

© 2026 г. А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (alexeyshumsky@yandex.ru),
А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий, Владивосток)

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ АККОМОДАЦИИ К ДЕФЕКТАМ В НЕЧЕТКИХ ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНЫХ СИСТЕМАХ¹

Рассматривается задача аккомодации к дефектам в сложных дискретно-событийных системах ответственного назначения, описываемых моделью нечеткого конечного автомата. Решение задачи предполагает формирование управления, обеспечивающего полную развязку от вызываемых дефектами воздействий. Схема отказоустойчивого управления содержит ряд каналов, активизируемых в зависимости от диагностированного дефекта. Каждый канал включает два основных блока: 1) вспомогательный детерминированный конечный автомат – наблюдатель, формирующий оценку нечеткого вектора возможностей перехода системы в различные состояния, 2) преобразователь, формирующий вход управляемой системы на основе нового внешнего входа и состояния наблюдателя. Для разработки методов нахождения описания этих блоков и нового входа предлагается комплексный подход (парная алгебра нечетких покрытий), отличительной особенностью которого является совместное использование математических конструкций парной алгебры покрытий и нечеткой логики.

Ключевые слова: отказоустойчивое управление, аккомодация к дефектам, дискретно-событийные системы, нечеткие конечные автоматы, наблюдатели, парная алгебра нечетких покрытий, оптимизационный подход.

DOI: 10.7868/S2413977726100049

1. Введение

Требование отказоустойчивости, предъявляемое к управляемым системам ответственного назначения, предполагает способность таких систем адаптировать свое поведение к дефектам, возникающим в процессе функционирования. В соответствии с делением адаптивных систем на самонастраивающиеся и самоорганизующиеся принято выделять два принципиально различных подхода к обеспечению отказоустойчивости. Первый подход (самонастройка или аккомодация к дефектам) связан с формированием закона отказоустойчивого управления, при котором система с дефектами функционирует, сохраняя свои важнейшие показатели в допустимых пределах. Второй подход

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 25-19-00590, <https://rscf.ru/project/25-19-00590/>).

(самоорганизация) подразумевает внесение структурных изменений в саму систему, ее реконфигурацию с целью удаления отказавших элементов и использования резервных.

В настоящей статье рассматривается задача аккомодации к дефектам. В монографии [1] для решения этой задачи предложен подход, предусматривающий выполнение следующих этапов: 1) обнаружение дефектов, 2) локализацию (определение места возникновения дефекта), 3) идентификацию (определение величины дефекта), 4) построение модели неисправной системы и, наконец, 5) формирование на основе построенной модели закона отказоустойчивого управления. В цитируемой выше монографии предложенный подход к аккомодации был ориентирован на использование математических моделей управляемых систем в виде линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для реализации этапов 1–3 предполагалось использовать хорошо разработанные для линейных динамических систем методы решения диагностических задач, а нахождение закона управления (этап 5) осуществлять методами оптимального управления.

Эффективность аккомодации к дефектам в первую очередь определяется оперативностью формирования закона отказоустойчивого управления. Поэтому возможность сокращения временных затрат на реализацию каждого из этапов аккомодации, или даже исключение отдельных этапов, играет важную роль для повышения эффективности аккомодации. Вторым фактором, оказывающим влияние на эффективность аккомодации, – это точность модели управляемой системы, используемой для формирования закона отказоустойчивого управления. Последнее ведет к необходимости применения нелинейных динамических моделей, наиболее точно описывающих поведение реальных систем, а также робастных методов решения диагностических задач и задач отказоустойчивого управления, позволяющих снижать эффект от воздействия неконтролируемых факторов (внешние воздействия, ошибки моделей).

Отличительной особенностью ряда работ (см., например, [2, 3]) являлось применение адаптивных наблюдателей (оценивающих одновременно состояние и параметры системы) и методов формирования закона отказоустойчивого управления, использующих скользящие режимы. Тем самым обеспечивались приемлемые временные затраты на реализацию этапов аккомодации.

В [4] для управляемых систем, описываемых моделями в виде нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, был предложен подход, не требующий выполнения третьего и четвертого этапов. Особенностью этого подхода являлось использование закона управления, обеспечивающего полную развязку от вызываемых дефектами эффектов. В [5] этот подход был распространен на управляемые системы, описываемые моделями с дискретным временем в виде нелинейных разностных уравнений.

Помимо упомянутых выше классов управляемых систем с непрерывным или дискретным временем, описываемых линейными или нелинейными диф-

ференциальными или разностными уравнениями, существует важный класс так называемых дискретно-событийных систем (ДСС) [6, 7]. К ДСС относятся не только системы, естественным образом попадающие в этот класс (например, цифровые системы обработки информации и управления). Многие сложные системы, традиционно относящиеся к непрерывным, как то: физические, технические (в том числе человеко-машинные) и социально-экономические, могут рассматриваться как ДСС на верхнем уровне своей иерархии.

Отличительные особенности ДСС состоят в следующем:

1. ДСС являются дискретными по времени и значениям переменных состояния.

2. Пространство состояний ДСС конечно; состояния могут иметь различное смысловое содержание, например: ДСС простаивает, ДСС работает в определенном режиме (возможно обусловленном дефектом в системе), работа ДСС завершена и т.п.

3. Функционирование ДСС определяется событиями, которые могут быть следствиями некоторых внешних воздействий (входов или команд), а также дефектов, например: команда “приступить к работе”, команда “изменить режим работы исправной ДСС”, команда “осуществить коррекцию закона управления при обнаружении в ДСС некоторого дефекта”, команда “завершить работу ДСС” и т.п.

4. ДСС, как правило, ведет себя случайным образом, что связано с возможностью реализации различных переходов из одного состояния в другое, инициируемых одним и тем же событием.

Для описания ДСС с целью последующего решения диагностических задач или задач отказоустойчивого управления наиболее часто привлекаются следующие математические модели [8]:

- 1) детерминированные конечные автоматы,
- 2) вероятностные конечные автоматы и марковские цепи,
- 3) сети Петри.

Настоящая статья фокусируется на использовании моделей конечного автомата (КА). При этом предполагается, что входы и выходы КА формируются как наблюдаемые события (внешние и внутренние соответственно), в то время как возникновение дефекта в ДСС рассматривается как непосредственно ненаблюдаемое внутреннее событие. Решение задачи аккомодации к дефектам в ДСС на основе модели детерминированного КА (ДКА) и принципа полной развязки было получено в [9]. В основе этого решения лежит использование математического аппарата парной алгебры разбиений [10].

В тех случаях, когда ДКА-модель ДСС отсутствует, помимо модели в виде вероятностного КА также могут использоваться модели недетерминированного и нечеткого КА (НДКА и НЧКА соответственно). Использование недетерминированных и нечетких моделей (по сравнению с вероятностными) позволяет сократить объем необходимых вычислений, что приводит к снижению временных затрат на аккомодацию. Модели НДКА и НЧКА учитывают

ситуацию, когда для некоторого состояния и некоторого входа автомата могут быть реализованы переходы в различные последующие состояния. При этом если в случае НДКА нельзя отдать приоритет возможности реализации того или иного перехода, то в случае НЧКА, пользуясь дополнительной (например, статистической) информацией, экспертными оценками, результатами обучения и т.п., можно говорить о степени уверенности в осуществлении каждого из возможных переходов.

Целью настоящей статьи является развитие результатов работы [9] на случай НЧКА–моделей ДСС. Решаемая задача состоит в разработке методов формирования закона отказоустойчивого управления, ориентированных на использование НЧКА–моделей ДСС. Для ее решения привлекаются математические конструкции парной алгебры покрытий [10], нечеткой логики [11], а также понятия нечеткого автомата [12] и его детерминизатора [13].

2. Постановка задачи

Пусть при исправной работе ДСС описывается НЧКА–моделью вида

$$(1) \quad A = (U, X, Y, \delta, \lambda, x(0)),$$

где $U = \{u_1, \dots, u_m\}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$ – конечные множества входов, состояний и выходов соответственно, $x(0) \in X$ – известное начальное состояние, $\delta : X \times U \rightarrow \mu(X)$ и $\lambda : X \rightarrow \mu(Y)$ – соответственно нечеткие функции переходов и выходов; $\mu(X) \in \{\mu(x_i) \in [0, 1], 1 \leq i \leq n\}$ и $\mu(Y) \in \{\mu(y_j) \in [0, 1], 1 \leq j \leq l\}$ – нечеткие множества. Для нечеткой функции переходов δ будем использовать матричное задание, при котором переходы, осуществляемые под воздействием входа $u_k \in U$, описываются матрицей M^k размера $n \times n$, элемент которой $M_{i,j}^k \in [0, 1]$ характеризует степень уверенности в том, что автомат A из состояния $x_i \in X$ под воздействием входа u_k перейдет в состояние $x_j \in X$. Обозначим через $S(U)$ множество всех матриц M^k , $1 \leq k \leq m$. Для задания нечеткой функции выхода λ будем использовать матрицу L размера $n \times l$, элемент которой $L_{i,j}$ определяет степень уверенности в том, что выход $y_i \in Y$ формируется автоматом A в состоянии $x_j \in X$ (один и тот же выход может быть сформирован при различных состояниях ДСС). Обозначим через $S(Y)$ множество всех строк L_i , $1 \leq i \leq l$ матрицы L .

Модель (1) соответствует частному случаю НЧКА с детерминированными входами, и нечеткими функциями переходов и выходов [15]. Если обоснованное задание степени уверенности в возможности осуществления переходов затруднено, можно поступить следующим образом: элемент матрицы $M_{i,j}^k$, соответствующий допустимому переходу, задается равным единице, в то время как элемент этой матрицы, соответствующий недопустимому переходу, принимается равным нулю. Тем самым будет осуществлен переход от НЧКА–модели ДСС к ее НДКА–модели.

Пусть $X_{i,k}, X_{i,k} \subseteq X$, – множество всех состояний, достижимых из состояния $x_i \in X$ под воздействием входа $u_k \in U$. Предположим, что дефект f_s , $1 \leq s \leq N$, в ДСС на модели (1) может быть представлен искажением функции перехода δ таким, что вместо допустимого перехода из состояния x_i в состояние $x_j \in X_{i,k}$ под воздействием входа $u_k \in U$ реализуется недопустимый переход в состояние $x_t \notin X_{i,k}$. Этот факт будем отражать следующим образом: $f_s : (x_j \rightarrow x_t)_{i,k}$. При этом матрицу M_s^k ДСС с дефектом f_s получим изменением значения элемента $M_{i,t}^k$ матрицы M^k исправной ДСС с нуля на единицу. В дальнейшем будем придерживаться гипотезы об однократных дефектах из заданного списка $F = \{f_1, \dots, f_N\}$.

Рассмотрим последовательность и содержание действий, необходимых для формирования закона управления, обеспечивающего полную развязку от эффектов, вызываемых дефектом f_s . Введем НЧКА модель ДСС с дефектом f_s

$$(2) \quad A_s = (U, X, Y, \delta_s, \lambda, x(0)).$$

Функция переходов δ_s модели (2) может быть получена путем дополнения множества переходов, определяемых функцией δ модели (1), переходом, иницируемым дефектом $f_s \in F$, посредством изменения матрицы M^k описанным выше способом. Модель (2) в силу особенностей построения матрицы M^k учитывает возможность допустимого перехода при исправной работе ДСС, но также предусматривает и возможность недопустимого перехода в состояние, обусловленное дефектом в ДСС. Как следствие, можно говорить об определенном соответствии между поведением модели (2) и поведением как исправной ДСС, так и ДСС с дефектом.

Следуя [9], предположим, что вход u , обеспечивающий аккомодацию к дефекту f_s , формируется в соответствии с законом

$$(3) \quad u = g(x_0, y, u_*),$$

где g – подлежащее определению отображение, u_* – новый вход, x_0 – состояние детерминированного КА

$$(4) \quad A_0 = (X_0, U \times Y, \delta_0, x_0(0)),$$

функция переходов δ_0 которого определяется отображением $X_0 \times U \times Y \rightarrow X_0$ и находится по результатам детерминизации автомата A_s , $x_0(0) \in X_0$ – начальное состояние автомата A_0 , функция выхода автомата A_0 как самостоятельный объект не рассматривается. Заметим, что описание детерминированного КА A_0 , называемого ниже наблюдателем, не зависит от того, присутствует ли в ДСС дефект f_s или нет.

Нахождение закона управления, обеспечивающего аккомодацию ДСС, описываемой моделью (1), к дефекту $f_s \in F$ предполагает последовательное решение следующих задач:

- 1) построение модели (2) ДСС с дефектом f_s ,
- 2) нахождение наблюдателя (4) путем детерминизации автомата (2),
- 3) нахождение отображения g и формирование закона управления (3).

Необходимость решения этих задач определяет структуру статьи. В разделе 3 рассматривается подход к детерминизации НЧКА методами нечеткой логики и выявляется его недостаток. Для формирования теоретической базы с целью создания подхода, позволяющего устранить этот недостаток, в разделе 4 осуществляется разработка алгебры нечетких покрытий, а в разделе 5 предлагается алгоритм синтеза наблюдателя. Вопросы формирования закона отказоустойчивого управления обсуждаются в разделе 6. Иллюстративный пример приведен в разделе 7. Раздел 8 завершает статью.

3. Детерминизация НЧКА A_s

Напомним ряд операций нечеткой логики, играющих важную роль для дальнейшего изложения. Нечеткая матрица $B = \{B_{ij}\}$ – это матрица с элементами $B_{ij} \in [0, 1]$. Следовательно, введенные выше матрицы из множества $S(U)$ суть нечеткие матрицы. Пусть теперь B и C – нечеткие матрицы размера $a \times b$ и $b \times c$ соответственно. Произведение нечетких матриц определяется формулой [13]

$$(BC)_{ij} = \max_{ih} \min(B_{ih}C_{hj}) = \max(\min(B_{i1}C_{1j}), \dots, \min(B_{ib}C_{bj}),$$

где $1 \leq i \leq a$, $1 \leq h \leq b$, $1 \leq j \leq c$. Эта формула является обобщением известной формулы умножения матриц [16, с. 24]; она получается заменой произведения элементов матриц операцией нахождения минимума, а суммы элементов – операцией нахождения максимума. Рассмотрим простой пример.

Пример 1. Пусть матрицы B и C имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

После проведенных вычислений получим:

$$(BC)_{11} = \max(\min(0,1 \ 0,6), \min(0,9 \ 0,4)) = 0,4,$$

$$(BC)_{12} = \max(\min(0,1 \ 0,3), \min(0,9 \ 0,8)) = 0,8,$$

$$(BC)_{21} = \max(\min(0,7 \ 0,6), \min(0,9 \ 0,4)) = 0,6,$$

$$(BC)_{22} = \max(\min(0,7 \ 0,3), \min(0,2 \ 0,8)) = 0,3.$$

В результате произведение нечетких матриц и принимает вид

$$BC = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через E множество нечетких векторов размера $1 \times n$, компоненты которых могут принимать значения на интервале $[0, 1]$. Пусть $A' = (U, X, \delta)$ – нечеткий полуавтомат (т.е. автомат A без функции выхода), $S(U)$ – множество нечетких матриц перехода автомата и сигнатура (множество допустимых операций) Σ включает все операции, предполагающие

умножение нечеткого $1 \times n$ вектора справа на матрицу из множества $S(U)$. Пусть также $E^0 \subseteq E$ – множество всех единичных векторов размера $1 \times n$, называемых порождающими состояниями детерминизатора. Замыкание $[E]_\Sigma$ множества E относительно сигнатуры Σ есть множество всех векторов (включающее сами векторы множества E), которые можно получить, применяя операции из сигнатуры Σ к векторам из E . Для построения замыкания предлагается использовать следующий

Алгоритм 1 (построение замыкания).

1. Положить $i = 0$.
2. Найти множество векторов $E^{i+1} = E^i \cup [E^i]_\Sigma$.
3. Если $E^{i+1} = E^i$ положить $[E]_\Sigma = E^i$. Конец.
4. Положить $i = i + 1$ и перейти к п.2.

Согласно [13] детерминизатором $D(A')$ НЧКА A' называется ДКА, описываемый тройкой

$$(5) \quad D(A') = (S(X), U, \delta_D),$$

где $S(X) = [E]_{S(U)}$, $\delta_D : S(X) \times S(U) \rightarrow S(X)$ – функция перехода детерминизатора, определяемая соотношением

$$(6) \quad \delta_D(\mu_i, u_k) = \mu_i M^k, \quad \mu_i \in S(X), \quad M^k \in S(U).$$

Таким образом, каждое состояние μ_i детерминизатора ассоциируются с некоторым нечетким вектором степеней принадлежности, характеризующим возможность достижения определенных состояний управляемой ДСС в процессе ее работы.

В [14] приведено соотношение, определяющее верхнюю граничную оценку максимального числа состояний детерминизатора

$$(7) \quad \#S(X) \leq q^n - 1,$$

где символ $\#$ обозначает мощность множества; q – число различных значений элементов нечетких матриц из множества $S(U)$; n , как и ранее, – число состояний НЧКА.

Непосредственно из соотношения (7) следует, что число состояний детерминизатора может существенно превосходить число состояний исходного автомата и экспоненциально растет с ростом числа состояний последнего. Если этот факт минимально влияет на решение диагностических задач, поскольку их решение осуществляется в реальном времени и не требует предварительного нахождения полного описания детерминизатора [14], то в случае решения задачи аккомодации потребуются проведение дополнительных вычислений для нахождения отображения g и выбора управления u_* на базе описания детерминизатора. Объем и реализуемость вычислений будут прямо связаны с размерностью детерминизатора. Следствием может быть ограничение на размерность модели исходной системы. С целью преодоления этого

ограничения предлагается при синтезе наблюдателя A_0 в качестве множества его состояний вместо замыкания E использовать некоторое множество, размерность которого не превышает размерности исходной модели (1), сохраняя требование замкнутости относительно операции из сигнатуры Σ . Для нахождения такого множества ниже вводится парная алгебра нечетких покрытий.

Другим отличием наблюдателя от детерминизатора является то, что функция переходов наблюдателя также зависит от выхода ДСС, что позволит уточнять значения степеней принадлежности – компонент нечетких векторов, ассоциируемых с x_0 , с учетом дополнительной информации, содержащейся в выходах ДСС. Последнее оправдывает использование термина “наблюдатель” для автомата A_0 .

4. Парная алгебра нечетких покрытий

В [17] для решения задачи детерминизации НДКА были введены конструкции парной алгебры покрытий. Ниже эти конструкции распространяются на нечеткие множества, что позволит предложить подход к детерминизации НЧКА, учитывающий информацию, содержащуюся в нечеткой модели ДСС.

Напомним, что покрытием π множества X называется множество его подмножеств (блоков покрытия) $\pi = \{B_{\pi,1}, \dots, B_{\pi,\nu}\}$ таких, что

$$B_{\pi,k} \subseteq X, \quad \bigcup_{k=1}^{\nu} B_{\pi,k} = X, \quad B_{\pi,k} \subseteq B_{\pi,j} \Rightarrow B_{\pi,k} = B_{\pi,j}.$$

Заметим, что в случае выполнения дополнительного условия

$$B_{\pi,k} \cap B_{\pi,j} = \emptyset, \quad k \neq j,$$

приведенные выше конструкции определяют разбиение множества X . Множество всех покрытий множества X обозначим $\mathcal{P}_X$.

Далее будем предполагать, что блоки рассматриваемых ниже покрытий суть нечеткие множества. Задание таких блоков удобно осуществлять вектор-строкой функций принадлежности. При этом запись $\mu_{B_{\pi,j}} = (0, 0,1, 0,7, 0, 0, 0,5)$ будет означать, что мощность множества X равна шести, j -й блок покрытия π содержит состояния x_2, x_3, x_6 , ненулевые значения степеней принадлежности этих состояний j -му блоку покрытия равны $\mu_{B_{\pi,j}}(x_2) = 0,1$, $\mu_{B_{\pi,j}}(x_3) = 0,7$, $\mu_{B_{\pi,j}}(x_6) = 0,5$.

Для осуществления операций над покрытиями потребуется находить пересечение и объединение их блоков. Пусть π и σ – некоторые покрытия множества X . В соответствии с правилами осуществления операций над нечеткими множествами [14] запишем

$$\begin{aligned} \mu_{B_{\pi,j} \cap B_{\sigma,k}}(x_i) &= \min(\mu_{B_{\pi,j}}(x_i), \mu_{B_{\sigma,k}}(x_i)), \\ \mu_{B_{\pi,j} \cup B_{\sigma,k}}(x_i) &= \max(\mu_{B_{\pi,j}}(x_i), \mu_{B_{\sigma,k}}(x_i)). \end{aligned}$$

Будем говорить, что покрытие π меньше или равно покрытию σ и обозначать $\pi \leq \sigma$, если для каждого блока $B_{\pi,j}$ покрытия π всегда найдется блок $B_{\sigma,k}$ покрытия σ такой, что $B_{\pi,j} \subseteq B_{\sigma,k}$. Так как при этом $B_{\pi,j} \cup B_{\sigma,k} = B_{\sigma,k}$, выполнение включения $B_{\pi,j} \subseteq B_{\sigma,k}$ требует доминирования нечетким множеством $B_{\sigma,k}$ нечеткого множества $B_{\pi,j}$, т.е. выполнения условия

$$(8) \quad \mu_{B_{\pi,j}}(x_i) \leq \mu_{B_{\sigma,k}}(x_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Существуют два специальных покрытия, обозначаемые как **0** и **1**, которые являются разбиениями такими, что каждый блок разбиения **0** содержит только один элемент множества X , в то время как разбиение **1** включает только один блок, содержащий все элементы множества X . Для произвольного покрытия π множества X выполняется

$$\mathbf{0} \leq \pi \leq \mathbf{1}.$$

Известно [10], что множество всех покрытий множества X с отношением частичного порядка образует решетку. Следовательно, для каждой пары покрытий π и σ можно найти два покрытия $\inf(\pi, \sigma)$ и $\sup(\pi, \sigma)$. Принято обозначать эти покрытия как $\pi \times \sigma$ и $\pi + \sigma$ – соответственно произведение и сумма покрытий. Для вычисления произведения и суммы покрытий используем правила, сформулированные в [17].

1. Каждый блок покрытия $\pi \times \sigma$ представляет собой пересечение некоторых блоков покрытий π и σ .
2. Каждый блок покрытия $\pi + \sigma$ представляет собой объединение пересекающихся блоков покрытий π и σ .

Обратим внимание на одну особенность, которая может возникать при нахождении результата операции $\times$. Пусть при осуществлении этой операции по правилам традиционной алгебры покрытий [10] результатом является нулевое разбиение. Однако при формальном применении описанного выше способа с учетом функций принадлежности возможно появление таких блоков нулевого разбиения, для которых значения функций принадлежности состояний этим блокам будет строго меньше единицы. Это будет свидетельствовать о возникновении сингулярности в процессе преобразования НЧКА-модели системы (например, при ее детерминизации). При необходимости возможным способом преодоления данной проблемы является переход (полный или частичный) к НДКА-модели системы путем замены ненулевых значений соответствующих функций принадлежности на единичные.

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и покрытия $\pi = \{(x_1); (x_3); (x_2, x_4); (x_2, x_5, x_6)\}$, $\sigma = \{(x_1); (x_2, x_5); (x_3, x_4); (x_4, x_6)\}$ с функциями принадлежности состояний соответствующим блокам $\mu_{B_{\pi,4}}(x_2) = 0,5$; $\mu_{B_{\sigma,3}}(x_4) = 0,3$; остальные функции принадлежности равны единице. Применяя правило нахождения пересечения нечетких множеств к блокам покрытий π и σ , получим функции принадлежности $\mu_{B_{\pi,1} \cap B_{\sigma,1}}(x_1) = \mu_{B_{\pi,2} \cap B_{\sigma,3}}(x_3) = \mu_{B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,2}}(x_2) = \mu_{B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,4}}(x_4) = \mu_{B_{\pi,4} \cap B_{\sigma,4}}(x_6) = 1$, $\mu_{B_{\pi,4} \cap B_{\sigma,2}}(x_5) = 0,5$, $\mu_{B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,3}}(x_4) = 0,3$. Функции принадлежности состояний пустым множе-

ствам, получаемым в результате пересечения блоков разбиений π и σ , равны нулю. Заметим, что $B_{\pi,3\cap\sigma,2} \subseteq B_{\pi,4\cap\sigma,2}$. Следуя определению покрытия, необходимо заменить оба этих блока одним доминирующим их блоком $B_{\pi,3\cap\sigma,2} \cup B_{\pi,4\cap\sigma,2}$. Кроме того, нечеткое множество $B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,4}$ доминирует нечеткое множество $B_{\pi,3} \cap B_{\sigma,3}$. В результате будет получено разбиение $\pi \times \sigma = \{(x_1); (x_3); (x_2, x_5); (x_4); (x_6)\}$.

Найдем теперь сумму покрытий $\pi + \sigma$. Осуществляя объединение пересекающихся блоков покрытий, получим:

$$\begin{aligned} \mu_{B_{\pi,1} \cup B_{\sigma,1}}(x_1) &= \mu_{B_{\pi,2} \cup B_{\sigma,3}}(x_3) = \mu_{B_{\pi,2} \cup B_{\sigma,3}}(x_4) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2}}(x_2) = \\ &= \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,2}}(x_4) = \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,2}}(x_5) = \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}}(x_3) = \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}}(x_4) = \\ &= \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2}}(x_2) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2}}(x_5) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2}}(x_6) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_2) = \\ &= \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_3) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_4) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_5) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,3}}(x_6) = \\ &= \mu_{B_{\pi,2} \cup B_{\sigma,4}}(x_2) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}}(x_5) = \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}}(x_6) = 1, \\ \mu_{B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}}(x_2) &= 0,5, \quad \mu_{B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}}(x_3) = 0,3. \end{aligned}$$

При построении результирующего покрытия будем учитывать, что $B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}$ доминирует $B_{\pi,2} \cup B_{\sigma,3}$, а также что $B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,2} \subseteq B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}$, $B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,4} \subseteq B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}$ и $B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2} \subseteq B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,4}$. Как следствие, в качестве самостоятельных блоков покрытия $\pi + \sigma$ выбираются доминирующие нечеткие множества $B_{\pi,3} \cup B_{\sigma,3}$ и $B_{\pi,3} \cup B_{\pi,4} \cup B_{\sigma,2} \cup B_{\sigma,4}$. Окончательно получаем покрытие $\pi + \sigma = (x_1); (x_2, x_3, x_4); (x_2, x_4, x_5, x_6)$, второй блок которого является нечетким множеством, так как $\mu_{B_{\pi+ \sigma,2}}(x_2) = 0,5$.

Пусть π и σ – некоторые покрытия множества X . Для удобства дальнейшего изложения приведем концентрированное описание только основных (используемых в настоящей статье) конструкций парной алгебры покрытий – бинарного отношения Δ , понятия парности покрытий и оператора $\mathbf{m}$. Более полную информацию по этому вопросу можно найти, например, в [10].

Говорят, что покрытия π и σ удовлетворяют отношению Δ , $(\pi, \sigma) \in \Delta$, и образуют пару, если

$$(9) \quad x \equiv x'(\pi) \Rightarrow \delta(x, u_k) \equiv \delta(x', u_k)(\sigma) \quad \forall u_k \in U.$$

Пусть $x, x' \in B_{\pi,j}$. Тогда согласно [17] для каждого $u_k \in U$ можно записать $\delta(x, u_k), \delta(x', u_k) \in B_{\sigma,j}^k$, где вектор функций принадлежности $\mu_{B_{\sigma,j}^k}$ определяется соотношением.

$$(10) \quad \mu_{B_{\sigma,j}^k} = \mu_{B(\pi,j)} M^k, \quad M^k \in M(U).$$

Для заданного покрытия π могут существовать несколько покрытий, удовлетворяющих отношению $(\pi, \sigma) \in \Delta$. В частности, $\pi, \mathbf{1} \in \Delta$ справедливо для любого покрытия π . Введем оператор $\mathbf{m}$, ставящий в однозначное соответствие покрытию π покрытие $\mathbf{m}(\pi)$ следующим образом:

$$(\pi, \mathbf{m}(\pi)) \in \Delta, \quad (\pi, \sigma) \in \Delta \Rightarrow \mathbf{m}(\pi) \leq \sigma.$$

Способ вычисления оператора $\mathbf{m}(\pi)$ определяется следующим алгоритмом.

Алгоритм 2 (вычисление оператора $\mathbf{m}(\pi)$).

1. Для каждого $u_k \in U$ и каждого j , $1 \leq j \leq \nu$, где ν – число блоков покрытия π , воспользовавшись (10), найти подмножество $B_{\sigma,j}^k$.

2. Записать множество непустых подмножеств $Q = \{B_{\sigma,j}^k, 1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq \nu\}$.

3. Сформировать покрытие $\mathbf{m}(\pi)$ из Q путем объединения тех подмножеств, для которых выполняется вхождение одного из них в другое. Конец.

Пример 3. Рассмотрим НЧКА, описываемый матрицами

$$M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и положим $\pi = \mathbf{0}$. Найдем $\sigma = \mathbf{m}(\pi)$. При выполнении первого пункта алгоритма 2, взяв за основу первый блок покрытия π , $\mu_{B_{\pi,1}} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, получим вектор-функцию принадлежности $\mu_{B_{\sigma,1}^1} = \mu_{B_{\pi,1}} M^1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, соответствующую подмножеству $B_{\sigma,1}^1 = \{x_2\}$. Далее находятся вектор-функции получим вектор-функцию принадлежности $\mu_{B_{\sigma,1}^1} = \mu_{B_{\pi,1}} M^1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, соответствующую подмножеству $B_{\sigma,1}^1 = \{x_2\}$. Далее находятся вектор-функции принадлежности $\mu_{B_{\sigma,1}^2} = \mu_{B_{\pi,1}} M^2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ и $\mu_{B_{\sigma,1}^3} = \mu_{B_{\pi,1}} M^3 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, соответствующие пустым подмножествам $B_{\sigma,1}^2$ и $B_{\sigma,1}^3$. Для остальных блоков покрытия π , проводя аналогичные вычисления, найдем непустые нечеткие подмножества с функциями принадлежности $\mu_{B_{\sigma,1}^3} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_{\sigma,2}^2} = (0 \ 0 \ 0,7 \ 0,3 \ 0)$, $\mu_{B_{\sigma,2}^3} = (1 \ 0,7 \ 0 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_{\sigma,3}^2} = (0 \ 0,4 \ 0,6 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_{\sigma,3}^3} = (0 \ 0 \ 0,9 \ 0 \ 0,1)$ и $\mu_{B_{\sigma,4}^3} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$, $\mu_{B_{\sigma,5}^3} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$. В соответствии со вторым пунктом алгоритма 2 запишем $Q = \{B_{\sigma,5}^3; B_{\sigma,1}^1; B_{\sigma,3}^2; B_{\sigma,2}^2; B_{\sigma,3}^3; B_{\sigma,4}^3\} = \{(x_1); (x_2); (x_2, x_3); (x_3, x_4); (x_5)\}$. Выполняя третий пункт алгоритма, отметим, что $B_{\sigma,1}^1 \subseteq B_{\sigma,3}^2$ и $B_{\sigma,4}^3 \subseteq B_{\sigma,3}^3$. Заменим вышеуказанные нечеткие множества доминирующими нечеткими множествами $B^* = B_{\sigma,1}^1 \cup B_{\sigma,3}^2$ и $B^{**} = B_{\sigma,4}^3 \cup B_{\sigma,3}^3$ с функциями принадлежности соответственно $\mu_{B^*} = (0 \ 1 \ 0,6 \ 0 \ 0)$ и $\mu_{B^{**}} = (0 \ 0 \ 0,9 \ 0 \ 0,1)$. Окончательно получим нечеткое покрытие $\sigma = \{B_{\sigma,5}^3; B^*; B_{\sigma,3}^2; B^{**}\} = \{(x_1); (x_2, x_3); (x_3, x_4); (x_3, x_5)\}$ с соответствующими функциями принадлежности.

Заметим, что в отличие от случая ДКА, для случаев НДКА или НЧКА всегда выполняется $\mathbf{m}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.

5. Синтез наблюдателя A_0

Для произвольного покрытия φ , проводя аналогию с конструкциями алгебры функций в приложении к непрерывным динамическим системам [4],

введем понятия δ -инвариантности

$$(\varphi, \varphi) \in \Delta$$

и (λ, δ) -инвариантности

$$(11) \quad (\pi_\lambda \times \varphi, \varphi) \in \Delta,$$

где блоки нечеткого покрытия π_λ задаются строками матрицы L . Несложно видеть, что понятие δ -инвариантности является частным случаем (при $\pi_\lambda = \mathbf{1}$) понятия (λ, δ) -инвариантности. Именно последнее понятие будет использоваться при синтезе наблюдателя A_0 . Информационный смысл этого понятия состоит в следующем [10]: пусть в некоторый дискретный момент времени имеется полная информация о выходе ДСС или, что то же самое, информация о текущем состоянии ДСС с точностью до некоторого блока покрытия π_λ , а также дополнительная информация о текущем состоянии с точностью до некоторого блока покрытия φ , тогда гарантируется возможность вычисления состояния ДСС в следующий дискретный момент времени с точностью до некоторого блока покрытия φ .

Для нахождения (λ, δ) -инвариантного покрытия такого, что

$$(12) \quad \varphi^0 \leq \varphi,$$

где φ^0 – некоторое заданное покрытие, может быть использован алгоритм, аналогичный алгоритму работы [15]; при этом подразумевается, что вычисление операций и операторов алгебры покрытий осуществляется с использованием введенных выше правил нечеткой логики.

Алгоритм 3 (нахождение (λ, δ) -инвариантного покрытия φ).

1. Принять $i = 0$ задать φ^0 .
2. Вычислить покрытие

$$(13) \quad \varphi^{i+1} = \varphi^i + \mathbf{m}(\pi_\lambda \times \varphi),$$

если $\varphi^{i+1} = \varphi^i$, то перейти к пункту 3, в противном случае положить $i := i + 1$ и повторить выполнение пункта 2.

3. Принять $\varphi^{i+1} := \varphi^i$. Конец.

Сходимость алгоритма 3 и свойство получаемого покрытия определяются следующей теоремой.

Теорема 1 (теорема сходимости). *Существует конечное $i = i_{\max}$, такое что покрытие $\varphi = \varphi^i = \varphi^{i+1} = \varphi^{i_{\max}}$, определяемое согласно (13), является наименьшим, удовлетворяющим условиям (11) и (12).*

Доказательство. Приведено в [9] для случая разбиений. В случае использования алгебры покрытий доказательство остается прежним [17].

Введем операцию

$$(14) \quad < L_i, \mu_{B(\varphi, j)} > = (\min(L_{i,1}, \mu_{B_{\varphi,j}}(x_1)), \dots, \min(L_{i,n}, \mu_{B_{\varphi,j}}(x_n))).$$

Результат операции определяет вектор-строку функций принадлежности состояний ДСС блоку покрытия $\pi_\lambda \times \varphi$, получаемому в результате пересечения i -го блока покрытия π_λ и j -го блока покрытия φ . Тогда, имея в виду (10), можно записать

$$(15) \quad \mu_{B_{\pi_\lambda \times \varphi^i}^k} = \langle L_i, \mu_{B_{\varphi^i_j}} \rangle > M_s^k,$$

где $B_{\pi_\lambda \times \varphi^i}^k$ – подмножество из п. 2 алгоритма 2, записанное для случая вычисления оператора $\mathbf{m}(\pi_\lambda \times \varphi^i)$. Соотношение (15) удобно использовать при вычислении нечеткого покрытия φ^{i+1} в соответствии с формулой (13).

Положим $\varphi^0 = \mathbf{0}$ и, воспользовавшись алгоритмом 2, найдем покрытие φ . Поставим в соответствие каждому состоянию $x_{0,j}$ наблюдателя блок покрытия φ , используя для этого запись в виде единичного вектора размера $1 \times n_0$, j -й элемент которого равен единице. Здесь n_0 , $n_0 \leq n$, – число блоков покрытия φ и множество X_0 , представляющее множество единичных векторов, имеет размерность, не превышающую размерность множества состояний исходного автомата A .

Равенство

$$(16) \quad \langle L_i, \mu_{B_{\varphi,j}} \rangle = 0$$

будет говорить о несовместимости i -го выхода ДСС и j -го состояния ДКА A_0 .

Функцию переходов наблюдателя δ_0 будем задавать совокупностью матриц $M_0^{k,i}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq l$, каждая из которых соответствует определенному сочетанию значений входов и выходов ДСС. Найдем

$$(17) \quad \mu_{B_{\varphi,j}^+} = \langle L_i, \mu_{B_{\varphi,j}} \rangle > M_s^k.$$

В случае выполнения включения

$$(18) \quad B_{\varphi,j}^+ \subseteq B_{\varphi,t}$$

можно утверждать, что состояния ДСС из блока $B_{\varphi,j}$ покрытия φ при выходе y_i под воздействием входа u_k переводятся в состояния, принадлежащие блоку $B_{\varphi,t}$. Это позволяет свести нахождение матриц $M_0^{k,i}$ к вычислению (17) и проверке выполнения включения (18) для различных сочетаний входов и выходов ДСС: $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq l$. Такая проверка может быть осуществлена с помощью следующего алгоритма, в котором индексы j и t соответствуют состояниям наблюдателя A_0 до и после перехода.

Алгоритм 4 (вычисление матриц $M_0^{k,i}$).

1. Положить $k = 1$.
2. Положить $i = 1$.
3. Принять $M_0^{k,i} = 0_{n_0 \times n_0}$.
4. Положить $j = 1$, $t = 1$.
5. Если выполняется (16), положить $j = j + 1$, $t = 1$ и перейти к выполнению п. 5.

6. Найти множество $B_{\varphi,j}^+$ по вектор-строке функций принадлежности, вычисляемой согласно (17).

7. Проверить выполнение включения (18). Если включение не выполняется, перейти к выполнению п. 9.

8. Записать “1” на место элемента матрицы $M_0^{k,i}(i, t)$, стоящего на пересечении j -й строки и t -го столбца. Перейти к п. 10.

9. Если $t = n_0$, положить $t = t + 1$ и вернуться к выполнению п. 7.

10. Если $j = n_0$, положить $j = j + 1$, $t = 1$ и перейти к п. 5.

11. Если $i = l$, положить $i = i + 1$ и перейти к п. 3.

12. Если $k = m$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 2.

13. Конец.

Алгоритм предполагает выполнение ряда вложенных циклов (внутри которых осуществляются элементарные действия над матрицами); общее число циклов не превышает lmn_0^2 , что характеризует его вычислительную сложность. Пункты 1–4 задают начальные значения индексов t, j, i и k , которые управляют последовательностью выполнения циклов в процессе реализации алгоритма. При выполнении пунктов 9–12 осуществляется корректировка и контроль предельных значений этих индексов, что гарантирует сходимость алгоритма. Поскольку все вычисления осуществляются off-line, реализация алгоритма для реальных систем не потребует значительных вычислительных ресурсов и может быть осуществлена с использованием обычного персонального компьютера. Работа основной части (пункты 5–8) алгоритма поясняется в следующем примере.

Пример 4. Пусть динамика ДСС при исправной работе описывается НЧКА–моделью из примера 3. Пусть также функция выхода ДСС задается нечеткой матрицей L . Предположим, что в ДСС возможен дефект $f_1 : (x_5 \rightarrow x_1)_{4,3}$. Как следствие, матрица M^3 примет вид матрицы M_1^3 . Приведем вид вновь введенных матриц для ДСС с дефектом (матрицы M^1 и M^2 сохраняют свой прежний вид):

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0,1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемой НЧКА–модели, воспользовавшись алгоритмом 3, найдем (λ, δ) -инвариантное покрытие при $\varphi^0 = 0$. Вычисление оператора $\mathbf{m}$ при этом осуществим с использованием алгоритма 2. Положив $i = 0$ и воспользовавшись (13), получим

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \mathbf{0} + \mathbf{m}(\lambda \times \mathbf{0}) = \mathbf{m}(\mathbf{0}) = \{B^{***}; B^*; B_{\sigma,2}^2; B^{**}\} = \\ &= \{(x_1, x_5); (x_2, x_3); (x_3, x_4); (x_3, x_5)\}, \end{aligned}$$

где $m_{B^{***}} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$. Продолжая вычисления согласно (13), можно показать, что $\varphi^2 = \varphi^1 + \mathbf{m}(\pi_\lambda \times \varphi^1) = \varphi^1$. В соответствии с п. 3 алгоритма 3 примем $\varphi = \varphi^1$.

Для удобства дальнейшего изложения иллюстрацию работы алгоритма 4 начнем с приведения ряда промежуточных результатов (см. табл. ниже). Таблица демонстрирует результаты проверки выполнения включения (18) (пп. 5–8 алгоритма 4).

Результаты работы алгоритма 4 (пункты 1–7)

$B_{\varphi 1} \cap B_{\pi_{\lambda 1}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 1} \cap B_{\pi_{\lambda 2}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 1} \cap B_{\pi_{\lambda 3}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$
$B_{\varphi 1}^+ \subseteq \quad B_{\varphi 2} \quad \emptyset \quad \emptyset$	$B_{\varphi 1}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad B_{\varphi 1}$	$B_{\varphi 1}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset$
$B_{\varphi 2} \cap B_{\pi_{\lambda 1}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 2} \cap B_{\pi_{\lambda 2}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 2} \cap B_{\pi_{\lambda 3}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$
$B_{\varphi 2}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 3} \quad \emptyset$	$B_{\varphi 2}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 3} \quad \emptyset$	$B_{\varphi 2}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 2} \quad B_{\varphi 4}$
$B_{\varphi 3} \cap B_{\pi_{\lambda 1}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 3} \cap B_{\pi_{\lambda 2}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 3} \cap B_{\pi_{\lambda 3}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$
$B_{\varphi 3}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad B_{\varphi 1}$	$B_{\varphi 3}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset$	$B_{\varphi 3}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 2} \quad B_{\varphi 4}$
$B_{\varphi 4} \cap B_{\pi_{\lambda 1}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 4} \cap B_{\pi_{\lambda 2}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$	$B_{\varphi 4} \cap B_{\pi_{\lambda 3}} \quad M^1 \quad M^2 \quad M^3$
$B_{\varphi 4}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset$	$B_{\varphi 4}^+ \subseteq B_{\varphi 2} \quad \emptyset \quad B_{\varphi 2} \quad B_{\varphi 1}$	$B_{\varphi 4}^+ \subseteq \quad \emptyset \quad B_{\varphi 2} \quad B_{\varphi 4}$

По горизонтали эта таблица разбита на четыре части, каждая из которых соответствует определенному блоку покрытия $B_{\varphi,j}$ (состоянию наблюдателя $x_{0,j}$), $1 \leq j \leq 4$, имеющему место до перехода. Каждая часть таблицы содержит две строки. При этом нечетные строки содержат описание аргументов: сочетания исходного блока покрытия $B_{\varphi,j}$ с блоками покрытия π_{λ} (соответствуют выходам ДСС) и используемыми при вычислении матрицами M_s^k (соответствуют входам ДСС). В четных строках приводятся блоки покрытия φ , соответствующие следующим состояниям наблюдателя, получаемым после реализации перехода. Основываясь на этой таблице, рассмотрим процесс нахождения строк матриц, описывающих динамику наблюдателя A_0 . Отметим, что после выполнения первых четырех пунктов алгоритма получим: $k = 1$, $i = 1$, $M_0^{1,1} = 0_{4 \times 4}$, $j = 1$, $t = 1$. Проверка равенства (16) в соответствии с п. 5 алгоритма в силу невыполнения этого равенства потребует перехода к п. 6. Вычисления согласно п. 6 и проверка включения (18) согласно п. 7 приводят к переходу к п. 9. Последующий возврат к п. 7 и проверка включения (18) подтвердят его выполнение для $j = 1$, $t = 2$. После выполнения п. 8 первая строка матрицы $M_0^{1,1}$ будет содержать единицу на второй позиции. Продолжая выполнение алгоритма 4 для других значений индекса j , $2 \leq j \leq 4$, несложно убедиться, что все остальные строки этой матрицы будут нулевыми. Таким образом, вид строк матрицы $M_0^{k,i}$ для некоторой пары входов и выходов полностью определяется таблицей. Так, элементы третьей строки матрицы $M_0^{k,2}$ равны нулю для всех значений индекса $k \in \{1, 2, 3\}$, в то время, как элементы четвертой строки матриц $M_0^{2,3}$, $M_0^{3,3}$ содержат единицу соответственно на второй и четвертой позициях.

6. Формирование закона управления

Предположим, что решается задача терминального управления ДСС, состоящая в переводе системы из начального состояния $x(0) \in X$ в некоторое конечное состояние x^r , $x^r \in X$. Отметим, что гарантировать решение этой

задачи, опираясь на единственную эталонную траекторию движения, невозможно в силу неопределенности реакции ДСС на одни и те же входные воздействия: можно говорить об управлении состояниями системы только с точностью до блоков некоторого покрытия множества X . В результате на практике может потребоваться существование нескольких допустимых траекторий с возможностью перехода от одной траектории к другой в зависимости от реакции ДСС. Задача формирования допустимых альтернативных траекторий тесно связана с исследованием специфики конкретной системы и подробно не рассматривается.

Если в ДСС диагностирован дефект f_s , упомянутым покрытием является покрытие φ [9]. Как следствие, первоначальная задача терминального управления замещается задачей перевода состояния системы из блока покрытия B_φ^0 , $x(0) \in B_\varphi^0$, в блок покрытия B_φ^r , $x^r \in B_\varphi^r$. Далее формируется требуемая траектория движения в терминах блоков покрытия φ , представляющая собой последовательность переходов: $B_\varphi^0 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow \dots \rightarrow B_\varphi^r$, где хотя бы одно состояние последующего блока достижимо из хотя бы одного состояния предыдущего блока. Отметим, что на реализацию заданной последовательности не будут влиять ошибки выполнения переходов ДСС, обуславливаемые дефектом f_s , поскольку возникающие искажения ее состояния будут находиться в пределах одного и того же блока покрытия φ . Отметим также, что этой последовательности однозначно соответствует определенная последовательность переходов наблюдателя $A_0 : x_0^0 \rightarrow x_0^1 \rightarrow \dots \rightarrow x_0^r$.

Следуя [9], будем связывать значение генерируемого нового входа u_* с текущим значением функции перехода наблюдателя δ_0 или, что то же самое, с блоком покрытия $B_{\varphi,t}$, состояния которого достижимы из состояний блока покрытия $B_{\varphi,j}$ (см. (17) и (18)). Например, если в приведенной выше цепочке переходов имеет место переход $B_\varphi^i \rightarrow B_\varphi^{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$, то блок B_φ^i здесь может рассматриваться в качестве блока $B_{\varphi,j}$, а блок B_φ^{i+1} – в качестве блока $B_{\varphi,t}$. Следовательно, новый вход u_* полностью определяется желаемым следующим блоком покрытия φ в цепочке переходов.

Рассмотрим теперь правило формирования отображения g . Это правило базируется на анализе функции переходов наблюдателя δ_0 . Проблема здесь заключается в том, что для одной и той же пары сочетаний выхода y ДСС и состояния наблюдателя x_0^i , которому соответствует блок B_φ^i покрытия φ , могут существовать несколько входов, обеспечивающих требуемый переход ДСС в состояние $x_* \in X$. Для устранения возникающей неоднозначности предлагается осуществлять выбор такого входа, который обеспечивает наибольшую степень уверенности в переходе системы в заданное состояние x_* в соответствии с критерием

$$(19) \quad J = \max_u \mu_{B_\varphi^{i+1}}(x_*).$$

Пример 5. Вернемся к ДСС с дефектом f_1 из примеров 3 и 4. Пусть задача терминального управления состоит в последовательном переводе этой системы из начального состояния $x(0) = x_1 \in B_{\varphi,1}$ в конечное состояние $x^r = x_3$

так, чтобы была реализована цепочка переходов $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$. Поставим в соответствие этой цепочке последовательность блоков покрытия φ . Так как $x_2 \in B_{\varphi,2}$, используя таблицу как основу для формирования отображения g , можно убедиться, что единственный вариант допустимого перехода обеспечивается входом ДСС u_1 . Однако если при этом формируется выход u_3 , то переход осуществлен в состояние x_3 , а не в состояние x_2 . Это значит, что первоначально заданная траектория (цепочка переходов ДСС) нарушается и требуется переход к другой допустимой траектории.

Если сформирован другой выход ДСС (не u_3), то можно гарантировать, что переход действительно осуществлен в состояние x_2 . При этом, как следует из таблицы, вход u_2 обеспечит следующий переход в блок $B_{\varphi,3}$, содержащий состояние x_3 . Формирование выхода u_3 в этом случае подтвердит успешность перехода.

Проиллюстрируем работу оптимизационного подхода на основе критерия (19). Пусть теперь $x_3 \in B_{\varphi,2}$, выход ДСС u_3 и при реализации альтернативной траектории $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_3$ с наибольшей уверенностью требуется сохранить это же состояние ($x_* = x_3$). Пусть теперь $x_3 \in B_{\varphi,2}$, выход ДСС u_3 и при реализации альтернативной траектории $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_3$ с наибольшей уверенностью требуется сохранить это же состояние ($x_* = x_3$). Из таблицы следует, что сохранение состояния возможно при входах u_2 или u_3 . После успешного перехода будет иметь место соответственно $x_3 \in B_{\varphi,2}$ или $x_3 \in B_{\varphi,4}$. Однако в последнем случае значение критерия $J = \mu_{B_{\varphi,4}}(x_3) = 0,9$ больше, чем в первом $J = \mu_{B_{\varphi,2}}(x_3) = 0,6$. Поэтому выбор u_3 является предпочтительным.

7. Иллюстративный пример

Рассмотрим процесс управления изменениями ИТ-системы ([17], табл. 1). Этот процесс является одним из важнейших для ИТ-систем: он отвечает за управление жизненным циклом всех изменений и способствует реализации полезных изменений с минимальным прерыванием предоставления ИТ-услуг. Субъектами процесса являются:

- 1) инициатор – представитель департамента ИТ, осуществляющий первичную обработку, назначение и контроль над ходом выполнения изменений;
- 2) исполнитель – инженер, производящий изменения в элементах конфигурации или координирующий работу подрядчика по этим изменениям;
- 3) консультативный комитет по изменениям (КИ) – консультативный орган, регулярно собирающийся для оценки и планирования изменений;
- 4) менеджер процесса – представитель департамента ИТ, осуществляющий контроль процесса управления изменениями и формирующий предложения по его улучшению.

В [14] введена модель процесса в виде нечеткого конечного автомата и предложено решение задачи диагностирования (мониторинга) этого процесса. Опуская подробное описание самой модели, приведем перечень ис-

пользуемых переменных. В качестве входов модели рассматриваются следующие внешние события: u_1 – завершение формирования плана работ; u_2 – утверждение плана КИ; u_3 – передача неутвержденного плана КИ на доработку; u_4 – выполнение работ исполнителем; u_5 – проверка менеджером процесса выполнения работ; u_6 – закрытие работ и занесение внесенных изменений в библиотеку состояний ИТ-системы. Состояния модели соответствуют следующим этапам регламента: x_1 – формирование задания и плана его реализации; x_2 – согласование задания и плана работ КИ; x_3 – согласование задания и плана работ менеджером процесса; x_4 – выполнение работ исполнителем; x_5 – проверка менеджером процесса выполненных работ; x_6 – работы завершены. В качестве выходов используется доступная информация об этапах выполнения регламента. Модель допускает не критичные отклонения действия субъектов процесса от исходного (эталонного) регламента. Рассматривается ошибка инициатора $f_1 : (x_2 \rightarrow x_3)_{x_1, u_1}$. Нечеткое покрытие φ задается функциями принадлежности $\mu_{B_\varphi^0} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_\varphi^1} = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_\varphi^2} = (0,1 \ 0,1 \ 0 \ 0,8 \ 0 \ 0)$, $\mu_{B_\varphi^3} = (0,2 \ 0,1 \ 0 \ 0 \ 0,7 \ 0)$, $\mu_{B_\varphi^4} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$. Напомним, что блокам покрытия соответствуют состояния наблюдателя $x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4$.

Эталонная траектория движения имеет вид $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6$. Этой траектории соответствует последовательность переходов между блоками покрытия φ : $B_\varphi^0 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^2 \rightarrow B_\varphi^3 \rightarrow B_\varphi^4$, инициируемая последовательностью входов u_1, u_2, u_4, u_5, u_6 и приводящая к формированию последовательности выходов $y_1, y_2, y_3, y_4, y_2, y_5$ (см. [14], табл. 4).

Допустимой также является траектория $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6$, обусловливаемая передачей менеджером задания и плана работ для повторного согласования в КИ. Ей соответствует последовательность переходов между блоками покрытия B_φ : $B_\varphi^0 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^2 \rightarrow B_\varphi^3 \rightarrow B_\varphi^4$, инициируемая последовательностью входов $u_1, u_2, u_4, u_2, u_4, u_5, u_6$ и приводящая к формированию последовательности выходов $y_1, y_2, y_3, y_2, y_3, y_4, y_2, y_5$ (см. [14], табл. 5).

Недопустимой является траектория $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6$, являющаяся следствием ошибки инициатора процесса. Ей соответствует последовательность переходов между блоками покрытия φ : $B_\varphi^0 \rightarrow B_\varphi^1 \rightarrow B_\varphi^2 \rightarrow B_\varphi^3 \rightarrow B_\varphi^4$, инициируемая последовательностью входов u_1, u_2, u_4, u_5 и приводящая к формированию последовательности выходов y_1, y_3, y_4, y_2, y_5 (см. [14], табл. 6). В случае обнаружения этой ошибки предлагается осуществить переход к эталонной траектории, начиная с состояния $x_2, x_2 \in B_\varphi^1$, используя вход u_4 .

Алгоритм формирования в реальном времени нового входа u_* и отображения g , обеспечивающих аккомодацию к ошибке инициатора процесса, можно получить, основываясь на положениях настоящей статьи. Он не приводится в силу его простоты и ограниченного объема статьи.

8. Заключение

В настоящей статье в рамках решения общей задачи аккомодации ДСС к дефектам, получены следующие результаты.

1. Ранее предложенный авторами математический аппарат парной алгебры покрытий [17] распространен на случай задания блоков покрытий нечеткими множествами. Разработана парная алгебра нечетких покрытий. Необходимые вычисления операций и оператора алгебры могут быть поддержаны существующими пакетами прикладных программ, например системой MatLab.

2. Введено понятие наблюдателя в приложении к НЧКА. Новые математические конструкции парной алгебры нечетких покрытий использованы для разработки алгоритма синтеза наблюдателя НЧКА (алгоритм 4).

3. Предложен оптимизационный подход для нахождения нового входа u_* , отображения g и входа u ДСС, позволяющий обеспечить высокую степень реализуемости формируемого закона отказоустойчивого управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.* Diagnosis and Fault Tolerant Control. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
2. *Edwards C., Spurgeon S.K., Patton R.J.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 541–553.
3. *Feng W., Li M., Zhang W., et al.* Sliding Mode Fault-tolerant Control Based on Fast Convergence Law for Faults of PMSM // *Chinese Journal of Electrical Engineering* 2024. V. 10. No. 3. P. 147–157.
4. *Шумский А.Е., Журабок А.Н.* Аккомодация нелинейных динамических систем к дефектам: метод полной развязки // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2009. № 2. С. 1–9.
5. *Журабок А.Н., Котта Ю., Шумский А.Е.* Аккомодация к дефектам в дискретных динамических системах // *АиТ*. 2014. № 6. С. 14–29.
6. *Wonham W.M., Kai Cai, Rudle K.* Supervisory control of discrete-event systems: a brief history 1980-2015 // *Proc. of 20th IFAC Congress, Elsevier Publ.* 2017. P. 1827–1833.
7. *Cassandras Ch., Lafortune S.* Introduction to discrete event systems. Second edition. N.Y.: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 770 p.
8. *Zaytoon J., Lafortune S.* Overview of fault diagnosis methods for discrete event systems // *Annual Reviews in Control*. 2013. V. 37. P. 308–320.
9. *Шумский А.Е., Журабок А.Н.* Метод аккомодации к дефектам в конечных автоматах // *АиТ*. 2010. № 5. С. 122–132.
10. *Hartmanis J., Stearns R.* The algebraic structure theory of sequential machines. N.Y.: Prentice-Hall Inc., 1966. 211 p.
11. *Zadeh L.A., Fu K.S., Tanaka K., Shimura M.* Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, N.Y.: Academic Press, 1975.
12. *Wee W.G., Fu K.S.* A formulation of fuzzy automata and its applications as a model of learning systems // *IEEE Trans. Syst. Science and Cybernetics*. 1969. P. 215–223.

13. *Ульзутуев И.Е., Максимов А.А.* О свойствах решеток подавтоматов нечетких полуавтоматов и их детерминизаторов // Вестник СГТУ. 2015. № 2. С. 117–126.
14. *Шумский А.Е., Жиравок А.Н.* Метод функционального диагностирования дискретно-событийных систем на основе модели нечеткого конечного автомата // Проблемы управления. 2025. № 2. С. 62–72.
15. *Борисов В.В., Круглов В.В., Федюлов А.С.* Нечеткие модели и сети. 2-е издание. М.: Горячая линия – Телеком, 2012. 283 с.
16. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 320 с.
17. *Жиравок А.Н., Калинина Н.А., Шумский А.Е.* Метод функционального диагностирования недетерминированных конечных автоматов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 4. С. 62–72.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.И. Сельвесюком.

Поступила в редакцию 17.07.2025

После доработки 12.01.2026

Принята к публикации 23.01.2026