$$\int_{-\infty}^0 G_1(\tau) D_3 Q_0 u(\tau, \theta_0) d\tau = -z^*(0) = C_3^{-1} D_3 (u_0(t^*, \theta_0) + \Pi_0 u(0, \theta_0)).$$

Отсюда и из третьей формулы (45) с учетом того, что

$$\int_{-\infty}^0 -C_3^{-1} B_3 G(s) D_4 (u_0(t^*, \theta) + \Pi_0(s, \theta)) ds = C_3^{-1} B_3 (K x_0(\theta_0) - y_0(\theta_0)) = 0,$$

получаем $z_0(\theta_0) = 0$. Таким образом, $R(\theta_0, 0) = R_0(\theta_0) = 0$.

Непосредственным дифференцированием вектор-функции (45) с учетом (8), (15), (22), (37), (39), (42) убеждаемся, что $\partial R(\theta_0, 0)/\partial \theta = \partial R_0(\theta_0)/\partial \theta = I_0$ (см. (27)). Поскольку эта матрица Якоби является невырожденной, то для системы (46) или, что то же самое, (33) выполнены условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме в некоторой правосторонней окрестности нуля $0 \leq \mu < \mu_1$ однозначно определена вектор-функция $\theta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu), \eta(\mu))$, удовлетворяющая уравнениям (33). Она непрерывна, и $\theta(0) = \theta_0 = (\lambda_0, \nu_0, \eta_0)$. Это предполагает, что управление $u^0(t, \mu) = u(t, \theta, \mu)$, $t \in T$, является допустимым в задаче (1)–(3) с достаточно малым μ . Оно удовлетворяет принципу максимума с вектором сопряженных переменных $\psi_1^0(t, \mu) = \psi_1(t, \theta(\mu), \mu)$, $\psi_2^0(t, \mu) = \psi_2(t, \theta(\mu), \mu)$, $\psi_3^0(t, \mu) = \psi_3(t, \theta(\mu), \mu)$, $t \in T$, причем это нормальная экстремаль. Отсюда следует, что $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, – единственное оптимальное управление в задаче (1)–(3).

Как уже отмечалось, разложение (47) является равномерным в области $\|\theta - \theta_0\| < \epsilon_0$, а его коэффициенты – линейные функции. Тогда для решения $\theta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu), \eta(\mu))$ системы (33) будут иметь место асимптотические разложения (30). Теорема доказана.

7. Построение асимптотически субоптимальных управлений

Продолжим изложение алгоритма построения асимптотических приближений к решению задачи (1)–(3), опираясь на утверждения теоремы и формулы, полученные при ее доказательстве.

Вектор-функция

$$u^{(0)}(t, \mu) = P^{-1}(D_1^T \psi_1(t, \theta_0, \mu) + D_2^T \psi_2(t, \theta_0, \mu) + D_3^T \psi_3(t, \theta_0, \mu)), \quad t \in T,$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Заметим, что ее можно сформировать непосредственно после решения базовых задач. Асимптотически субоптимальное управление N -го порядка ($N \geq 1$) имеет вид

$$(48) \quad u^{(N)}(t, \mu) = P^{-1}(D_1^T \psi_1(t, \theta^{(N)}(\mu), \mu) + D_2^T \psi_2(t, \theta^{(N)}(\mu), \mu) + D_3^T \psi_3(t, \theta^{(N)}(\mu, \mu)), \quad t \in T,$$

где

$$(49) \quad \theta^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^N \mu^k \theta_k, \quad \theta_k = (\lambda_k, \nu_k, \eta_k).$$

Для построения управления (48) нужно найти коэффициенты асимптотических рядов (30). Это можно сделать методом неопределенных коэффициентов, опираясь на разложение (47). Конкретнее, разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию

$$\sum_{k=0}^N \mu^k R_k(\theta^{(N)}(\mu))$$

по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения к нулю (начиная с коэффициента при μ). В результате получим невырожденные системы линейных алгебраических уравнений для последовательного нахождения векторов θ_k , $k = \overline{1, N}$:

$$(50) \quad I_0 \theta_1 = -R_1(\theta_0), \quad I_0 \theta_k = -R_k(\theta_0) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial R_j(\theta_0)}{\partial \theta} \theta_{k-j}, \quad k \geq 2.$$

Здесь учтено, что коэффициенты разложений (47) есть линейные вектор-функции. Заметим, что в силу структуры (27) матрицы Якоби I_0 системы (50) расщепляются. Последовательно решая эти системы, находим векторы θ_k , $k = \overline{1, N}$, и составляем полиномы (49). Управление (48), как отмечено выше, будет асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка в исходной задаче. Чтобы построить это управление, нужно найти решение задачи Коши для сопряженной системы (28) с начальными условиями

$$\psi_1(t^*) = \sum_{k=0}^N \mu^k \lambda_k, \quad \psi_2(t^*) = \sum_{k=0}^N \mu^k \nu_k, \quad \psi_3(t^*) = \sum_{k=0}^N \mu^k \eta_k.$$

Сопряженная система является сингулярно возмущенной и, следовательно, жесткой. Интегрирования жестких систем можно избежать, заменив в (48) вектор-функции $\psi_i(t, \theta, \mu)$, $i = \overline{1, 3}$, их асимптотическими приближениями

$$\begin{aligned} \psi_i^{(N)}(t, \theta, \mu) &= \sum_{k=0}^N \mu^k (\psi_{ik}(t, \theta) + \Pi_k \psi_i(s, \theta) + Q_k \psi_i(\tau, \theta)), \\ s &= (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t^*)/\mu^2, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Вектор-функция

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(N)}(t, \mu) &= P^{-1}(D_1^T \psi_1^{(N)}(t, \theta^{(N)}(\mu), \mu) + D_2^T \psi_2^{(N)}(t, \theta^{(N)}(\mu), \mu) + \\ &\quad + D_3^T \psi_3^{(N)}(t, \theta^{(N)}(\mu, \mu))), \quad t \in T, \end{aligned}$$

наряду с (48) будет асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка в задаче (1)–(3). В частности, как следует из (5), (6), (13), (20), (39), (40),

$$(51) \quad \begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(t, \mu) &= P^{-1} \left(D_0^T \psi^{(0)}(t) + D_4^T \Pi \psi((t - t^*)/\mu) + D_3^T Q \psi((t - t)/\mu^2) \right) = \\ &= \bar{u}(t) + u^*((t - t^*)/\mu) + u_*((t - t)/\mu^2), \quad t \in T. \end{aligned}$$

То, что это есть асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка, видно также из формул (41), (43). Заметим, что управление (51) не зависит от начальных состояний y_* , z_* векторов быстрых переменных и при малых μ будет существенно отличаться от решения $\bar{u}(t)$, $t \in T$, первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т.е. в некоторой левосторонней окрестности точки t^* .

Построенную асимптотику можно использовать для нахождения оптимального управления $u^0(t, \mu)$, $t \in T$, и в задаче (1)–(3) с заданным значением μ . Для этого нужно применить процедуру доводки [13], т.е. найти методом Ньютона корни системы (46), взяв в качестве начального приближения $\theta^{(N)}(\mu)$. Чтобы избежать интегрирования жестких систем, вместо матрицы $\partial R(\theta, \mu)/\partial \theta$ можно воспользоваться ее приближением I_0 .

8. Асимптотически субоптимальный синтез

Программные асимптотически субоптимальные управления, разумеется, зависят от начального состояния (x_*, y_*, z_*, t_*) динамической системы. Ранее такая зависимость не учитывалась, поскольку начальное состояние считалось заданным. В настоящем разделе, который посвящен построению асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка, будем интересоваться именно этой зависимостью. В дальнейшем будем рассматривать матрицу C как функцию t_* , $t_* < t^*$. Момент t^* по-прежнему считается заданным.

Из равенства (10) следует

$$(52) \quad \psi^0(t^*) = \lambda_0 = -S_1^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*,$$

что вместе с (7) влечет за собой

$$(53) \quad \psi^0(t_*) = -F_0^T(t_*)S_1^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*.$$

В силу (6) и (18) имеет место

$$(54) \quad \Pi \psi(0) = \sigma_0 = S_2^{-1}y^*(0) = -S_2^{-1}B^{-1}D_4\bar{u}(t^*) = -S_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^T\psi^0(t^*).$$

Отсюда с учетом (14) и (52) получаем

$$(55) \quad \Pi \psi(s) = G^T(s)S_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^TF_0^T(t_*)S_1^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*, \quad s \leq 0.$$

В силу (6), (13), (25) имеем

$$\begin{aligned} Q\psi(0) &= \chi_0 = S_3^{-1}z^*(0) = -S_3^{-1}C_3^{-1}D_3(\bar{u}(t^*) + u^*(0)) = \\ &= -S_3^{-1}C_3^{-1}D_3P^{-1}(D_0^T\psi(t^*) + D_4^T\Pi\psi(0)). \end{aligned}$$

Из полученного выражения с учетом (21), (52), (54) следует

$$Q\psi(\tau) = G_1^T(\tau)S_3^{-1}C_3^{-1}D_3P^{-1}(D_0^T + D_4^TS_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^T)C^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*.$$

Тогда, как видно из формул (51), (53), (55), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в начальный момент времени представимо в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(t_*, \mu) &= P^{-1}(D_0^T - D_4^TG^T((t_* - t^*)/\mu)S_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^TF_0^T(t_*) - \\ &\quad - D_3^TG_1((t_* - t^*)/\mu^2)S_3^{-1}C_3^{-1}D_3P^{-1} \times \\ &\quad \times (D_0^T + D_4^TS_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^T))S_1^{-1}(t_*)F_0(t_*)x_*. \end{aligned}$$

Поскольку (x_*, y_*, z_*, t_*) – произвольное начальное состояние динамической системы, то по определению 2 вектор-функция

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(x, y, z, t, \mu) &= \\ (56) \quad &= P^{-1}\left(D_0^T - D_4^TG^T((t - t^*)/\mu)S_2^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^TF_0^T(t) - \right. \\ &\quad \left. - D_3^TG_1((t - t^*)/\mu^2)S_3^{-1}C_3^{-1}D_3P^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times (D_0^T + D_4^TC_0^{-1}B^{-1}D_4P^{-1}D_0^T)\right)S_1^{-1}(t)F_0(t)x \end{aligned}$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в исходной задаче. Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции быстрых переменных.

9. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу, которая является моделью процесса управления горизонтальным прямолинейным движением двух тел с существенно различными малыми массами и упругой связью:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y, \quad \dot{x}_2 = z, \\ \mu\dot{y} &= -kx_1 + kx_2 - c_1y + d_1u_1, \quad \mu^2\dot{z} = kx_1 - kx_2 - c_2z + d_2u_2, \\ x_1(t_*) &= x_{*1}, \quad x_2(t_*) = x_{*2}, \quad y(t_*) = y_*, \quad z(t_*) = z_*, \\ (57) \quad x_1(t^*) &= x_2(t^*) = y(t^*) = z(t^*) = 0, \\ J(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Все постоянные в этой задаче положительны, при этом $\mu \ll 1$. Предположение 1 в данном случае выполнено.

Первая базовая задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\frac{k}{c_1}x_1 + \frac{k}{c_1}x_2 + \frac{d_1}{c_1}u_1, & \dot{x}_2 &= \frac{k}{c_2}x_1 - \frac{k}{c_2}x_2 + \frac{d_2}{c_2}u_2, \\
 x_1(t_*) &= x_{*1}, & x_2(t_*) &= x_{*2}, \\
 x_1(t^*) &= x_2(t^*) = 0, & J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min.
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Легко убедиться, что динамическая система в первой базовой задаче является вполне управляемой. В силу принципа максимума оптимальное управление в задаче (58) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1(t) &= \frac{d_1}{c_1} \left(\frac{c_1(\lambda_{01} + \lambda_{02}) - (c_1\lambda_{02} - c_2\lambda_{01}) \exp((k(c_1 + c_2)(t - t_*))/c_1c_2)}{c_1 + c_2} \right), \\
 \bar{u}_2(t) &= \frac{d_2}{c_2} \left(\frac{c_2(\lambda_{01} + \lambda_{02}) + (c_1\lambda_{02} - c_2\lambda_{01}) \exp((k(c_1 + c_2)(t - t_*))/c_1c_2)}{c_1 + c_2} \right), \\
 t &\in [t_*, t^*].
 \end{aligned}
 \tag{59}$$

Вектор $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \lambda_{02})$ вычисляется по формуле

$$\lambda_0 = S_1^{-1} F_0(t^*) x_*,
 \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_0(t) &= \begin{pmatrix} \frac{c_2 \exp((k(c_1 + c_2)(t^* - t))/c_1c_2) - c_1}{c_2 - c_1} & \frac{c_2 \exp((k(c_1 + c_2)(t^* - t))/c_1c_2) - c_2}{c_1 - c_2} \\ \frac{c_1 \exp((k(c_1 + c_2)(t^* - t))/c_1c_2) - c_1}{c_2 - c_1} & \frac{c_1 \exp((k(c_1 + c_2)(t^* - t))/c_1c_2) - c_2}{c_1 - c_2} \end{pmatrix}, \\
 t &\in [t_*, t^*], \\
 S_1 &= \int_{t_*}^{t^*} F_0(t) \begin{pmatrix} d_1^2/c_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2/c_2^2 \end{pmatrix} F_0^T(t) dt, \quad x_* = \begin{pmatrix} x_{*1} \\ x_{*2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

После решения задачи (58) формируется вторая базовая задача

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{ds} &= -c_1 y + d_1 u_1, \quad y(0) = -\frac{d_1}{c_1} \bar{u}(t^*), \\
 y(-\infty) &= 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u_1^2 + u_2^2) ds \rightarrow \min.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Здесь $\bar{u}(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, – решение задачи (58). Динамическая система во второй базовой задаче вполне управляема. В силу принципа максимума решение задачи (61) будет следующим:

$$u_1^*(s) = -2\bar{u}_1(t^*) \exp(c_1 s), \quad u_2^*(s) = 0, \quad s \leq 0.$$

Третья базовая задача имеет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = -c_2 z + d_2 u_2, \quad z(0) = -\frac{d_2}{c_2} \bar{u}_2(t^*),$$

$$z(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u_1^2 + u_2^2) d\tau \rightarrow \min.$$

Динамическая система в ней также является вполне управляемой. Из принципа максимума следует, что оптимальное управление в третьей базовой задаче представимо в виде

$$u_{*1}(\tau) = 0, \quad u_{*2}(\tau) = -2\bar{u}_2(t^*) \exp(c_2 \tau), \quad \tau \leq 0.$$

Согласно (51) управление

$$(62) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1^0(t, \mu) &= \bar{u}_1(t) - 2\bar{u}_1(t^*) \exp(c_1(t - t^*)/\mu), \\ \bar{u}_2^0(t, \mu) &= \bar{u}_2(t) - 2\bar{u}_2(t^*) \exp(c_2(t - t^*)/\mu^2), \quad t \in [t_*, t^*], \end{aligned}$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (57).

При построении асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка будем рассматривать матрицу C в (60) как функцию t_* : $C = C(t_*)$. В рассмотренном примере

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_1/c_1 & 0 \\ 0 & d_2/c_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно (56) вектор-функция

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(x, t, \mu) &= \\ &= D_0(E_2(1 - 2 \exp((t - t^*)/\mu^2)) + 2 \exp((t - t^*)/\mu) F_0^T(t)) C^{-1}(t) F_0(t) x \end{aligned}$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в задаче (57).

Для оценки качества построенных асимптотических приближений к решению задачи (57) были найдены состояния $x_1(t^*, \mu)$, $x_2(t^*, \mu)$, $y(t^*, \mu)$, $z(t^*, \mu)$, в которые управление (62) переводит динамическую систему при конкретных значениях малого параметра в случае, когда $k = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $t_* = 0$, $t^* = 5$, $x_{*1} = 5$, $x_{*2} = -3,0$, $y_* = 2,0$, $z_* = 1$. В частности, оказалось, что

$$\begin{aligned} x_1(5, 0,1) &= 0,068161 & x_2(5, 0,1) &= 0,033727 \\ y(5, 0,1) &= -0,023323 & z(5, 0,1) &= -0,011998 \\ x_1(5, 0,025) &= 0,016755 & x_2(5, 0,025) &= 0,014029 \\ y(5, 0,025) &= -0,004879 & z(5, 0,025) &= -0,000235. \end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены с точностью до 10^{-6} .

10. Заключение

В статье предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи, которые не требуют интегрирования сингулярно возмущенных систем. При реализации предложенных алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на три невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. В статье также показывается, как можно использовать построенные асимптотические приближения для решения рассмотренной задачи при заданных значениях малого параметра.

Поскольку при доказательстве теоремы установлено, что при выполнении предположений 2–4 в исходной задаче с любым начальным состоянием динамической системы существует допустимое управление, эти предположения гарантируют полную управляемость системы (1) для достаточно малых значений μ . Этот результат впервые получен в [14].

Применяемая методика позволяет исследовать задачи, в которых имеется несколько групп быстрых переменных с иерархией скоростей по целым степеням малого параметра. При этом число задач, на которые распадается исходная задача, равно количеству групп разнотемповых переменных. Такое обобщение вносит в алгоритм непринципиальные изменения, которые легко прослеживаются на примере рассмотренной задачи. В то же время это приводит к громоздким формулам. Следует также отметить, что развитие полученных результатов на нестационарные системы с достаточно гладкими коэффициентами не вызывает принципиальных трудностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // *АиТ.* 2006. № 1. С. 3–51.
2. *Калинин А.И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // *Изв. РАН. Техн. кибернетика.* 1994. № 3. С. 104–114.
3. *Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.* Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002 – 2012 // *Int. J. Information and Systems Sciences.* 2014. V. 9. No.1. P. 1–36.
4. *Kokotovic P.V., Khalil H.K.* Singular perturbations in systems and control. New York: IEEE Press, 1986.
5. *Курина Г.А., Калашникова М.А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // *АиТ.* 2022. № 11. С. 3–61.
6. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Асимптотика решения задачи оптимизации переходного процесса в трехтемповой сингулярно возмущенной системе // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси: материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 . В трех частях. Часть 1. Минск : Беларуская навука, 2024. С. 116–117.

7. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Применение метода малого параметра к сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче оптимального управления // *АиТ.* 2016. № 5. С. 3–18.
8. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
9. *Мордухович Б.Ш.* Существование оптимальных управлений / *Совр. пробл. матем. (Итоги науки и техники)* М.: ВИНТИ, 1976. Т. 6. С. 207–271.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
11. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1973.
12. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 1963. Т. 3. № 4. С. 611–642.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Минск: Университетское, 1984.
14. *Курина Г.А.* О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем // *Матем. заметки.* 1992. 52:4. С. 56–61.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 15.09.2025

После доработки 20.04.2026

Принята к публикации 28.04.2026