

Нелинейные системы

© 2026 г. К.А. ЛАСТОЧКИН, канд. физ.-мат. наук (lastconst@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ЗАДАНЫМ КАЧЕСТВОМ ПРИ ЗАДАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ. СИСТЕМЫ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ОДИН

Работа посвящена задаче управления с заданными инженерными показателями качества переходных процессов при заданных ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления динамическими системами с равной одному относительной степенью при наличии параметрической неопределенности и внешних возмущений. На основе идей использования в обратной связи дифференцируемой аппроксимации sat-функции и динамической оценки обобщенного возмущения предложен новый нелинейный робастный закон управления, который при специальном выборе параметров гарантирует решение рассматриваемой задачи. При этом процедура выбора параметров сведена к решению линейных неравенств, для которых аналитически доказано существование решений. Теоретические результаты сопровождаются иллюстративным примером.

Ключевые слова: робастное управление, переходные процессы, инженерные показатели качества, ограничения на управление, функция насыщения.

DOI: 10.7868/S2413977726100031

1. Введение

Задача управления с заданными инженерными показателями качества переходных процессов при ограничениях на сигнал управления для систем с неизвестными параметрами и внешними возмущениями является нерешенной в современной теории автоматического управления. Среди существующих попыток решения следует отметить подходы, основанные на использовании в законе управления *i)* барьерных функций [1–8], препятствующих попаданию регулируемой переменной в запретную область, и *ii)* дифференцируемых аппроксимаций sat-функции [9–13], позволяющих обеспечить заданное разработчиком значение динамической ошибки слежения за заданием с помощью ограниченного по амплитуде управления.

В упомянутых работах в рамках формальной постановки задачи учитываются ограничения только на амплитуду управления и не учитываются ограничения на его первую производную (скорость изменения). Однако исполнительные механизмы реальных объектов управления обычно имеют ограничения на скорость воспроизведения управления. Например, в летательных

аппаратах максимальная мгновенная скорость отклонения управляющих органов (элероны, рули высоты, рули направления и т.д.) всегда ограничена. Если подобные ограничения не учитывать при проектировании закона управления, то только часть из алгоритмически сформированного управления в действительности подействует на объект управления. Это может привести к нарушению заданных показателей качества переходных процессов или даже потере устойчивости замкнутой системы. Поэтому в этой работе при решении задачи управления с заданными инженерными показателями качества предлагается на этапе синтеза учитывать ограничения и на амплитуду, и на скорость изменения управления.

Цель данной статьи – обеспечение заданных инженерных показателей качества переходных процессов при заданных ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления для динамических систем с относительной степенью один при наличии параметрической неопределенности и внешних возмущений. Класс систем с относительной степенью один рассматривается для простоты изложения, а полученные результаты в будущем могут быть использованы при решении задач управления более сложными системами.

Для достижения этой цели предлагается новый закон управления, в котором пропорциональная обратная связь так же, как и в [9–13], строится с использованием специальной дифференцируемой аппроксимации sat-функции, но дополнительно подвергается фильтрации через нелинейный фильтр типа [14]. Этот прием позволяет априорно ограничить заданными значениями как амплитуду, так и скорость изменения управления, не требуя при этом ограниченности амплитуды и производной выхода системы. Кроме того, в отличие от [9–13] вместе с классической пропорциональной обратной связью в управлении предлагается использовать динамическую оценку обобщенного возмущения, выстраиваемую с помощью метода вспомогательного контура А.М. Цыкунова [15, с. 201], дополненного нелинейным фильтром [14] для ограничения на заданном уровне скорости изменения оценки обобщенного возмущения. В работе показано, что такая комбинированная нелинейная робастная обратная связь позволяет априорно ограничить амплитуду и скорость изменения управления заданными значениями и свести задачу управления с заданными показателями качества и ограничениями на амплитуду/скорость управления к задаче расчета параметров управления путем решения линейных неравенств.

Отличия предлагаемого закона управления от [1–13] состоят в следующем:

- 1) одновременно с обеспечением заданных инженерных показателей качества удастся ограничить заданными значениями амплитуду и скорость изменения управления,
- 2) процедура выбора параметров закона управления сведена к задаче решения линейных неравенств и может осуществляться численно,
- 3) совместность полученных линейных неравенств для выбора параметров закона управления показана аналитически, а не численно,

- 4) в отличие от [1–8] в обратной связи не используются барьерные функции, что исключает разрывы в обратной связи, вызванные делением на ноль и/или взятием натурального логарифма от нуля (см. рис. 4 и комментарии к нему из раздела 6),
- 5) в отличие от [9–13] предложенный закон управления *i*) содержит не только компоненту, пропорциональную ошибке слежения, но и формируемую по методу вспомогательного контура [15, с. 201] динамическую оценку обобщенного возмущения, *ii*) дополнен нелинейными фильтрами, предназначенными для ограничения скорости изменения управления.

Структура работы следующая. В разделе 2 даются основные обозначения и определения. В разделе 3 дается постановка задачи и приводятся сопроводительные комментарии. В разделе 4 излагается основной результат работы и выводится закон управления, гарантирующий заданные показатели качества при ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления. В разделе 5 проводится аналитическое сравнение разработанного закона управления с предложенным в [10]. В разделе 6 приведены результаты математического моделирования. В разделе 7 формулируются выводы и обозначаются направления дальнейших исследований.

2. Предварительные сведения

В работе приняты следующие обозначения: $t \geq t_0 \geq 0$ – переменная времени, $f : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ – функция времени, $f(t)$ – значение функции f в момент времени t , запись $F := \left\{ f(t) \in \mathbb{R}^n : |f(t)| \leq f^U, |\dot{f}(t)| \leq v^U \right\}$ обозначает пространство функций времени, у которых в момент времени t амплитуда и первая производная ограничены числами $f^U > 0, v^U > 0$, $\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – любая дифференцируемая аппроксимация функции насыщения, удовлетворяющая условиям¹:

- a) $|\sigma'(s)| = \left| \frac{\partial \sigma(s)}{\partial s} \right| \leq \kappa \in (1, 2)$ для всех $s \in \mathbb{R}$,
- б) $s\sigma(s) > 0$ для всех $s \neq 0$, $\sigma(0) = 0$,
- в) $\sigma(s) = \text{sign}\{s\}$ для всех $|s| \geq 1$,
- г) $|s| < |\sigma(s)| < 1$ для $|s| < 1$,
- д) существует $\delta \in (0, 1)$ такая, что $|s - \sigma(s)| \leq \delta$ для всех $|s| \leq 1$,
- е) существует $L > \kappa$ такая, что $|\sigma(a) - \sigma(b)| \leq L|a - b|$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$.

Например, при $\kappa \simeq 1,26$, $\delta \simeq 0,088$, $L \simeq 1,3$ условиям a)–e) удовлетворяет

$$\sigma(s) = \text{sign}\{s\} \left(1 - (1 - \min\{|s|, 1\})^{1,26} \right).$$

¹ Здесь и далее $\text{sat}\{s\} = \text{sign}\{s\} \min\{|s|, 1\}$, $\text{sign}\{s\} \in \begin{cases} 1, & s > 0 \\ [-1, 1], & s = 0 \\ -1, & s < 0. \end{cases}$

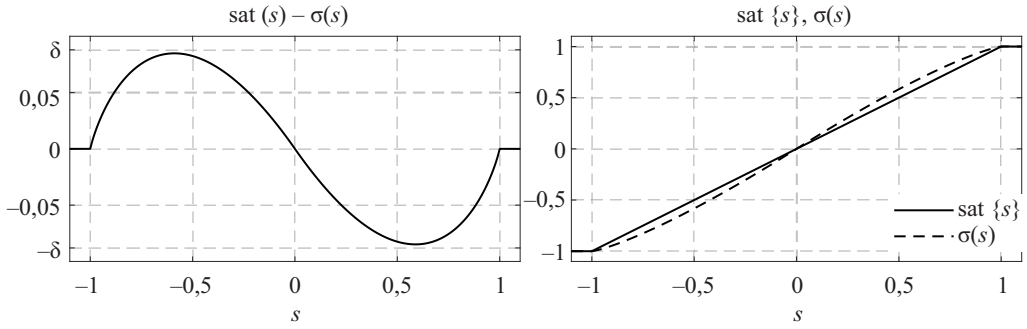


Рис. 1. Ошибка аппроксимации sat-функции.

На рис. 1 приведено сравнение sat-функции с данной функцией.

3. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему

$$(3.1) \quad \dot{y}(t) = bu(t) + f(t, y, u), \quad y(t_0) = y_0,$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый выход, $u(t) \in \mathbb{R}$ – управление, $f(t, y, u) \in \mathbb{R}$ – неизмеряемое обобщенное возмущение («сумма» параметрических и внешних возмущений), $b > 0$ – известная оценка на коэффициент усиления системы, которая для простоты и без потери общности принимается положительной.

Для системы (3.1) требуется сформировать управление $u(t)$ так, чтобы для всех $t \geq t_0$ были выполнены условия:

$$(3.2) \quad y(t) \in \mathcal{Y} := \{y(t) \in \mathbb{R}: \underline{g}(t) \leq y(t) \leq \bar{g}(t)\},$$

$$(3.3) \quad u(t) \in \mathcal{U} := \{u(t) \in \mathbb{R}: |u(t)| \leq u^U, |\dot{u}(t)| \leq v^U\},$$

где $u^U > 0$, $v^U > 0$ – известные числа, а $\underline{g}(t)$, $\bar{g}(t)$ измеряемы для всех $t \geq t_0$.

Таким образом, рассматривается задача обеспечения заданных показателей качества переходных процессов по выходу с помощью управлений из класса сигналов с ограниченной в каждый момент времени амплитудой и скоростью. Данную задачу будем решать, требуя выполнение следующих допущений.

Допущение 1. Центр множества $\mathcal{Y}$ для всех $t \geq t_0$ удовлетворяет условию:

$$g(t) \in \mathcal{G} := \{g(t) \in \mathbb{R}: |\dot{g}(t)| \leq g_1^\Delta, |\ddot{g}(t)| \leq g_2^\Delta\},$$

где $g(t) = \frac{\bar{g}(t) + \underline{g}(t)}{2}$ – измеряемый сигнал (центр множества $\mathcal{Y}$), $g_1^\Delta > 0$, $g_2^\Delta > 0$ – известные числа.

Допущение 2. Существуют и известны числа $\gamma_u \in (0, 1)$, $\gamma_v \in (0, 1)$ такие, что для всех $g(t) \in \mathcal{G}$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $y(t) \in Y$, $\mathcal{Y} \subset Y$ и всех $t \geq t_0$ верно

$$F(t) \in \mathcal{F} := \left\{ F(t) \in \mathbb{R}: |F(t)| \leq \gamma_u, \left| \dot{F}(t) \right| \leq \gamma_v \rho \right\},$$

где $F(t) := \frac{f(t, y, u) - \dot{g}(t)}{bu^U}$, $\rho = \frac{v^U}{u^U}$.

Допущение 3. $y(t_0) \in \mathcal{Y}$, где $y(t)$ – решение (3.1).

Обсуждая поставленную задачу, в первую очередь заметим, что знание коэффициента b не является ограничительным требованием. Действительно, с помощью декомпозиции

$$\beta(t, y, u)u(t) = bu(t) + \Delta_b(t, y, u)u(t)$$

при выполнении условий

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & |\Delta_b(t, y, u)| < b, \\ & \frac{1}{b} \left| \frac{d\Delta_b(t, y, u)}{dt} u(t) + \Delta_b(t, y, u) \dot{u}(t) \right| < v^U \end{aligned}$$

для всех $t \geq t_0$ и $u(t) \in \mathcal{U}$, $g(t) \in \mathcal{G}$ во внешнее возмущение $f(t, y, u)$ может быть включена компонента $\Delta_b(t, y, u)u(t)$, вызванная неопределенностью истинного коэффициента усиления $\beta(t, y, u)$. Невыполнение неравенств (3.4) может означать смену знака коэффициента усиления системы (потерю управляемости) и точно означает невыполнение допущения 2. В целом допущение 2 означает, что обобщенное возмущение («сумма» внешних и параметрических возмущений), приведенное к ресурсу управления, в множестве $\mathcal{Y}$ принадлежит такому же классу сигналов, что и имеющиеся в распоряжении управление.

Допущения 1 и 2 связаны между собой, а поэтому числа $g_1^\Delta > 0$ и $g_2^\Delta > 0$ из первого допущения не могут быть произвольными и должны удовлетворять ограничениям

$$(3.5) \quad \frac{g_1^\Delta}{bu^U} < \gamma_u, \quad \frac{g_2^\Delta}{bv^U} < \gamma_v,$$

т.е. ресурс управляющего воздействия по амплитуде (bu^U) и скорости (bv^U) должен превышать скорость и ускорение центра целевого множества. Неравенства (3.5) и допущение 3 для заданных $y(t_0)$, b , u^U , v^U всегда могут быть выполнены путем специального выбора множества $\mathcal{Y}$.

3.1. Комментарии

На первый взгляд, поставленная задача управления системой первого порядка (3.1) является несодержательной – на практике очень редко встречаются системы, описываемые дифференциальными уравнениями первого порядка. Однако следует учитывать, что с помощью специальных преобразований

и замен переменных содержательные задачи управления различными сложными системами высокого порядка могут быть сведены до рассматриваемой задачи управления системой первого порядка. Далее рассмотрим некоторые примеры таких параметризаций.

Пример 1. Рассмотрим линейную систему

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + d(t)), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы, $y(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый выход, $u(t) \in \mathbb{R}$ – управление, $d(t) \in \mathbb{R}$ – неизмеряемое возмущение, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица состояний, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – вектор коэффициентов усиления, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ – вектор, формирующий выход, пары (A, B) и (A, C) соответственно полностью наблюдаемы и управляемы. Матрицы A, B, C неизвестны, но известна относительная степень системы, которая может быть произвольной, но постоянной, т.е. $1 \leq r \leq n$, где число r определяется из соотношений $CB = 0, CAB = 0, \dots, CA^{r-1}B \neq 0$.

Согласно анализу [16, с. 21]; [17] в принятых условиях существует неизвестная, но невырожденная замена переменных

$$\begin{bmatrix} \eta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} T_0 \\ C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} x(t),$$

приводящая (3.6) к следующему виду:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_{00}\eta(t) + A_{01}\xi(t), \\ \dot{\xi}_1(t) &= \xi_2(t), \\ \dot{\xi}_j(t) &= \xi_{j+1}(t), \quad j = 2, \dots, r-1, \\ \dot{\xi}_r(t) &= \beta[u(t) + d(t) + w(t, \xi)], \\ y(t) &= \xi_1(t), \end{aligned}$$

где $\begin{bmatrix} M_0 & M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} = I$, $T_0B = 0$ и

$$\begin{aligned} A_{00} &= T_0AM_0, \quad A_{01} = T_0AM_1, \\ A_{10} &= CA^rM_0, \quad A_{11} = CA^rM_1, \quad \beta = CA^{r-1}B, \\ w(t, \xi) &= \beta^{-1}(A_{10}\eta(t) + A_{11}\xi(t)). \end{aligned}$$

Если нули передаточной функции от $u(t) + d(t)$ к $y(t)$ лежат в левой полуплоскости, то матрица A_{00} гурвицева [16, 17] и, следовательно, на всех

траекториях $\xi(t)$ сигнал $\beta^{-1}A_{10}\eta(t)$ допустимо трактовать как ограниченное внешнее возмущение.

Если дополнительно $r = 1$, то $\xi(t) := y(t)$ и из (3.7) мгновенно получаем:

$$\dot{y}(t) = bu(t) + f(t, y, u),$$

где

$$f(t, y, u) := \beta d(t) + A_{10}\eta(t) + A_{11}y(t) + (\beta - b)u(t),$$

а сигнал $\beta d(t) + A_{10}\eta(t)$ отождествлен с компонентой $f(t, \cdot, \cdot)$.

Поэтому при $r = 1$ задача расположения выхода системы (3.6) в заданном множестве (3.2) при выполнении ограничений (3.3) эквивалентна поставленной одномерной задаче.

Если $n \geq r > 1$, то будем считать, что с помощью хорошо изученных в теории автоматического управления дифференциаторов (наблюдателей производных) [14, 18, 19] для всех $t \geq t_0$ для измерения доступны оценки $\hat{\xi}(t)$ состояний $\xi(t)$. При этом предположим, что для ошибки оценивания $\tilde{\xi}(t) = \hat{\xi}(t) - \xi(t)$ и ее производной выполнены соотношения:

$$\left| \tilde{\xi}_i(t) \right| \leq \delta_1, \quad \left| \dot{\tilde{\xi}}_i(t) \right| \leq \delta_2, \quad i = 1, \dots, r,$$

где $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$.

Эти требования не являются ограничительными, поскольку существующие наблюдатели производных обеспечивают их выполнение [14].

Применим к $\hat{\xi}_1(t)$ линейный оператор:

$$\lambda^{r-1}s(t) = (p + \lambda)^{r-1} \left[\hat{\xi}_1(t) \right] = (p + \lambda)^{r-1} \left[y(t) \right] + (p + \lambda)^{r-1} \left[\tilde{\xi}_1(t) \right],$$

где $p := \frac{d}{dt}[\cdot]$, а величина $s(t)$ измеряема, поскольку может быть рассчитана по оценкам r производных выхода системы.

Дифференцируя переменную $s(t)$ по времени, можем получить:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \lambda^{1-r} \left[\dot{\xi}_r(t) + \epsilon(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) + (p + \lambda)^{r-1} \left[\dot{\tilde{\xi}}_1(t) \right] \right] = \\ (3.8) \quad &= \lambda^{1-r} \left[\beta[u(t) + d(t) + w(t, \xi)] + \epsilon(t) + (p + \lambda)^{r-1} \left[\dot{\tilde{\xi}}_1(t) \right] \right] = \\ &= bu(t) + f(t, s, u), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(t, s, u) &:= (\lambda^{1-r}\beta - b)u(t) + \\ &+ \lambda^{1-r} \left(\beta d(t) + A_{10}\eta(t) + A_{11}\xi(t) + \epsilon(t) + (p + \lambda)^{r-1}p \left[\tilde{\xi}_1(t) \right] \right) \end{aligned}$$

и в слагаемом $\epsilon(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) := \epsilon(t)$ сосредоточены все остальные производные.

Поскольку

$$y(t) = \frac{\lambda^{r-1}}{(p + \lambda)^{r-1}} [s(t)] - \tilde{\xi}_1(t),$$

то при достаточно большом значении параметра $\lambda > 0$ и достаточно малой оценке сверху δ_1 в силу монотонной зависимости $y(t)$ от $s(t)$ получаем, что задача расположения выхода системы (3.6) в заданном множестве (3.2) при выполнении ограничений (3.3) для ситуации $n \geq r > 1$ сводится к поставленной одномерной задаче.

По полной аналогии к задаче управления системой первого порядка может быть сведена задача управления классом нелинейных минимально-фазовых систем с произвольной относительной степенью [16, с. 167].

Пример 2. Рассмотрим каскадную систему

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= b_1 x_2(t) + f_1(t, x, u), \\ \dot{x}_j(t) &= b_j x_{j+1}(t) + f_j(t, x, u), \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n(t) &= b_n u(t) + f_n(t, x, u), \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – измеряемые состояния, $f_i(t, x, u)$ – неизвестные возмущения, $b_i > 0$ – известные оценки на коэффициенты усиления.

Требуется расположить выход системы (3.9) в заданном множестве (3.2) при выполнении ограничений (3.3) и дополнительно обеспечить для всех $t \geq t_0$ ограниченность всех координат состояний:

$$y(t) \in \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_1, \quad x_i(t) \in \mathcal{X}_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

где $\mathcal{X}_i := \{x_i(t) \in \mathbb{R} : |x_i(t)| \leq x_i^U\}$.

Замена переменных

$$\begin{aligned} s_1(t) &= x_1(t) - g(t), \\ s_i(t) &= x_i(t) - u_{i-1}(t), \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

позволяет переписать (3.9) в следующем виде:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \dot{s}_1(t) &= b_1 \left(u_1(t) + s_2(t) \right) + f_1(t, x, u_n) - \dot{g}(t), \\ \dot{s}_j(t) &= b_j \left(u_j(t) + s_{j+1}(t) \right) - \dot{u}_{j-1}(t) + f_j(t, x, u_n), \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \dot{s}_n(t) &= b_n u_n(t) - \dot{u}_{n-1}(t) + f_n(t, x, u_n), \end{aligned}$$

где $u_i(t)$ – фиктивные управления, и для общности принято $u_n(t) := u(t)$.

Таким образом, задача расположения выхода системы (3.9) в заданном множестве (3.2) сводится к решению n одномерных и однотипных задач расположения состояний $s_i(t)$ в заданных множествах:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &:= \{s_1(t) \in \mathbb{R} : |s_1(t)| \leq \varepsilon\}, \\ \mathcal{S}_i &:= \{s_i(t) \in \mathbb{R} : |s_i(t)| \leq x_i^U - u_{i-1}^U\}, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

для всех $t \geq t_0$ при выполнении ограничений на амплитуду и скорость изменения истинного управления (3.3) и амплитуду фиктивных управлений

$$U_i := \{u_i(t) \in \mathbb{R} : |u_i(t)| \leq u_i^U\}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где $u_i^U < x_{i+1}^U$ – это известное число.

При этом, если ограничение на амплитуду фиктивных управлений дополнить ограничениями на скорость (где $v_i^U > 0$, $i = 1, \dots, n-1$ – это известное число)

$$\mathcal{U}_i := \{u_i(t) \in \mathbb{R} : |u_i(t)| \leq u_i^U, \quad |\dot{u}_i(t)| \leq v_i^U\},$$

то для всех $k = 2, \dots, n$ в каждом k -м уравнении системы (3.10) слагаемое $\dot{u}_{k-1}(t)$ трактуется как ограниченное на заданном уровне v_{k-1}^U внешнее возмущение. Следовательно, решая задачи стабилизации итеративно и снизу вверх (в направлении от $s_n(t)$ к $s_1(t)$) с помощью управлений $u_i(t) \in \mathcal{U}_i$ для всех $i = 1, \dots, n-1$, в каждом i -м уравнении можно рассматривать величину $s_{i+1}(t)$ уже ограниченной $\mathcal{S}_{i+1}$, а значит, на каждом шаге процедуры приходим в точности к поставленной в данной работе одномерной задаче расположения выхода системы (3.1) в заданном множестве (3.2) при выполнении ограничений на амплитуду и скорость управления.

Оба рассмотренных примера демонстрируют, что достаточно общие и содержательные задачи управления, часто встречающиеся на практике, сводятся к решению рассматриваемой в работе одномерной задачи. В завершение подраздела необходимо заметить, что задачи из примеров 1 и 2 в этой работе не решаются, а только приводятся для иллюстрации возможности использования при их решении основного результата этой работы. Другими словами, результаты этой работы являются установочными на пути к решению задач, например, рассмотренных в примерах 1 и 2. Стоит заметить, что фактически решение задачи (3.2), (3.3) для системы (3.1) означает решение той же задачи для класса нелинейных систем с неизвестными параметрами, относительной степенью, равной единице, и устойчивой внутренней динамикой (такие системы, согласно [16, с. 167] и примеру 1, приводятся к виду (3.1), и для них при определенных условиях будет выполнено допущение 2). Определение условий на правую часть уравнений системы, при которых выполняется допущение 2, также выносится за рамки настоящей работы.

4. Основной результат

В разделе 4.1 выводится структура закона управления, а задача выбора его параметров и обеспечение цели (3.2) при ограничениях (3.3) сводится к нахождению решения системы линейных неравенств. В разделе 4.2 обсуждается инженерная интерпретация полученного закона управления, а также приводится MatLab код, решающий неравенства, полученные в разделе 4.1.

*4.1. Робастное управление с заданным качеством
при заданных ограничениях*

Задача расположения выхода $y(t)$ в заданном множестве $\mathcal{Y}$ слабее задачи слежения за его центром $g(t)$ с динамической ошибкой, не превосходящей по модулю минимальной ширины множества, т.е.

(4.1) ЕСЛИ $|y(t_0) - g(t_0)| \leq \varepsilon \Rightarrow \forall t \geq t_0, |y(t) - g(t)| \leq \varepsilon$, ТО $y(t) \in \mathcal{Y}, \forall t \geq t_0$,

где $\varepsilon = \min \left\{ \inf_t |\overline{g}(t) - g(t)|, \inf_t |\underline{g}(t) - g(t)| \right\}$ – минимальная ширина $\mathcal{Y}$.

Другими словами, выполнение условия $|y(t) - g(t)| \leq \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$ будет мгновенно означать выполнение заданных показателей качества (3.2), но не наоборот. Поэтому предлагается рассматривать задачу управления с заданными показателями качества как задачу слежения за центром множества $\mathcal{Y}$ с заданным значением динамической ошибки.

Для решения такой задачи при ограничениях (3.3) декомпозируем управление следующим образом:

$$(4.2) \quad u(t) = (1 - \gamma_u) u^U u_s(t) + \gamma_u u^U u_c(t),$$

где $u_s(t)$, $u_c(t)$ – соответственно стабилизирующая и компенсирующая компоненты управления.

Тогда в силу соотношений

$$\begin{aligned} |u(t)| &= |(1 - \gamma_u) u^U u_s(t) + \gamma_u u^U u_c(t)| \leq u^U, \\ |\dot{u}(t)| &= |(1 - \gamma_u) u^U \dot{u}_s(t) + \gamma_u u^U \dot{u}_c(t)| \leq \dot{u}^U \end{aligned}$$

ограничения (3.3) слабее ограничений

$$(4.3a) \quad (1 - \gamma_u) |u_s(t)| + \gamma_u |u_c(t)| \leq 1,$$

$$(4.3б) \quad (1 - \gamma_u) |\dot{u}_s(t)| + \gamma_u |\dot{u}_c(t)| \leq \rho.$$

Благодаря выполненной декомпозиции (4.2), задача обеспечения ограничений на управление (3.3) свелась к выполнению неравенств (4.3a) и (4.3б) для всех $t \geq t_0$.

Для решения задачи слежения (4.1) при ограничениях (4.3a) и (4.3б) компоненты управления зададим следующим образом:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \dot{u}_s(t) &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(u_s(t) + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right) \right), \quad |u_s(t_0)| \leq 1, \\ \dot{u}_c(t) &= -\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u} \sigma \left(\frac{1}{\lambda_2} \left(u_c(t) + \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) \right) \right), \quad |u_c(t_0)| \leq 1, \end{aligned}$$

где $1 < \mu < \frac{1}{\kappa\gamma_v}$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $K > 0$ и $z(t) = \frac{y(t) - g(t)}{bu^U}$, а величина $\Phi(t)$ будет определена в ходе дальнейших построений.

Если $\Phi(t) := F(t)$, то $-\gamma_u u_c(t)$ – это компонента возмущения с ограниченными на требуемом уровне амплитудой и скоростью изменения. Посколь-

ку обобщенное возмущение $F(t)$ неизмеряемо, то предлагается сформировать $\Phi(t)$ с помощью вспомогательного контура А.М. Цыкунова [15, с. 201]:

$$(4.5) \quad \Phi(t) := \chi(t) - u_f(t),$$

где $l > 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(t) &= l \left(z(t) - z_f(t) \right), \\ \dot{z}_f(t) &= \chi(t), \quad z_f(t_0) = z(t_0), \\ \dot{u}_f(t) &= l \left(\frac{1}{u} u(t) - u_f(t) \right), \quad u_f(t_0) = u_{0f}, \end{aligned}$$

а тогда $-\gamma_u u_c(t)$ – это оценка возмущения с ограниченной на требуемом уровне амплитудой и скоростью изменения.

Заметим, что в силу (4.4) скорости изменения компонент $u_s(t)$, $u_c(t)$ для всех $t \geq t_0$ по модулю ограничены заданными положительными числами $\frac{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}{1-\gamma_u}$ и $\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u}$, а значит, неравенство (4.3б) является тождеством:

$$(4.6a) \quad (1 - \mu\kappa\gamma_v) \rho + \gamma_u \frac{1}{\gamma_u} \kappa \mu \gamma_v \rho \leq \rho.$$

С другой стороны, если для всех $t \geq t_0$ выполнены условия $|u_s(t)| \leq 1$, $|u_c(t)| \leq 1$, то неравенство (4.3а) тоже является тождеством:

$$(4.6б) \quad 1 - \gamma_u + \gamma_u \leq 1.$$

Таким образом, выполнение ограничений (3.3) на амплитуду и скорость изменения управления сводится к выполнению условий $|u_s(t)| \leq 1$, $|u_c(t)| \leq 1$ для всех $t \geq t_0$. В следующей теореме получены условия, при которых справедливы такие оценки, а ограничения (3.3) выполнены.

Теорема 1. Пусть

$$\gamma_u \in (0, 1), \quad \gamma_v \in (0, 1), \quad \kappa \in (1, 2), \quad \rho > 0, \quad 1 < \mu < \frac{1}{\kappa\gamma_v},$$

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad K > 0, \quad l > 0,$$

тогда закон управления (4.4), (4.5) с начальными условиями

$$(4.7) \quad |u_s(t_0)| \leq 1, \quad |u_c(t_0)| \leq 1$$

для всех $t \geq t_0$ обеспечивает $u(t) \in \mathcal{U}$.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Поскольку переменные $u_s(t)$, $u_c(t)$ являются внутренними состояниями обратной связи, то всегда возможно установить $u_s(t_0)$, $u_c(t_0)$ так, что ограничение $u(t) \in \mathcal{U}$ выполнено для всех $t \geq t_0$. Несмотря на использование в законе управления параметров γ_u , γ_v , существование оценок на возмущение из допущения 2 для доказательства теоремы 1 не требуется, а поэтому ограниченность амплитуды и скорости изменения управления обеспечивается независимо от выполнения допущения 2 и, более того, приводит к выполнению

всех его предпосылок. Этот результат позволяет получить условия, при выполнении которых сделанный выбор управления доставляет решение задачи управления с заданным качеством (3.2) при заданных ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления (3.3).

Теорема 2. Пусть выполнены допущения 1–3, при заданных параметрах

$$(4.8a) \quad \begin{aligned} \gamma_u \in (0, 1), \quad \gamma_v \in (0, 1), \quad bu^U > 0, \quad \delta \in (0, 1), \\ \kappa \in (1, 2), \quad L > \kappa, \quad \rho > 0, \quad \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

и некотором коэффициенте

$$(4.8б) \quad 1 < \mu^* < \frac{1}{\kappa\gamma_v}$$

относительно $\Psi \in \mathbb{R}^5$ разрешимы линейные неравенства:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} e_i^\top \Gamma \Psi &< e_i^\top \Theta, \quad i = 1, \dots, 4, \\ e_j^\top \Psi &> 0, \quad j = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

где $e_i \in \mathbb{R}^4$, $e_j \in \mathbb{R}^5$ – координатные векторы соответствующих пространств,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 - \mu^* & 1 \\ 0 & 1 - \gamma_u & \gamma_u & L\gamma_v\rho & L\gamma_v\rho \\ -\frac{(1 - \mu^*\kappa\gamma_v)\rho}{(1 - \gamma_u)\kappa} & 1 - \gamma_u & \gamma_u & L\gamma_v\rho & L\gamma_v\rho \\ (1 - \gamma_u)bu^U & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - (1 + \delta)\gamma_u \\ -1 + (1 - \delta)\gamma_u \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Тогда закон управления (4.4), (4.5) с коэффициентами

$$(4.10) \quad K = \hat{\Psi}_1^{-1}, \quad \lambda_1 = \hat{\Psi}_2, \quad \lambda_2 = \hat{\Psi}_3, \quad l = \hat{\Psi}_4^{-1}, \quad \tau = \hat{\Psi}_5, \quad \mu = \mu^*,$$

начальными условиями (4.7) и

$$(4.11a) \quad |z(t_0)| \leq \frac{1 - \gamma_u}{K}, \quad \left| u_s(t_0) + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z(t_0) \right) \right| \leq \lambda_1,$$

$$(4.11б) \quad |-u_f(t_0) - F(t_0)| \leq \tau\gamma_v\rho, \quad \left| u_c(t_0) - \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} u_f(t_0) \right) \right| \leq \lambda_2$$

для всех $t \geq t_0$ обеспечивает $u(t) \in \mathcal{U}$ и $y(t) \in \mathcal{Y}$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

В теореме 2 показано, что расчет параметров закона управления по формулам (4.10) при выполнении условий (4.8а), (4.8б) и (4.9) гарантирует выполнение поставленной цели (3.2) при заданных ограничениях (3.3) на амплитуду и скорость изменения управления. Однако в теореме 2 ничего не сказано про разрешимость линейных неравенств (4.9) для всех значений параметров (4.8а) и коэффициента (4.8б). В следующей лемме определим условия, при выполнении которых неравенства (4.9) совместны.

Лемма 1. Пусть

$$\gamma_u \in \left(0, \frac{1}{1 + (1 + \alpha)\delta}\right), \quad \alpha \in (0, 1), \quad \gamma_v \in (0, 1), \\ bu^U > 0, \quad \delta \in (0, 1), \quad \kappa \in (1, 2), \quad L > \kappa, \quad \rho > 0$$

и

$$1 < \mu^* < \frac{1}{\kappa\gamma_v}.$$

Тогда при любом $\varepsilon > \underline{\varepsilon} > 0$ относительно $\Psi \in \mathbb{R}^5$ разрешимы неравенства (4.10).

Доказательство леммы 1 и формула для $\underline{\varepsilon}$ приведены в Приложении.

Таким образом, в соответствии с леммой 1 существуют числа ε , для которых неравенства (4.9) совместны. Однако согласно лемме 1 для существования решений у неравенств (4.9) требуется $\gamma_u \in \left(0, \frac{1}{1 + (1 + \alpha)\delta}\right)$, $\alpha \in (0, 1)$. Этот уменьшенный диапазон допустимых значений коэффициента γ_u не совпадает с диапазоном, заданным в допущении 2. Но это обстоятельство не является серьезным препятствием для достижения цели (3.2) при ограничениях (3.3), поскольку параметр δ является параметром функции $\sigma(\cdot)$ из условия d). Для следующей дифференцируемой функции, отвечающей условиям $a)-e$),

$$(4.12) \quad \sigma(s) = \text{sign}\{s\} \left(1 - (1 - \min\{|s|, 1\})^{1,0178}\right)$$

верно $\delta = 6,5 \cdot 10^{-3}$, следовательно, $\frac{1}{1 + (1 + \alpha)\delta} \leq 0,9872$, и интервал из допущения 2 с достаточной точностью совпадает с интервалом, в котором неравенства (4.9) совместны.

Условия из леммы 1 являются только достаточными, и их невыполнение не значит отсутствие решений у неравенств (4.9), т.е. из невыполнения условий леммы 1 не следует неспособность предлагаемого закона управления обеспечить выполнение цели (3.2) при заданных ограничениях (3.3) и требуемой $\varepsilon < \underline{\varepsilon}$. Однако результат леммы 2 важен с теоретической точки зрения, поскольку позволяет сделать вывод о принципиальной возможности разрешения (4.9) для множества заданной ширины.

Непосредственно решение неравенств (4.9) может осуществляться различными алгоритмами с использованием различных пакетов прикладных программ. Например, можно использовать алгоритмы, предназначенные для решения задач линейного (функция `linprog` в среде `MatLab`) или полуопределенного программирования (`cvx`, `SEDUMI`, `YALMIP` в среде `MatLab`).

Согласно теореме 2 любые решения неравенств позволяют получить закон управления, обеспечивающий заданные инженерные показатели качества управления по выходу (3.2) при заданных ограничениях на управление (3.3). Поэтому вопрос поиска наиболее подходящего решателя или оптимального решения рассматриваемых неравенств выходит за рамки сделанной в этой работе теоретической постановки задачи и требует ее уточнения или расширения каким-либо критерием оптимальности. С практической точки зрения ре-

шения, получаемые при использовании разных численных алгоритмов, идентичны с точки зрения показателей качества (3.2) и ограничений (3.3), но могут отличаться, например, по критерию колебательности выхода внутри целевого множества или ограниченности ускорения управления. По мнению автора, наиболее удачные по упомянутым критериям решения неравенств (4.9) удастся получить путем использования метода внутренней точки (функция `feasp` в MatLab).

Приведенный ниже программный код, написанный на языке MatLab с помощью функции `feasp`, реализует решение неравенств (4.9) для заданных параметров (4.8а) и выбранного коэффициента (4.8б). Результатом выполнения кода являются параметры управления.

```

1  % SYSTEM PARAMETERS
2  rho=1.5; g_u=0.98; g_v=0.45; bU=0.8*(1.4522e+04)*1/3;
3  kappa=1.04; delta=6.5*10^-3; L=1.1; mu=1.01; eps=5;
4  % INEQUALITIES INITIALIZATION AND SOLUTION
5  Gamma=[0 0 0 1-mu 1; 0 1-g_u g_u L*g_v*rho L*g_v*rho;
6  -(1-mu*kappa*g_v)*rho/kappa 1-g_u g_u L*g_v*rho L*g_v*rho;
7  (1-g_u)*bU 0 0 0 0];
8  Theta=[0; 1-(1+delta)*g_u;-1+(1-delta)*g_u; eps];
9  e1=[1 0 0 0]; e2=[0 1 0 0]; e3=[0 0 1 0]; e4=[0 0 0 1];
10 setlmis([]); Psi=lmivar(2,[5 1]);
11 lmiterm([-1 1 1 Psi],.5*[1,0,0,0,0],1,'s');
12 lmiterm([-2 1 1 Psi],.5*[0,1,0,0,0],1,'s');
13 lmiterm([-3 1 1 Psi],.5*[0,0,1,0,0],1,'s');
14 lmiterm([-4 1 1 Psi],.5*[0,0,0,1,0],1,'s');
15 lmiterm([-5 1 1 Psi],.5*[0,0,0,0,1],1,'s');
16 lmiterm([6 1 1 Psi],.5*e1*Gamma,1,'s');
17 lmiterm([7 1 1 Psi],.5*e2*Gamma,1,'s');
18 lmiterm([8 1 1 Psi],.5*e3*Gamma,1,'s');
19 lmiterm([9 1 1 Psi],.5*e4*Gamma,1,'s');
20 lmiterm([-6 1 1 0],e1*Theta); lmiterm([-7 1 1 0],e2*Theta);
21 lmiterm([-8 1 1 0],e3*Theta); lmiterm([-9 1 1 0],e4*Theta);
22 LM1=getlmis;[tmin,xffeas] = feasp(LM1, [0 1000 1e22 0 0]);
23 % if tmin < 0, then the inequalities (4.9) is feasible
24 PS1 = [1 0 0 0 0]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
25 PS2 = [0 1 0 0 0]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
26 PS3 = [0 0 1 0 0]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
27 PS4 = [0 0 0 1 0]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
28 PS5 = [0 0 0 0 1]*dec2mat(LM1,xffeas,Psi);
29 K=PS1^-1; lambda1=PS2; lambda2=PS3; l=PS4^-1; mu=mu; tau=PS5;

```

Замечание 1. С помощью охвата начального условия $y(t_0)$ некоторой малой окрестностью центра множества $\mathcal{U}$ можно выполнить неравенство $|z(t_0)| \leq \frac{1-\gamma u}{K}$. Условия (4.11б) не являются ограничительными для практических задач, поскольку обычно в начальный момент времени t_0 выполняется $y(t_0) = 0$, $u(t_0) = 0$, $\dot{g}(t_0) = 0$, а возмущение $f(t, y, u)$ удовлетворяет условию $f(t_0, 0, 0) = 0$. Поэтому для выполнения условий (4.11б) обычно достаточно

установить $u_f(t_0) = u_c(t_0) = 0$. Если это не так, то предлагается использовать следующий простой прием. Поскольку $\Phi(t)$ – это оценка $F(t)$, то на $t < t_0$ можно сформировать оценку $\Phi(t)$ и в момент времени запуска системы управления t_0 установить $u_f(t_0) = -\Phi(t_0)$. Если при $t < t_0$ в (4.5) использовать достаточно большой параметр $l > 0$, то равенство $u_f(t_0) = -\Phi(t_0)$ будет выполнено с любой наперед заданной точностью [15]. Другими словами, если априорно ничего неизвестно о выполнении условий (4.11б), то имеет смысл сначала запустить наблюдатель возмущения (4.5), а только после этого инициализировать систему управления (4.4) с учетом уже сформированной к моменту времени t_0 оценки возмущения.

Замечание 2. В соответствии с доказательством теоремы 2 при невыполнении ограничений на начальные условия (4.11а), (4.11б), но выполнении неравенств (4.7), (4.9) верно $u(t) \in \mathcal{U}$ для всех $t \geq t_0$ и для всех $y(t_0) \in Y$ существует момент времени $T > t_0$ такой, что $y(t) \in \mathcal{Y}$ для всех $t \geq T$.

Замечание 3. Для уменьшения значений коэффициентов закона управления (4.4) неравенства (4.9) можно дополнять ограничениями вида $\Psi_i \geq \underline{\Psi}_i > 0$, где $\underline{\Psi}_i > 0$ – заданные числа.

4.1.1. Идентификация начальных условий обобщенного возмущения

В соответствии с результатами теоремы 2 достижение цели (3.2) существенно зависит от выполнения неравенств (4.11а) и (4.11б). Согласно рассуждениям, представленным в замечании 1, неравенства (4.11а) всегда можно выполнить путем выбора $\bar{g}(t_0)$, $\underline{g}(t_0)$, $u_s(t_0)$ при известном $y(t_0)$. В этом подразделе разовьем предложенную в том же замечании идею выполнения неравенств (4.11б) путем идентификации начального условия $F(t_0)$ обобщенного возмущения. С этой целью будем считать, что $t_0 > 0$ – это момент инициализации закона управления (4.4), (4.5) для системы (3.1), а $t = 0$ – это момент начала наблюдения за состояниями системы (3.1). Тогда для выполнения неравенств (4.11б) предлагается следующая инициализация начальных условий закона управления:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} u_f(t_0) &= -\hat{F}(t_0), \\ u_c(t_0) &= \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} u_f(t_0) \right), \end{aligned}$$

где $\hat{F}(t)$ – формируемая на отрезке $[0, t_0]$ оценка начальных условий $F(t_0)$.

Значит, выполнение неравенств (4.11б) сводится к построению на отрезке $[0, t_0]$ оценки возмущения такой, что выполнено неравенство

$$(4.14) \quad \left| \hat{F}(t_0) - F(t_0) \right| \leq \tau \gamma_v \rho, \quad \tau > 0.$$

Для достижения этой цели введем в рассмотрение наблюдатель возмущений, структурно повторяющий (4.5), но начинающий функционирование при $t = 0$:

$$(4.15) \quad \hat{F}(t) = \hat{\chi}(t) - \hat{u}(t) - \frac{\dot{g}(t)}{bu\bar{u}},$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(t) &= k(z(t) - \hat{z}(t)), \\ \dot{\hat{z}}(t) &= \hat{\chi}(t), \quad \hat{z}(0) = z(0), \\ \dot{\hat{u}}(t) &= k\left(\frac{1}{u^U}u(t) - \hat{u}(t) - \frac{\dot{g}(t)}{bu^U}\right), \quad \hat{u}(0) = 0\end{aligned}$$

и $k > 0$, $g(t) = 0$ и $\dot{g}(t) = 0$ для всех $t_0 > t \geq 0$.

Тогда ошибка $\tilde{F}(t) = \hat{F}(t) - F(t)$ для всех $t_0 \geq t \geq 0$ подчиняется следующему выражению:

$$(4.16) \quad \dot{\tilde{F}}(t) = k(z(t) - \hat{z}(t)) - \dot{\hat{u}}(t) - \frac{\ddot{g}(t)}{bu^U} - \dot{F}(t) = -k\tilde{F}(t) - \frac{\dot{f}(t, x, u)}{bu^U},$$

где $\tilde{F}(0) = -F(0)$.

На основании уравнения (4.16) нетрудно доказать следующее

Утверждение 1. Пусть $\left|\frac{f(t, x, u)}{bu^U}\right| \leq \gamma_v \rho$ для всех $0 \leq t \leq t_0$ и начальные условия компенсационной компоненты управления (4.4), (4.5) заданы выражениями (4.13), (4.15). Тогда для любых $F(0)$ и $t_0 > 0$ существует $k^ > 0$ такое, что выбор*

$$(4.17) \quad k > k^*$$

гарантирует выполнение неравенства (4.116).

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Таким образом, используя предложенный алгоритм инициализации начальных условий компенсационной части управления, всегда возможно удовлетворить неравенства (4.116). Это позволяет сделать вывод о том, что все требования на начальные условия (4.7), (4.11a), (4.11б) из теоремы 2 не являются ограничительными и могут быть выполнены путем: а) выбора $\bar{g}(t_0)$, $\underline{g}(t_0)$, $u_s(t_0)$ при известном $y(t_0)$, б) инициализации начальных условий компенсационной компоненты управления (4.4), (4.5) с использованием алгоритма (4.13), (4.15), (4.17). Также необходимо отметить, что неравенство $\left|\frac{f(t, x, u)}{bu^U}\right| \leq \gamma_v \rho$ может быть выполнено и для неустойчивых систем, а значит, в утверждении 1 не требуется, чтобы система была устойчивой и/или находилась в состоянии равновесия на $[0, t_0]$.

4.2. Инженерная интерпретация

Закон управления (4.4), (4.5) состоит из пропорциональной обратной связи, амплитуда и скорость которой для всех моментов времени ограничена числами $(1 - \gamma_u)u^U$ и $(1 - \mu\kappa\gamma_v)v^U$ соответственно, а также взятой с обратным знаком оценки обобщенного возмущения, амплитуда и скорость которой для всех моментов времени ограничена соответственно числами $\gamma_u u^U$ и $\mu\kappa\gamma_v v^U$.

Расчет параметров такого закона управления в соответствии с теоремой 2 требует решения линейных неравенств (4.9) и знания значений следующих параметров:

- максимального обобщенного ресурса управления bu^U , где b – известная оценка неизвестного коэффициента усиления системы (см. раздел 3.1.2),
- ограничений u^U и v^U на амплитуду и скорость изменения управления,
- коэффициентов γ_u и γ_v , которые показывают, во сколько раз амплитуда и скорость изменения возмущения, приведенного к максимальному ресурсу управления, меньше единицы,
- минимальной ширины целевого множества ε .

В практических задачах наличие информации о значениях этих параметров не является ограничением, поскольку часть параметров закладывается на этапе проектирования исполнительного механизма системы (u^U, v^U, b) или на этапе формирования технического задания на разработку системы управления (ε). Другая же часть, а именно числа $\gamma_u \in (0, 1)$, $\gamma_v \in (0, 1)$, с теоретической точки зрения могут быть выбраны произвольно близкими к правым границам интервалов их допустимых значений. Однако с практической точки зрения и в силу консервативности, заложенной при выводе неравенств (4.9), в такой асимптотике нет необходимости, а выбор значений γ_u, γ_v должен быть ориентирован на удовлетворение неравенств (3.5).

Для решения неравенств (4.9) также необходимо знать параметры κ, L, δ из свойств а)–е) используемой аппроксимации функции насыщения. Это требование не является ограничительным, поскольку для каждой конкретной аппроксимации эти параметры всегда могут быть вычислены численно или найдены аналитически. Более того, в этой работе для двух функций (см. раздел 2 и формулу (4.12)) уже приведены значения этих параметров.

При совместности неравенств (4.9), согласно теореме 2, закон управления (4.4), (4.5) с параметрами (4.10) и начальными условиями (4.7), (4.11а), (4.11б) гарантированно обладает следующим свойством:

Если выполнены допущения 1–3, то для любых обобщенных возмущений $F(t)$ с амплитудой, не превосходящей $100\gamma_u\%$ от u^U , и скоростью изменения, не превосходящей $100\gamma_v\%$ от v^U , гарантируется $y(t) \in \mathcal{Y}$, $u(t) \in \mathcal{U}$ для всех $t \geq t_0$.

5. Аналитическое сравнение

По структуре и свойствам закон управления (4.2) наиболее близок к закону управления из [10]. В соответствии с результатами [10] для обеспечения заданного значения динамической ошибки слежения за центром множества $\mathcal{Y}$ вводится следующее управление:

$$(5.1) \quad u(t) = -u^U m\sigma(kz(t)),$$

где $m > 0$, $k > 0$ и

$$\sigma(s) := \frac{2}{1 + \exp(-s)} - 1$$

является сигмоидальной функцией (в отличие от используемой в работе аппроксимации sat-функции для сигмоиды не выполнено условие ϵ) из раздела 2).

Согласно лемме и замечанию 1 из [10] при существовании $\gamma_u \in (0, 1)$ такой, что для всех $t \geq t_0$ верно $|F(t)| \leq \gamma_u$, и выполнении неравенств

$$(5.2a) \quad \frac{\gamma_u}{\sigma(2, 2)} < m \leq 1,$$

$$(5.2б) \quad \frac{2, 2}{\Delta} \leq k < \frac{\rho}{m^2}, \quad \Delta > 0,$$

$$(5.2в) \quad bu^U \Delta \leq \varepsilon$$

закон управления (5.1) гарантирует $y(t) \in \mathcal{Y}$ и $u(t) \in \mathcal{U}$ для всех $t \geq t_0$.

Во-первых, следует отметить, что неравенства (5.2a) и (5.2б) будут совместны только при выполнении условий

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v^U &> \frac{2, 2}{\Delta} m^2 u^U, \\ \varepsilon &> 2, 2 bu^U \frac{\gamma_u^2}{\sigma^2(2, 2) \rho} = \underline{\varepsilon}, \end{aligned}$$

что является ограничительными требованиями: *i*) не при всех $v^U > 0$ и $u^U > 0$ возможно ограничить скорость изменения управления, *ii*) сравнение минорант (5.3) и (П.14) позволяет сделать вывод о том, что предлагаемый закон управления при тех же $u^U > 0, v^U > 0$ и $\gamma_u \rightarrow 1$ позволяет обеспечить $y(t) \in \mathcal{Y}$ для всех $t \geq t_0$ для множеств существенно меньшей ширины ε .

Во-вторых, для получения (5.2б) в [10] использовалась следующая оценка сверху:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} |\dot{u}(t)| &= \left| -\frac{u^U m k}{2} [1 - \sigma^2(kz(t))] \dot{z}(t) \right| \leq \\ &\leq \left| -\frac{u^U m k}{2} [1 - \sigma^2(kz(t))] \right| \left| -m \sigma^2(kz(t)) + F \right| < \\ &< \left| -u^U m^2 k [1 - \sigma^2(kz(t))] \right| < u^U m^2 k. \end{aligned}$$

Получение такой оценки возможно только при отсутствии шумов в измерении выхода $y(t)$, т.е. при выполнении неравенств (5.2a), (5.2б), (5.2в), но при наличии помехи в измерениях закон управления (5.1) не гарантирует ограниченности скорости управления заданным значением. Как следует из выражения (4.4), предложенный в этой работе закон управления, благодаря использованию нелинейных фильтров, подобных [14], гарантирует ограниченность скорости управления независимо от наличия помехи измерений, что является существенным преимуществом при решении практических задач.

Таким образом, основные отличия закона управления (4.4), (4.5) по сравнению с законом управления (5.1) заключаются в следующем:

1) вместе с заданным значением динамической ошибки слежения удастся гарантировать заданные ограничения на амплитуду и скорость изменения управления,

2) предложенный закон управления содержит не только компоненту, пропорциональную ошибке слежения, но и формируемую по методу вспомогательного контура [15, с. 201] динамическую оценку внешнего обобщенного возмущения,

3) процедура выбора параметров закона управления сведена к задаче решения линейных неравенств и может решаться численно с помощью пакетов прикладных программ (неравенства из [10] предполагают ручной счет).

6. Моделирование

Моделирование будет выполняться в MatLab Simulink с помощью интегрирования прямым методом Эйлера с шагом дискретизации 10^{-4} секунд.

Для иллюстрации теоретических результатов рассмотрим линеаризованную модель вертикального движения летательного аппарата на высоте 1200 метров с воздушной скоростью в 2 Маха [20, с. 565]:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dd(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1,364 & -92,82 & -128,46 \\ 1 & -4,68 & -0,087 \\ 0 & 0 & -190 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 190 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= [1,36 \quad -184,26 \quad 76,43], \quad x(t_0) = [0 \quad 0 \quad 0], \quad d(t) = 0 \end{aligned}$$

$u(t)$ – это управление рулем высоты, рад., $y(t)$ – это вертикальное ускорение, м/с², $x_1(t)$ – это скорость тангажа, рад/с, $x_2(t)$ – это угол атаки, рад., $x_3(t)$ – это угол руля высоты, рад., $d(t)$ – внешнее возмущение. Максимальный угол руля высоты составляет $\frac{1}{3}$ радиана, а скорость его изменения не превосходит $\frac{1}{2}$ радиана в секунду, т.е. ограничения на управление заданы числами $u^U = \frac{1}{3}$, $v^U = \frac{1}{2}$. Матрицы A , B , C и D считаются неизвестными, но известной принимается оценка $b = 1,16 \cdot 10^4$ коэффициента усиления $CB = 1,45 \cdot 10^4$. Относительная степень системы (6.1) равна единице, а поэтому согласно примеру 1 она приводится к виду (3.1).

Инженерные показатели качества управления системой (6.1) описываются множеством $\mathcal{Y}$ со следующими границами:

$$(6.2) \quad \bar{g}(t) = 75\sin(0,1\pi t) + 5, \quad \underline{g}(t) = 75\sin(0,1\pi t) - 5,$$

а тогда $\varepsilon = 5$ – это минимальная ширина целевого множества $\mathcal{Y}$.

Предположим, что на траекториях замкнутой системы амплитуда обобщенного возмущения $F(t)$ не превосходит 98% от u^U , а скорость его изменения не превосходит 45% от v^U , т.е.

$$(6.3) \quad \gamma_u = 0,98, \quad \gamma_v = 0,45.$$

Эта гипотеза соответствует допущению 2 и для системы (6.1) с неизвестными параметрами при действии внешних возмущений априорно не может быть проверена. Проверка выполнения этой гипотезы может быть осуществлена только апостериорно – путем применения закона управления (4.4), (4.5) и регистрации поведения выхода системы. С теоретической точки зрения, можно выбирать $\gamma_u \rightarrow 1$ и $\gamma_v \rightarrow 1$, тогда класс допустимых обобщенных возмущений максимально расширяется. С практической точки зрения, в такой асимптотике отсутствует необходимость, поскольку во многих практических задачах обобщенное возмущение редко составляет более 50–60% от доступной амплитуды и скорости изменения управления. Кроме того, при $\gamma_u \rightarrow 1$ и $\gamma_v \rightarrow 1$ решение неравенств (4.9) может давать сравнительно большие значения параметров управления.

Фактически выбор значений чисел γ_u и γ_v задает класс систем с неизвестными параметрами и внешними возмущениями, для которых предложенный закон управления обеспечивает достижение цели (3.2) при ограничениях (3.3). Принадлежность к такому классу конкретной системы с неизвестными параметрами и внешними возмущениями, к сожалению, может быть проверена только апостериорно после испытаний закона управления. Например, для системы (6.1) числа (6.3) были выбраны в процессе итераций, состоящих из *i*) решения неравенств (4.9) для различных значений γ_u и γ_v , *ii*) применении закона управления (4.4), (4.5) с рассчитанными параметрами. Такие итерации завершились тогда, когда после очередной итерации расчета были получены такие значения параметров (4.10), что применение закона управления обеспечило выполнение поставленной цели. Заметим, что обсуждаемая апостериорная проверка работоспособности характерна для многих робастных законов управления. Разница состоит лишь в том, что обычно выдвигаются гипотезы на интервалы существования параметров системы и амплитуду внешнего возмущения, а в данной работе выставляется гипотеза на максимальные значения амплитуды и скорости изменения обобщенного возмущения, являющегося неизвестной функцией от выхода системы, ее параметров и возмущений (см. пример 1).

Таким образом, заданные множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}$ вместе с выбранными параметрами (6.3) соответствуют следующему заданию на разработку системы автоматического управления: *необходимо обеспечить отслеживание задающего воздействия по вертикальному ускорению с динамической ошибкой, не превосходящей 5 м/с^2 , при действии обобщенных возмущений, согласованных с сигналом управления и не превосходящих 98% от максимальной амплитуды и 45% от максимальной скорости управления.*

Для решения такой задачи с помощью закона управления (4.4), (4.5) в соответствии с теоремой 2 необходимо получить решение неравенств (4.9). Для этого зададимся функцией (4.12) и установим $\mu^* = 1,01$.

В результате решения (4.9) получены следующие значения:

$$(6.4) \quad K = 17,7436, \quad \lambda_1 = 0,1434, \quad \lambda_2 = 0,0029, \quad l = 194,912, \quad \tau = 3,5 \cdot 10^{-5}.$$

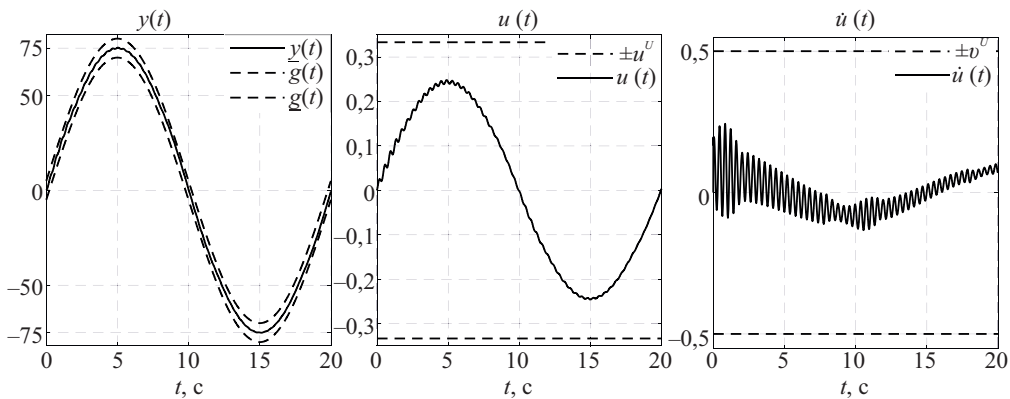


Рис. 2. Переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$.

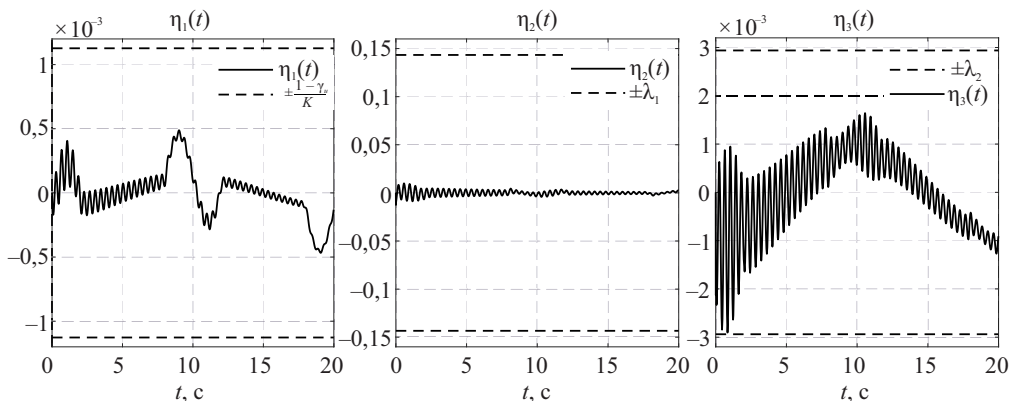


Рис. 3. Переходные процессы по $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$.

Решение неравенств выполнено с помощью кода MatLab, приведенного в разделе 4.2. Для выполнения цели (3.2) при ограничениях (3.3) в соответствии с теоремами 1 и 2 начальные условия закона управления установлены следующим образом:

$$(6.5) \quad z_f(t_0) = z(t_0) = 0, \quad u_s(t_0) = 0, \quad u_f(t_0) = -F(t_0) = 0, \quad u_c(t_0) = 0,$$

что обеспечило выполнение условий (4.7) и (4.11а), (4.11б).

На рис. 2 и 3 приведены переходные процессы по управлению $u(t)$ и его скорости $\dot{u}(t)$, регулируемому выходу $y(t)$, а также внутренним переменным закона управления $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$ (см. доказательство теоремы 2).

Временные диаграммы, представленные на рис. 2 и 3, иллюстрируют теоретические результаты, полученные в теореме 2. Выполнение неравенств (4.9) и других предпосылок теоремы 2 ведет к достижению поставленной цели (3.2) при ограничениях (3.3). При этом внутренние переменные закона управления также не покидают заданного неравенствами (4.9) диапазона (см. доказательство теоремы 2).

Выполним проверку работоспособности предлагаемого закона управления при наличии шумов в измерениях и действии на систему разрывных внешних

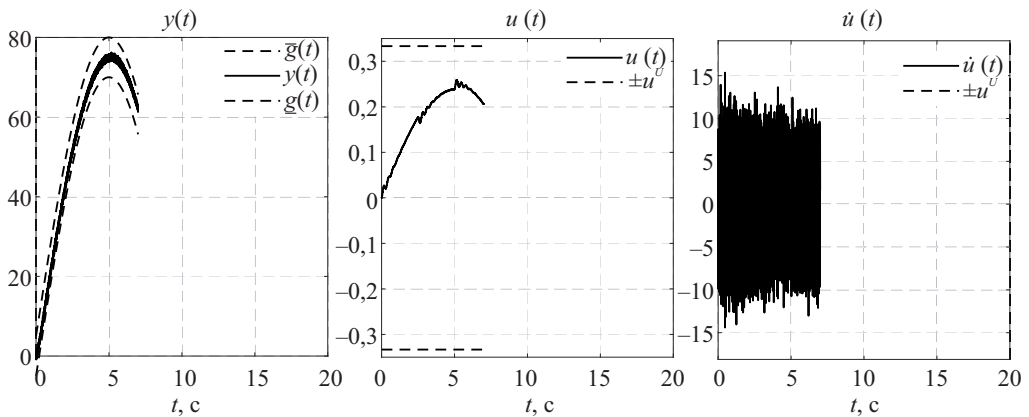


Рис. 4. Переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для (6.6) при $K = 2,5$.

возмущений. Для этого будем считать, что выход системы (6.1) и внешнее возмущение заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + w_0(t) + w_1(t), \\ d(t) &= 0,1 + \text{sign}\{\sin(0,4\pi t)\}, \\ w_1(t) &= \begin{cases} -Cx(t) - w_0(t) + \bar{g}(t), & \text{если } t \in [7, 7,1), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

где сигнал $w_0(t)$ смоделирован в MatLab Simulink с помощью блока “Random Number” с нулевым средним, дисперсией 10^{-1} и временем выборки 10^{-4} . Все остальные параметры системы и управления остаются прежними.

Для сравнения реализуем закон управления (5.1) с параметрами $m = 1$, $k = 1692$ (расчет выполнен по формулам (5.2) для $\varepsilon = 5$ при $b = 1,16 \cdot 10^4$ и $u^U = \frac{1}{3}$) и закон управления из раздела 4 работы [1]:

$$(6.6) \quad u(t) = -(CB)^{-1} [CAx(t) + K\varepsilon(t)], \quad \varepsilon(t) := \ln \left(\frac{g(t) - y(t)}{y(t) - \bar{g}(t)} \right),$$

где $K > 0$.

Закон управления (6.6) требует знания параметров системы (6.1) и не учитывает наличие ограничений (3.3) на управление и скорость его изменения. Однако, несмотря на эти обстоятельства, его сравнение с предлагаемым законом допустимо и корректно, поскольку цель сравнения заключается, прежде всего, в проверке чувствительности к шумам измерений и разрывным возмущениям. Сделанные выводы при этом останутся справедливы как для адаптивных/робастных версий закона управления (6.6), так и для версий, учитывающих ограничение на управление [1, 2].

Временные диаграммы, представленные на рис. 4, показывают, что для закона (6.6) регулируемый выход остается в целевом множестве при наличии помех измерений для всех $t < 7$. Однако приближение $y(t)$ к границам целевого множества ведет к увеличению скорости изменения управления. В результате может быть сформирован нереализуемый исполнительным механизмом

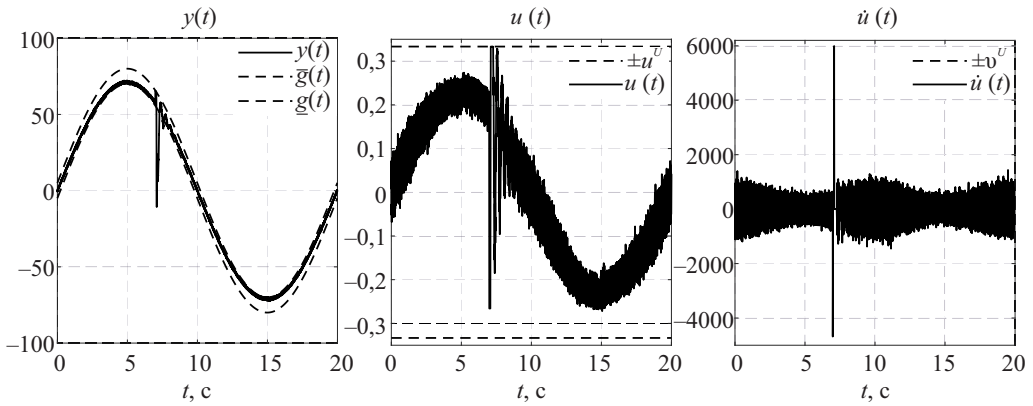


Рис. 5. Переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для (5.1) при $m = 1$, $k = 1692$.

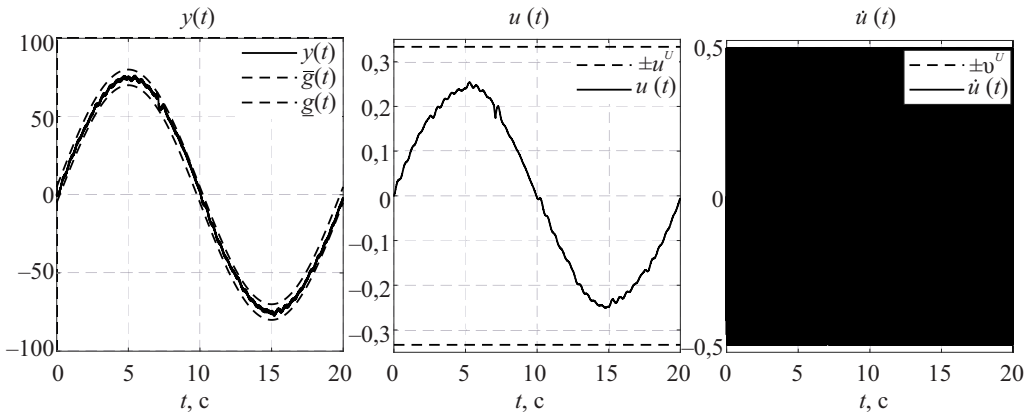


Рис. 6. Переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для (4.4), (4.5).

сигнал управления. Кроме того, в момент времени $t = 7$ из-за влияния составляющей $w_1(t)$ помехи происходит разрыв в обратной связи (см. (6.6)), и поэтому моделирование не может быть продолжено для всех $t > 7$. В практических задачах теории управления даже потенциальная возможность возникновения подобных разрывов недопустима, поскольку возникновение разрыва в обратной связи может приводить к в равной степени непредсказуемым и катастрофическим последствиям. Разработанный в этой работе закон управления свободен от данного недостатка.

На рис. 5 представлены переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для (5.1).

Закон управления (5.1) решает задачу слежения с заданной точностью, что приводит к ограничению выхода системы в заданном множестве $\mathcal{U}$. Однако скорость изменения управления не ограничена заданным значением, а сигнал управления существенно зашумлен, что иллюстрирует выводы анализа из раздела 5.

На рис. 6 представлены переходные процессы по $u(t)$, $\dot{u}(t)$ и $y(t)$ для предложенного закона управления при действии разрывных возмущений и наличии помех.

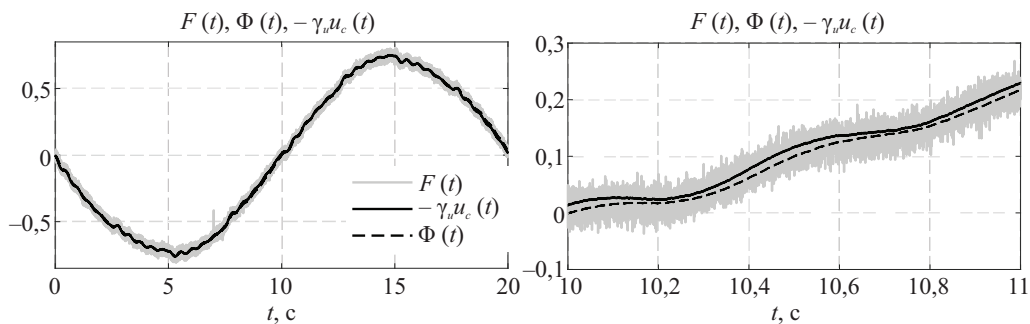


Рис. 7. Переходные процессы по $F(t)$ и $\Phi(t)$, $-\gamma_u u_c(t)$.

Согласно допущению 2 предлагаемый закон управления требует действия на систему исключительно дифференцируемых внешних возмущений. В проведенном моделировании это требование нарушено, но заданное качество (3.2) при заданных ограничениях (3.3) все равно обеспечено. Это позволяет сделать вывод о консервативности условий, принятых для доказательства теоремы 2, и стимулирует дальнейшие теоретические исследования, направленные на их релаксацию. Кроме того, в сравнении с законом управления (6.6) предложенный закон управления свободен от проблемы разрывов в обратной связи и обеспечивает заданные ограничения на амплитуду и скорость изменения управления даже при наличии помехи измерений. По сравнению с управлением (5.1) предложенный закон даже при наличии помех в выходном сигнале обеспечивает ограниченность скорости управления заданным значением. Необходимо отметить, что свойства предложенного закона управления (4.4), (4.5) строго обоснованы только для ситуации, когда в системе отсутствуют разрывные внешние возмущения и помехи измерений. Поэтому сделанные по рис. 3–5 выводы справедливы только для рассматриваемой системы (6.1) при заданных конкретных начальных условиях и используемом алгоритме интегрирования.

На рис. 7 представлены переходные процессы по $F(t)$ и оценкам $\Phi(t)$, $-\gamma_u u_c(t)$.

Из временных диаграмм, представленных на рис. 7, следует, что оценка возмущения $\Phi(t)$, полученная по методу вспомогательного контура [15, с. 201], зашумлена из-за наличия помехи в измеряемом выходе. На практике использование в целях компенсации подобных оценок возмущения может приводить к неустойчивой/неработоспособной системе из-за *i)* наличия ограничений на скорость изменения управления и *ii)* возбуждения управлением немоделируемой высокочастотной динамики. Для уменьшения влияния помехи на оценку $\Phi(t)$ в рамках метода вспомогательного контура требуется уменьшение параметра l . Однако в разработанном законе управления используется нелинейный фильтр [14], позволяющий пропускать на свой выход компоненту оценки $\Phi(t)$ со скоростью, не превосходящей ограничений на скорость изменения управления. Это позволяет независимо от значений пара-

метра l ослаблять влияние шумов в выходном сигнале на оценку возмущения и в результате выполнить ограничение на скорость изменения управления, не допуская возбуждение немоделируемой высокочастотной динамики. Аналитическое исследование фильтрующих свойств нелинейного фильтра, применяемого в предложенном законе управления, является одним из актуальных направлений дальнейших исследований.

7. Заключение

В работе предложен метод решения задачи робастного управления с заданным качеством при заданных ограничениях на амплитуду и скорость изменения управления классом нелинейных минимально-фазовых систем с неизвестными параметрами и относительной степенью, равной единице (такие системы согласно [16, с. 167] приводятся к виду (3.1), и для них можно потребовать выполнение допущения 2). Из примера 1 следует, что одним из представителей такого класса систем являются линейные системы с неизвестными параметрами и относительной степенью, равной единице.

Целью дальнейших теоретических исследований является, во-первых, распространение полученных результатов на класс нелинейных систем с устойчивой внутренней динамикой и относительной степенью больше единицы (см. пример 1), а во-вторых, использование результатов работы в задаче управления каскадными системами с заданными инженерными показателями качества при заданных ограничениях на состояния и амплитуду/скорость управления (см. пример 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функцию:

$$(П.1) \quad V = \frac{1}{2}u_s^2.$$

Производная (П.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u}u_s\sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right)\right) = \\ &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u}u_s\text{sign}\left\{u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right\}\left|\sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right)\right)\right|. \end{aligned}$$

Для всех $u_s \notin \Lambda = \{u_s \in \mathbb{R}: |u_s| \leq 1\}$ оказывается верно

$$\text{sign}\left\{u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right\} = \text{sign}\{u_s\},$$

значит,

$$\dot{V} = -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u}\left|u_s\sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\left(u_s + \sigma\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}z\right)\right)\right)\right| \leq 0$$

для всех $u_s \notin \Lambda = \{u_s \in \mathbb{R}: |u_s| \leq 1\}$.

С другой стороны, для всех $u_s \in \Lambda$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} u_s \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right) \right) = \\ &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} u_s \text{sign} \left\{ u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right\} \left| \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} \left| u_s \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} z \right) \right) \right) \right|, \end{aligned}$$

следовательно, при $|u_s(t_0)| \leq 1$ верно $|u_s(t)| \leq 1$ для всех $t \geq t_0$.

Рассмотрев функцию $V = \frac{1}{2}u_c^2$ и повторив приведенные выше рассуждения, можно показать, что при $|u_c(t_0)| \leq 1$ верно $|u_c(t)| \leq 1$ для всех $t \geq t_0$, а значит, в соответствии с рассуждениями (4.6а) и (4.6б) имеем $u(t) \in \mathcal{U}$ для всех $t \geq t_0$.

Доказательство теоремы 2. Введем в рассмотрение замены переменных

$$\begin{aligned} \eta_1 &= z, \\ \eta_2 &= u_s + \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right), \\ \eta_3 &= u_c + \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) \end{aligned}$$

и получим дифференциальные уравнения относительно η_1, η_2, η_3 :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= (1 - \gamma_u) u_s + \gamma_u u_c + F(t) = \\ &= (1 - \gamma_u) \left(u_s \pm \sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) \right) + \gamma_u u_c + F(t) = \\ \text{(II.2)} \quad &= (1 - \gamma_u) \left(-\sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) + \eta_2 \right) + \gamma_u u_c + F(t), \\ \dot{\eta}_2 &= -\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} \sigma \left(\frac{1}{\lambda_1} \eta_2 \right) + \frac{K}{1 - \gamma_u} \sigma' \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) \dot{\eta}_1, \\ \dot{\eta}_3 &= -\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u} \sigma \left(\frac{1}{\lambda_2} \eta_3 \right) + \sigma' \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) \frac{1}{\gamma_u} \dot{\Phi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множества $(\eta = [\eta_1 \ \eta_2]^\top)$:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ \eta \in \mathbb{R}^2: |\eta_1| \leq \frac{1 - \gamma_u}{K}, \quad |\eta_2| \leq \lambda_1 \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ \eta \in \mathbb{R}^2: |\eta_2| \leq \lambda_1 \right\}, \end{aligned}$$

где при выполнении неравенства

$$\text{(III.3)} \quad bu^U (1 - \gamma_u) < K\varepsilon$$

из $\eta \in \Omega_1$ следует $y \in \mathcal{Y}$.

Сначала исследуем ограниченность η_3 при $\eta \in \Omega_1$, а для этого получим оценку на $\dot{\Phi}(t)$. Дифференцируя $\Phi(t)$, имеем:

$$(П.4) \quad \dot{\Phi}(t) = l(\dot{z}(t) - \dot{z}_f(t)) - \dot{u}_f(t) = -l(\Phi(t) - F(t)) = -l\tilde{\Phi}(t),$$

где $\Phi(t_0) = -u_f(t_0)$ и $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t) - F(t)$.

Тогда $\dot{\Phi}(t)$ будет ограничена, если ошибка $\tilde{\Phi}(t)$ ограничена. Дифференциальное уравнение для $\tilde{\Phi}(t)$ имеет вид

$$(П.5) \quad \dot{\tilde{\Phi}}(t) = -l\tilde{\Phi}(t) - \dot{F}(t), \quad \tilde{\Phi}(t_0) = -u_f(t_0) - F(t_0).$$

На решение уравнения (П.5) при $g(t) \in \mathcal{G}$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $(\eta(t) \in \Omega_1 \Rightarrow y(t) \in \mathcal{Y})$ для всех $t \geq t_0$, выполнении допущений 1, 2 и условия $|-u_f(t_0) - F(t_0)| \leq \tau\gamma_v\rho$, $\tau > 0$ существует оценка сверху:

$$(П.6) \quad \begin{aligned} |\tilde{\Phi}(t)| &= \left| e^{-l(t-t_0)}\tilde{\Phi}(t_0) - \int_{t_0}^t e^{-l(t-\tau)}\dot{F}(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \tau\gamma_v\rho + \gamma_v\rho \int_{t_0}^t e^{-l(t-\tau)} d\tau \leq (\tau + l^{-1})\gamma_v\rho \end{aligned}$$

для всех $t \geq t_0$.

Тогда производная квадратичной формы $V = \frac{1}{2}\eta_3^2$ для всех $\eta \in \Omega_1$ имеет вид

$$(П.7) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \eta_3 \left[-\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u}\sigma\left(\frac{1}{\lambda_2}\eta_3\right) - \sigma'\left(\frac{1}{\gamma_u}\Phi(t)\right)\frac{1}{\gamma_u}l\tilde{\Phi}(t) \right] \leq \\ &\leq |\eta_3| \left[-\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u}\left|\sigma\left(\frac{1}{\lambda_2}\eta_3\right)\right| + \kappa\frac{1}{\gamma_u}l|\tilde{\Phi}| \right] \leq \\ &\leq |\eta_3| \left[-\frac{\mu\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u}\left|\sigma\left(\frac{1}{\lambda_2}\eta_3\right)\right| + \frac{\kappa(l\tau + 1)\gamma_v\rho}{\gamma_u} \right]. \end{aligned}$$

С одной стороны, для всех $\eta_3 \notin \{\eta_3 \in \mathbb{R}: |\eta_3| < \lambda_2\}$ в силу свойства в) функции $\sigma(\cdot)$ и условий $\mu > 1$, $\tau > 0$, $\tau + \frac{1-\mu}{l} < 0$ верно:

$$\dot{V} \leq - \underbrace{(\mu - (l\tau + 1))}_{>0} \frac{\kappa\gamma_v\rho}{\gamma_u} |\eta_3|.$$

Таким образом, при $|\eta_3(t_0)| \leq \lambda_2$ имеем $|\eta_3(t)| \leq \lambda_2$ для $\eta \in \Omega_1$ и всех $t \geq t_0$ независимо от знака $\dot{V}$ в множестве $\{\eta_3 \in \mathbb{R}: |\eta_3| < \lambda_2\}$.

Теперь докажем, что из $\eta(t_0) \in \Omega_1$ следует $\eta(t) \in \Omega_1$ для всех $t \geq t_0$.

Производная квадратичной формы $V_1 = \frac{1}{2}\eta_1^2$ для всех $\eta \in \Omega_1$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= \eta_1 \left[(1 - \gamma_u) \left(-\sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) + \eta_2 \right) + F + \gamma_u u_c \pm \gamma_u \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) \right] = \\
 (\text{П.8}) \quad &= \eta_1 (1 - \gamma_u) \left(-\sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) + \eta_2 \right) + \\
 &+ \eta_1 \left[F - \gamma_u \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) + \gamma_u \left(u_c \pm \sigma \left(\frac{\Phi}{\gamma_u} \right) + \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) \right) \right].
 \end{aligned}$$

С одной стороны, при выполнении неравенств (4.7), допущений 1 и 2 для некоторой

$$\delta := \sup_{|F| \leq \gamma_u} \left| \frac{F}{\gamma_u} - \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) \right|$$

и всех $\eta \in \Omega_1$ справедливо неравенство:

$$\left| F - \gamma_u \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} F \right) \right| = \left| \frac{F}{\gamma_u} - \sigma \left(\frac{F}{\gamma_u} \right) \right| \gamma_u \leq \delta \gamma_u.$$

С другой стороны, в силу липшицевости функции $\sigma(\cdot)$ для некоторой $L > \kappa$ при выполнении неравенств (4.7), допущений 1 и 2 для всех $\eta \in \Omega_1$ по доказанному справедливо неравенство:

$$\left| \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) - \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} F \right) \right| \leq \frac{L}{\gamma_u} |\Phi - F| = \frac{L}{\gamma_u} |\tilde{\Phi}| \leq \frac{L(\tau + l^{-1}) \gamma_v \rho}{\gamma_u}.$$

С третьей стороны, по доказанному при $|\eta_3(t_0)| \leq \lambda_2$ и выполнении неравенств (4.7), допущений 1 и 2 для всех $\eta \in \Omega_1$ верно:

$$\left| u_c + \sigma \left(\frac{1}{\gamma_u} \Phi \right) \right| = |\eta_3| \leq \lambda_2.$$

Тогда оценка сверху на производную (П.8) для всех $\eta \in \Omega_1$ принимает вид

$$\dot{V}_1 \leq |\eta_1| \left[(1 - \gamma_u) \left(-\sigma \left(\frac{K}{1 - \gamma_u} \eta_1 \right) + |\eta_2| \right) + \gamma_u \delta + L(\tau + l^{-1}) \gamma_v \rho + \gamma_u \lambda_2 \right].$$

Если $|\eta_1| = \frac{1 - \gamma_u}{K}$ и $|\eta_2| \leq \lambda_1$, то условие $\dot{V}_1 < 0$ выполнено при

$$(\text{П.9}) \quad (1 - \gamma_u)(-1 + \lambda_1) + \delta \gamma_u + L(\tau + l^{-1}) \gamma_v \rho + \gamma_u \lambda_2 < 0.$$

Более того, на $|\dot{\eta}_1|$ для всех $\eta \in \Omega_1$ верна оценка сверху:

$$|\dot{\eta}_1| \leq (1 - \gamma_u)(1 + \lambda_1) + \delta \gamma_u + L(\tau + l^{-1}) \gamma_v \rho + \gamma_u \lambda_2.$$

Производная квадратичной формы $V_2 = \frac{1}{2}\eta_2^2$ для всех $\eta \in \Omega_2$ имеет вид

$$(П.10) \quad \begin{aligned} \dot{V}_2 &= \eta_2 \left[-\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} \sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\eta_2\right) + \frac{K}{1 - \gamma_u} \sigma'\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}\eta_1\right) \dot{\eta}_1 \right] \leq \\ &\leq |\eta_2| \left[-\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} \left| \sigma\left(\frac{1}{\lambda_1}\eta_2\right) \right| + \left| \frac{K}{1 - \gamma_u} \sigma'\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}\eta_1\right) \dot{\eta}_1 \right| \right]. \end{aligned}$$

Если $|\eta_1| > \frac{1 - \gamma_u}{K}$, то по свойству а) функции $\sigma(\cdot)$ верно $\sigma'\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}\eta_1\right) = 0$ и при $|\eta_2| = \lambda_1$ верно $\dot{V}_2 < 0$. Если $|\eta_1| \leq \frac{1 - \gamma_u}{K}$, то в силу $\eta \in \Omega_2$ верно $\eta \in \Omega_1$ и неравенство

$$\begin{aligned} &\left| \frac{K}{1 - \gamma_u} \sigma'\left(\frac{K}{1 - \gamma_u}\eta_1\right) \dot{\eta}_1 \right| \leq \\ &\leq \frac{\kappa K}{1 - \gamma_u} \left[(1 - \gamma_u)(1 + \lambda_1) + \delta\gamma_u + L(\tau + l^{-1})\gamma_v\rho + \gamma_u\lambda_2 \right], \end{aligned}$$

значит, при $|\eta_2| = \lambda_1$ условие $\dot{V}_2 < 0$ будет выполнено, если:

$$(П.11) \quad \begin{aligned} &-\frac{(1 - \mu\kappa\gamma_v)\rho}{1 - \gamma_u} + \frac{\kappa K}{1 - \gamma_u} \left[(1 - \gamma_u)(1 + \lambda_1) + \delta\gamma_u + \right. \\ &\quad \left. + L(\tau + l^{-1})\gamma_v\rho + \gamma_u\lambda_2 \right] < 0. \end{aligned}$$

Если $\eta \in \partial\Omega_i$, $i = 1, 2$, то $|\eta_1| = \frac{1 - \gamma_u}{K}$, $|\eta_2| = \lambda_1$ для $i = 1$ или $|\eta_2| = \lambda_1$ для $i = 2$. Поскольку $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то по доказанному $\dot{V}_2 < 0$, значит, если $\eta(t_0) \in \Omega_1$, то $\eta(t) \in \Omega_1$ для всех $t \geq t_0$, что при выполнении (П.3) означает $y(t) \in \mathcal{Y}$ для всех $t \geq t_0$. Таким образом, объединив (П.3), (П.9) и (П.11), получаем, что, если выполнены допущения 1–3, при заданных параметрах

$$\gamma_u \in (0, 1), \quad \gamma_v \in (0, 1), \quad bu^U > 0, \quad \delta \in (0, 1), \quad \kappa \in (1, 2), \quad L > \kappa, \quad \rho > 0, \quad \varepsilon > 0$$

и некотором коэффициенте $1 < \mu^* < \frac{1}{\kappa\gamma_v}$ относительно переменных

$$\Psi_1 = \frac{1}{K}, \quad \Psi_2 = \lambda_1, \quad \Psi_3 = \lambda_2, \quad \Psi_4 = l^{-1}, \quad \Psi_5 = \tau$$

разрешимы неравенства (4.9), то закон (4.4), (4.5) с коэффициентами (4.10), начальными условиями (4.7) и (4.11) для всех $t \geq t_0$ обеспечивает $u(t) \in \mathcal{U}$ и $y(t) \in \mathcal{Y}$.

Доказательство леммы 1. Перепишем (4.9) в следующем виде:

$$(П.12) \quad \begin{aligned} &(1 - \mu^*)\Psi_4 + \Psi_5 < 0, \\ &(1 - \gamma_u)\Psi_2 + \gamma_u\Psi_3 + L\gamma_v\rho(\Psi_4 + \Psi_5) + (1 + \delta)\gamma_u - 1 < 0, \\ &-\frac{(1 - \mu^*\kappa\gamma_v)\rho}{\kappa}\Psi_1 + (1 - \gamma_u)\Psi_2 + \gamma_u\Psi_3 + L\gamma_v\rho(\Psi_4 + \Psi_5) + 1 - (1 - \delta)\gamma_u < 0, \\ &(1 - \gamma_u)bu^U\Psi_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

При достаточно малых $\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5$ неравенства (П.12) будут выполнены, если выполнены неравенства:

$$(П.13) \quad \begin{aligned} \Psi_4 &> \frac{\alpha\delta\gamma_u}{\mu-1}, \quad \gamma_u < \frac{1}{1+(1+\alpha)\delta}, \\ \frac{1-(1-(1+\alpha)\delta)\gamma_u}{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}\kappa &< \Psi_1 < \frac{\varepsilon}{(1-\gamma_u)bu^U} \end{aligned}$$

при $1 > \alpha > 0$.

Третье неравенство из (П.13) может быть выполнено, если для $\varepsilon > 0$ верно

$$(П.14) \quad \varepsilon > \frac{1-(1-(1+\alpha)\delta)\gamma_u}{(1-\mu\kappa\gamma_v)\rho}(1-\gamma_u)bu^U\kappa = \underline{\varepsilon},$$

что завершает доказательство леммы.

Доказательство утверждения 1. Для доказательства утверждения запишем оценку сверху на решение уравнения (4.16)

$$(П.15) \quad \left| \tilde{F}(t) \right| = \left| -e^{-kt}F(0) - \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \frac{\dot{f}(t, x, u)}{bu^U} d\tau \right| \leq e^{-kt}F(0) + \frac{\gamma_v\rho}{k}.$$

Тогда при использовании алгоритма инициализации (4.13), (4.15) выполнение неравенства (4.11б) будет следовать из выполнения неравенства

$$(П.16) \quad e^{-kt_0}F(0) + \frac{\gamma_v\rho}{k} \leq \tau\gamma_v\rho.$$

Проводя несложные рассуждения, получаем, что неравенство (П.16) выполняется при всех

$$k > k^* = \max \left\{ -t_0^{-1} \ln \left(\frac{\vartheta\tau\gamma_v\rho}{F(0)} \right), \quad \frac{1}{(1-\vartheta)\tau} \right\}, \quad \vartheta \in (0, 1),$$

что завершает доказательство утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // *АиТ.* 2021. № 4. С. 121–139.
Furtat I.B., Gushchin P.A. Control of dynamical plants with a guarantee for the controlled signal to stay in a given set // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 654–669.
2. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А., Нгуен Б.Х.* Управление динамическими системами при ограничениях на входные и выходные сигналы // *АиТ.* 2023. № 4. С. 45–63.
Furtat I.B., Gushchin P.A., Nguyen B.H. Control of dynamic systems under input and output constraints // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 4. P. 355–368.

3. *Фуртат И.Б.* Плотностные системы. Анализ и управление // *АиТ*. 2023. № 11. С. 55–76.
Furtat I.B. Density Systems: Analysis and Control // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 11. P. 1175–1190.
4. *Bechlioulis C.P., Rovithakis G.A.* Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems // *Automatica*. 2009. V. 45. No. 2. P. 532–538.
5. *Bechlioulis C.P., Rovithakis G.A.* Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance // *IEEE Transact. Autom. Control*. 2008. V. 53. No. 9. P. 2090–2099.
6. *Tee K.P., Ge S.S., Tay E.H.* Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems // *Automatica*. 2009. V. 45. No. 4. P. 918–927.
7. *Tee K.P., Ren B., Ge S.S.* Control of nonlinear systems with time-varying output constraints // *Automatica*. 2011. V. 47. No. 11. P. 2511–2516.
8. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А.* Расположение в заданных множествах управления и выхода одного класса систем // *Управление большими системами*. 2025. Т. 113. С. 95–119.
9. *Marconi L., Isidori A.* Robust global stabilization of a class of uncertain feedforward nonlinear systems // *Systems & Control Letters*. 2000. V. 41. No. 4. P. 281–290.
10. *Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А.* Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // *АиТ*. 2022. № 1. С. 40–66.
Antipov A.S., Krasnova S.A., Utkin V.A. Synthesis of invariant nonlinear single-channel sigmoid feedback tracking systems ensuring given tracking accuracy // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 1. P. 32–53.
11. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Синтез инвариантных систем с учетом проектных ограничений // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019. М.: ИПУ РАН. 2019. С. 68–72.
12. *Антипов А.С., Краснова С.А., Пивнева С.В.* Управление электромеханическим объектом в условиях неопределенности с учетом проектных ограничений // *Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021)*. 2021. С. 567–579.
13. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Стабилизация интегратора третьего порядка с фазовым ограничением // *АиТ*. 2024. № 7. С. 32–41.
Pesterev A.V., Morozov Y.V. Stabilization of a chain of three integrators subject to a phase constraint // *Autom. Remote Control*. 2024. V. 85. No. 7. P. 597–603.
14. *Кокунько Ю.Г., Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями // *АиТ*. 2021. № 7. С. 38–68.
Kokunko Y.G., Krasnova S.A., Utkin V.A. Cascade synthesis of differentiators with piecewise linear correction signals // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 7. P. 1144–1168.
15. *Цыкунов А.М.* Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу. М.: Физматлит, 2009. 268 с.
16. *Isidori A.* Lectures in feedback design for multivariable systems. Basel, Switzerland: Springer International Publishing, 2017.

17. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // *АиТ*. 2014. № 9. С. 45–64.
Utkin V.A., Utkin A.V. Problem of tracking in linear systems with parametric uncertainties under unstable zero dynamics // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. P. 1577–1592.
18. *Khalil H.K.* Cascade high-gain observers in output feedback control // *Automatica*. 2017. V. 80. P. 110–118.
19. *Astolfi D., Marconi L.* A high-gain nonlinear observer with limited gain power // *IEEE Transact. Autom. Control*. 2015. V. 60. No. 11. P. 3059–3064.
20. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 25.08.2025

После доработки 05.02.2026

Принята к публикации 10.02.2026